Lam = Säule

Die Behandlung der geraden regelmässig vierseitigen Säule im Anschauungsunterricht.

Ein Beitrag

zur Klärung des vorbereitenden geometrischen Unterrichts in Quinta

von

Oberlehrer Prof. Dr. August Reum.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

BARMEN 1890.

BUCHDRUCKEREI VON WILH. WANDT.

9ba 13 464

46.156

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Seitdem die Lehrpläne für die höheren Schulen vom 31. März 1882 in der Quinta eine wöchentliche Lehrstunde für »Vorbereitenden geometrischen Unterricht« angesetzt haben, ist kaum ein Schuljahr zu Ende gegangen, welches nicht eine oder mehrere Arbeiten gezeitigt hätte, in denen der Lehrstoff dieses Unterrichts in Form einer Anleitung oder einer Aufgabensammlung behandelt wird. So gross bis heute die Zahl dieser Arbeiten ist, so gross ist auch ihre Verschiedenheit, ja manche derselben sind so grundverschieden von einander nicht nur nach Anlage und Inhalt, nein auch in ihren Zielen, dass, wer dieselben unbefangen auf ihren Inhalt prüft, ohne vom Titelblatt oder dem angefügten Vorwort Kenntnis genommen zu haben, schwerlich auf den Gedanken kommen dürfte, dieselben seien geschrieben, um demselben Unterrichtsbetrieb zu dienen.*) Unverkennbar ist eine solche Verschiedenheit ein Beweis dafür, dass die Ansichten über diesen Unterrichtszweig noch nicht ausreichend geklärt sind.

Bei aller Verschiedenheit indess zeigen die Arbeiten eine gewisse Übereinstimmung in dem leitenden Grundgedanken. Das Zeichnen von Figuren mit Lineal und Zirkel machen mehr oder weniger alle zum hervorragendsten, viele zum ausschliesslichen Gegenstande der geometrischen Vorbereitung, ja bei mancher kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, als ob in der Handhabung des Zirkels und Lineals der Zweck des Unterrichts gefunden würde. Dies geschieht unseres Erachtens zu unrecht, zum mindesten ist es einseitig und kann deshalb unmöglich der Absicht der Lehrpläne entsprechen. Wohl heisst es in den Erläuterungen zu dem Lehrplan der Gymnasien: »Die für Quinta eingetretene Erhöhung der Anzahl der Lehrstunden ermöglicht es, eine wöchentliche Lehrstunde dem Zeichnen von Figuren mit Lineal und Zirkel zu widmen und durch diese methodische Ausbildung der Anschauung den davon ausdrücklich zu unterscheidenden geometrischen Unterricht vorzubereiten.« Sofern dieser Satz jedoch eine Erläuterung für den »Vorbereitenden geometrischen Unterricht« ist, darf aus demselben nicht herausgelesen werden, dass die Unterrichtsstunde ausschliesslich dem Zeichnen von Figuren zu

*) Es genüge drei solche Arbeiten namhaft zu machen:

1. Der erste Unterricht in der Geometrie. Für die Quinten aller höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. Karl Breitsprecher, (Breslau, Ferd. Hirt 1885).
2. Methodisch geordnete Aufgabensammlung für den geometrisch propädeutischen Unterricht in der Quinta höherer Lehranstalten von E. zur Nieden, (Bonn, Verlag von E. Strauss 1885, 2. Auflage).
3. Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie von Rector Dr. Josef Diekmann, (Ferdinand Hirt, Breslau 1886) I. Teil, Pensum für Quinta und für das erste Tertial in Quarta.

widmen ist, sondern nur insofern, als das Zeichnen geeignet ist zur Ausbildung der Anschauung beizutragen. Wenn es zweifellos ist, dass die Beschäftigung mit geometrischen Figuren die Anschauung unterstützen und somit zur Ausbildung derselben beitragen kann, so unterliegt es ebenso wenig einem Zweifel, dass der Beschäftigung mit geometrischen Figuren, die Gewinnung geometrischer Vorstellungen und Begriffe voraus zu gehen hat. Diese Gewinnung geometrischer Vorstellungen und Begriffe hat mit dem Zeichnen von Figuren nichts zu thun, sie geschieht durch Apperzeption und Abstraction; erst durch Verbindung der Vorstellungen gelangt man zu den Figuren. Sie kann dem jugendlichen Schüler nur vermittelt werden durch einen erläuternden Anschauungsunterricht, welcher dem zeichnenden von Fall zu Fall vorauszugehen hat.

