Hydroelektrische Analogien.

Von

Oberlehrer Dr. Paul Serf.

Beilage zum Osterprogramm des Städt. Gymnasiums und Realgymnasiums
zu Düsseldorf 1897.

Düsseldorf 1897.
Gedruckt bei L. Voss & Cie., Königl. Hofbuchdruckern.

1897. Progr.-Nr. 496.

9 d 4
0026

496 b

HT010117796

1.

Die Frage nach dem Wesen der Elektricität ist, seitdem man zu der Erkenntnis gekommen ist, dass der Schall, die Wärme und das Licht in gewissen Bewegungsformen, sei es ponderabeler, sei es imponderabeler Materie bestehen, zu einer der wichtigsten Fragen der ganzen Physik geworden. Bekanntlich haben diejenigen Forscher, welche zuerst die elektrischen Erscheinungen einem eingehenden und wissenschaftlichen Studium unterzogen haben, zur Erklärung derselben die Hypothese aufgestellt, dass die Elektricität ein unwägbarer Stoff sei, welcher besonders in Metallen unter gewissen Umständen in ähnlicher Weise zu fliessen vermöge, wie etwa das Wasser in einem Gefässe oder einer Röhre. Dabei nahmen die einen, wie Symmer, an, dass es zwei verschiedene Arten dieses elektrischen Fluidums, nämlich ein positives und ein negatives gebe, mit der gemeinschaftlichen Eigenschaft, dass Teilchen desselben Fluidums sich gegenseitig abstossen, während Teilchen des einen Fluidums diejenigen des anderen anziehen. Andere dagegen, unter denen an erster Stelle Aepinus und Franklin zu nennen sind, waren der Ansicht, dass es nur ein elektrisches Fluidum gäbe, indem sie einen Körper positiv oder negativ elektrisch nannten, je nachdem er eine grössere oder geringere Menge dieses einen Fluidums enthielt. Mit Hülfe von jeder dieser beiden besonderen Hypothesen lassen sich nun die meisten elektrischen Erscheinungen gut erklären. Nur die eine Thatsache, dass sich durch Reibung aus einem Körper eine beliebige Menge von Elektricität entwickeln lässt, steht beiden Annahmen hindernd im Wege; denn um diese zu erklären, müsste man in beiden Fällen annehmen, dass in jedem Körper eine unendlich grosse Menge elektrischen Fluidums enthalten sei, was nicht angeht. Diese Überlegung hat dann auch dazu geführt, dass man die Annahme eines stofflichen elektrischen Fluidums fallen liess; trotzdem aber war man genötigt, die auf dieselbe sich gründende Erklärung der elektrischen Erscheinungen vorläufig festzuhalten. Begriffe, wie Elektricitätsmenge, elektrischer Strom u. s. w. können wir, obwohl wir ziemlich sicher wissen, dass sie den thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechen, unmöglich entbehren, solange nicht eine neue Theorie der Elektriciät gleich klare und leicht fassliche Begriffe an die Stelle der alten gesetzt hat: und dies wird voraussichtlich noch lange dauern; können wir uns doch nicht einmal in der Theorie der Wärme von der Stofflichkeit dieses Agens in unserer Ausdrucksweise losmachen.

Als nun in den letzten Jahrzehnten die Frage nach dem Wesen der Elektricität von neuem in den Vordergrund trat, fand auch die frühere längst verlassene Theorie wieder neue Anhänger. Man suchte dieselbe jetzt dadurch zu stärken, dass man immer neue und neue Analogieen zwischen elektrischen und hydrodynamischen Erscheinungen aufzufinden sich bemühte, indem man den elektrischen Strom und seine Wirkungen direkt mit einem Wasserstrome und dessen Wirkungen verglich.

Eine weitere Reihe von hydroelektrischen Analogieen hat das Bedürfnis zu Tage gefördert, elektrische Zustände und Vorgänge dem Verständnis näher zu rücken. Da Elektricität etwas ist, was der Mensch in keiner Weise direkt wahrzunehmen imstande ist, so ist es bei der Einführung in die Elektricitätslehre zur Klarlegung der Fundamentalbegriffe fast unumgänglich notwendig, die Erscheinungen mit analogen Erscheinungen zu vergleichen, welche sich an der den Sinnen unmittelbar zugänglichen Materie abspielen. Es sind natürlich auch hier die Flüssigkeiten, speciell das Wasser, welche zum Vergleiche herangezogen werden, aber doch in wesentlich anderer

Weise als bei den an erster Stelle genannten Analogieen. Während jene eine innere Verwandtschaft zwischen den beiden Erscheinungskreisen nachweisen sollen, ist die Aufgabe der letzteren eine rein didaktische, wenn auch ihre Bedeutung vielleicht eine allgemeinere ist.

Zu derselben Zeit, in welcher die Analogieen zur Unterstützung der alten Fluidumstheorie veröffentlicht wurden, ist endlich eine dritte Art von Analogieen zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik entdeckt worden, welche nicht ungeeignet erscheint, einer neuen Hypothese über das Wesen der Elektricität Eingang zu verschaffen, eine neue Elektricitätstheorie zu begründen. Diese Analogieen haben sich bei der Untersuchung gewisser Bewegungen von Flüssigkeiten und besonders von festen Körpern in Flüssigkeiten ergeben, wobei ähnliche Anziehungs- und Abstossungserscheinungen zutage treten, wie bei dem Magnetismus und der Elektricität.

Inwieweit alle diese Analogieen imstande sind, uns in der Frage nach dem Wesen der Elektricität weiter zu bringen, kann nur eine sorgfältige Prüfung derselben lehren, welche vorzunehmen in der vorliegenden Arbeit versucht werden soll.

2.

Die zuerst genannten Analogieen haben sich fast ausschliesslich auf experimentellem Wege ergeben. Der Franzose Decharme, von welchem dieselben zum grössten Teile herrühren, berichtet darüber ausführlich in „La Lumière électrique“ und im Auszuge in den „Comptes Rendus“. Die ersten derselben beziehen sich auf hydrodynamische Erscheinungen, welche den elektromagnetischen Phänomenen entsprechen sollen.

Allgemein bekannt ist die von Clement und Desormes zuerst beschriebene Erscheinung der Anziehung, welche ein aus einem Gefäss mit komprimierter Luft durch eine Öffnung in der Wand desselben austretender Luftstrahl auf eine gegenübergehaltene Papierscheibe ausübt. Dabei kann man das Gefäss durch eine Röhre mit einem scheibenförmigen Ansatz ersetzen und den Strom dadurch erzeugen, dass man in das Rohr hinein bläst. Der Grund dieser Erscheinung ist der, dass der die Öffnung verlassende Luftstrahl sich in eine grosse Schicht zwischen beiden Scheiben ausbreiten muss. Dadurch entsteht zwischen denselben ein luftverdünnter Raum, was zur Folge hat, dass die lose Scheibe gegen die feste angedrückt wird. Decharme hat nun gezeigt[1]), dass dasselbe Phänomen eintritt beim Ausfluss von inkompressibeln Flüssigkeiten. Er setzte zu dem Zwecke auf das Ende eines Wasserleitungsrohres ein Ansatzrohr auf, welches eine von einem Schlitz durchbohrte Platte trug. Liess er durch diesen einen Wasserstrahl austreten, so wurde eine entsprechend grosse Scheibe gegen die Platte des Ansatzrohres angezogen und in einem bestimmten Abstande von derselben festgehalten. Er erklärte auch diese Erscheinung durch die Verminderung des Druckes auf der einen Seite der beweglichen Platte infolge der Ausbreitung des Wasserstrahles. Der Versuch gelang auch noch, wenn man, anstatt eine Scheibe am Ende des Rohres anzubringen, dieses konisch zulaufen liess und die Öffnung mit einem dicken Rande versah. Die Anziehung war zwar dann nicht so stark wie vorher, es zeigte sich aber, wenn man nun das Rohr beweglich machte und den Strahl gegen eine feste Wand treffen liess, dass das Rohr zuerst angezogen und gegen die Wand geschleudert wurde, dann von dieser zurückprallte, wieder angezogen wurde und so fort. Diese Oscillationen waren so heftig, dass ein Ton von grösserer oder geringerer Höhe entstand, je nach der Beschaffenheit des Rohres und der lebendigen Kraft des Strahles. Befand sich anstatt des dicken Randes an der Öffnung des Rohres ein dünner Rand, so ergab sich nicht Anziehung, sondern Abstossung, wie vorauszusehen. In diesen an und für sich interessanten Erscheinungen findet nun Decharme direkte Analogieen zum Elektromagnetismus. Die einfache Anziehung der Scheibe vergleicht er mit der Anziehung eines elektromagnetischen Poles, jene Oscillationen mit denen eines Elektromagneten mit Selbstunterbrecher und ein T-förmig gebogenes Rohr mit einer dickrandigen und einer dünnrandigen Öffnung mit einem Elektromagneten mit zwei Polen. — Über den Wert dieser Analogieen braucht wohl kaum ein Wort verloren zu werden. Mit demselben Rechte, mit welchem man beispielsweise die Abstossung, die ein aus einer gewöhnlichen Öffnung ausfliessender Wasserstrahl auf

[1]) Comptes Rendus T. 94. P. 440.

davorgehaltene Körper ausübt, mit der Abstossung zwischen zwei gleichnamigen Magnetpolen vergleichen kann, könnte man auch die Wirkung einer abgeschossenen Kanonenkugel hiermit vergleichen. In beiden Fällen findet jedenfalls Abstossung statt.

Nicht von grösserem Werte sind seine Analogieen zu den Induktionserscheinungen.[1]) Als solche führt er Erscheinungen an, welche eintreten, wenn man den Hahn eines Wasserleitungsrohres plötzlich öffnet oder schliesst. Beim Schliessen erhält das Rohr einen mit dem Strome gleichgerichteten, beim Öffnen einen entgegengesetzt gerichteten Stoss. Wie man diese nach den Grundgesetzen der Mechanik leicht zu erklärenden Erscheinungen überhaupt mit der Induktion eines Stromes in einem Leiter beim Öffnen und Schliessen eines Stromkreises in der Nähe desselben vergleichen kann, ist unverständlich. Die Analogie liegt jedenfalls nur in den Worten.

Decharme untersuchte ferner das Verhalten zweier angenähert paralleler Wasserstrahlen gegeneinander.[2]) Er fand, dass die beiden Ströme, wenn sie dieselbe Richtung hatten und etwas gegeneinander geneigt wurden, sich anzogen, wenn sie dagegen entgegengesetzt gerichtet waren, sich abstiessen. Es würde daher für elektrische und Flüssigkeits-Ströme dasselbe Gesetz gelten: Parallele gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, parallele entgegengesetzt gerichtete Ströme stossen sich ab. Leider aber ist die Analogie nicht vollständig, da die Wasserströme soweit von vornherein gegeneinander geneigt sein müssen, dass sie an einer Stelle zusammenstossen, an welcher dann die Anziehung durch die Cohäsion der Teilchen unter einander und die Abstossung durch eine Art von Reflexion leicht zu erklären ist, während die elektrischen Erscheinungen ohne eine derartige Berührung eintreten.

