HT008640575

Ueber allgemeine Collineationsachsen und Collineationsscheitel.

In einer kleinen Schrift über Correlation der geometrischen Figuren, welche im Jahre 1801 erschienen ist, hat Carnot, so viel mir bekannt ist, zuerst ein Princip aufgesucht, um die Eigenschaften einer ursprünglichen Figur auf die verwandten Gebilde, welche aus jener durch die Veränderung gewisser Theile derselben in unmerklichen Abstufungen hervorgehen, zu übertragen, und hat dadurch die Geometrie in eine neue Bahn geleitet. Die tiefen Forschungen über die räumlichen Beziehungen, welche diese Richtung in kurzer Zeit hervorgerufen hat, sind bereits zu einem solchen Umfange angewachsen, daß jede künftige Geschichte der mathematischen Wissenschaften ihnen einen eignen Abschnitt zu widmen genöthigt sein wird. Indessen möchte der Historiker, welcher seine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand richtete, einstweilen noch keinen Ruhepunct finden, von wo aus er mit Sicherheit die einzelnen Erscheinungen auf diesem weiten Gebiete zu überschauen und zu ordnen im Stande wäre. Die Abstractionen, zu welchen wir, anfangs von synthetisch gewählten Constructionen und Größenbeziehungen ausgehend, allmälig fortgeschritten sind, werden immer allgemeiner, führen dadurch immer mehr zur Erkenntniß des innern Zusammenhangs bis dahin getrennter Anschauungsweisen und lassen uns unter den möglichen Uebertragungsprincipien diejenigen auffinden, welche die Vortheile der bisherigen theilen oder nach andern Richtungen hin fruchtbar sind. Ich werde es versuchen, in dieser Gelegenheitsschrift die Theorie der Collineationsachsen und Collineationspuncte, wie sie Hr. Magnus zuerst gegeben hat, um dadurch jene besondere Art der Collineation zu charakterisiren, welche durch das analoge Verhältniß der ähnlichen und ähnlichliegenden zu den ähnlichen Figuren bezeichnet ist, zu jener Allgemeinheit zu erheben.

1. Wenn zwei geometrische Gebilde **A** und **B** aus gleichen oder auch verschiedenartigen Elementen zusammengesetzt und so von einander abhängig sind, daß jedem Elemente des einen Gebildes ein oder auch mehre Elemente in dem andern entsprechen, so läßt sich diese Abhängigkeit analytisch unter drei verschiedenen Formen auffassen. Denken wir uns das Element, welches jedem Gebilde zum Grunde liegt, durch eigenthümliche Coordinaten dargestellt, so kommen wir zur Uebertragung der Eigenschaften des einen Gebildes auf das andere, indem wir in allen analytischen Ausdrücken die Coordinaten vertauschen. Jedes dieser Elemente ist dann als ein ursprünglich Gegebenes zu betrachten, wie der Punct, die gerade Linie, der Kreis in den entsprechenden Coordinatensystemen. Dagegen können wir auch das eine Element durch eine Gleichung oder ein System von Gleichungen, welche in ihren Coefficienten die Coordinaten des andern involviren, darstellen und gelangen dadurch nicht nur zu neuen Uebertragungsprincipien, sondern auch zur Untersuchung der Eigenschaften jenes Elementes selbst. Diese beiden Abhängigkeitsformen habe ich in meinen „Uebertragungsprincipien", so weit dieselben bis jetzt erschienen sind, verfolgt. Stellen wir drittens das Element von **A** durch die Coordinaten $xyz\ldots$, das von **B** durch $uvw\ldots$ dar, so ist der allgemeinste Ausdruck ihrer Abhängigkeit von einander in einem System von eben so vielen Gleichungen, als Coordinaten zu jedem Elemente gehören, enthalten. Wir beschränken uns hier auf denjenigen Fall, wo jedes System nur zwei veränderliche Coordinaten hat, und die einen durch algebraische rationale Functionen der andern mit gleichen Nennern gegeben sind; setzen daher

$$x = \frac{U}{W}, \; y = \frac{V}{W}, \qquad (1)$$

indem wir durch **U, V, W** drei beliebige algebraische rationale und ganze Functionen von **u** und **v** bezeichnen.

Ist die Gleichung irgend einer Linie des Gebildes **A** in **xy** gegeben, so erhalten wir aus ihr die Gleichung ihrer entsprechenden Linie in **B**, indem wir für **x** und **y** ihre Werthe aus (1) setzen. Denken wir uns sowohl unter **xy** als **uv** parallele Punctcoordinaten und sind dann **U, V, W** lineare Functionen, so ist (1) der analytische Ausdruck der ebenen Collineation von Möbius, so daß jedem Orte mten Grades in **A** ein Ort desselben Grades in **B** entspricht. Indem wir aber annehmen, unter den drei Functionen **U, V, W** erreiche wenigstens eine den nten Grad, steigt eine Gleichung ersten Grades in **xy** durch Uebertragung in **uv** auf den nten und die allgemeine Gleichung mten Grades auf den mnten. Wir können diese Verwandtschaft als Collineation der nten Ordnung ansehen; sie entspricht auch in ihren Resultaten den Polaren der verschiedenen Ordnungen, welche ich in der allgemeinen Theorie der Polaren und Polarfiguren eingeführt habe. Dabei ist die Bedeutung der beiden Coordinatensysteme **xy** und **uv** durch nichts beschränkt; diese können auf verschiedenartige Elemente und verschiedene Coordinatenfelder bezogen werden, also, wenn ich mir einen anderwärts gewählten Ausdruck auch hier erlaube, digenetisch sein.

2. Dagegen müssen wir unter **xy** und **uv** homogenetische Coordinatensysteme verstehen, wenn **A** und **B** eine Collineationsachse haben sollen; denn diese definiren wir, von dem bisherigen eingeschränkten Begriffe derselben abgehend, allgemein als den geometrischen Ort derjenigen Elemente des einen Gebildes, welche mit ihren entsprechenden in dem andern einerlei sind. Jenachdem wir uns also im Gebiete der Planimetrie des Punktes, der geraden Linie oder des Kreises bewegen, stellen **xy** und **uv** in den folgenden Untersuchungen zugleich einen Punct oder eine gerade Linie oder einen Kreis dar, jedoch nicht in derselben Lage und vorläufig wenigstens auch durch verschiedene Coordinatenconstructionen, also mit verschiedenen Coordinatenlinien und Achsen. Daraus folgt, daß sich die Coordinaten des einen Systems in die des andern transformiren lassen müssen, so daß, wenn wir **u** und **v** accentuiren, um zu bezeichnen, daß sie dem Elemente **xy** als Coordinaten in dem andern Systeme angehören, **xy** und **u'v'** sich auf dasselbe Element beziehen, während **xy** und **uv** zwei Elemente sind, welche sich in den beiden Gebilden **A** und **B** entsprechen. Wir wollen annehmen, **x** und **y** seien mit **u'** und **v'** durch die Transformationsformeln

$$x = \varphi(u', v'), \quad y = \psi(u', v') \qquad (2)$$

verbunden. Hierdurch gehen die Gleichungen (1) in

$$\varphi(u', v') = \frac{U}{W}, \quad \psi(u', v') = \frac{V}{W} \qquad (3)$$

über.