Nur weil diese Seite der geometrischen Vorbereitung in den dem Verfasser bekannt gewordenen Anleitungen sehr wenig, ja in vielen gar nicht zur Geltung kommt, trotzdem sie doch die Grundlage des geometrischen Unterrichts ist, unternimmt er es in dieser kleinen Arbeit zu zeigen, wie der Schüler zur Gewinnung geometrischer Vorstellungen und Begriffe, zugleich aber auch geometrischer Wahrheiten, im Anschauungsunterricht geführt werden kann. Er wählt zur Behandlung die gerade, regelmässig vierseitige Säule und beschränkt dieselbe auf eine einzige bestimmte Stellung. Dieselbe soll nur als Beispiel dienen, um zu zeigen, welche Fülle geometrischer Beziehungen durch Betrachtung einfacher Körper gewonnen werden kann.

So wenig neu die Anschauungen des Verfassers über vorbereitenden geometrischen Unterricht sind, so zeitgemäss erscheint ihm heute der Hinweis auf bewährtes altes. Bereits im Jahr 1868 hat er an der Bender'schen Lehr- und Erziehungsanstalt zu Weinheim in Baden einen ächten vorbereitenden geometrischen Unterricht kennen gelernt, welcher zweckentsprechend den erläuternden Unterricht mit dem zeichnenden verband. Dr. Finger, der bekannte Verfasser der Heimatskunde und Altmeister des Anschauungsunterrichts, hatte denselben Ende der 30er Jahre unter dem Namen »Geometrische Formenlehre« dort für die Altersstufen von 8—10 Jahren eingerichtet und in dem Programm der Anstalt von 1839 seine Ansichten darüber mitgeteilt. Was dort ausführlich behandelt ist, findet sich in wenigen gedrängten Sätzen ausgesprochen im: »Grundriss der Pädagogik von Hermann Kern, 2. Aufl., Berlin Weidmannsche Buchhandlung 1878«. Sofern dieselben einen Beleg für die Richtigkeit der Anschauungen des Verfassers über den vorbereitenden geometrischen Unterricht bilden, mögen dieselben hier Platz finden. Im § 39 Seite 102 heisst es: »Die Klagen, dass der mathematische Unterricht unter den Schülern so wenige Talente vorfinde, werden zum Teil dann verstummen, wenn man im voraus dafür sorgt, dass die Mathematik Eingang in die Köpfe der Schüler gewinne, d. h. wenn auch auf diesem Felde der erläuternde Unterricht dem erweiternden vorarbeitet. Man wird daher in der Geometrie nicht damit beginnen, dass man von Figuren an sich spricht, sondern die Figuren an den Stubengeräten, im Schulhofe, im Felde, am Himmel, auch an dem aufsuchen, was, wie Pflanzen, Gestein, Landkarten, Körper und Krystallmodelle, dem Kinde im Unterricht zur Anschauung gebracht worden ist; man wird diese Figuren nicht nur der Gestalt nach beschreiben und vergleichen, sondern auch ihrer Grösse nach abschätzen und ausmessen lassen; man wird Länge und Richtung von den die Figuren begrenzenden Linien, von Strassen und Wegen, aber auch von gedachten Verbindungslinien in der Wirklichkeit gegebener Punkte bestimmen lassen; man wird mit dem Anschauen und Be-

sprechen das Zeichnen verknüpfen und, indem man den entwickelnden Unterricht mit dem erläuternden unterstützt, den Schüler in den Stand setzen, die Linien und Figuren miteinander in Verbindung zu bringen und dadurch auf rein empirischem Wege zur Erkenntnis einfacher geometrischer Sätze zu kommen; mit einem Worte, man wird der eigentlichen Geometrie einen geometrischen Anschauungsunterricht (§ 42) vorausschicken. Durch denselben werden nicht nur apperzipierende Vorstellungen für das später zu Lehrende, sondern vor allem auch der Vorteil gewonnen, dass der Schüler eine auf Induction gegründete Überzeugung von der Allgemeingültigkeit der geometrischen Sätze erhält und darum die Begründung ihrer Notwendigkeit erwartet«

und weiter im § 42 auf Seite 108:

»Empirisches Interesse ruft der entwickelnde Unterricht hervor, wenn er auf die Mannigfaltigkeit möglicher Verbindungen achten lehrt. Zu diesem Behufe müssen früh schon in jedem Unterrichtsgebiete Übungen im Bilden der Complexionen aus gegebenen Elementen veranstaltet und zugleich die Regeln, nach denen dabei zu verfahren ist, gesucht werden u. ff.«

I. Behandlung des Körpers.

Die gerade regelmässig vierseitige Säule (aus Pappe oder Holz) von 50—60 cm Höhe, mit einer Grundkante von 16—20 cm Länge, in dunklem Anstrich, so dafs Kreidestriche auf der Oberfläche leicht sichtbar werden, wird möglichst frei so aufgestellt, dafs sie von allen Schülern der Klasse gesehen werden und ein vortretender Schüler mit einem 75 cm langen Stab leicht nach allen Teilen derselben hinzeigen kann.

Die Besprechung beginnt mit der Betrachtung desjenigen, was den Körper umgiebt oder begrenzt d. h. seiner Oberfläche. Man sieht, dass dieselbe aus scharf von einander geschiedenen Stücken besteht und dass jedes dieser Stücke eine ebene Fläche ist, oder kurzweg eine Ebene. Der Begriff der Ebene wird erläutert durch die Unterhaltung darüber, wie der Maurer und Schreiner, welcher eine ebene Fläche herstellen will, die Prüfung seiner Arbeit bewerkstelligt. Es werden grofse Ebenen namhaft gemacht, der Wasserspiegel etc., auf die Fassung der Definition wird selbstredend verzichtet.

Die Ebene, auf welcher die Säule steht, nennen wir seine Grundfläche. Durch Umstellung auf die parallele Fläche wird diese zur Grundfläche. Wir unterscheiden also an der Säule zwei Grundflächen — und in einer festen Stellung naturgemäss eine untere und eine obere, — und die 4 anderen Flächen, welche Seitenflächen genannt werden.

Bringen wir die Säule in diejenige feste Stellung, bei der eine Seitenfläche den Schülern zugewandt ist, so unterscheiden die Schüler die Seitenflächen in eine vordere, hintere, rechte und linke. — (Alle Bezeichnungen gelten vom Standpunkt der Schüler in den Bänken aus, auch der zeigende Schüler muss sich in Gedanken dahin versetzen.)

Wir lenken die Aufmerksamkeit der Schüler darauf hin, dass gewisse Flächen vollkommen getrennt von einander liegen, d. h. nichts mit einander gemein haben, während dies bei andern nicht der Fall ist, und es nennt der Schüler alsbald die beiden Grundflächen, die vordere und hintere Seitenfläche, sowie die rechte und linke. Weisen wir darauf hin, dass diese Ebenen auch getrennt bleiben d. h. keinen Punkt mit einander gemein haben, wenn man sie nach allen Seiten hin erweitert, soweit es nur denkbar ist, so ist damit der Begriff paralleler

Ebenen gewonnen und die Bezeichnung parallel (||) wird in den Unterricht eingeführt. Es wird betont, dass es an der Säule 3 Paar paralleler Ebenen giebt.

Die Aufforderung zwei Ebenen zu nennen, welche nicht parallel sind, wird leicht und vielfach beantwortet, auch der Name »sich einander schneidende Ebenen« vom Schüler selbst gefunden. Die Frage: Was denn zwei sich einander schneidende Grenzflächen gemeinsam haben führt zum Begriff der Linie, hier der graden Linie. Die grade Linie wird also an dieser Stelle erläutert als dasjenige, was zwei sich schneidende Ebenen gemeinsam haben und es wird zugleich die Einsicht gewonnen, dass Ebenen, welche nicht || sind, sich immer in graden Linien schneiden. An unserer Säule nennen wir diese Graden: Kanten.