In einer langen Reihe von Aufsätzen[3]) berichtet Decharme über seine hydrodynamischen Nachahmungen der elektrochemischen oder nach ihrem Entdecker Nobili benannten Nobili'schen Ringe. Diese entstehen bekanntlich, wenn man mit dem positiven Pole einer galvanischen Kette eine blanke Metallfläche verbindet, auf diese eine Lösung von Bleizucker oder schwefelsaurem Manganoxydul giesst und in die Lösung, ohne die Platte zu berühren, einen mit dem negativen Pole der Batterie in Verbindung stehenden Platindraht eintaucht. Es bilden sich dann unter dem Platindraht regenbogenartige Ringe, welche die Reihenfolge der Newton'schen Farbenringe zeigen. Diese Erscheinung ahmte Decharme folgendermassen nach. Er bedeckte eine in Wasser horizontal aufgehängte Glasplatte mit einer dünnen Schicht von Mennige (oder Bleiglätte, Barytsulfat, Bleiweiss) und liess auf dieselbe einen aus einem vertikalen Glasrohr ausströmenden Wasserstrahl auftreffen. Es entstand dann eine grössere oder geringere Anzahl von dickeren oder dünneren konzentrischen Pulverringen auf der Platte, die sehr scharf und symmetrisch waren. Dieselben waren im allgemeinen natürlich einfarbig. Bei Anwendung von Barytsulfat erhielt er indessen auch, wenn er die Platte gegen eine Kerzenflamme hielt, farbige Kreise. Um die komplizierteren elektrochemischen Ringe, welche entstehen, wenn man an Stelle eines Platindrahtes mehrere anwendet, welche symmetrisch auf der Metallplatte verteilt sind, hydrodynamisch nachzuahmen, wandte er[4]) eine zylinderförmige Trommel an, welche auf der unteren Seite eine Reihe von symmetrisch gestellten parallelen Ansatzröhren trug, während sich an der oberen Seite ein einziges breites Rohr für die Zuleitung des Wassers befand. Liess er mit Hülfe dieses Apparates gleichzeitig mehrere Wasserstrahlen auf die Platte treffen, so erhielt er ähnliche Figuren, wie die zusammengesetzten elektrochemischen Ringe. Um farbige Ringe nach Art der Nobili'schen „rosaces metallo-chromiques, qui ont figuré à l'Exposition universelle d'électricité de Paris" zu erhalten, wandte er[5]) das Mittel an, dass er die Flüssigkeit, welche aus dem Apparate durch die Röhre ausfloss, durch ein darin suspendiertes von der Mennige verschiedenes Pulver färbte. Um die Ringe auf dem Glase fixiert zu erhalten, benutzte er nicht kontinuierliche Ströme, sondern endliche oder Flüssigkeitskolonnen, wie er sich ausdrückt. Auch durch das Auffallen blosser Wassertropfen entstehen den elektrochemischen Ringen ähnliche Figuren, ja sogar beim Auffallen einer Bleikugel gegen eine feste Platte[6]). Die Kugel plattet sich dabei ab, es bilden sich ein oder mehrere Ringe, von denen radiale Strahlen ausgehen, während die Begrenzung blumenkronähnlich ausgebuchtet ist. — Alle diese hydrodynamischen Nachahmungen der elektrochemischen

---

[1]) C. R. T. 94. P. 527. [2]) C. R. T. 94. P. 643. [3]) C. R. T. 94. P. 722. [4]) C. R. T. 98. P. 558. [5]) La Lum. électr. T. 17. P. 289. [6]) La Lum. électr. T. 13. P. 123.

Ringe sind nun offenbar höchst äusserlich und betreffen durchaus nicht das Wesen der Erscheinungen. Denn bei der Bildung der elektrochemischen Ringe ist das Wesentliche die Zersetzung der in Lösung auf der Platte befindlichen Substanz durch den galvanischen Strom, während die Ringe bei jenen Nachahmungen einfach durch die mechanische Wirkung des aufschlagenden Wasserstrahles zustande kommen. Der Grund der Analogieen liegt in der Übereinstimmung der äusseren Bedingungen, nämlich darin, dass in beiden Fällen von einem oder mehreren Punkten der Platte sich eine gewisse Wirkung nach allen Seiten auszubreiten bestrebt ist, wobei die Regelmässigkeit der Ausbreitung abhängt von der Regelmässigkeit, mit welcher jene Wirkung in dem Punkte erzeugt wird.

Ferner hat Decharme die Kraftlinien eines elektrischen Stromes und die Schichtenbildung des elektrischen Lichtes in verdünnten Gasen mit Hülfe einer mit Mennige bedeckten Glasplatte nachgeahmt.[1]) Die Kraftlinien des elektrischen Stromes in einer zu seiner Richtung senkrechten Ebene erhält er, wenn er durch ein fein ausgezogenes Glasrohr einen kontinuierlichen Wasserstrom senkrecht gegen jene Platte treffen lässt, in einer Ebene parallel zur Stromrichtung, indem er einen Luftstrom durch dasselbe Rohr bläst, dieses aber gleichzeitig schnell parallel zur Platte verschiebt. Die Kraftlinien zweier gleichgerichteten Ströme in einer Ebene senkrecht zu ihrer Richtung fand er, wenn er durch zwei Glasröhren gleichzeitig blies, diejenigen entgegengesetzt gerichteter Ströme, wenn er in die eine Röhre blies und gleichzeitig die andere ansaugte. Auch hier liegt der Grund der Analogie in der Übereinstimmung der Anordnung. Sowohl von den elektrisch erregten Drähten, welche Kraftlinien zeigen, als auch von den Wasser- und Luftströmen, welche in ihrer Bewegung plötzlich gehindert werden, gehen Kräfte aus, die sich nach allen Seiten auszubreiten suchen und sich infolgedessen regelmässig um die Ausgangspunkte anordnen. Da die letzteren in beiden Fällen dieselben sind, so werden auch die durch die Kräfte erzeugten Wirkungen gewisse Übereinstimmung aufweisen müssen. — Denselben Grund hat im wesentlichen auch die Nachahmung der Schichtenbildung des elektrischen Lichtes in verdünnten Gasen.[2]) Decharme erhielt dieselbe dadurch, dass er über eine horizontale mit einer dünnen Mennigschicht bedeckte Platte eine vertikal gerichtete Röhre, aus der ein Wasserstrahl austrat, schnell dahinstreichen liess. Die Analogie zwischen der auf diese Weise in der Staubschicht entstehenden Figur mit jenem elektrischen Phänomen soll so weit gehen, dass sogar die bei dem letzteren an den beiden Polen auftretenden kugel- bezw. strahlenförmigen Lichtbildungen in Gestalt von Kreisen und Strahlen auf der Platte erscheinen. Man kann in diesem Falle den Übergang der Elektricität zwischen den beiden Polen wohl kaum direkt mit dem Wasserstrom vergleichen, da derselbe jedenfalls ganz anders vor sich geht als in einem Leiter. Das übereinstimmende in den Ursachen ist auch hier, dass symmetrisch zu einer gewissen Linie sich eine gewisse Wirkung auszubreiten strebt. Die Erscheinungen an den Enden der hydrodynamischen Figur lassen sich durch längere Andauer des Stromes zu Anfang und zu Ende der Bewegung erklären.

Ausser den genannten elektrischen Erscheinungen hat Decharme auch die verschiedenen Formen des elektrischen Funkens, die Lichtenberg'schen Figuren, ja sogar physiologische Wirkungen des elektrischen Stromes nachgeahmt. Aber die bisher angeführten Nachahmungen genügen wohl schon, um sich davon zu überzeugen, dass durch dieselben für die Fluxionstheorie der Elektricität wenig gewonnen ist. Dieselben sind alle nur so oberflächlich und äusserlich, dass sie durchaus nicht zu dem Schlusse berechtigen, dass die Ursachen der beiden Arten von Erscheinungen dieselben seien. Und doch hat Decharme sich hierzu berechtigt gefühlt. Er hat, gestützt auf seine Versuche, die Ansicht ausgesprochen[3]), dass die Elektrizität im Zustande des Strömens, abgesehen davon, ob das Strömende der Äther oder irgendwelche ponderable Materie ist, durchaus analog sei mit einem Flüssigkeitsstrome und im Zustande der Spannung mit einer Flüssigkeitsmenge, welche sich in einen Strahl ergiessen kann. Mit einem anderen Franzosen, Ledieu, welcher seine Nachahmungen falsche Analogieen nannte[4]), führte er dann einen längeren Streit, bei welchem er als Stützpunkt für seine Ansicht immer nur die Objektivität seiner Versuche anführte, während Ledieu's Theorie über das Wesen der Elektricität[5]) sich nur

[1]) C. R. T. 95. P. 340. [2]) C. R. T. 95. P. 387. [3]) C. R. T. 95. P. 1273. [4]) C. R. T. 95. P. 669. [5]) C. R. T. 95. P. 753.

auf Hypothesen stütze, die des experimentellen Nachweises unfähig seien. Diesen letzteren Vorwurf wies indessen Ledieu in sehr nachdrücklicher Weise zurück. Der Streit blieb natürlich ohne äusserliche Entscheidung. Im Grunde zog aber Decharme den kürzeren dabei, indem Ledieu zulezt erklärte, er werde nur noch auf bestimmte Angriffe gegen seine Theorie antworten, worauf von Seiten Decharme's nichts mehr erfolgte.

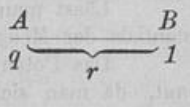
Derselbe Wert wie den Decharme'schen Analogieen ist auch noch anderen z B. den von P. Secchi[1]) und von Ch. Cros[2]) aufgestellten beizumessen. Dieselben beziehen sich auf Induktionserscheinungen bezw. auf eine Eigenschaft der Leitung beim Bell'schen Telephon. Wir können dieselben hier übergehen, da der Beispiele für oberflächliche Analogieen schon genug angeführt sind.

3.

Wir kommen nun zu der zweiten, vorher bereits gekennzeichneten Reihe von hydroelektrischen Analogieen. Dieselben sollen durchaus nichts bezüglich des Wesens der Elektricität beweisen, sondern vielmehr unter der Voraussetzung, dass dieselbe sich wie eine imponderable Flüssigkeit verhält, von welcher Voraussetzung die mathematische Theorie der Elektricität übrigens immer noch ausgeht, durch Vergleichung mit den ponderabeln Flüssigkeiten zur Veranschaulichung der elektrischen Grundbegriffe, insbesondere des Begriffes des Potentials dienen.

Das Potential ist ein Begriff von ursprünglich rein mathematischer Natur, da dasselbe von Laplace und Green als eine Funktion eingeführt worden ist, deren Differentialquotient nach einer bestimmten Richtung die in diese Richtung fallende Komponente der elektrischen Kraft vorstellt. Sie diente also zunächst nur zur bequemeren Darstellung der Kraftkomponenten.

Befindet sich in einem Punkte A die Elektricitätsmenge $+ q$ und in einem Punkte B im Abstande r von A die positive Elektricitätseinheit, so ist die Kraft f, mit welcher die Menge q auf die Einheit wirkt, nach dem Coulomb'schen Gesetze:



$$f = \frac{q}{r^2}.$$

Diese Grösse f lässt sich leicht als Differentialquotient einer anderen Grösse

$$v = \frac{q}{r}$$

nach r darstellen, da $\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{r}\right) = -\frac{q}{r^2}$ ist. Demnach ist:

$$f = -\frac{dv}{dr}. \qquad (1)$$

Die hieraus sich ergebende Erklärung des Potentials der Elektricitätsmenge q in der Entfernung r von derselben als einer Funktion, deren Differentialquotient nach r die Grösse der Kraft angiebt, welche die Elektricitätsmenge q auf die Einheit der Elektricitätsmenge in der Entfernung r ausübt, ist nun durchaus nicht geeignet, eine klare Vorstellung über diese Grösse zu erwecken.