Sollen **xy** und **uv** zusammenfallen, so müssen **u'** und **v'** mit **u** und **v** einerlei werden. Wir erhalten also gemäß (3), wenn wir der Kürze halber $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ durch ihre Charakteristiken bezeichnen, die gemeinschaftlichen Elemente der beiden Gebilde **A** und **B** durch Elimination zwischen den Gleichungen

$$\varphi W - U = 0, \quad \psi W - V = 0.$$

Das System dieser Gleichungen bestimmt eine Gruppe vereinzelt liegender Elemente, so lange $\varphi W - U$ und $\psi W - V$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Setzen wir aber

$$\varphi W - U = RT, \quad \psi W - V = ST, \qquad (4)$$

wo **R, S, T** beliebige Functionen von **u** und **v** sind, **R** und **S** aber keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so zerfallen jene Gleichungen in die eine Gleichung

$$T = 0 \qquad (5)$$

und das System der beiden Gleichungen

$$R = 0, \quad S = 0. \qquad (6)$$

Die erstere bezieht sich auf eine continuirliche Reihe von Elementen, welche den beiden Gebilden **A** und **B** gemeinschaftlich sind, und ist also die Gleichung ihrer Collineationsachse. Diese kann hier also jede beliebige Curve sein. Alle Puncte derselben gehören für Punctcoordinaten beiden Gebilden zugleich an; für Liniencoordinaten wird sie von solchen Tangenten in dem einen Gebilde umhüllt, welche mit ihren entsprechenden geraden Linien des andern Gebildes zusammenfallen, und im System der Kreiscoordinaten ist jeder Elementarkreis an dieselbe ebenfalls beiden Gebilden gemeinschaftlich. Mit der Collineationsachse sind die isolirten Elemente zu vereinigen, welche dem System (6) entsprechen.

Indem wir die Werthe von **U** und **V** aus (4) entnehmen und in (1) einführen, wird

$$x = \varphi - \frac{RT}{W}, \quad y = \psi - \frac{ST}{W}. \qquad (7)$$

In diesen Formeln haben wir also den allgemeinsten Ausdruck der Abhängigkeit zweier collinearer Gebilde, welche eine Collineationsachse besitzen. Wenn wir, was wir von jetzt an immer thun werden, voraussetzen, daß die Coordinatenconstructionen xy und uv von derselben Art seien und sich also nur durch die Lage ihrer Coordinatenlinien unterscheiden; so können wir die letztern durch Verlegung in Uebereinstimmung bringen. Die Gleichungen (7) nehmen in diesem Falle die besondere Form

$$x = u - \frac{RT}{W}, \quad y = v - \frac{ST}{W} \qquad (8)$$

oder

$$x = \frac{uW - RT}{W}, \quad y = \frac{vW - ST}{W} \qquad (9)$$

an und sind noch immer geeignet, die Collineation mit Collineationsachse in völliger Allgemeinheit auszudrücken.

3. Es folgt aus dem Begriffe der Collineationsachse, daß jedes Element derselben, welches einer Linie des Gebildes **A** angehört, zugleich auch an der entsprechenden Linie in **B** liegt. Indem wir diese Bemerkung in unsern drei Coordinatensystemen interpretiren, erhalten wir folgende Sätze:

a. „Wenn zwei collineare Gebilde in Punctcoordinaten eine Collineationsachse haben, so wird diese „von je zwei entsprechenden Linien in denselben Puncten geschnitten."

b. „Wenn zwei collineare Gebilde in Liniencoordinaten eine Collineationsachse haben, so hat diese „mit jeder von zwei entsprechenden Linien dieselben gemeinschaftlichen Tangenten."

c. „Wenn zwei collineare Gebilde in Kreiscoordinaten eine Collineationsachse haben, so hat diese „mit je zwei entsprechenden Linien dieselben Durchschnittskreise."

Die Zahl der gemeinsamen Elemente zweier Curven ist aber in jedem Coordinatensystem durch den Grad ihrer Gleichungen bedingt. Von drei Linien gleichen Grades haben im Allgemeinen je zwei gleichviele Durchschnittselemente. Wenn daher die Collineationsachse mit zwei entsprechenden Linien von demselben Grade ist, so hat sie mit jeder derselben eben so viele Elemente gemein als diese beiden unter sich, woraus dann folgt, daß diese kein gemeinschaftliches Element haben können, welches nicht auch der Collineationsachse angehört. Nun steigt aber jede Gleichung zwischen x und y durch Uebertragung in das System uv im Allgemeinen auf einen höhern Grad, sobald **T** keine lineare Function von u und v ist; die Ausdehnung der obigen Sätze bis dahin, daß jedes gemeinschaftliche Element zweier entsprechender Linien auch der Collineationsachse angehöre, findet also nur dann statt, wenn die beiden entsprechenden Linien zugleich mit der Collineationsachse vom ersten Grade sind.

4. Wir können **T** jede beliebige Form geben, also zu jedem Gebild ein collineares setzen, so daß die Collineationsachse beider eine gegebene Linie wird. Auch für höhere Collineationen kann **T** noch vom ersten Grade bleiben. Beschränken wir uns zur Interpretation dieses besondern Falles auf die ursprünglichen Coordinatensysteme der drei bis jetzt bebauten Zweige der analytischen Planimetrie, während die bisherigen Resultate sich auf beliebige Coordinatenformen beziehen; so ist

a. für parallele Punctcoordinaten die Collineationsachse eine gerade Linie, deren Puncte beiden Gebilden zugleich angehören.

b. Für Hrn. Plücker's ursprüngliche Liniencoordinaten ist die Collineationsachse ein Punct; jede gerade Linie, welche durch denselben geht und dem einen Gebilde angehört, fällt mit ihrer entsprechenden Linie in dem andern Gebilde zusammen.

c. Für die von mir eingeführten Kreiscoordinaten richtet sich die Natur der Collineationsachse nach der Coordinatenachse und ist mit dieser eine gerade oder krumme Linie; alle Elementarkreise derselben gehören beiden verwandten Gebilden zugleich an.