Zeigt die Anschauung, dass 12 solcher Kanten vorhanden sind, so überzeugt die Aufzählung der 12 Paare sich einander schneidender Ebenen, dass es 12 Kanten geben muss. Es kann aber auch darauf hingewiesen werden, dass eine Ebene immer 4 andere Ebenen schneidet, also 4 Kanten erzeugt. Sechs Ebenen erzeugen also $6 . 4 = 24$ Kanten. Es ist aber die Kante, welche die 1. Ebene mit der 2. erzeugt, dieselbe, welche die 2. Ebene mit der 1. erzeugt, d. h. es fallen immer 2 dieser 24 Kanten in eine zusammen, es giebt also nur $\frac{24}{2} = 12$.

Jede Grenzfläche ist von 4 solchen Kanten eingeschlossen oder begrenzt. Wir nennen die Kanten, welche die Grundflächen einschliessen, Grundkanten und unterscheiden zunächst in Rücksicht auf die Grundflächen a) vier obere und vier untere Grundkanten. Jede Grundkante gehört aber ausser einer Grundfläche auch stets einer Seitenfläche an und je nachdem sie in unserer Stellung der vorderen, hinteren, rechten, linken Seitenfläche angehört, erhält sie den gleichlautenden Namen, und unterscheiden wir b) 2 vordere, 2 hintere, 2 rechte, 2 linke Grundkanten. Aus den Unterscheidungen bei a) und b) ergeben sich die Einzelunterscheidungen in eine untere vordere Grundkante, eine obere vordere etc. etc.

Die Kanten, welche nur den Seitenflächen angehören, erhalten den Namen Seitenkanten. Dass 4 vorhanden sind, zeigt die Anschauung. Der Nachweis, dass es 4 geben muss, ist aber auch am Platz. Eine Seitenfläche schneidet immer 2 andere und erzeugt 2 Seitenkanten. (Wörtlich) Die vordere Seitenfläche schneidet die rechte und die linke Seitenfläche und erzeugt etc. etc. Vier Seitenflächen erzeugen mithin 8 Seitenkanten, von denen aber allemal 2 in eine zusammenfallen, so dass es $\frac{8}{2} = 4$ giebt. Der Hinweis, dass zwei derselben der vorderen, zwei der hinteren, zwei der rechten und zwei der linken Seitenfläche angehören, führt zu den Unterscheidungen in 2 vordere, 2 hintere, 2 rechte, 2 linke Seitenkanten und infolge dessen zu der Einzelunterscheidung in eine vordere rechte, eine etc. etc. Seitenkante.

Zur Übung lasse man die Kanten, welche je eine Grenzfläche einschliessen, in bestimmter Anordnung (Rechtsdrehung) namhaft machen.

Lässt man von den vier Kanten, welche eine Ebene einschliessen, diejenigen suchen, welche ganz getrennt liegen d. h. keinen Punkt gemein haben und zeigt durch Anlegen zweier langen Stäbe, dass solche Kanten auch keinen Punkt in der Verlängerung gemein haben, so ergiebt sich daraus der Begriff paralleler Linien.

Man lasse sämtliche Paare paralleler Kanten an den verschiedenen Grenzflächen namhaft machen. Nennt man eine bestimmte Kante und lässt die dazu parallelen Kanten suchen, so ergeben sich 3 und es führt das zur Zusammenfassung der 12 Kanten in 3 Gruppen von je

4 Parallelen, welche man angeben lässt. Weiter findet der befähigte Schüler daraus, dass es zu jeder Kante 3 parallele giebt mit Berücksichtigung des Gegenseitigkeitsverhältnisses die Anzahl der Paare paralleler Kanten $= \frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.

Die nähere Betrachtung der drei Kanten, welche zu einer bestimmten Kante parallel sind, führt zu der Erkenntnis, dass zwei Kanten (Graden), welche einer dritten || sind auch unter sich || sind.

Ist ersichtlich, dass zwei von diesen drei Kanten mit der bestimmten je einer Grenzfläche angehören, während dies bezüglich der dritten nicht der Fall ist, so springt doch in die Augen, dass auch durch diese dritte und die bestimmte Kante eine Ebene gelegt werden kann. Es wird dadurch die Erkenntnis der math. Grundwahrheit gewonnen, dass eine Ebene durch zwei, parallele Grade bestimmt ist.