Man kann aber aus der Gleichung *(1)* eine zweite Erklärung des Potentials ableiten. Es folgt nämlich aus derselben:

$$dv = -fdr. \qquad (2)$$

Das Produkt fdr ist aber nichts anderes als die mechanische Arbeit, welche von der Kraft f geleistet werden muss, wenn die positive Einheit um das unendlich kleine Stück dr von der Menge q weg verschoben wird, $-fdr$ die Arbeit, welche gegen die Kraft f geleistet werden muss, um die Einheit um das Stück dr gegen die Menge q hin zu bewegen. Gleichung *(2)* sagt also, dass die Zunahme des Potentials bei der unendlich kleinen Verschiebung der Elektrizitäts-

[1]) In seinem Werke „Sur l'unité des forces physiques". [2]) C. R. T. 103. Pag. 1006.

einheit nach der Menge q hin gleich ist der dabei gegen die abstossende Kraft geleisteten Arbeit. Geht man nun zu endlichen Grössen über, indem man die Gleichung *(2)* zwischen den Grenzen r_1 und r, wo $r_1 > r$, integriert, so erhält man:

$$\int_r^{r_1} dv = -\int_r^{r_1} f dr, \qquad \text{oder:}$$

$$v_r - v_{r_1} = \int_r^{r_1} f dr. \tag{3}$$

Hier bedeutet die linke Seite die Zunahme des Potentials bei der Bewegung der Elektricitätseinheit vom Punkte r_1 nach dem Punkte r, die rechte Seite die dabei geleistete Arbeit. Bewegt sich also die positive Elektrizitätseinheit von dem Punkte mit dem Abstande r_1 nach dem Punkte mit dem Abstande r, wo $r_1 > r$ ist, so ist die Zunahme des Potentials gleich der dabei geleisteten Arbeit. Rückt man endlich mit r_1 ins Unendliche, so wird $v_\infty = \frac{q}{\infty} = 0$ und

$$v_r = \int_r^{\infty} f dr. \tag{4}$$

Das heisst das Potential der Elektricitätsmenge $+q$ in einem Punkte, dessen Abstand von q gleich r ist, ist die Arbeit, welche geleistet werden muss, um die positive Elektricitätseinheit aus unendlicher Entfernung in diesen Punkt zu bringen, bezw. die Arbeit, welche die Einheit selbst leistet, wenn sie aus diesem Punkte sich in unendliche Entfernung bewegt.

Lässt man noch r gleich o werden, so erhält man eine entsprechende Erklärung des Potentials der Menge q in dem Punkte, in welchem sie concentriert gedacht ist.

Das Potential einer elektrisch geladenen Kugel in einem Punkte ihrer Oberfläche ist somit, da man sich bekanntlich die Ladung ohne Änderung der Wirkung in ihrem Mittelpunkte concentriert denken kann, die Arbeit, welche geleistet werden muss, um die positive Einheit der Elektricität aus unendlicher Entfernung auf die Kugel zu bringen. Hiermit haben wir diejenige Definition des elektrostatischen Potentials, welche wir überall da zu geben gewöhnt sind, wo die mathematische Betrachtung, wenigstens die Infinitesimalrechnung, vermieden werden muss, z. B. bei der Behandlung der Elektricität auf den höheren Schulen. Es will indessen so scheinen, als ob diese Definition noch keine klare Vorstellung von dem Potential eröffne und zwar einmal, weil das Unendliche darin vorkommt, sodann aber besonders deshalb, weil das Agens, von der es eine Funktion darstellt, selbst unfassbar ist. Wir haben aber zu dem elektrischen Potential ein fast absolutes Analogon in dem Massenpotential und dieses eignet sich daher ganz vorzüglich zum Vergleiche.

Das von Newton aufgestellte Gesetz für die Attraktion der Teilchen der ponderabeln Materie stimmt nämlich genau überein mit dem Coulomb'schen Gesetz für die Elektricität. Dass bei der letzteren auch Abstossung stattfinden kann, macht für die Begriffe keinen wesentlichen Unterschied, da Abstossung nur eine einfache Umkehrung der Anziehung ist, die sich auf die Richtung bezieht und sich in den Formeln nur durch die Umkehrung des Vorzeichens bemerklich macht. Man versteht daher unter dem Potential einer Massenkugel, etwa der Erde, wenn man sich dieselbe als vollkommene Kugel denkt, in irgend einem Punkte diejenige Arbeit, welche geleistet werden muss, um die Masseneinheit, etwa 1 kg aus diesem Punkte entgegen der Schwerkraft bis in unendliche Entfernung zu bringen. Denken wir uns dieselbe Kugel mit negativer Elektricität geladen, so haben wir für das elektrische Potential in dem nämlichen Punkte eine der vorigen genau entsprechende Definition. Indessen auch diese Definition des Massenpotentials birgt noch eine gewisse Schwierigkeit für die Auffassung, da das Unendliche in derselben eine Rolle spielt. Aber auch diese kann beseitigt werden.

Das Potential der Erdkugel in Bezug auf einen Punkt an der Oberfläche derselben ist gleich der Arbeit, welche geleistet wird, wenn 1 kg bis in unendliche Entfernung gehoben wird.

Nennt man diesen Potentialwert C und den Wert des Potentials in einem Punkte P, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Erde grösser ist als der Erdradius V, so ist offenbar:

$$C = V + W \tag{5}$$

wo W die Arbeit bedeutet, welche notwendig ist, um 1 kg von der Oberfläche bis in den Punkt P zu heben. Da C für alle Punkte der Kugeloberfläche denselben constanten Wert hat, so kann man an Stelle der Grösse V die Grösse $W = C - V$ betrachten. Man könnte die Grösse W das Ergänzungspotential nennen. Der Verlauf desselben zwischen der Erdoberfläche und dem Unendlichen ist genau der umgekehrte von dem des Potentials. Das Potential hat an der Oberfläche den Wert C, im Unendlichen den Wert 0; das Ergänzungspotential umgekehrt an der Oberfläche den Wert 0, im Unendlichen den Wert C. Alles Gesagte gilt in derselben Weise für die elektrisch geladene Kugel. In beiden Fällen ist also das Potential in einem Punkte ausserhalb der Kugel bis auf das Vorzeichen und eine additive Constante gleich der mechanischen Arbeit, welche geleistet werden muss, um die Einheit der Masse bezw. der Elektricität von der Oberfläche in der Richtung des Radius bis in den betreffenden Punkt zu führen. Bei dieser Erklärung des Potentials ist also das Unendliche bereits vollständig vermieden.

Zweckmässiger ist es noch aus manchen Gründen das eigentliche elektrische Potential V direkt mit dem abgeleiteten Gravitationspotential W zu vergleichen. Dies wird durch folgenden Umstand möglich. Aus der aus Glg. (4) abgeleiteten Definition für das Potential einer elektrisch geladenen Kugel folgt nicht ohne Weiteres, wie gross das Potential einer unelektrischen Kugel auf ihrer Oberfläche angenommen werden muss. Da dasselbe aber auf einer positiv geladenen Kugel einen positiven, auf einer negativ geladenen einen negativen Wert hat, so müssen wir seinen Wert auf einer ungeladenen Kugel gleich Null setzen. Eine solche unelektrische Kugel nun ist die Erde selbst, da die relativ sehr geringe Ladung, welche dieselbe aller Wahrscheinlichkeit nach besitzt, im allgemeinen vernachlässigt werden kann. In Glg. (3) wird also v_{r_1} nicht nur für einen Punkt im Unendlichen zu Null, sondern auch für einen Punkt auf der Erde. Daraus ergiebt sich aber als zweite Erklärung für das Potential einer elektrisch geladenen Kugel in einem Punkte P ausserhalb derselben diejenige Arbeit, welche geleistet werden muss, um die positive Elektricitätseinheit von der Erdoberfläche in den betreffenden Punkt zu bringen. Setzt man in dieser Definition des elektrischen Potentials im Punkte P an Stelle der Elektricitätseinheit die Masseneinheit, so hat man diejenige des Ergänzungspotentials der Erde in demselben Punkte. Aus dieser völligen Übereinstimmung in der Definition der beiden Potentiale, deren Werte allerdings nur für Punkte zwischen beiden Kugeln auf der gemeinschaftlichen Centrale bei richtiger Wahl der Constanten zusammenfallen, leitet sich die Berechtigung her, ganz allgemein elektrische Potentiale durch Ergänzungspotentiale darzustellen und zur Anschauung zu bringen. Diese Art der Veranschaulichung ist aber von grösstem Werte, da man sich viel eher eine Vorstellung machen kann von der Arbeit, die erforderlich ist, um 1 kg oder 1 l Wasser bis zu einer bestimmten Höhe zu heben, als von derjenigen, welche geleistet wird, wenn die Elektricitätseinheit gegen einen geladenen Körper bewegt wird. Eine Reihe von Beispielen wird dies des Nähern erläutern.

Werden zwei elektrisch geladene Leiter mit einander in Berührung gebracht, so bleibt das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn die Elektricität auf beiden gleiches Potential hat. Ist dasselbe verschieden, so tritt eine Elektricitätsbewegung ein und zwar strömt solange Elektricität vom höheren zum niederen Potential über, bis das Potential auf beiden Leitern denselben Wert hat. Das Analogon hierzu erhält man, wenn man die beiden Leiter mit zwei cylindrischen Gefässen vergleicht, welche zum Teil mit Wasser gefüllt sind und durch eine Röhre am unteren Ende mit einander in Verbindung gesetzt werden können. Bei Herstellung der Verbindung wird nach dem Gesetze der communicirenden Röhren nur dann das Gleichgewicht ungestört bleiben, wenn das Wasser in beiden Gefässen gleich hoch steht, d. h. wenn die Oberflächen gleiches Potential[1]) haben. Im anderen Falle wird auch hier das Wasser solange vom höheren zum niederen Potential abfliessen, bis das Potential in beiden Gefässen gleich geworden ist. Man erkennt, dass bei dem Wasser die Begriffe Potential und Niveau zusammenfallen und dass für

[1]) Im Folgenden soll anstelle des Wortes „Ergänzungspotential" der Kürze halber „Potential" gesetzt werden.

Wasser und Elektricität das gemeinschaftliche Gesetz gilt: „Die Flüssigkeit fliesst vom höheren zum niederen Potential ab".

Unter Kapacität eines elektrisch geladenen Leiters versteht man diejenige Elektricitätsmenge, welche notwendig ist, um denselben auf das Potential 1 zu bringen. Ebenso kann man die Kapacität eines cylindrischen Gefässes durch die Wassermenge definieren, welche dasselbe bis zur Höhe (Potential) 1 füllt. Sowie nun das Gleichgewicht des Wassers in zwei mit einander kommunicierenden Gefässen nicht von der Weite d. h. also von der Kapacität derselben abhängt, ist auch das Gleichgewicht zweier elektrisch geladener Leiter durchaus von der Kapacität derselben unabhängig, die ja bei verschieden grossen Leitern eine ganz verschiedene ist.