Wir bemerken hierbei, daß der Punct, welcher im System der Liniencoordinaten als Collineationsachse auftritt, ganz dieselbe Rolle spielt wie der von Hrn. Magnus bestimmte Collineationspunct zweier collinearer und collinearliegender Gebilde im System der parallelen Punctcoordinaten. Diese Analogie wird uns später noch bestimmter entgegentreten.

Hierher ist auch derjenige Fall zu rechnen, wenn **T** eine constante Größe wird. Man möchte geneigt sein zu schließen, daß die beiden collinearen Gebilde dann ohne Collineationsachse seien. Ich habe aber an einem andern Orte schon erläutert, daß in einem solchen Falle die Gleichung (5) als der Ausdruck eines (einfachen oder vielfachen) Ortes ersten Grades angesehen werden muß, dessen Elemente unendliche Coordinaten haben, daß also die Collineationsachse beider Gebilde dann für Punct- und Kreiscoordinaten im Unendlichen liegt, für Liniencoordinaten aber der Anfangspunct der Coordinaten ist. Es wäre voreilig, wollte man hieraus den allgemeinen Schluß ziehen, daß dann je zwei entsprechende Linien ersten Grades in den beiden ersten Coordinatensystemen sich im Unendlichen schnitten, und in dem der Liniencoordinaten je zwei entsprechende Puncte mit dem Anfangspuncte der Coordinaten in gerader Linie lägen. Denn man darf nicht aus dem Auge verlieren, daß die Gleichung (5) für einen constanten Werth von **T** nur in sofern die angezeigte geometrische Bedeutung hat, als **T** durch Degeneration aus einem veränderlichen Ausdruck constant geworden ist, und daß daher die durch sie dargestellte Curve nur solche Eigenschaften beibehalten kann, welche die degenerirende Curve schon besitzt. Wollen wir, um der Deutlichkeit halber nur von Punctcoordinaten zu reden, aus der Beständigkeit von **T** schließen, daß zwei entsprechende gerade Linien in **A** und **B** sich im Unendlichen schneiden, so müssen wir von zwei Gebilden ausgehen, worin sich schon gerade Linien entsprechen. Denn sind x und y keine Verhältnisse linearer Functionen von u und v, so daß also einer geraden Linie in **A** eine Linie höhern Grades in **B** entspricht, und reducirt sich die letztere in einem besondern Falle auf den ersten Grad; so gehen dadurch einige Durchschnittspuncte der beiden entsprechenden Oerter in's Unendliche über und liegen demnach wirklich auf der im Unendlichen enthaltenen Collineationsachse, ohne daß die beiden geraden Linien parallel werden müssen. Wir werden am Schlusse dieser Abhandlung einem Falle begegnen, wo ganz in derselben Weise die durch (6) bestimmten isolirten Elemente dadurch, daß **R** und **S** constant werden, unendliche Coordinaten erhalten. Ein Mißverständniß in Untersuchungen dieser Art ist nicht möglich, wenn wir alle vorkommende Gleichungen homogen machen, indem wir zu unsern beiden Veränderlichen noch eine dritte hinzufügen und $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ statt x, y, so wie $\frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ statt u, v setzen. Sind dann die Zähler und Nenner von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ aus (9) z. B. vom zweiten Grade, so entspricht einer Gleichung ersten Grades aus xyz eine vom zweiten Grade in uvw und behält diesen Grad auch dann noch bei, wenn sich in besondern Fällen die Glieder mit v^2, uv, u^2 in ihr zerstören, so daß sie, auf zwei Veränderliche reducirt, vom ersten Grade zu sein scheinen würde. Wenn also eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen aus einer andern dadurch entsteht, daß gewisse Größen in ihr entweder unendlich groß oder unendlich klein werden, so läßt sich ihr Grad nur bestimmen, indem wir sie vor dem Uebergange zu jener Grenze homogen machen; so wie überhaupt die Nothwendigkeit, in der analytischen Geometrie nur homogene Gleichungen und Ausdrücke in Anwendung zu bringen, immer mehr hervortreten wird.*)

---

*) So ist die Gleichung der zweiten Polare des Elementes $x'y'$ in Bezug auf die Directrix $U = 0$

$$\frac{d^2U}{dy'^2}y^2 + 2\frac{d^2U}{dy'dx'}xy + \frac{d^2U}{dx'^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dy'dz'}y + 2\frac{d^2U}{dx'dz'}x + \frac{d^2U}{dz'^2} = 0$$

5. Die Formeln (9) sind von der Existenz eines Collineationsscheitels noch ganz unabhängig; sie können daher, auch wenn wir voraussetzen, x und y seien Verhältnisse linearer Functionen von u und v, im Allgemeinen nicht in diejenigen übergehen, durch welche Hr. Magnus zwei collineare und collinearliegende Gebilde mit einander verbunden hat. Unter der gemachten Voraussetzung liefern sie noch immer zwei verwandte Gebilde mit einer Collineationsachse ohne Collineationspunct; es ist von Interesse, ihre Form in diesem besondern Falle zu bestimmen.

Da W vom ersten Grade sein muß, so können wir

$$W \equiv \alpha v + \beta u + \gamma$$

setzen. Sollen nun die Glieder höhern Grades in den Zählern von x und y sich zerstören und eine Collineationsachse im Endlichen stattfinden, so sind nur zwei Fälle denkbar, 1) daß R, S, T linear seien, 2) daß R nnd S constant, T aber vom zweiten Grade sei.

Im ersten Falle setzen wir

$$R \equiv \mu v + \nu u + \pi, \quad S \equiv \mu' v + \nu' u + \pi';$$
$$T \equiv \delta v + \varepsilon u + \varphi.$$

Entwickelt man hiernach die Ausdrücke $uW - RT$ und $vW - ST$, so führt die Festsetzung, daß sie vom ersten Grade werden sollen, zu den Bedingungen

$$\mu\delta = 0, \quad \mu\varepsilon + \nu\delta = \alpha, \quad \nu\varepsilon = \beta;$$
$$\mu'\delta = \alpha, \quad \mu'\varepsilon + \nu'\delta = \beta, \quad \nu'\varepsilon = 0.$$

Der ersten und letzten dieser sechs Gleichungen kann nur genügt werden durch eine von diesen vier Annahmen

$$\delta = 0, \quad \varepsilon = 0;$$
$$\mu = 0, \quad \nu' = 0;$$
$$\delta = 0, \quad \nu' = 0;$$
$$\mu = 0, \quad \varepsilon = 0.$$

Aber die beiden letzten Annahmen erscheinen gemäß den vier übrigen Bedingnißgleichungen nur als besondere Fälle der beiden vorhergehenden, welche daher allein in Betracht kommen.