Wir nennen diese Ebenen, welche durch 2 gegenüberliegende parallele Kanten gelegt werden können, Diagonalebenen, und die graden Linien, in welchen sie die von ihnen geschnittenen Grenzflächen schneiden, Diagonalen. Man lässt sämtliche Diagonalebenen angeben. Ist von den Schülern gefunden, dass es 6 Diagonalebenen giebt, so kann man auch wieder zeigen, dass es 6 geben muss. Eine Gruppe von 4 parallelen Kanten liefert 2 Diagonalebenen. Drei Gruppen liefern also $3 \cdot 2 = 6$.

Man weise auch darauf hin, dass durch jede Diagonalebene die Säule in zwei Stücke geteilt wird, von denen jedes den Raum des andern einnehmen kann. (Congruenz). Die Betrachtung zweier Diagonalen, welche von einer Diagonalebene in den Grenzflächen erzeugt werden, bringt die Wahrheit zum Bewusstsein, dass parallele Ebenen von einer dritten in parallelen Graden geschnitten werden.

Die Frage nach der Lage der beiden Diagonalebenen, welche durch die gegenüberstehenden Seitenkanten bestimmt sind, zu einander, führt zur Schnittlinie derselben, welche wir als Achse bezeichnen.

Die Umdrehung der Säule um diese Achse lässt erkennen, dass dieselbe dabei 4 mal denselben Raum einnimmt. Hiermit leiten wir hin zur Erklärung des rechten Winkels als einer Viertel-Drehung. — (Ein vortretender Schüler, welcher mit ausgestrecktem Arm das Kommando links um! 4 mal ausführt ist gleichfalls Anschauungsmittel). — Es werden Wasserwage und Senkblei zur Anschauung gebracht und ihr Gebrauch erläutert in Anlehnung an die Besprechung von Arbeiten der Handwerker, welche diese Instrumente gebrauchen. Sind hierdurch die Begriffe der wagerechten und senkrechten Lage einer Graden und durch Verbindung die Lage zweier zu einander senkrechten Graden erläutert, so lassen wir einige Paare von Kanten an der Säule nennen, welche auf einander senkrecht stehen.

Die Frage, was je 2 zwei derselben gemeinsam haben, führt zum Begriff des Punktes und wird derselbe hier als das zwei sich einander schneidenden Linien gemeinsame erörtert, (später als das, was drei oder mehr sich einander schneidende Ebenen resp. Flächen gemeinsam haben).

Der Hinweis darauf, dass je zwei sich einander schneidende Kanten einer Ebene (Grenzfläche) angehören führt zur Erkenntnis, dass eine Ebene bestimmt ist durch zwei sich einander schneidende gerade Linien.

Es werden dann die an der Säule vorkommenden rechten Winkel gezeigt und ihre Anzahl = 24 festgestellt.

Macht man eine bestimmte Kante namhaft und lässt alle Kanten suchen, welche damit rechte Winkel bilden, d. h. auf derselben senkrecht stehen, so ergeben sich 4. Es liegt nun nahe dieselben einmal in der Weise in zwei Paare zusammenzufassen, dass jedes Paar einer Grenzfläche angehört, in welcher auch die bestimmte Kante liegt, zum andern in der Weise, dass jedes Paar einer Grenzfläche angehört, in welcher die bestimmte Kante nicht liegt. Im 1. Falle sind die das Paar bildenden Kanten einander || und es gewinnt der Schüler durch Anschauung den Satz, dass zwei Graden, welche auf einer dritten senkrecht stehen, parallel sind. (Umkehrung.) Da hierauf der Gebrauch der Reissschiene beruht, so zeigt man denselben an dieser Stelle.

Im 2. Falle wird ein Paar gebildet aus 2 sich einander schneidenden Kanten, welche eine Ebene bestimmen. Die bestimmte Kante hat mit dieser Ebene einen Punkt gemein, oder schneidet dieselbe. Zieht man in dieser Ebene die durch den gemeinsamen Punkt gehende Diagonale, so ist ersichtlich: einmal, dass die Diagonale und die bestimmte Kante die Diagonalebene bestimmen; zum andern, dass diese Diagonale mit der bestimmten Kante einen rechten Winkel bildet. Der Hinweis, dass dieses letztere auch mit allen übrigen Graden der Fall ist, welche durch den gemeinsamen Punkt in der Ebene gezogen werden können, führt zu dem Begriff des Lotes auf einer Ebene und der Erkenntnis des stereometr. Satzes: Eine Grade, welche auf 2 durch ihren Schnittpunkt mit einer Ebene in dieser gezogenen Graden senkrecht steht, steht auch senkrecht auf jeder dritten Graden, welche durch den Schnittpunkt in der Ebene gezogen werden kann.