Diejenige Arbeit[1]), welche erforderlich ist, um einen Leiter von der Kapacität C auf das Potential V zu laden, nennt man seine potentielle Energie, da er diese Arbeit durch Abfliessenlassen der Ladung zum Potential Null, beispielsweise zur Erde, jederzeit wieder leisten kann. Nach der Definition der Kapacität ist die Ladung gleich CV. Diese ist auf den ungeladenen Leiter mit dem Anfangspotential o und dem Endpotential V gebracht worden, wofür ein mittleres constantes Potential $\frac{V}{2}$ gesetzt werden kann. Um nun die Menge CV auf einen Leiter mit dem Potential $\frac{V}{2}$ zu bringen, ist die Arbeit $\frac{1}{2}CV^2$ erforderlich. $\frac{1}{2}CV^2$ ist also die potentielle Energie des geladenen Leiters. Dieselbe Formel erhält man für die potentielle Energie eines bis zur Höhe V mit Wasser gefüllten cylindrischen Gefässes von der Kapacität C. Die Menge des Wassers ist CV und der Schwerpunkt derselben ist bis zur Höhe $\frac{V}{2}$ gehoben. Die dabei geleistete Arbeit oder die potentielle Energie des gefüllten Gefässes ist also ebenfalls gleich $\frac{1}{2}CV^2$.

Wenn auf einem ungeladenen Conduktor durch Influenz die vorher gebundenen Elektricitäten geschieden werden, sodass die eine Seite positiv die andere negativ elektrisch ist und sich dazwischen eine unelektrische Zone befindet, so muss trotz dieser ungleichen Verteilung der elektrischen Massen das Potential auf der ganzen Oberfläche des Körpers denselben Wert haben, da sonst nach dem Vorigen Bewegung eintreten müsste. Ein Analogon hierzu bietet ein Paar kommunicierender Röhren, welches durch eine Centrifugalmaschine in eine gleichmässige Rotation versetzt ist[2]). Es zeigt sich hierbei, dass das Wasser in dem der Rotationsaxe näheren Schenkel unter dem ursprünglichen Niveau in dem anderen über demselben steht. Auch hier ist also die Verteilung der Wassermassen in beiden Schenkeln eine ungleiche; trotzdem ist das Potential in allen Punkten der Wasserfläche dasselbe. Dies erklärt sich daraus, dass hier zu der Schwerkraft noch die Fliehkraft hinzukommt, welche sich in jedem einzelnen Punkte mit jener zu einer Resultante zusammensetzt, welche eine andere Richtung hat als die erstere allein für sich. Ebenso setzen sich bei dem influenzierten Leiter die Kräfte, welche die verteilten Elektricitäten nach aussen hin ausüben mit der Kraft des Influenz erregenden Körpers so zusammen, dass trotz der verschiedenen Verteilung der Elektricitäten auf dem Leiter das Potential überall denselben Wert hat.

Dieselbe Erscheinung kann man auch vergleichen mit derjenigen, welche eintritt, wenn man eine mit einem die Wärme schlecht leitenden Gase gefüllte Röhre an einem Ende erwärmt. An dieser Stelle dehnt sich das Gas aus und wird verdünnt während es an dem anderen comprimiert und infolgedessen dichter wird. Bei konstanter Temperatur wird allmählich ein Gleichgewichtszustand eintreten, bei welchem die Masse des Gases in der Röhre ganz ungleich verteilt ist, während der Druck an allen Stellen derselbe sein muss.

Von der oscillatorischen Entladung der Leydener Flasche kann man sich leicht eine Vorstellung machen, wenn man sie vergleicht mit dem Hin- und Herschwanken des Wassers in kommunicierenden Röhren[3]). Sind zwei solcher Röhren durch einen Schieber von einander trennbar und füllt man die eine bis zu einer grösseren Höhe mit Wasser als die andere, so strömt beim Öffnen des Schiebers zufolge des Trägheitsgesetzes zu viel Wasser aus der ersten Röhre

[1]) Müller-Pouillet Bd. 3. Pag. 213. [2]) M. P. Bd. 3. Pag. 139. [3]) M. P. Bd. 3. Pag. 292.

in die zweite; dasselbe fliesst dann wieder zurück und so schwankt das Wasser eine Zeit lang hin und her. Dies wird aber nicht eintreten, wenn man in der Verbindungsröhre ein Hindernis anbringt, sodass das Wasser nur langsam aus der einen Röhre in die andere überfliessen kann. Ebenso erhält man bei der Leydener Flasche eine Reihe von Entladungen bei geringem Widerstande, eine einzige continuierliche Entladung dagegen wenn man den Leitungswiderstand des Schliessungsbogens durch Einschaltung schlecht leitender Substanzen vermehrt.

Eine der bekanntesten hydroelektrischen Analogieen ist diejenige zwischen dem elektrischen Flugrade und dem Segner'schen Wasserrade. Bei beiden Apparaten ist die Erscheinung äusserlich genau dieselbe: Die Räder drehen sich der Richtung des ausströmenden Fluidums entgegen. Bei dem Segner'schen Wasserrade ist die Erklärung einfach. Das in den Apparat eintretende Wasser steht unter Druck; dieser Druck wirkt gleichmässig auf alle inneren Wände des Rades und wird so aufgehoben. An der Öffnung durch die das Wasser ausströmt, dagegen ist er gleich Null, sodass an der gegenüberliegenden Wand ein Druck herrscht, der nicht aufgehoben wird, und dieser setzt das Rad in Bewegung. Bei dem elektrischen Flugrade ist die Bewegung eine Folge der Spitzenwirkung. Diese wird nach den neuesten Untersuchungen von Nahrwold[1]) dadurch erklärt, dass die der Spitze zunächstliegenden Staubteilchen der Luft mit der auf der Spitze angehäuften Elektricität gleichnamig elektrisch und dann von derselben abgestossen werden. So entsteht der elektrische Wind, dessen mechanische Gegenwirkung die Bewegung des Rades ist. In beiden Fällen ist es im Grunde die Potentialdifferenz, welche die Bewegung erzeugt. Bei dem Wasserrade ist der Druck des Wassers eine Folge des hohen Potentials seiner Oberfläche. Die potentielle Energie, welche das Wasser infolgedessen besitzt, wird beim Ausströmen in kinetische Energie verwandelt und zwar nach der einen Seite in diejenige des bewegten Wassers, nach der anderen in diejenige des bewegten Rades. Bei dem elektrischen Flugrade geht infolge der Potentialdifferenz zwischen der Oberfläche des Rades und den Staubteilchen, deren Potential Null ist, Elektricität auf diese über; dann werden sie wegen der hohen Spannung der Elektricität auf der Spitze mit grosser Kraft von derselben abgestossen.

Bekanntlich ist es nicht möglich, durch irgend welche Kombination von Leitern erster Ordnung einen elektrischen Strom zu erhalten. Bringt man Zink mit Kupfer in Berührung, so entsteht eine bestimmte Potentialdifferenz, das Zink wird positiv, das Kupfer negativ elektrisch. Verbindet man nun Zink und Kupfer durch einen Platindraht, so fliesst nicht etwa Elektricität vom höheren Potential zum niederen durch den Platindraht ab, sondern es entsteht nach der Volta'schen Spannungsreihe bei der Berührung von Zink und Platin eine Potentialdifferenz, welche so gross ist als die Potentialdifferenzen von Zink und Kupfer und Kupfer und Platin zusammengenommen. Zwischen dem Platindraht und dem Zink herrscht also, wenn die Kette noch offen ist, gerade die Potentialdifferenz, welche zwischen den beiden Metallen bei der Berührung entstehen würde, sodass ein Ausgleich von Elektricitäten überhaupt nicht stattfinden kann. — Ein schönes Analogon hierzu[2]) bieten uns verschieden weite Kapillarröhren, welche nebeneinander in ein Gefäss mit Wasser gestellt und durch horizontale Röhren unterhalb der gehobenen Wasserspiegel miteinander verbunden sind. Obwohl das Wasserniveau von der engsten Röhre bis zur weitesten stetig fällt, fliesst doch nicht das Wasser nach dem Gesetze der kommunizierenden Röhren vom höheren Niveau zum niederen ab. Denn diejenige Kraft, welche das Wasser gehoben hat, hält es in der Höhe fest und wirkt dem Abfliessen in die nächste Röhre mit niederem Niveau entgegen. Die Kapillarität spielt hier eine ähnliche Rolle wie in dem oben behandelten Falle die Centrifugalkraft. In beiden Fällen würde übrigens auch ein perpetuum mobile vorhanden sein, wenn ein kontinuierlicher Strom entstände.

Wir kommen nun, nachdem wir im Vorigen vorwiegend hydrostatische und elektrostatische Erscheinungen miteinander verglichen haben, zu einer Reihe von hydrodynamischen Analogieen zu elektrodynamischen Phänomenen.

Stellt man einen Zinkstab in ein Gefäss mit verdünnter Schwefelsäure, so tritt an der Berührungsstelle eine elektromotorische Kraft auf, zufolge deren das Zink ein negatives, die Flüssigkeit ein positives Potential erhält. Wir vergleichen diesen Vorgang mit folgendem hydro-

[1]) Wiedem. Ann. Bd. 31. Pag. 448. [2]) M. P. Bd. 3. Pag. 346.

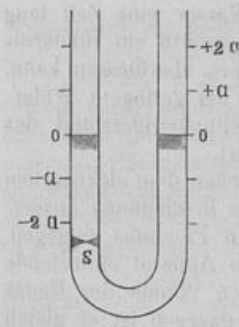


Fig. 1.

dynamischen[1]). In dem einen Schenkel einer u-förmig gebogenen Röhre (U-Röhre), die zum Teil mit Wasser angefüllt ist (Fig. 1), denken wir uns am unteren Ende ein kleines Schraubenrad nach Art der Schiffsschrauben angebracht. Wird dieses Rad in schnelle Rotation versetzt, so treibt es Wasser aus dem einen, etwa dem linken, Schenkel in den rechten hinüber und zwar so lange, bis das Gewicht der Wassersäule, welche im rechten Schenkel über dem Niveau im linken Schenkel steht, gleich der treibenden Kraft der Schraube ist. Ist dabei das Niveau im linken Schenkel um die Höhe a gefallen, so ist es im rechten Schenkel um die gleiche Höhe gestiegen, sodass die Niveaudifferenz $2a$ beträgt. Ebenso wie nun hier durch die Kraft der Schraube dem linken Schenkel eine bestimmte Menge Flüssigkeit entzogen und dem rechten Schenkel hinzugefügt worden ist, ist bei dem galvanischen Fundamentalversuch im Sinne der monistischen Theorie dem Zink ein gewisses Quantum Elektricität durch die elektromotorische Kraft entzogen und in die Flüssigkeit getrieben worden. Bei dieser Analogie tritt besonders klar der Unterschied zwischen elektromotorischer Kraft und Potentialdifferenz zu Tage. Die erstere wird durch die Schraube, die zweite durch die Niveaudifferenz dargestellt. Beide stehen im Verhältnis von Ursache und Wirkung zu einander.