Aus $\mu = 0$, $\nu' = 0$ folgt außerdem $\alpha = \nu\delta = \mu'\delta$, also $\nu = \mu'$. Dadurch geben die Formeln (8), da $\beta = \nu\varepsilon$ ist, in

$$x = u - \frac{(\nu u + \pi)(\delta v + \varepsilon u + \varphi)}{\nu(\delta v + \varepsilon u) + \gamma}, \quad y = v - \frac{(\nu v + \pi')(\delta v + \varepsilon u + \varphi)}{\nu(\delta v + \varepsilon u) + \gamma}$$

---

und reducirt sich, wenn $x = x'$ und $y = y'$ in die drei Gleichungen

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 0, \frac{d^2U}{dy\,dx} = 0, \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

passen, scheinbar auf den ersten Grad. Macht man sie aber vor dem Uebergang zu diesen bestimmten Werthen der drei ersten Coefficienten homogen, so erkennt man, daß mit jener Gleichung ersten Grades noch diese

$$z = 0$$

zu verbinden ist. Die letztere stellt für Punct- und Kreiscoordinaten eine im Unendlichen liegende Linie ersten Grades, für Liniencoordinaten aber den Anfangspunct der Coordinaten dar, woraus folgt, daß die zweite Polare eines Elementes in Bezug auf eine beliebige Directrix niemals vom ersten Grade sein kann. Ich erwähne dieses Beispiel, um einen eigenen Irrthum, welcher sich in der allgemeinen Theorie der Polare (Uebertragungsprincipien, N. 157) findet, zu verbessern. Dort habe ich als zweite Polare eines Punctes in Bezug auf eine Directrix dritten Grades in Punctcoordinaten, deren Gleichung in einem besondern Falle degenerirt und durch das Verschwinden der Glieder zweiten und dritten Grades auf den ersten Grad herabsinkt, eine einzige gerade Linie gegeben. Die Directrix bleibt aber unter solchen Umständen immer noch vom dritten Grade und besteht, da ihre Gleichung, wenn man sie vorher homogen gemacht hat, den Factor z^2 in allen Gliedern enthält, aus drei geraden Linien, wovon zwei im Unendlichen liegen. Die zweite Polare eines Punctes in Bezug auf dieselbe ist dann ebenfalls ein System von zwei geraden Linien, wovon die eine in's Unendliche übertritt.

und die Formeln (9), wenn wir zur Abkürzung $\gamma - \nu\varphi = g$ nehmen, in

$$x = \frac{gu - \pi(\delta v + \varepsilon u + \varphi)}{\nu(\delta v + \varepsilon u + \varphi) + g}, \quad y = \frac{gv - \pi'(\delta v + \varepsilon u + \varphi)}{\nu(\delta v + \varepsilon u + \varphi) + g} \qquad (10)$$

über. Sie gehören zwei Gebilden mit der Collineationsachse

$$\delta v + \varepsilon u + \varphi = 0$$

und einem einzigen isolirten Elemente

$$u = -\frac{\pi}{\nu}, \quad v = -\frac{\pi'}{\nu}$$

an. Ein Ort ersten Grades aus **A** bleibt bei seiner Uebertragung in **B** vom ersten Grade.

Dagegen führen $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ zu $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Daher wird **W** constant; und da die Coefficienten von **R** und **S** beliebig bleiben, so enthalten die Formeln (9) in diesem Falle den allgemeinen Ausdruck der Affinität zweier verwandter Gebilde. Aber auch **T** wird gleich φ, also constant, so daß die Collineationsachse beider Systeme aus Elementen mit unendlichen Coordinaten besteht, ein Fall, welcher nach den allgemeinen Betrachtungen der vorhergehenden Nummer zu erklären ist. Man würde irren, wollte man schließen, daß zwei entsprechende Oerter ersten Grades in Punct- oder Kreiscoordinaten sich im Unendlichen schnitten und zwei entsprechende Puncte in Liniencoordinaten mit dem Anfangspuncte der letztern auf derselben geraden Linie lägen. Denn eine Gleichung des ersten Grades in xy wird, wenn wir sie vor dem Uebergange zu den Grenzen $\delta = o$, $\varepsilon = o$ auf uv transformiren, vom zweiten Grade, und behält diesen Grad bei, wenn wir dieselbe homogen machen und dann zu den bezeichneten Grenzen übergehen. Einer geraden Linie aus **A** entspricht z. B. in Punctcoordinaten ein System zweier gerader Linien in **B**, wovon die eine im Unendlichen liegt. Wollen wir diejenige Verwandtschaft aufsuchen, in welcher sich zwei gerade Linien entsprechen und die Collineationsachse im Unendlichen liegen soll, so müssen wir von den Formeln (10) ausgehen und in diesen $\delta = o$, $\varepsilon = o$ setzen, wodurch sie sich mit Veränderung der Form ihrer Constanten auf

$$x = \lambda u + \varkappa, \quad y = \lambda' v + \varkappa'$$

reduciren und zwei ähnliche und ähnlichliegende Gebilde ausdrücken. Durch Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten in den Aehnlichkeitspunct werden die constanten Größen auf der rechten Seite dieser Formeln entfernt.

Sollen zweitens **R** und **S** constant, **T** aber vom zweiten Grade sein, so setzen wir

$$T \equiv av^2 + 2buv + cu^2 + 2dv + 2eu + f,$$
$$R = \pi, \quad S = \pi'.$$

Die Bedingung, daß $uW - RT$ und $vW - ST$ vom ersten Grade werden sollen, führt aber hier zu

$$\pi a = 0, \quad 2\pi b = \alpha, \quad \pi c = \beta;$$
$$\pi' a = \alpha, \quad 2\pi' b = \beta, \quad \pi' c = 0;$$

woraus zunächst $a = c = 0$ folgt und dann $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $b = 0$, d. h. **T** kann nicht vom zweiten Grade sein.

6. Wenn wir die allgemeine Gleichung ersten Grades

$$my + nx + p = 0 \qquad (11)$$

vermittelst der Formeln (1) in uv übertragen, so wird dieselbe

$$mV + nU + pW = 0. \qquad (12)$$

Wir wollen die Bedingungen aufsuchen, unter welchen (12) ebenfalls einen Ort ersten Grades darstellt, der mit (11) zusammenfällt.