Nachdem diese beiden Fälle erörtert sind, schliesst sich die Frage an, ob die 4 zu einer bestimmten Kante senkrechten Kanten nicht auch so zu Paaren zusammengefasst werden können, dass die ein Paar bildenden weder parallele, noch sich einander schneidende Kanten sind. Es ergiebt sich dadurch der Begriff der sich einander kreuzenden Graden.

Die mathematischen Definitionen von parallelen, sich einander schneidenden und kreuzenden Linien werden von den Schülern leicht gefunden.

Man lasse hierauf von verschiedenen Schülern die Paare sich einander schneidender Linien nennen an den verschiedenen Grenzflächen und stelle dadurch fest, dass es 6 . 4 solcher Paare = 24 giebt. Auch die Überlegung empfiehlt sich: eine Kante schneidet immer 4 andere, 12 Kanten schneiden immer 12 . 4 andere. In Folge des Gesetzes der Gegenseitigkeit giebt es jedoch nur $\frac{12 \cdot 4}{2}$ Paare einander sich schneidender Kanten.

Wird dann darauf hingewiesen, dass durch den Schnittpunkt eines jeden dieser Paare eine dritte Kante geht, so wird dadurch der Begriff der dreiseitigen körperlichen Ecke gewonnen. Wir betonen, dass jede Ecke von 3 Flächen (Ebenen) gebildet wird, welche man auch die Seiten der Ecke nennt, der Punkt, welcher den 3 Seiten und auch den 3 Kanten gemeinsam ist, wird Scheitel oder Eckpunkt genannt. Der Begriff des Punktes wird an dieser Stelle erläutert als das gemeinsame dreier (oder mehrerer) Flächen.

Zeigt die Anschauung, dass sich an unserer Säule 8 solcher Ecken befinden, so kann unschwer für den befähigten Schüler auch der logische Nachweis entwickelt werden, dass es nur $\frac{24}{3} = 8$ geben kann.

Wir unterscheiden diese 8 Ecken zunächst in a) 4 obere, 4 untere, 4 rechte, 4 linke, 4 vordere und 4 hintere Ecken. Dieselben werden von einem Schüler gezeigt und durch richtige Fragestellung wird das gemeinsame und unterscheidende hervorgehoben. Sodann unterscheiden wir b) 2 obere vordere, 2 obere hintere. 2 untere vordere, 2 untere hintere Ecken. Endlich gelangen wir zur Einzelunterscheidung in die obere vordere rechte, die obere vordere linke, die obere hintere rechte etc.

Macht man eine bestimmte Ecke als Hauptecke namhaft, so kann man diejenigen 3 Ecken suchen lassen, welche mit derselben eine Kante gemeinsam haben und es wird gefunden, dass es zu jeder Ecke 3 solcher Ecken giebt. Wir nennen dieselben die Nebenecken der ersteren. Der Umstand, dass diese Nebenecken mit der Hauptecke zwei Seiten gemein haben, führt zu der Frage nach denjenigen Ecken, welche mit der Hauptecke nur eine Seite gemein haben. Es werden gleichfalls 3 gefunden und wir nennen sie die seitlichen Gegenecken der Hauptecke. Es liegt dann die Frage nahe, ob es an der Säule auch eine Ecke giebt, welche mit der bestimmten Ecke weder eine Kante noch eine Seite gemeinsam hat. Nachdem dieselbe gefunden ist, bezeichnen wir sie als die räumliche Gegenecke der bestimmten.

