# I.

## Lichtstärke.

**Aufg. 1.** In der Entfernung a von einer Ebene befindet sich ein leuchtender Punkt L. Welche Punkte P der Ebene werden von den Lichtstrahlen $n\sqrt{n} = 3\sqrt{3}$ mal schwächer erleuchtet als der Fusspunkt des von L auf die Ebene gefällten Lotes? Wie gross ist der Körper, welcher von den Strahlen LP umhüllt wird?

**Aufl.** Ist der Winkel zwischen den Strahlen LP und dem von L auf die Ebene gefällten Lote $= \varphi$, so ist:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Die Lichtstrahlen bilden daher den Mantel eines Kegels, bei welchem:

$$\text{der Inhalt} = \frac{\pi}{3} a^3 (n-1) = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

$$\text{die Mantelfl.} = a^2 \pi \sqrt{n(n-1)} = a^2 \pi \sqrt{6}.$$

---

**Aufg. 2.** Eine Lichtquelle L befindet sich im Mittelpunkte der Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel $2\alpha = 120^0$ hat. Welche Punkte P des Kegelmantels werden am stärksten erleuchtet? Wie gross ist der Raum, welcher von den Lichtstrahlen LP und dem Kegelmantel eingeschlossen wird?

**Aufl.** Am stärksten werden offenbar die Fusspunkte der von L auf den Mantel gefällten Lote erleuchtet. Ist demnach r der Radius der Grundfläche des Kegels, so begrenzen die Lichtstrahlen LP und der Kegelmantel nach der Spitze des Kegels zu einen Körper, dessen

$$\text{Inh.} = \frac{\pi}{3} r^3 \cos^4 \alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{r^3 \pi}{48\sqrt{3}}.$$

$$\text{Oberfl.} = r^2 \pi \sqrt{2}. \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos(\alpha - 45^0)$$

$$= \frac{r^2 \pi (1 + \sqrt{3})}{8\sqrt{3}}.$$

---

**Aufg. 3.** Im Mittelpunkte der Endfläche eines Kreiscylinders vom Radius r steht eine Lichtquelle L. Welche Punkte P der Mantelfläche des Cylinders werden von den Lichtstrahlen $n\sqrt{n} = 2\sqrt{2}$ mal schwächer erleuchtet als die Peripheriepunkte der Cylinderbasis? Wie gross ist der Raum, welcher von der Endfläche des Cylinders, von den Lichtstrahlen LP und dem Cylindermantel begrenzt wird?

**Aufl.** Bilden die Lichtstrahlen LP mit der Cylinderachse den Winkel $\varphi$, so ist:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und es ist bei dem von den Strahlen LP begrenzten Cylinderteile:

$$\text{der Inhalt} = \frac{2}{3} r^3 \pi \sqrt{n-1} = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

$$\text{die Oberfl.} = r^2 \pi \left(1 + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}\right) = r^2 \pi \left(3 + \sqrt{2}\right).$$

---

**Aufg. 4.** In dem einen Endpunkte des Durchmessers einer Hohlkugel vom Radius r befindet sich eine Lichtquelle L. Welche Punkte P der Oberfläche der Kugel werden $n = \sqrt{2}$ mal so stark erleuchtet als der der Lichtquelle L diametral gegenüberliegende Punkt der Kugeloberfläche? In welche Teile wird die Kugel von der Gesamtheit der Strahlen LP zerlegt?

**Aufl.** Bilden die Strahlen mit dem durch L gehenden Durchmesser den Winkel $\varphi$, so ist:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daher ist bei dem kleineren durch die Strahlen LP von der Kugel abgegrenzten Teile

$$\text{der Inh.} = \frac{1}{3} r^3 \pi \quad \text{und die Oberfl.} = 2 r^2 \pi \left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\cos\varphi = \frac{1}{n}$$

$$\text{Inh.} = \frac{4 r^3 \pi}{3 . n^4} \qquad \text{Oberfl.} = \frac{4 r^2 \pi}{n^2} \left\{ n + \sqrt{n^2 - 1} \right\}.$$

---

**Aufg. 5.** In den Endpunkten des einen Durchmessers einer Hohlkugel vom Radius r sind zwei Lichtquellen L und M aufgestellt, deren Leuchtkräfte bezüglich der Leuchtkraft von $\lambda$ und $\lambda n = \lambda\sqrt{2}$ Normalkerzen gleichkommen. Welche Stellen P der Kugeloberfläche werden von den beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Welchen Raum umhüllen die Strahlen LP und MP?