Von den drei Größen m, n, p können wir einer immer einen beständigen Werth beilegen, ohne die Allgemeinheit der Gleichung (11) aufzuheben. Nehmen wir dafür m, so kann dieses, außer wenn es 0 ist, gleich 1 gesetzt werden. Nun ist es offenbar, daß n und p nicht von einander unabhängig sein

können, wenn (12) mit (11) gleichbedeutend werden soll. Denn da wir voraussetzen müssen, daß **U** und **V** keinen veränderlichen Factor mit **W** gemein haben, so würde dies erfordern, daß die Coordinaten x, y mit u, v einerlei, also daß die Gebilde **A** und **B** congruent seien. Unsere Aufgabe muß sich also darauf beschränken, diejenigen Systeme von Oertern ersten Grades in beiden Gebilden aufzusuchen, welche mit ihren entsprechenden einerlei sind. Wegen der Abhängigkeit von n und p werden diese aber nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen, also im Allgemeinen eine bestimmte Curve umhüllen, welche wir den Collineationsscheitel der beiden Gebilde nennen und zu ermitteln suchen werden.

Die Gleichung (12) stellt, wenn **U**, **V**, **W** Functionen des nten Grades sind, einen Ort desselben Grades dar und es muß ihm nach 4. dieser Grad auch dann noch beigelegt werden, wenn sich die höchsten Glieder nach u und v in (12) für besondere Werthe der in ihr vorkommenden constanten Größen zerstören. Zur völligen Uebereinstimmung können also (11) und (12) nur, wenn **U**, **V**, **W** lineare Functionen von u und v sind, gebracht werden. Indem wir aber die Identität

$$mV + nU + pW \equiv P(mv + nu + p) \qquad (13)$$

statuiren, wo **P** eine rationale ganze Function von u und v bedeute, zerfällt (12) in die beiden Gleichungen

$$P = 0, \qquad (14)$$

$$mv + nu + p = 0. \qquad (15)$$

Dadurch bedingen wir also die Natur des Ortes (12) dahin, daß (11) oder (15) mit zu ihm gehöre und einen Theil von ihm ausmache. Neben (15) tritt aber unter allen Umständen der Ort (14) auf und dieser ist vom (n — 1)ten Grade, auch dann noch, wenn für zwei Coordinaten **P** constant wird, indem dann (14) in Punct- und Kreiscoordinaten ein System von (n — 1) Linien ersten Grades darstellt, welche im Unendlichen liegen, und für Liniencoordinaten einen (n — 1)fachen Punct, der mit dem Anfangspuncte der Coordinaten zusammenliegt. Sobald wir aber annehmen, daß **P** von m, n, p unabhängig sei, ändert sich mit der Lage von (11) in dem entsprechenden Orte des andern Gebildes nur (15); der Ort (14) ist eine feste Linie, welche allen durch (12) für die verschiedenen Werthe von n und p dargestellten Oertern zugleich angehört. Daher können auch die einzelnen Elemente von (14), als zum Gebild **B** gehörig angesehen, zu ihren entsprechenden nur feste Elemente von **A** haben, d. h. (14) muß die entsprechende Linie des Collineationsscheitels sein, und im Uebrigen entsprechen sich dann die Elemente der beiden Oerter (11) und (15), ohne daß jedoch je zwei entsprechende Elemente selbst zusammenliegen. Für collineare Gebilde höherer Ordnung ist dieses die einzige Form, unter welcher sie einen Collineationsscheitel zulassen.

Von den beiden Größen n und p kann jede als unabhängige Veränderliche angesehen werden; wählen wir n dafür, so ist p so zu bestimmen, daß (13) für beliebige Werthe von u und v stattfindet. Daß dabei die Form von **U**, **V**, **W** und **P** nicht mehr ganz willkürlich bleibt, ist im Voraus gewiß. Nun kann (13) in

$$m\left(\frac{V - vP}{W - P}\right) + n\left(\frac{U - uP}{W - P}\right) \equiv -p \qquad (16)$$

übergehen. Da aber p die veränderlichen Coordinaten u und v nicht in sich einschließen kann und die Identität (16) für beliebige Werthe von n stattfinden soll, da ferner die beiden Ausdrücke, womit m und n verbunden sind, von n unabhängig sind; so müssen diese Ausdrücke für sich constant sein. Bezeichnen wir also zwei beliebige constante Größen durch a und b, so wird

$$\frac{V - vP}{W - P} \equiv a, \quad \frac{U - uP}{W - P} \equiv b;$$

$$p \equiv -am - bn.$$

Vermöge der beiden ersten Bedingungen wird

$$y = a + \frac{(v - a)P}{W}, \quad x = b + \frac{(u - b)P}{W} \qquad (17)$$

und durch die letzte geht die Gleichung (11) in die Form

$$m(y - a) + n(x - b) = 0 \qquad (18)$$

über. Wenn wir p als unabhängige Veränderliche ansehen, so führt dies ganz zu demselben Resultate, weil dann n als lineare Function von p erscheint, mithin auch p eine lineare Function von n wird.

Sollen also zwei collineare Gebilde einen Collineationsscheitel haben, so müssen sie durch die Formeln (17) mit einander verbunden sein. In diesen sind **P** und **W** ganz beliebige rationale ganze Functionen von u und v, a und b aber beliebige constante Größen. Wie man dieselben auch wählen mag, so ist das System der Oerter ersten Grades aus **A**, welche mit ihren entsprechenden in **B** zusammen fallen, in x y durch die Gleichung (18), in welcher n jeden beliebigen Werth annehmen kann, dargestellt. Zur Interpretation dieses analytischen Factums sondern wir unsere drei Coordinatensysteme von einander.

7. In Punctcoordinaten bedeutet (18) ein System gerader Linien, welche durch den Punct $y = a$, $x = b$ gehen. Der Collineationsscheitel ist also hier ein Punct; jeder geraden Linie des Gebildes **A**, welche durch denselben geht, entspricht in **B** erstens die feste Linie (14), dann aber eine gerade Linie, welche mit jener ersteren zusammenfällt. Aus (17) folgt aber unmittelbar, daß alle Puncte der Linie (14) aus **B** zu ihren entsprechenden in **A** den Collineationsscheitel haben. Sucht man dagegen umgekehrt aus (17) zu $y = a$, $x = b$ die entsprechenden Puncte in **B**, so findet man einerseits $v = a$, $u = b$, welcher Punct mit $y = a$, $x = b$ einerlei ist, und andererseits die Linie (14). Der Punct $y = a$, $x = b$ tritt also in zweifacher Natur auf; als Collineationsscheitel entspricht ihm in **B** die Linie (14); als Element der Linie (11) fällt er mit seinem entsprechenden Puncte in **B** zusammen. Bei dieser Auffassung ist (15) die entsprechende Linie von (11) vollständig; beide sind einerlei, ohne daß jedoch ihre entsprechenden Puncte, mit Ausnahme von $y = a$, $x = b$ und $v = a$, $u = b$, auf einander liegen. Hieraus erhalten wir den Satz:

„Wenn gewisse gerade Linien aus einem von zwei collinearen Gebilden in Punctcoordinaten „mit ihren entsprechenden im andern zusammenfallen, so gehen dieselben durch einen Punct, welches „auch die Ordnung der Collineation sein mag."