Wir lassen zur Übung zu den verschiedenen Ecken die Nebenecken, die seitlichen und räumlichen Gegenecken zeigen und namhaft machen und überzeugen uns, dass es zu jeder Ecke 3 Nebenecken, 3 seitliche und 1 räumliche Gegenecke giebt. Die besondere Betrachtung der 3 Nebenecken oder auch der 3 seitlichen Gegenecken führt zu der Frage, ob man durch die Scheitel derselben eine Ebene legen könne und die Bejahung dieser Frage zu der Erkenntnis, dass eine Ebene durch 3 nicht in einer Graden liegende Punkte bestimmt ist. Lässt man die Schnittlinien dieser Ebene mit Seiten der bestimmten Ecken angeben, so gelangt man wieder zu den Diagonalen der Grenzflächen, welche ein Dreieck begrenzen.

Der Vollständigkeit wegen empfiehlt es sich darauf hinzuweisen, dass die Schnittebene auch bestimmt ist durch die Diagonale, welche die Scheitel zweier Ecken verbindet und den Scheitel der dritten Ecke, also durch eine Grade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt. Fügen wir hier noch die genetische Erklärung einer Linie als Weg eines bewegten Punktes an (Spitze der Kreide beim Zeichnen, Weg der Flintenkugel, welche den Hirsch trifft, fallender Regentropfen etc.), so reiht sich noch eine Fülle von Fragen über die Richtung der von einer Ecke ausgehenden oder nach derselben hinlaufenden Kanten und Diagonalen an.

II. Behandlung des Bildes der Säule.

Wir zeigen der Klasse im physikalischen Lehrzimmer das von der Sonne auf einem Lichtschirm erzeugte Schattenbild eines Drahtmodells der Säule in unserer Stellung und weisen darauf hin, dass die Kanten, welche parallel zum Lichtschirm liegen in der natürlichen Länge die zum Lichtschirm senkrechten Kanten gleichmässig verkürzt erscheinen.

Nach der Betrachtung dieses Bildes fertigen wir vor den Augen der Schüler auf der Wandtafel ein Bild der gegenwärtigen Säule an und zwar eine schräge Parallelprojection, so dass unserer Stellung entsprechend eine Seitenfläche in die Ebene der Tafel zu liegen kommt und die dazu senkrechten Kanten auf ein Drittel ihrer Länge verkürzt und unter einem Winkel von 30 Grad gegen die Horizontale gezeichnet werden.

An die Punkte der Zeichnung werden Buchstaben gesetzt. Zunächst werden bei Gegenwart des Modells, anfangs, während ein vertretender Schüler an diesem die betreffenden Teile zeigt, später ohne dasselbe, die Flächen, Kanten, Ecken, Diagonalen etc. etc. von den Schülern mit den Buchstaben der Zeichnung gelesen, während der Lehrer sich der in I verabredeten Bezeichnung bedient und umgekehrt. Es empfiehlt sich dafür von vornherein eine bestimmte Ordnung festzusetzen, etwa dass Kanten von rechts nach links, von oben nach unten und vorn nach hinten, Figuren der Rechtsdrehung folgend von oben links immer anfangend, etc. körperliche Ecken, Scheitel voran, abgesetzt und die Endpunkte der Kanten schnell aufeinander folgend C — (B D G) gelesen werden.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass alle Schüler das richtige Verständnis des Bildes haben, erörtere man an demselben die in I besprochenen geometrischen Beziehungen und räumlichen Vorstellungen durch folgende Fragen, welche von den Schülern in vollkommenen Sätzen beantwortet werden:

1) Wie heisst die obere vordere Grundkante?
   a) Wie heissen die ihr parallelen Kanten?
      α) Welche Ebene bestimmt jede derselben mit der ersteren?
   b) Wie heissen die sie schneidenden Kanten?
      α) Welche Ebenen bestimmt jede derselben mit der ersteren?
      β) » » bestimmen je 2 derselben mit einander?
   c) Wie heissen die sie kreuzenden Kanten?
2) Wie heisst die vordere obere rechte Ecke?
   a) Wie heissen ihre Seiten, ihre Kanten und wie sind dieselben gerichtet vom Scheitel aus und wie zum Scheitel hinlaufend?
   b) Wie heissen ihre Nebenecken?
      α) Welche Kante hat jede derselben mit der Hauptecke gemein?
   c) Wie heissen ihre seitlichen Gegenecken?
      α) Welche Seiten haben sie mit der Hauptecke gemeinsam?
      β) Wie heissen die Verbindungslinien des Eckpunkts der Hauptecke mit den Eckpunkten der seitlichen Gegenecken?
      γ) Welche Richtung haben dieselben?
   d) Wie heisst die räumliche Gegenecke?
      α) Wie heisst die Verbindungslinie des Eckpunkts derselben mit dem Eckpunkt der Hauptecke?
      β) Welche Richtung hat dieselbe?
   e) Wie heissen die Schnittebenen, welche bestimmt sind:
      α) Durch die Endpunkte der Kanten der Nebenecken?
      β) » » » » seitlichen Gegenecken?
      u. s. w.