Wird der linke Schenkel in der Höhe o mit einem grossen Wasserreservoir von derselben Niveauhöhe verbunden, so wird das Wasser im rechten Schenkel offenbar bis $+ 2a$ steigen, da in diesem Falle erst dann die Niveaudifferenz $2a$ hergestellt ist. Wäre der rechte Schenkel bei o mit demselben Reservoir verbunden worden, so wäre das Niveau im linken Schenkel bis $- 2a$ gefallen. Ebenso nimmt, wenn man das Zink mit der Erde verbindet, deren Potential o ist, die Flüssigkeit das doppelte positive Potential, wenn man die Flüssigkeit mit der Erde verbindet, das Zink das doppelte negative Potential an.

Bekanntlich erhält man dieselbe Wirkung wie mit Zink auch mit anderen Metallen, z. B. mit Eisen und Kupfer, nur in bedeutend schwächerem Masse, mit Gold und Platin dagegen so, dass bei diesen letzteren das Metall positiv, die Flüssigkeit negativ wird. Da hier die elektromotorische Kraft offenbar in entgegengesetztem Sinne wirksam ist, so braucht man nur, um auch für diesen Fall die Analogie zutreffend zu machen, die Schraube in entgegengesetztem Sinne rotieren zu lassen, sodass das Niveau im linken Schenkel gehoben wird und im rechten Schenkel sinkt.

Bringt man nun zwei Metalle, etwa Zink und Kupfer in denselben Becher mit verdünnter Schwefelsäure, so erhält man ein Element. Bei demselben hat das Zink ein bestimmtes negatives, das Kupfer ein gleich hohes positives Potential, aber der Potentialwert des Zinks ist niedriger als derjenige, den dasselbe haben würde, wenn es sich allein in der Flüssigkeit befände und zwar um den Potentialwert, den das Kupfer haben würde, wenn dieses allein in der Flüssigkeit wäre. — Dieser Vorgang erklärt sich leicht, wenn man die hydrodynamische Analogie der Versuchsanordnung entsprechend abändert. Zu der ersten elektromotorischen Kraft ist eine zweite getreten, welche jener entgegenwirkt. Wir müssen uns also ausser der Schraube s_1 im linken Schenkel eine zweite Schraube s_2 im rechten Schenkel angebracht denken, welche im entgegengesetzten Sinne und bedeutend langsamer rotiert, als die erste. Dann wird die Schraube s_1 nicht mehr imstande sein, eine Flüssigkeitssäule von der Höhe a aus dem linken Schenkel in den rechten zu treiben, sondern, wenn die der Grösse a entsprechende Grösse für die Schraube s_2 mit b bezeichnet wird, nur eine Säule von der Höhe $a—b$, da ja die Schraube s_2 eine Wassersäule von der Höhe b aus dem rechten in den linken Schenkel zu treiben imstande ist. Es wird also im rechten Schenkel das Niveau die Höhe $a—b$, im linken die Höhe $b—a$ haben.

Wird aber anstelle von Kupfer Gold oder Platin verwendet, so ist die entstehende Potentialhöhe nicht gleich der Differenz der Potentiale der einzelnen Metalle, sondern gleich ihrer Summe. Offenbar wirken hier die beiden elektromotorischen Kräfte in gleichem Sinne. Wir werden also, um hierzu die Analogie zu schaffen, die beiden Schrauben in demselben Sinne rotieren lassen müssen.

[1]) M. P. Bd. 3. Pag. 335.

Beide Schrauben zusammen werden nun eine Wassersäule von der Höhe $a + b$ aus dem linken Schenkel in den rechten hineintreiben

Wird der eine Pol eines galvanischen Elementes zur Erde abgeleitet, d. h. auf das Potential Null gebracht, so steigt der Potentialwert des andern Pols auf die doppelte Höhe. Dasselbe tritt bei unserem Hydroelement, wie man die geschilderte Vorrichtung nennen könnte, ein, wenn man den einen der beiden Schenkel bei der Höhe Null mit einem grossen Wasserreservoir verbindet, welches das gleiche Niveau hat. Die beiden Schrauben haben die Fähigkeit, eine Niveaudifferenz von $2\ (a-b)$ herzustellen. Bleibt im linken Schenkel das Niveau auf der Höhe 0, so wird es im rechten auf die Höhe $2\ (a-b)$ steigen, bleibt es im rechten auf der Höhe 0, so wird es im linken um die Höhe $2\ (a-b)$ fallen.

Im folgenden wollen wir nun, der Einfachheit halber, immer nur von einer elektromotorischen Kraft sprechen. Dies ist gestattet, da man sich ja die beiden Kräfte in jedem Falle zu einer einzigen zusammengesetzt denken kann. Ausserdem sind die elektromotorischen Kräfte von Kupfer, Platin und Kohle, wenn bei letzterer überhaupt von einer solchen gesprochen werden darf, so schwach, dass sie im allgemeinen vernachlässigt werden können.

Verbindet man die beiden Pole eines galvanischen Elementes miteinander, so entsteht ein continuierlicher elektrischer Strom, indem die Elektricität vom höheren zum niederen Potential abströmt. Verbindet man die beiden Schenkel des Hydroelementes (Fig. 2) bei dem Niveau $-a$ mit einander durch eine Querröhre, welche mit Wasser gefüllt ist, so wird das Wasser aus dem rechten Schenkel, in welchem es unter dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $2a$ steht, durch die Verbindungsröhre in den linken Schenkel überströmen, in welchem der Druck gleich Null ist, um sodann wieder von der Schraube s gehoben zu werden. Es wird also auch hier ein ununterbrochener Strom entstehen. Die Verbindungsröhre entspricht dabei dem äusseren Schliessungsbogen des Elementes, ihre Endpunkte R und T entsprechen den beiden Polen.

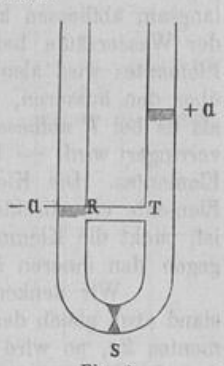


Fig. 2.

Unter Stromstärke versteht man bei den galvanischen Elementen diejenige Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fliesst. Dieselbe Definition kann man auch für den Strom des Hydroelements geben. Man erkennt auch sofort, dass die so definierte Stromstärke in allen Teilen des Stromes gleich gross sein muss, wenn ein stationärer Zustand eingetreten ist; denn sonst würde sich sowohl das Wasser als auch die Elektricität an einzelnen Stellen anhäufen, was den stationären Zustand wieder stören würde.

Bei constantem Gesamtwiderstande des Elementes wächst die Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetze mit der Potentialdifferenz. Dasselbe gilt auch für den Wasserstrom, da die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers bei T mit der Höhe der darüberstehenden Wassersäule zunimmt, wenngleich dieselbe auch nur der Quadratwurzel aus dieser Höhe proportional ist. Ferner ist die Stärke des galvanischen Stromes nach demselben Gesetze umgekehrt proportional dem Widerstande des ganzen Stromkreises. Dieser zerfällt in den inneren und den äusseren Widerstand. Dem inneren Widerstande des Elementes entspricht der Widerstand, den der Wasserstrom zwischen S und T findet, der äussere demjenigen zwischen T und R. Der Leitungswiderstand irgend eines Leiters nun ist proportional der Länge und dem specifischen Leitungswiderstande und umgekehrt proportional dem Querschnitt desselben. Der Wasserstrom findet einen Widerstand nur durch die Reibung an den Wänden der Röhre, abgesehen von der ganz geringen inneren Reibung. Diese bildet aber kein ausreichendes Analogon zu dem specifischen Leitungswiderstande der Leiter des galvanischen Stromes, weil dieselbe zu gering und für die Substanzen, aus welchen Röhren hergestellt werden können, zu wenig verschieden ist. Man muss sich vielmehr, um die Analogie zu vervollständigen, in den Röhren ein gleichmässig verteiltes Hindernis des Stromes angebracht denken, etwa in Gestalt eines mehr oder weniger feinen Drahtgeflechtes, durch welches der Strom gleichsam hindurchgepresst wird. Die grössere oder geringere Dichtigkeit des Geflechtes entspricht dann dem grösseren oder geringeren specifischen Widerstande der Leiter des elektrischen Stromes. Dieser Widerstand ist ebenfalls proportional der Länge der Leitung und umgekehrt proportional dem Querschnitt, insofern als durch den doppelten Querschnitt in derselben Zeit doppelt soviel Wasser

fliesst als durch den einfachen. Denkt man sich die Strombahn des Wassers so eingerichtet, so ist auch die Stromstärke des Wasserstromes dem Gesamtwiderstande umgekehrt proportional.

Um die Druckverhältnisse des Wassers in den einzelnen Teilen des Hydroelementes besser erkennen zu können, denken wir uns die mechanischen Hindernisse zunächst nicht in den Röhren vorhanden. Wenn dann die Schraube S bei ungeschlossenem Element an den Polen R und T die konstante Niveaudifferenz $2a$ herzustellen imstande ist, so wird dies nicht ohne Weiteres auch der Fall sein, wenn die Verbindung RT hergestellt wird. Ist dieselbe nämlich weit genug, so wird bei T mehr Wasser nach R hin abfliessen, als von S aus zugeführt wird, und es wird infolgedessen die Wassersäule bei T solange fallen und bei R steigen, bis infolge des verminderten Druckes wieder ein stationärer Zustand eingetreten ist. Die Niveaudifferenz in beiden Schenkeln wird in diesem Falle also verringert. Wenn nun in den Röhren zwischen S und T und zwischen T und R noch Widerstände von der vorbezeichneten Art vorhanden sind, so erkennt man, dass die Grösse des Niveauunterschiedes in den beiden Schenkeln bei geschlossenem Elemente abhängt von dem Verhältnisse der Widerstände dieser beiden Strecken. Ist der innere Widerstand gegen den äusseren sehr klein, so wird das Wasser, welches nun bei T verhältnismässig nur langsam abfliessen kann, durch die Schraube so schnell nachgeliefert werden, dass das Niveau der Wassersäule bei T gar nicht oder nur sehr wenig sinkt. Die Niveaudifferenz des offenen Elementes wird also fast vollständig erhalten bleiben. Überwiegt dagegen der innere Widerstand über den äusseren, so wird das Wasser durch die Schraube nicht so schnell gehoben werden, als es bei T abfliesst, sodass die Niveaudifferenz wie in dem zuerst betrachteten Falle bedeutend verringert wird. — Diese Verhältnisse stimmen vollständig überein mit denjenigen des galvanischen Elementes. Die Klemmenspannung, d. h. die Potentialdifferenz der Pole ist nur beim offenen Elemente ein direktes Mass für die elektromotorische Kraft. Sobald das Element geschlossen ist, sinkt die Klemmenspannung und zwar um so stärker, je geringer der äussere Widerstand gegen den inneren ist.