Verlegen wir den Anfangspunct der Coordinaten für x y und u v in den Punct a b und deuten wir die Veränderung, welche dadurch mit diesen Coordinaten, so wie auch mit **P** und **W** vorgeht, an, indem wir diese Größen accentuiren, so verwandeln sich die Formeln (17) in

$$y' = \frac{v'P'}{W'}, \quad x' = \frac{u'P'}{W'} \qquad (19)$$

und die Gleichung (18) in

$$m y' + n x = 0.$$

In Liniencoordinaten stellt die Gleichung (18) eine continuirliche Reihe von Puncten dar, welche in der geraden Linie $y = a$, $x = b$ liegen. Der Collineationsscheitel ist also hier eine gerade Linie; jeder Punct auf ihr entspricht sich selber in beiden Gebilden und außerdem hat sie selbst die Linie (14) zu ihrer entsprechenden; d. h.

„Wenn gewisse Puncte aus einem von zwei collinearen Gebilden in Liniencoordinaten mit „ihren entsprechenden Puncten in dem andern zusammenfallen, so liegen dieselben in gerader „Linie, welches auch die Ordnung der Collineation sein mag."

Betrachten wir nur solche Gebilde, deren Collineationsachse vom ersten Grade ist, so vertauschen die Collineationsachse und der Collineationsscheitel in den beiden Systemen der Punct- und Liniencoordinaten genau ihre Bedeutung. Es ist aber eine bemerkenswerthe Erscheinung, daß, während jede beliebige Curve als Collineationsachse auftreten kann, der Collineationsscheitel immer in dem einen System ein Punct, in dem andern eine gerade Linie ist. Da dieses Resultat an keine andere Bedingung geknüpft ist, als daß die beiden collinearen Gebilde durch algebraische rationale Transformationsformeln von einander abhangen, so müssen wir hieraus schließen, daß zwei Gebilde mit krummliniger Collineationsachse aus einem von jenen Coordinatensystemen vermittelst des andern nicht auf algebraische rationale Weise ausgedrückt werden können.

In dem System der Kreiscoordinaten ist die Interpretation der Gleichung (18) nur dadurch von derjenigen, welche wir oben für Punctcoordinaten gegeben haben, verschieden, daß der Collineationsscheitel

hier ein fester Kreis und die Tangenten an denselben zwar Linien des ersten Grades in Kreiscoordinaten, aber nur dann gerade Linien sind, wenn die Coordinatenachse selbst geradlinig ist.

In die Form (19) können die Transformationsformeln (17) für die beiden letzten Coordinatensysteme nicht durch bloße Verlegung der Achsen übergehen, weil hier die alten Coordinaten nicht durch lineare und ganze Functionen der neuen ausgedrückt werden; es ist vielmehr eine Aenderung der Coordinatenconstruction selbst nöthig, welche wir hier nicht erörtern können, weil sie uns zu weit führen würde.

8. Die Identität (13) kann nicht in die Form (16) gebracht werden, wenn $W - P \equiv 0$, also $W \equiv P$ ist; aber sie reducirt sich in diesem besondern Falle auf

$$m\,(V - vW) + n\,(U - uW) \equiv 0$$

und da n von u und v unabhängig sein muß, so können $V - vW$ und $U - uW$ nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein. Setzen wir daher

$$V - vW \equiv nT,$$

so muß

$$U - uW \equiv -mT$$

werden. Dadurch erhalten die Transformationsformeln diese Gestalt:

$$y = v + \frac{nT}{W}, \quad x = u - \frac{mT}{W}. \qquad (20)$$

Sie gehören zwei collinearen Gebilden an, welche zugleich eine Collineationsachse $T = 0$ haben. Während p ganz beliebig bleibt, hat n nur einen einzigen Werth, d. h. die Gleichung (11) stellt hier in Punctcoordinaten ein System paralleler Geraden, in Liniencoordinaten eine continuirliche Reihe von Puncten, welche mit dem Anfangspuncte in gerader Linie liegen, und in Kreiscoordinaten ein System von parallelen Linien des ersten Grades dar. Der Colliniationsscheitel zweier solcher Gebilde ist also im ersten Falle ein Punct, und im letzten ein Kreis, der im Unendlichen liegt, bei Liniencoordinaten aber eine gerade Linie, die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht; also in allen drei Fällen ein Element mit unendlichen Coordinaten, dessen Lage durch das Verhältniß derselben näher bestimmt wird.

9. Für Punctcoordinaten stellen die Formeln (19) die Collineation mit einem Scheitel in völliger Allgemeinheit dar. Sollen nun x' und y' Verhältnisse linearer Functionen von u' und v' sein, so muß offenbar P' constant und W' linear sein. Unter dieser Form kommen dieselben bei Magnus vor und stellen dann in Punctcoordinaten zwei collineare und collinearliegende Gebilde dar, deren Collineationsscheitel der Anfangspunct der Coordinaten ist. Da aber der Grad einer Function durch die Verlegung der Achsen bei Punctcoordinaten nicht geändert werden kann, so beziehen sich auch die Formeln (17) auf zwei collineare und collinearliegende Gebilde, wenn P constant und W vom ersten Grade ist; nur ist der Collineationspunct hier nicht mehr der Anfangspunct der Coordinaten, sondern der Punct ab.

Zu demselben Resultate kommen wir aber auch unmittelbar durch die Betrachtung der Formeln (17), wodurch es sich zugleich auf die Coordinatensysteme der geraden Linie und des Kreises ausdehnt, d. h. für ein constantes P und ein lineares W beziehen sich die Formeln (17) auf zwei collineare Gebilde mit einem Scheitel, in welchen sich nur Oerter desselben Grades entsprechen, insbesondere bei Punctcoordinaten eine gerade Linie einer geraden Linie, bei Liniencoordinaten ein Punct einem Puncte und bei Kreiscoordinaten eine Linie ersten Grades wieder einer Linie desselben Grades.