III. Messung und Zeichnung.

Die an der Säule befindlichen Längen der Grundkante, Seitenkante, Diagonale der Grund- und Seitenfläche werden in doppelter Weise gemessen, einmal durch Anlegen eines Bandmasses

an den Körper, zum andern durch Abgreifen mit dem Zirkel und Ablesung der Entfernung der Zirkelspitzen auf dem Massstab. Die sich daran anschliessende Zeichnung der Längen an der Wandtafel erfolgt gleichfalls in doppelter Weise. Es folgt dann unter Benutzung der Reissschiene bezügl. des rechtwinkligen Lineals die Zeichnung der Grundfläche, einer Seitenfläche, des Netzes des Körpers, der Schnittfiguren, welche man erhält, wenn man Ebenen legt durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten, oder durch zwei ebensolche Grundkanten, oder durch die Eckpunkte der drei Nebenecken, sowie der seitlichen Gegenecken einer Ecke. Die Einzelzeichnung der Dreiecke, in welche die Grundfläche bezügl. die Seitenfläche durch eine oder beide Diagonalen zerlegt werden, führt zur Betrachtung der Winkel, zu ihrer Messung mit dem Transporteur, einmal durch unmittelbares Anlegen desselben, zum andern unter Gebrauch des Zirkels. Hieran schliesst sich die Zeichnung von Winkeln und daran die Bildung von Figuren durch Verbindung von Linien und Winkeln. Die Zeichnungen werden an der Tafel unter Benutzung des Centimeters als Längeneinheit ausgeführt, im Heft dagegen in Millimetern. Es führt das zur Erläuterung des verjüngten Massstabes.

Der Gesamtbetrieb des vorbereitenden geometrischen Unterrichts erscheint in dieser Darstellung als die Leistung von drei getrennten Arbeiten:

1. Anschauung und Besprechung von einfachen Körpermodellen, wie gerade vier-, drei-, sechsseitige Säulen, eben solche Pyramiden, Walze, Kegel etc. in verschiedenen Stellungen und daraus sich ergebende Gewinnung der geometrischen Grundbegriffe und Vorstellungen, Erkenntnis geometrischer Wahrheiten und Sätze, sowie Beachtung von Mannigfaltigkeiten möglicher Verbindungen geometrischer Gebilde.
2. Übertragung geometrischer räumlicher Vorstellungen auf bildliche Darstellungen und Reproduction der ersteren aus letzteren.
3. Messung von Linien und Winkeln an besprochenen Modellen und Zeichnen der an denselben vorkommenden Grenz- und Schnittfiguren mit Lineal und Zirkel, Zeichnung des Netzes, Anfertigung des Modells.

Im Unterricht selbst ist jedoch die Trennung dieser Einzelarbeiten möglichst zu vermeiden; dieselben haben sich gegenseitig zu unterstützen. Es sind daher denselben Gegenstand betreffende Abschnitte derselben nach Möglichkeit mit einander zu verbinden und in derselben Lehrstunde gemeinsam zu behandeln.

Das an der Behandlung der Modelle Erarbeitete wird dann befestigt und erweitert durch Messungen, welche in der Schulstube und im Freien angestellt werden, sowie durch Anfertigung von Zeichnungen des Hofes und der Strassen, welche die Schule umgeben, in verjüngtem Massstab, des Grundrisses und Aufrisses des Schulgebäudes u. s. w.

Die Anfertigung von Zeichnungen, für welche die Masse der Wirklichkeit entnommen sind, dürften unbedingt den Vorzug verdienen vor der Behandlung von abstracten Aufgaben, welche einer Sammlung entlehnt werden, selbst wenn dieselbe noch so methodisch geordnet sein sollte.