Wir denken uns nun ein Hydroelement in Thätigkeit, bei welchem der innere Widerstand etwa gleich dem äusseren ist. War die Höhe der Wassersäule über T vor Schliessung des Elementes $2a$, so wird sie jetzt etwa auf $2a-e$ herabgesunken sein, während über R eine Säule von der Höhe e steht. Die Niveaudifferenz beträgt dann $2\,(a-e)$. Da die Schraube imstande ist eine Wassersäule von der Höhe $2a$ zu heben, so steht das Wasser auf der rechten Seite von S unter dem Drucke $2a$. Da aber bei T der Druck nur noch $2a-e$ ist, so hat derselbe von S bis T um e abgenommen, offenbar infolge des dazwischenliegenden Widerstandes. Würde man nun auf der Röhre TR Steigröhren anbringen, so würde man finden, dass die Oberflächen des Wassers in denselben mit den Niveaus $2a-e$ über T und e über R in einer geraden Linie liegen. Dies geht hervor aus dem bekannten Versuche über den Ausfluss durch eine horizontale mit Steigröhren versehene Röhre am Boden eines hohen mit Wasser gefüllten Gefässes. Der Sprung, welchen man bei diesem Versuche bemerkt von dem Niveau des Gefässes bis zu dem der ersten Steigröhre, entspricht der Grösse e, um welche die Wassersäule hier bereits gefallen ist; diese Unstetigkeit ist also im vorliegenden Falle nicht vorhanden. Da der Druck des Wassers gemessen wird durch die Höhen der Wassersäulen in den Steigröhren, so entspricht demselben bei dem galvanischen Elemente das Potential. Dieses hat genau wie der Wasserdruck des Hydroelementes an der Berührungsstelle mit der verdünnten Schwefelsäure seinen höchsten Wert und fällt von da stetig — und zwar um so schneller, je grösser der Widerstand ist — bis zum Zink zurück, auf welchem es seinen niedrigsten Wert hat. Der Wasserdruck ist also das natürliche Analogon zu dem Potential des elektrischen Stromes. Die Linie, welche die Niveaus in den Steigröhren verbindet, ist nichts anderes als eine graphische Darstellung des Wasserdruckes in der Röhre RT. In derselben Weise pflegt man den Abfall des elektrischen Potentials in einem linearen Leiter darzustellen. Diese Linie ist in beiden Fällen nur dann eine Gerade, wenn der Leiter bezw. die Röhre in allen Teilen von gleicher Beschaffenheit sind, also vor allem denselben Widerstand besitzen.

Unter dem Gefälle des elektrischen Stromes in einem linearen Leiter versteht man die Potentialdifferenz zweier um die Längeneinheit von einander abstehender Stellen des Leiters. Dieser Begriff, den wir ohne weiteres auf den Wasserstrom des Hydroelementes übertragen können, wird bei demselben dargestellt durch die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die

Verbindungslinie der Niveaus in den Steigröhren mit der Horizontalen bildet. Das Gefälle des Stromes hat in allen Teilen eines gleichartigen Leiters denselben Wert, während die Potentialwerte selbst sich von Punkt zu Punkt ändern.

Die Grösse der erzeugten Niveaudifferenz im offenen Hydroelement ist unabhängig von der Weite der Röhren, mithin auch von der Grösse des Schraubenrades, welches wir uns immer so gross vorstellen müssen, dass es die Röhre gerade ausfüllt. Dieselbe wächst dagegen mit der Rotationsgeschwindigkeit des letzteren. Ebenso ist die Potentialdifferenz der Pole des ungeschlossenen galvanischen Elementes oder die elektromotorische Kraft desselben unabhängig von der Grösse der angewandten Platten; dieselbe ändert sich nur mit der qualitativen Beschaffenheit der letzteren. Dagegen ist die Stromstärke in beiden Fällen bei geringem äusserem Widerstande dem Querschnitte der Röhre bezw. der Grösse der Platten direkt proportional, wie man bei dem Hydroelement unmittelbar einsieht, da eine doppelt so weite Röhre doppelt soviel Wasser zuführt als die einfache.

Wir denken uns nun die ungleichartigen Schenkel *2* und *3* zweier Hydroelemente *I* und und *II* (Fig. 3) bei dem Niveau $-a$ durch eine mit Wasser gefüllte Röhre mit einander verbunden und den Schenkel *3* bei dem unteren Niveau $-a$ nach obenhin verschlossen. Die Wassersäule von der Höhe *2a*, welche im Schenkel *4* über dem Niveau $-a$ steht, wird dann durch die entsprechende Wassersäule im Schenkel *2* im Gleichgewicht gehalten, sodass die Schraube S_2 des Elementes *II* von neuem eine Wassersäule von der Höhe *2a* zu heben imstande ist. Das aus dem Schenkel *2* entnommene Wasser wird durch die Schraube S_1, welche die Niveaudifferenz *2a* zu erhalten sucht, aus dem Schenkel *1* wieder ersetzt. Hat die Schraube S_2 aus dem Element *I* die Wassermenge *2a* herausgepumpt, so müssen die Niveaus in den *4* auf einanderfolgenden Schenkeln $-2a$, o, o, $+2a$ sein. Die Niveaudifferenz zwischen *1* und *4* ist gleich *4a*, d. h. doppelt so gross als bei einem Elemente. Bei drei Elementen würde man die 6fache, bei 4 Elementen die 8fache Differenz erhalten u. s. w. Bei den galvanischen Elementen nennt man diese Art der Verbindung, bei welcher je zwei ungleichartige Pole mit einander verbunden sind, Hintereinanderschaltung und es gilt für dieselben das gleiche Gesetz wie für die Hydroelemente: Bei hintereinandergeschalteten Elementen ist die Potentialdifferenz der Endpole proportional der Anzahl der Elemente.

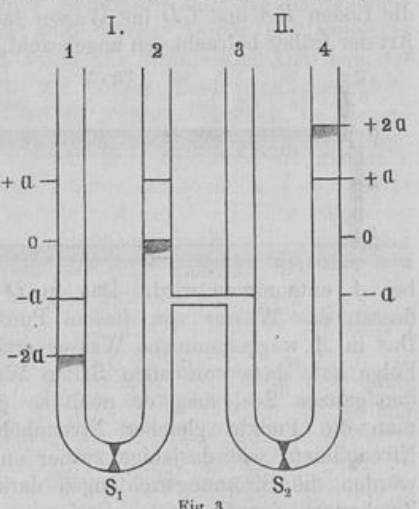


Fig. 3.

Verbindet man die gleichartigen Schenkel *1* und *3* sowie *2* und *4* zweier Hydroelemente (Fig. 4) durch je eine mit Wasser gefüllte Röhre bei $-a$, so bleibt der Niveauunterschied *2a* für das ganze System bestehen. Dasselbe wird sich aber verhalten wie ein Element von doppelter Grösse. Wird nämlich die vordere Verbindungsröhre durch eine Querröhre mit der hinteren verbunden, d. h. das System geschlossen, so sind die beiden Schrauben, welche nebeneinander in demselben Sinne wirken, imstande doppelt soviel Wasser zu liefern als eine. Die Stromstärke wird also, vorausgesetzt, dass die Querröhre so weit ist, dass alles gelieferte Wasser abfliessen kann, in diesem Falle doppelt so gross, bei drei Elementen 3mal so gross sein als bei einem Elemente. Dasselbe finden wir bei galvanischen Elementen: Bei nebeneinandergeschalteten Elementen ist die Stromstärke bei geringem äusseren Widerstande proportional der Anzahl der Elemente.

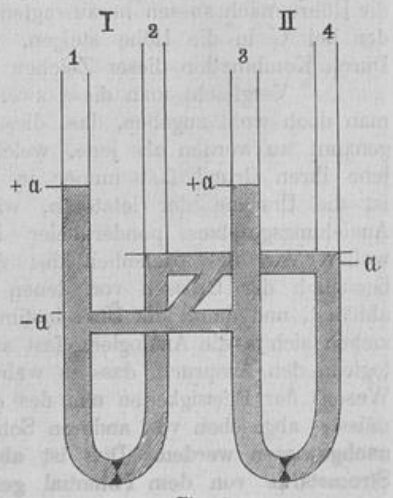


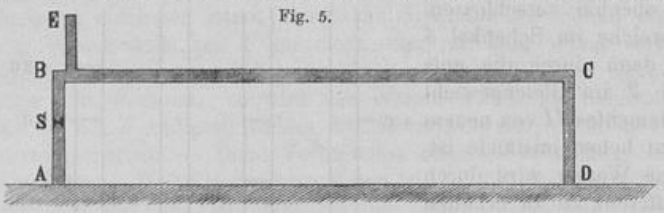
Fig. 4.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Analogie zu einer der wichtigsten praktischen Anwendungen des galvanischen Stromes betrachten.

Durch Zufall fand bekanntlich Steinheil im Jahre 1838, dass die Rückleitung des elektrischen Stromes bei der Telegraphie durch die Erde möglich sei, wenn man an den beiden zu verbindenden Orten Metallplatten in die feuchte Erde versenkte. Wir wissen, dass die Erde das elektrische Potential Null hat. Verbindet man daher die beiden Pole eines Elements mit derselben, so muss vom positiven Pole fortgesetzt Elektricität abfliessen, andrerseits aber von der Erde nach dem negativen Pol Elektricität hinströmen. So entsteht in beiden zur Erde führenden Drähten ein dauernder Strom, ohne dass eine besondere Rückleitung vorhanden wäre. Das Element ist eben durch die Erde geschlossen, deren Oberfläche, soweit sie feucht ist, die Elektricität gut leitet.

In derselben Weise kann man nun in einer Röhre auf beliebig weite Entfernungen einen Wasserstrom erzeugen, ohne dass eine Rückleitung durch eine zweite Röhre vorhanden wäre. Wir denken uns eine lange Röhre *ABCD* (Fig. 5), die an ihren Enden rechtwinklich gebogen ist über einen See mit ruhiger Oberfläche von einem Ufer bis zum anderen hinübergeführt, so dass die Enden *BA* und *CD* ins Wasser tauchen, und in dem einen Schenkel *BA* eine Schraube *S* nach Art der früher betrachteten angebracht, welche imstande ist, das Wasser in diesem Schenkel zu heben.

Fig. 5.