10. Indem wir bei der Bestimmung des Collineationsscheitels, wie sie in den vorhergehenden Nummern niedergelegt ist, wieder zu unsern allgemeinsten Formeln (1) zurückgegangen sind, haben wir dieselbe von dem Dasein der Collineationsachse ganz unabhängig erhalten. Transformiren wir dagegen die Gleichung (11) durch die Formeln (8), so treten wir in die Frage ein, ob zwei collineare Gebilde mit einer Collineationsachse auch einen Scheitel haben können. Dabei gelangen wir aber leicht auf dem in 6. befolgten Wege wieder zu den Formeln (17), zu welchen auch (1) geführt haben. Demnach müssen sich (17) unter (8) subsumiren lassen; die Collineation mit einer Achse ist die allgemeinere Ver-

wandtschaft; sie läßt nur unter besondern Bedingungen auch einen Scheitel zu, während dagegen zwei collineare Gebilde mit einem Scheitel niemals ohne Achse sein können. Das gegenseitige Abhängigkeitsverhältniß dieser beiden Gattungen der Verwandtschaft tritt durch folgende Betrachtung auf die einfachste Weise hervor.

Die Formeln (17), welche den allgemeinsten Ausdruck zweier collinearer Gebilde mit einem Collineationsscheitel enthalten, lassen sich in

$$y = v - \frac{(v-a)(W-P)}{W}, \quad x = u - \frac{(u-b)(W-P)}{W}$$

umformen und fallen also unter (8). Beide Gebilde haben die Collineationsachse

$$W - P = 0,$$

d. h.: Wenn zwei collineare Gebilde einer beliebigen Ordnung einen Collineationsscheitel haben, so haben sie auch eine Collineationsachse.

Es können aber wohl zwei collineare Gebilde eine Collineationsachse ohne Collineationsscheitel haben; denn die Formeln (8) gehen nur dann in (17) über, wenn

$$R = u - b, \quad S = v - a,$$

d. h. wenn die isolirten Elemente, welche die collinearen Gebilde außer der Collineationsachse gemeinschaftlich haben, sich auf ein einziges reduciren, welches dann selbst der Collineationsscheitel ist.

Ein Beispiel zu diesen beiden Sätzen bietet uns die allgemeine Collineation der ersten Ordnung dar. Mögen wir sie, wie in 5., dahin bestimmen, daß eine Collineationsachse stattfindet, oder so, daß wir einen Collineationsscheitel aufsuchen, wie wir in 9. gethan haben; immer wird die eine Eigenthümlichkeit zugleich mit der andern hervortreten. Daraus wird es ersichtlich, wie Hr. Magnus, indem er die Collineation der ersten Ordnung dahin specialisirte, daß beide verwandte Gebilde einen Collineationsscheitel haben sollten, bei näherer Untersuchung derselben zugleich die Collineationsachse entdecken mußte, während bei höhern Collineationen die Formeln (8) allgemeiner sind als (17).

Die isolirten Elemente zweier collinearer Gebilde mit einer Collineationsachse bestimmen sich durch die Gleichungen (6). Werden aber **R** und **S** constant, so stellen jene Gleichungen zwei Oerter dar, deren Elemente sämmtlich unendliche Coordinaten haben. Diesem Falle sind wir in den Formeln (20) begegnet und es ist dabei zu bemerken, daß nach den in 3. erörterten Principien m und n als Größen des ersten Grades angesehen werden müssen, weil beide Gebilde einen Collineationsscheitel haben sollen. Das einzige isolirte Element, zu welchem die Formeln (20) führen, liegt also für Punct- und Kreiscoordinaten im Unendlichen, und ist bei Liniencoordinaten eine durch den Anfangspunct derselben gehende gerade Linie. So verschwindet auch hier wieder jede Paradoxie, indem wir einer gleich 0 gesetzten constanten Größe die früher erläuterte geometrische Bedeutung geben. Als ich diese Ansicht zuerst aussprach, war sie das Ergebniß einer ganz abstracten Betrachtung, welche aus keiner bestimmten Anschauung hervorging, und ich konnte derselben keine besondere Wichtigkeit beilegen. Im Vorhergehenden tritt uns, wie ich glaube, die Nothwendigkeit derselben, sobald wir uns nicht auf die Anwendung homogener Gleichungen und Ausdrücke beschränken, sprechend entgegen.

Wo nur ein isolirtes Element stattfindet, kommt jeder Ort ersten Grades aus dem einen Gebilde, dem jenes Element angehört, mit seinem entsprechenden in dem andern Gebilde zur Coincidenz. Hierdurch ist uns der Weg bezeichnet, auf welchem mehre isolirte Elemente in ähnlicher Weise in Betracht gezogen werden müssen. Sind die Gleichungen (6) von höherm Grade als dem ersten, so ist es natürlich, daß wir den Complex der Elemente, welche den beiden durch sie, einzeln genommen, dargestellten Curven gemeinschaftlich sind, als Collineationsscheitel zweier solcher Gebilde ansehen. Indem wir durch alle isolirte Elemente eine Curve legen, deren Grad durch den von **R** und **S** bestimmt wird, und sie als dem einen Gebilde angehörig betrachten, suchen wir die Bedingungen auf, unter welchen sie mit ihrer entsprechenden Curve in dem andern Gebilde zusammenfällt. Bezeichnen wir durch $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{S}_1$

diejenigen Werthe von R und S, welche man erhält, indem man x und y an die Stelle von u und v setzt, so stellt für einen beliebigen constanten Werth von n die Gleichung

$$R_1 + n\,S_1 = 0 \qquad (21)$$

jeden Ort des Gebildes A dar, welcher die gemeinsamen Elemente der beiden Curven (6) enthält und mit diesen von demselben Grade ist, wobei jedoch der Grad von R und S nach 3. durch den Uebergang zu drei Veränderlichen beurtheilt und daher immer dem von W gleich geachtet werden muß. Gemäß (8) erhalten wir aber für denjenigen Ort in B, welcher (21) entspricht,

$$R + nS - \left\{\left(\frac{dR}{dv} + n\frac{dS}{dv}\right)S + \left(\frac{dR}{du} + n\frac{dS}{du}\right)R\right\}\frac{T}{W}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2R}{dv^2} + n\frac{d^2S}{dv^2}\right)S^2 + 2\left(\frac{d^2R}{dv\,du} + n\frac{d^2S}{dv\,du}\right)SR + \left(\frac{d^2R}{du^2} + n\frac{d^2S}{du^2}\right)R^2\right\}\frac{T^2}{W^2}$$
$$- \text{etc.} = 0. \qquad (22)$$