**Aufl.** Bilden die Lichtstrahlen MP der stärkeren Lichtquelle M mit LM den Winkel $\varphi$, so bilden die Strahlen LP mit LM den Winkel $(90^0 - \varphi)$, und es ist:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}.$$

Die Lichtstrahlen LP und MP begrenzen also einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{16}{27} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{4\pi r^2 \sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}.$$

Anm. a. Nimmt man: $n = \sqrt{3}$, so ist:

$$\text{der Inh.} = \frac{1}{2} r^2 \pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi \sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

b. Ist ferner: $n = 2\sqrt{2}$, so ist:

$$\text{der Inh.} = \frac{64}{243} r^3 \pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{8}{27} \cdot r^2 \pi \sqrt{2}\left(1 + 2\sqrt{2}\right).$$

c. Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergiebt:

$$\text{der Inh.} = \frac{4}{3} r^3 \pi . \frac{2n^2}{\left(n^2+1\right)^2}.$$

$$\text{die Oberfläche} = 4r^2 \pi . \frac{n(n+1)}{\left(n^2+1\right)^{3/2}}.$$

---

**Aufg. 6.** Auf der Axe eines Kreiscylinders vom Radius r befinden sich im gegenseitigen Abstande r von einander zwei Lichtquellen, deren Leuchtkräfte $\lambda$ und $\mu = 2\lambda\sqrt{2}$ Normalkerzen betragen. Welche Punkte P des Cylindermantels werden von den beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Wie gross ist der Raum, welcher von den nach den Punkten P gehenden Strahlen umhüllt wird?

**Aufl.** Bildet die Verbindungslinie der beiden Lichtquellen mit den Strahlen des schwächeren Lichts den Winkel $\varphi$ und mit denen des stärkeren Lichts den Winkel $\psi$, so ist:

$$1)\ \sin\varphi = \sqrt{2}.\ \sin\psi.$$
$$2)\ \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi = 1.$$

Nach Aussonderung von $\varphi$ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$1 - \sin^2 2\psi = 4.\left(1 - \sin 2\psi\right)^2.$$

Daraus folgt:

$$\text{I)}\ \sin 2\psi = 1; \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\varphi = 1.$$

$$\text{II)}\ \sin 2\psi = \frac{3}{5}; \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

In beiden Fällen ist der Inhalt des von den Lichtstrahlen umhüllten Raumes:

$$= \frac{r^3\pi}{3};$$

dagegen ist die Oberfläche dieses Raumes im ersteren Falle $= r^2 \pi\ (1 + \sqrt{2})$

und im anderen Falle $= r^2\pi.\ \sqrt{5}\ (1 + \sqrt{2})$.

---

**Aufg. 7.** Die Leuchtkräfte zweier Lichtquellen L und M verhalten sich zu einander wie 3 zu $2\sqrt{2}$. Senkrecht zu der Verbindungslinie LM derselben ist in einem Abstande a von der schwächeren Lichtquelle M und einem Abstande $a\sqrt{3}$ von der stärkeren Lichtquelle L ein Schirm aufgestellt. Welche Punkte P des Schirmes werden von beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Welcher Raum wird von der Gesamtheit der Strahlen LP und MP umhüllt?

**Aufl.** Sind die Winkel, welche LM mit LP und MP bildet, bezüglich $\psi$ und $\varphi$, so ist:

$$\cos\psi = \sqrt{2}.\ \cos\varphi$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{3}.\ \operatorname{tang}\psi.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varphi = 60^0. \qquad \psi = 45^0.$$

Der von den Strahlen LP und MP umhüllte Raum ist demnach $= a^2 \pi\ (\sqrt{3} - 1)$

und seine Oberfläche ist $= \dfrac{a^2\pi\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

---

**Aufg. 8.** In einer Entfernung a von einem Schirme befindet sich eine Lichtquelle L, deren Leuchtkraft derjenigen von $\lambda$ Normalkerzen gleichkommt. Auf der Verlängerung des von dieser Lichtquelle auf den Schirm gefällten Lotes befindet sich in einer Entfernung 3a vom Schirme eine zweite Lichtquelle M, deren Leuchtkraft $\lambda\sqrt{3}$ Normalkerzen beträgt. Welche Stellen P des Schirmes werden von den Lichtquellen L und M gleich stark erleuchtet? Welcher Raum wird von der Gesamtheit der nach P gehenden Lichtstrahlen eingeschlossen?

**Aufl.** Bildet die Linie LM mit den Strahlen LP den Winkel $\varphi$ und mit den Strahlen MP den Winkel $\psi$, so ist:

$$\cos\psi = \sqrt{3}.\ \cos\varphi.$$
$$\operatorname{tang}\varphi = 3.\ \operatorname{tang}\psi.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\sin\psi = \frac{1}{2}. \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\psi = 30^0 \qquad \varphi = 60^0.$$

Die Lichtstrahlen LP und MP umschliessen daher einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = 4a^3\pi.$$
$$\text{Oberfl.} = 2a^2\pi\sqrt{3}.\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

---

## II.

## Spiegelung des Lichtes.

**Aufg. 9.** Im Mittelpunkte der Basis eines geraden Hohlkegels, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel $a = 30^0$ hat, befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen durchschneiden nach der Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig? Wie gross ist der von diesen Strahlen eingeschlossene Raum?

**Aufl.** Die Strahlen, welche nach der Spiegelung an dem Mantel des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig treffen, umschliessen einen geraden Kegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3\pi}{8}. \qquad \text{Oberfläche} = \frac{r^2\pi\sqrt{3}}{2.(\sqrt{3} - 1)^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergiebt:

$$\text{Inhalt} = \frac{\pi}{6}r^3\sin 2\alpha\cos\alpha. \qquad \text{Oberfl.} = 2r^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

---

**Aufg. 10.** Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r ist durch eine Kugel K vom Radius $\frac{r}{2}$, welche um den Mittelpunkt M der Kegelbasis beschrieben ist, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Kegelteil begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels wieder zu M zurückkehren?