Ein im Punkte *B* angebrachtes Steigrohr *BE* wird dann den Druck angeben, unter welchem das Wasser in diesem Punkte infolge der Kraft *S* steht. Dieser Druck treibt das Wasser in der Röhre von *B* nach *C*. Bei *D* fliesst ebensoviel Wasser in den See ab als demselben bei *A* entnommen wird. Das in *D* zufliessende Wasser erzeugt ein höheres Niveau, zufolge dessen das Wasser von diesem Punkte aus nach allen Seiten nach niederem Niveau abströmt. Das in *A* weggenommene Wasser erzeugt an dieser Stelle eine Depression des Niveaus, was zur Folge hat, dass von allen Seiten Wasser von höherem Niveau zufliesst. Es wird daher durch den ganzen See, mag er noch so gross sein ein Strömen des Wassers entstehen. Würde man die Punkte gleicher Niveauhöhen verbinden, so erhielte man ein ähnliches Bild von Niveaulinien, wie dasjenige zweier entgegengesetzter Magnetpole. Die dazu gehörigen Kraftlinien würden die Strömungsrichtungen darstellen. — Die Röhre würde sich übrigens geradezu zum Zeichengeben auf grössere Entfernungen verwenden lassen, wenn nämlich an Stelle des einen kontinuirlichen Strom erzeugenden Rades *S* und des Steigrohres *BC* in den Schenkeln *BA* und *CD* zwei dicht anschliessende Kolben angebracht würden, deren Stangen bei *B* und *C* durch die Röhre nach aussen herausragten. Würde man dann auf den Kolben bei *B* drücken, so würde der bei *C* in die Höhe steigen, würde man den bei *B* heben, so würde der andere sinken. Durch Kombination dieser Zeichen wäre leicht ein Alphabet herzustellen. —

Vergleicht man diese zweite Reihe von Analogieen mit der zuerst behandelten, so muss man doch wohl zugeben, dass dieselben eher Anspruch darauf machen dürfen wahre Analogieen genannt zu werden als jene, welche schon Ledieu als falsche bezeichnete. Denn während jene ihren Grund fast immer in der Übereinstimmung ganz äusserlicher Bedingungen hatten, ist die Ursache der letzteren, wie eingangs gezeigt worden ist, die Übereinstimmung des Anziehungsgesetzes ponderabeler Flüssigkeiten und der Elektricität, sei diese nun, was sie wolle. Aus der Gleichheit des Anziehungsgesetzes folgt aber die Gleichheit des Potentials bezüglich der Grössen von denen es abhängt und der Art und Weise wie es von denselben abhängt, und damit die Übereinstimmung der Eigenschaften desselben: und auf das Potential beziehen sich ja die Analogieen fast ausschliesslich. Insofern machen wir in Bezug auf unsere Analogieen den Anspruch, dass es wahre seien. Auf Grund derselben aber auf eine Gleichheit des Wesens der Flüssigkeiten und des elektrischen Agens zu schliessen wäre durchaus falsch. Dazu müsste, abgesehen von anderen Schwierigkeiten, eine Übereinstimmung in allen einzelnen Teilen nachgewiesen werden. Dies ist aber nicht möglich, wie sich schon bei der Abhängigkeit der Stromstärke von dem Potential gezeigt hat. Um hier eine grössere Übereinstimmung zu erzielen, würde man vielleicht kompressible Flüssigkeiten zum Vergleich heranziehen müssen. Doch

würde sich dies der Mühe kaum lohnen. Die vorstehenden Analogieen sollten ja nicht den Zweck haben die Fluxionstheorie zu stützen, sondern vielmehr einen rein didaktischen, nämlich die Anschauung bei dem Unterrichte in der Elektricität und zwar besonders bei dem nicht ganz leichten Begriff des Potentials zu fördern. Aber auch hierfür ist es nicht belanglos, ob die aufgestellten Analogieen begründet sind oder nicht. Durch solche Analogieen, wie diejenigen der ersten Reihe, wird man niemals ein tieferes Verständnis physikalischer Erscheinungen erwecken, sondern vielmehr zu einer grenzenlosen Oberflächlichkeit und Äusserlichkeit in der Auffassung derselben die Hand bieten.

Endlich könnte den vorstehenden Analogieen der Vorwurf gemacht werden, dass die praktische Ausführung derselben Schwierigkeiten machen würde. Demgegenüber möchten wir entgegnen, dass diese in Anbetracht des Zweckes, welchem die Analogieen dienen sollen, durchaus nicht notwendig erscheint. Die angeführten Versuche stützen sich fast ausschliesslich auf die einfachsten Gesetze der Hydrostatik und Hydrodynamik; ihre Richtigkeit leuchtet daher ohne weiteres ein. Dieselben an komplicierten Apparaten wirklich auszuführen, würde im Unterricht nicht allein zu viel Zeit in Anspruch nehmen, sondern auch leicht die Aufmerksamkeit von der Sache selbst zu sehr ablenken. Es könnte vielmehr geradezu als Vorzug dieser Analogieen hingestellt werden, dass sie wegen ihrer Einfachheit nicht ausgeführt zu werden brauchen, im Gegensatze beispielsweise zu denjenigen, welche Grimsehl[1]) in seiner Programmabhandlung veröffentlicht hat.

4.

Wir kommen nun zu einer dritten Reihe von Analogieen zwischen Elektrodynamik und Hydrodynamik, welche durchweg einen mehr wissenschaftlichen Charakter tragen als alle vorhergehenden, da sie sich aus der Übereinstimmung gewisser Formeln in der mathematischen Behandlung von Problemen jener beiden Disciplinen ergeben haben.

In seiner berühmten Abhandlung „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“ [2]), macht Helmholtz darauf aufmerksam, dass, wenn in einem einfach zusammenhängenden Raume, der von einer inkompressibeln Flüssigkeit erfüllt ist, ein Geschwindigkeitspotential existiert, d. h. also, wenn der Anfangszustand der Flüssigkeit wirbelfrei ist, dieses Potential der Laplace'schen Differentialgleichung genügen muss, welche mit der Differentialgleichung für das Potential magnetischer Massen übereinstimmt, die ausserhalb des Raumes liegen, für welchen diese Gleichung gelten soll; dass ferner jede Funktion φ, welche jene Gleichung innerhalb eines einfach zusammenhängenden Raumes erfüllt, als das Potential einer bestimmten Verteilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes ausgedrückt werden kann. Hieraus folgt, dass unter den angegebenen Bedingungen die Geschwindigkeiten der Wasserteilchen gleich und gleichgerichtet sind mit den Kräften, welche eine gewisse Verteilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes auf ein magnetisches Teilchen im Innern ausüben würde. Unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit nicht wirbelfrei ist, und die Rotationskomponenten für jeden Punkt der Flüssigkeit bekannt sind, berechnet er nun die Geschwindigkeitskomponenten eines jeden Teilchens der Flüssigkeit und leitet ab, dass der unendlich kleine Teil der gesamten Geschwindigkeit eines im Punkte A befindlichen Teilchens, welches herrührt von der Bewegung des Flüssigkeitsteilchens im Punkte B, genau in derselben Weise von der Grösse dieses Teilchens, der Rotationsgeschwindigkeit desselben, der Entfernung beider Teilchen von einander und dem Winkel zwischen der Rotationsachse im Punkte B und der Verbindungslinie AB abhängt, wie sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetze die Kraft, welche ein in B befindliches Element eines elektrischen Stromes auf einen in A befindlichen magnetischen Einheitspol ausübt, sich durch die Länge des Elementes, die Stromstärke desselben, die Entfernnng AB und die Richtung des Elementes gegen AB ausdrückt.

Helmholtz findet den Grund für diese Analogie in dem Umstande, dass, wenn man, wie vorher geschehen, geschlossene Wirbelfäden annimmt, in denjenigen Teilen der Wassermasse,

[1]) Grimsehl, die Vorgänge beim elektrischen Strome, veranschaulicht durch Flüssigkeitsströme. Cuxhaven 1894. [2]) Crelle's Journal Bd. 55 S. 25.

in denen keine Rotation stattfindet, ein Geschwindigkeitspotential φ existiert, welches der Laplace'schen Differentialgleichung überall genügt, nur nicht im Innern der Wirbelfäden. Der Raum, in welchem φ dieser Gleichung genügt, ist also ein mehrfach zusammenhängender und φ infolgedessen mehrdeutig. Ebenso verhält es sich aber mit den elektromagnetischen Wirkungen eines geschlossenen elektrischen Stromes. Derselbe wirkt in die Ferne wie eine gewisse Verteilung magnetischer Massen auf einer von dem Stromleiter begrenzten Fläche. Ausserhalb des Stromes können deshalb die Kräfte, die er auf einen Magnetpol ausübt, als die Differentialquotienten einer Potentialfunktion V betrachtet werden, welche der Laplace'schen Differentialgleichung genügt. Auch hier ist aber der Raum, welcher den geschlossenen Stromleiter umgiebt und in dem diese Gleichung gilt, mehrfach zusammenhängend und V daher vieldeutig. Bei den Wirbelbewegungen einer inkompressibeln Flüssigkeit also wie bei den elektromagnetischen Wirkungen, hängen Geschwindigkeiten oder Kräfte ausserhalb des von Wirbelfäden oder elektrischen Strömen durchzogenen Raumes von mehrdeutigen Potentialfunktionen ab, welche jener Gleichung genügen, während innerhalb desselben Raumes andere gemeinsame Funktionen auftreten. Dies sind bei den elektrischen Strömen die Vektorpotentiale, bei den Helmholtz'schen Wirbelfäden die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit.

Unabhängig hiervon hat der Schwede Bjerknes[1]) sich mit der Wirkung beschäftigt, welche Kreisströme in Flüssigkeiten aufeinander ausüben. Bei der analytischen Behandlung dieses Problems, welche leider nicht veröffentlicht worden ist, fand er, wenn er zwei ähnliche Kreisströme in einer vollkommenen Flüssigkeit annahm, für die gegenseitige Wirkung zweier Stromelemente aufeinander zwar nicht die Formel von Ampère, sondern diejenige von Grassmann und Régnard, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen, sodass also hier das umgekehrte Gesetz gilt wie bei der Elektricität: Parallele gleichgerichtete Ströme stossen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Die experimentellen Untersuchungen, welche Bjerknes hieran anknüpfte und bei denen er zu der Erzeugung solcher Kreisströme einen Cylinder mit gezähntem Längsschnitt anwandte, den er in einer zähen Flüssigkeit rotieren liess, ergaben, dass die Kraftlinien mit denjenigen zweier elektrischer Ströme übereinstimmten. Das Gesetz, dass parallele und entgegengesetzt gerichtete Ströme sich anziehen, steht durchaus im Einklang mit den von Helmholtz in der oben angeführten Abhandlung für die Bewegung zweier entgegengesetzt rotierender ringförmiger Wirbelfäden gegeneinander abgeleiteten Resultaten, während dieser für den Fall paralleler in derselben Richtung rotierender Wirbelfäden ein komplizierteres Gesetz aufgestellt hat. Obwohl wir nun die Art und Weise, wie Bjerknes jene Formeln abgeleitet hat, nicht kennen, so können wir doch behaupten, dass der Grund der aus derselben folgenden Analogie zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik derselbe ist, wie der von Helmholtz aufgestellte. Denn wenn bei ihm auch die elektrodynamischen Kräfte mit den hydrodynamischen Geschwindigkeiten, bei Bjerknes dagegen mit anderen Kräften verglichen sind, so sind diese letzteren doch nur scheinbare auf den Druckunterschieden in der umgebenden Flüssigkeit beruhende Kräfte, die sich in Wirklichkeit nur durch die dadurch entstehenden Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen manifestieren.

Der Grund der Analogie zwischen diesen beiden Arten von Erscheinungen ist also offenbar die Übereinstimmung in den Eigenschaften des hydrodynamischen Geschwindigkeitspotentials und des elektrodynamischen Kräftepotentials. Über die Ursache dieser Übereinstimmung geben uns die Erscheinungen selbst keinen Aufschluss, man kann darüber nur Vermutungen aufstellen.

Weitere Analogieen haben sich ergeben bei der Behandlung der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten. Mit diesem Problem hat sich seit über 60 Jahren eine grosse Reihe von Gelehrten beschäftigt. Der erste Schritt in dieser Richtung wurde im Jahre 1833 von Green gemacht. Derselbe kommt in seinen „Untersuchungen über die Schwingungen der Pendel in Flüssigkeiten" zu dem Resultate, dass der Widerstand, welchen die Flüssigkeit der Bewegung eines Ellipsoids darbietet, parallel zu einer seiner Axen gerichtet ist. Im Jahre 1843 gab Stokes in seiner Abhandlung „Über einige Fälle der Bewegung der Flüssigkeiten" das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit für den Fall der Bewegung einer Kugel in derselben an. 1852

[1]) Journal de physique Tome X. Pag. 509.

behandelte sodann Dirichlet[1]) die Bewegung der Kugel in einer inkompressibeln Flüssigkeit und trug die Resultate seiner Untersuchungen in einer im Wintersemester 1855/56 in Göttingen gehaltenen Vorlesung vor. Er behandelte dabei zunächst die ruhende Kugel in bewegter Flüssigkeit, sodann die bewegte Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit. Hierdurch angeregt löste Schering 1856 das Problem für den Fall des Ellipsoids nach der Dirichlet'schen Methode, während gleichzeitig und unbhängig von ihm Clebsch eine direkte Lösung des Problems fand.