Die beiden durch (21) und (22) dargestellten entsprechenden Oerter müssen aber als einerlei angesehen werden, wenn die letztere von diesen Gleichungen für jeden beliebigen Werth von n in die Form

$$(R + nS)P = 0 \qquad (23)$$

übergeht, wo wieder P eine von n unabhängige veränderliche Function bezeichnet und dieselbe geometrische Bedeutung hat wie früher. Offenbar setzt aber die Uebereinstimmung von (22) und (23) die beiden Identitäten

$$-\left(\frac{dR}{dv}S + \frac{dR}{du}R\right)\frac{T}{W} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dv^2}S^2 + 2\frac{d^2R}{dv\,du}SR + \frac{d^2R}{du^2}R^2\right)\frac{T^2}{W^2} - \ldots \equiv RP,$$
$$-\left(\frac{dS}{dv}S + \frac{dS}{du}R\right)\frac{T}{W} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2S}{dv^2}S^2 + 2\frac{d^2S}{dv\,du}SR + \frac{d^2S}{du^2}R^2\right)\frac{T^2}{W^2} - \ldots \equiv SP$$

voraus, wobei indessen P seine Bedeutung geändert hat. Die Discussion der letztern kann im Allgemeinen nicht gegeben werden, indem sie zu einer Abhängigkeit der Coefficienten in den einzelnen hier vorkommenden Functionen führt. Des Raumes halber müssen wir uns daher auf die Feststellung der vorhergehenden Grundformeln beschränken.

11. Neben der Collineationsachse und dem Collineationsscheitel treten bei jeder collinearen Verwandtschaft noch zwei andere feste Linien hervor, welche von der Lage der entsprechenden Figuren unabhängig sind, und gewinnen dadurch eine besondere Bedeutsamkeit. Hr. Magnus hat sie bei zwei collinearen Gebilden der ersten Ordnung Gegenachsen genannt; sie sind dort, wie die Collineationsachse, vom ersten Grade und für Punctcoordinaten mit ihr parallel; jedem der beiden verwandten Gebilde gehört eine derselben an und sie ist in ihm der Ort, auf welchem sich je zwei gerade Linien jenes Gebildes, denen zwei parallele gerade Linien des andern Gebildes entsprechen, begegnen. Aber unabhängig von der Collineationsachse und dem Collineationsscheitel, so wie von jedem besondern Coordinatensystem, tritt uns diese Linie für das Gebild B schon aus unsern allgemeinsten Formeln (1) entgegen und hat zu ihrer Gleichung $W = 0$. Denn für alle Elemente in B, deren Coordinaten in diese Gleichung passen, werden x und y unendlich; dieser Schluß läßt sich aber auch umkehren, wenn wir von solchen Elementen absehen, welche beiden Gebilden zugleich angehören, also entweder auf einer Collineationsachse liegen oder als ein Collineationsscheitel anzusehen sind. Haben also zwei Oerter ersten Grades aus A ein Element mit unendlichen Coordinaten gemein, so gehört sein entsprechendes Element in B der festen Linie $W = 0$ an. Sind insbesondere bei Punctcoordinaten zwei gerade Linien aus A parallel, so schneiden sie sich auf jener festen Linie. Bei Liniencoordinaten haben je zwei Puncte aus A, welche mit dem Anfangspuncte der Coordinaten in gerader Linie liegen, zu ihren entsprechenden Linien in B zwei Oerter, die mit $W = 0$ dieselbe gerade Linie berühren, und bei Kreiscoordinaten liegen je zwei Oerter aus B, welche zwei parallelen Linien ersten Grades aus A entsprechen, mit $W = 0$ um denselben Elementarkreis. Für collineare Gebilde der ersten Ordnung mit einer Collineationsachse unterscheidet sich die Gleichung der letztern, welche nach 10. $W - P = 0$ ist, gemäß 9. nur in dem constanten Gliede von $W = 0$.

Wir haben im Eingange dieser kleinen Abhandlung die Collineation nur als einen besondern Fall der allgemeinen Coordinatentransformation betrachtet, und so ist denn die Linie $W = 0$ keine andere als diejenige, welche in der ersten Abtheilung der „Uebertragungsprincipien" die Achse $x = \infty$ oder $y = \infty$ genannt wird. Neben ihr treten zwei andere feste Linien in dem Gebilde **B** auf, welche den beiden festen Coordinatenlinien $x = 0$, $y = 0$ entsprechen, also von der Lage der beiden collinearen Gebilde ebenfalls unabhängig sind und durch $U = 0$, $V = 0$ dargestellt werden. Zwei beliebige Linien aus **A**, welche mit einer der Coordinatenlinien ein Element gemein haben, erhalten zu ihren entsprechenden in **B** zwei Oerter, denen dasselbe Element von $U = 0$ oder $V = 0$ angehört. Entwickelt man aus (1) die Werthe von u und v in Function von x und y, setzt dann die Zähler und Nenner dieser Werthe gleich 0, so erhält man im Allgemeinen vier verschiedene Achsen des Gebildes **A**, welche sich auf drei reduciren, wenn die Nenner von u und v, wie die von x und y in (1), übereinstimmen.

Je reiner man den Charakter der analytischen Methoden erhält, je weniger man synthetische Anschauungen analytisch auszudrücken sucht, statt umgekehrt den analytischen Ausdruck nur zu interpretiren und nicht bloß diejenigen Beziehungen darin zu erkennen, die man aus einer vorgefaßten Absicht darin suchen will; desto mehr verschwinden alle exceptionelle Fälle aus der Geometrie und Resultate, die vereinzelt zu stehen oder sich auszuschließen scheinen, werden einander näher gerückt, indem ein höheres Princip sie verbindet. Jede Anschauung ist ihrer Natur nach individuell und in endliche Grenzen eingeschlossen; jede Beweisführung, die aus ihr abgeleitet wird, verliert ihre Basis, wenn gewisse Theile der ursprünglichen Anschauung unendlich groß oder unendlich klein werden. Ein analytischer Ausdruck spricht den unterscheidenden Charakter einer bestimmten Classe von räumlichen Beziehungen auf die allgemeinste Weise aus, schmiegt sich allen Besonderheiten derselben mit Leichtigkeit an und bezeichnet die Stelle, wohin sie gehören. Die Art, wie im Vorhergehenden die Theorie der Collineationsachsen und Collineationsscheitel entwickelt ist, wird vielleicht hierzu einen neuen Beweis liefern und sich wenigstens von dieser Seite empfehlen. Im zweiten Bande der „Uebertragungsprincipien" gedenke ich zur Anwendung der hier aufgestellten Grundformeln zu kommen.