Im Jahre 1863 erweiterte Bjerknes[2]) das Problem nach einer anderen Richtung hin, indem er die Bewegung einer Kugel mit veränderlichem Volumen untersuchte. Derselbe veröffentlichte dann[3]) im Jahre 1868 die Resultate (ohne Ableitung) für den Fall der Bewegung zweier unveränderlicher Kugeln in den gemeinschaftlichen Centralen. Er findet, dass die gleichförmige Bewegung einer Kugel bei der anderen eine Anziehung hervorruft. Drei Jahre später veröffentlichte Guthrie[4]) einen von Thomson an ihn gerichteten Brief, in welchem dieser eine von ihm gefundene Lösung desselben Problems (ebenfalls ohne Beweis) mitteilt. Er kommt zu dem Resultat, dass wenn eine kleine Kugel in der Centrale mit einer ruhenden grösseren oscilliert, die kleine Kugel die grosse anzieht, wenn die grosse specifisch schwerer ist als die Flüssigkeit; dass dagegen, wenn die grosse specifisch leichter ist als die Flüssigkeit, ein kritischer Punkt existiert, in welchem sich die Anziehung in Abstossung verwandelt. Im wesentlichen zu demselben Resultate gelangten im Jahre 1877 auch Bjerknes[5]) und Hicks[6]) in seiner Untersuchung über die Bewegung zweier Kugeln in einer Flüssigkeit. Alle genannten Autoren wandten bei der Behandlung dieses Problems die Poisson'sche Methode für die Verteilung der Elektricität auf zwei Conduktoren an.

In einer im Jahre 1871 erschienenen Schrift[7]) giebt Bjerknes die vollständige Ableitung des Geschwindigkeitspotentials für den Fall, dass m pulsierende Kugeln, deren Radien gegen ihre Centralabstände kleine Grössen sind, sich in einer unendlichen, homogenen, vollkommenen, inkompressibeln Flüssigkeit mit wirbelfreiem Anfangszustand bewegen. Auf die Ableitung selbst kann hier wie im Folgenden nicht eingegangen werden; es muss aber erwähnt werden, dass das Problem in höchst eleganter und für ähnliche Aufgaben geradezu musterhafter Weise gelöst ist.

In einer weiteren Abhandlung[8]) führt Bjerknes das Problem fort unter der Voraussetzung, dass die 5. Potenzen der Verhältnisse zwischen Radien und Centraldistanzen vernachlässigt werden können und dass die Verhältnisse zwischen den Radialgeschwindigkeiten und den Radien kleine Grössen von der Ordnung der ersteren Verhältnisse sind. Er berechnet die lebendige Kraft der Flüssigkeit und kommt durch die Variation des Integrals der lebendigen Kraft zu den Bewegungsgleichungen für die Kugeln, aus denen hervorgeht, dass die Kugeln sich so bewegen, als wenn ihre Masse noch um die halbe Masse der von ihr verdrängten Flüssigkeit vermehrt wäre und eine äussere Kraft auf jede derselben einwirkte, deren Komponenten durch ein noch näher zu untersuchendes Kräftepotential darstellbar sind. In einer dritten Abhandlung[9]) kommt er dann durch die Betrachtung dieses Kräftepotentials zu den Beziehungen des Problems zur Elektricität. Aus der für das Potential aufgestellten Formel folgt zunächst, dass unter den gemachten

---

[1]) „Über einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einer inkompressibeln Flüssigkeit theoretisch bestimmen lässt." Mitteilung an die Berliner Akademie. Berlin 1852.

[2]) „Om de indre Tilstande i et incompressibelt unbegrändset Fluidum, hvorien kugle beväger sig idet den forandrer Volum." Verhandlung der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1863.

[3]) „Om de samtidige Bevägelse af kugleformige Legemer i et incompressibelt Fluidum." Vorgelegt bei der Versammlung der Naturforscher in Christiania 1868.

[4]) Guthrie „On approach caused by vibration" Phil. Mag. Ser. 4. Vol. 41. 1871.

[5]) Bjerknes, Göttinger gel.-Anz. 1877. Zusatz zu dem Aufsatz des Herrn Professor Schiötz.

[6]) Hicks „On the motion of two spheres in a fluid" Transact. of the Roy. Soc. of Lond. 1880. Part. II.

[7]) Sur le mouvement simultané de corps spheriques variables dans un fluid indéfini et incompressible, prem. mém. présenté à la Société des Sciences de Christiania le 15. sept. 1871.

[8]) „Über die Druckkräfte, die durch gleichzeitige, mit Kontraktionen und Dilatationen verbundene Bewegungen von mehreren kugelförmigen in einer inkrompressibeln Flüssigkeit befindlichen Körpern entstehen." Göttinger Nachr. 1876.

[9]) „Forelöbige Meddelelser om de Kräfter, der opsta, naar kugleformige Legemer, i det de utföre Dilatations- og Contractions-Svinginger, bevaege sig i et incompressibelt Fluidum." Sitzungsbericht der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1875. Auszug daraus im Rep. f. Math. von Königsberger und Zeuner 1876.

Voraussetzungen der Fall mehrerer Kugeln auf den Fall zurückgeführt werden kann, wo nur zwei Kugeln vorhanden sind, da die Kräfte dann von einander unabhängig sind. Ferner ergiebt sich, dass die Kraft, welche auf eine der beiden Kugeln wirkt, unabhängig ist von der Geschwindigkeit, mit welcher sich ihr eigenes Volumen ändert, und endlich, dass merkwürdiger Weise das Princip der gleichen actio und reactio für die Wechselwirkung der beiden Kugeln nur in besonderen Fällen gültig ist.

Im Folgenden wird nun, unter der weiteren Annahme, dass auch die dritten Pontenzen der bezeichneten Verhältnisse vernachlässigt werden können, das Problem zweier Kugeln weiter behandelt. Dabei ergeben sich folgende Resultate: Pulsiert nur die eine der beiden Kugeln und wird das erste Viertel der Pulsationsperiode gerechnet von dem mittleren Volumen der Kugel bis zum grössten, das zweite Viertel vom grössten bis zum mittleren, das dritte vom mittleren bis zum kleinsten und das vierte Viertel vom kleinsten Volumen wieder bis zum mittleren zurück, so findet während der ersten Hälfte der Periode Anziehung, während der zweiten Abstossung zwischen den beiden Kugeln statt. Da die jedesmalige Anziehung der darauf folgenden Abstossung gleich ist, so ist das Resultat eine oscillierende Bewegung der zweiten Kugel. Eine dauernde Annäherung oder Entfernung der Kugeln findet nicht statt. Die Grösse der anziehenden bezw. abstossenden Kraft ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Centralabstandes beider Kugeln.

Pulsieren beide Kugeln gleichzeitig, und zwar so, dass die Maxima und die Minima der Ausdehnung immer zusammenfallen (Eins-Pulsationen), so ziehen sich dieselben an, pulsieren dagegen die Kugeln so, dass dem Maximum der Ausdehnung der einen Kugel das Minimum der Ausdehnung der anderen entspricht und umgekehrt (entgegengesetzte Pulsationen), so stossen sie sich ab. In beiden Fällen wirken die diese Erscheinungen hervorrufenden Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes der Centren der beiden Kugeln.

Diese Anziehung und Abstossung kann man vergleichen mit der magnetischen und elektrischen. In beiden Fällen haben wir dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit der Intensität von der Entfernung. Es besteht indessen der bemerkenswerte Unterschied, dass beim Magnetismus gleiche Pole sich abstossen, entgegengesetzte sich anziehen, während hier gleiche, d. h. in gleichen Pulsationsphasen befindliche, Kugeln sich anziehen, entgegengesetzte, d. h. in entgegengesetzten Phasen befindliche, sich abstossen. Man kann also eine im Wasser pulsierende Kugel mit einem Magnetpol vergleichen und zwar etwa während ihrer Ausdehnung mit einem positiven, während seiner Kontraktion mit einem negativen Pole, wenn man dabei bemerkt, dass das Wirkungsgesetz das umgekehrte ist wie beim Magnetismus. Die Verhältnisse bleiben dieselben, wenn man statt der Magnetpole zwei elektrisch geladene Kugeln zum Vergleiche wählt.

Die hier betrachteten Kräfte nennt Bjerknes, weil bei denselben die dritten Potenzen der reciproken Werte der Entfernungen vernachlässigt worden sind, Kräfte 2. Grades. Er untersucht aber auch die Kräfte 4. Grades, wobei sich eine Ähnlichkeit zwischen diesen und denjenigen Kräften herausstellt, womit zwei Magnete in der Ferne aufeinander wirken. Denkt man sich, dass die beiden Kugeln nicht pulsieren, sondern nach ihren Richtungslinien oscillieren, so erhält das Kräftepotential einen Ausdruck, welcher bis auf das Vorzeichen genau übereinstimmt mit dem Potential zweier unendlich kleiner Magnete mit bestimmten magnetischen Momenten aufeinander, deren Abstand übereinstimmt mit dem Abstande der Kugeln, und deren Richtung von Süd nach Nord zusammenfällt mit der jeweiligen Oscillationsrichtung der Kugeln. Das Vorzeichen ist indessen das entgegengesetzte. Die Wirkung der beiden Kugeln aufeinander ist also die umgekehrte wie die der beiden Magnete. Macht man speciell die Annahme, dass die Richtungen, nach welchen die beiden Kugeln oscillieren, parallel und zur Centrale senkrecht sind, so ziehen dieselben sich an, wenn sie beide nach derselben Richtung oscillieren, stossen sich dagegen ab, wenn sie beide nach verschiedenen Richtungen oscillieren. Dem ersten Fall würden also zwei kleine Magnete entsprechen, die parallel einander gegenüberstehen und deren gleichnamige Pole nach derselben Seite gerichtet sind, dem zweiten Falle zwei solche, deren gleichnamige Pole nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind; dabei müssten die Pole der Magnete sich fortgesetzt umkehren. Die Wirkung der Kugeln aufeinander würde aber immer gerade die entgegengesetzte von derjenigen der Magnete sein.

Diese auf theoretischem Wege abgeleiteten Resultate sind durch experimentelle teils von Bjerknes selbst, teils durch andere angestellte Untersuchungen durchaus bestätigt worden. In

einer im Jahre 1877 von Schiötz veröffentlichten Abhandlung[1]) teilt dieser die ersten, sehr einfachen, von ihm in Gemeinschaft mit Bjerknes zu diesem Zwecke angestellten Versuche mit.

Der erste derselben, welcher die Anziehung nach derselben Richtung hin oscillierender Kugeln nachweisen sollte, war folgendermassen angeordnet. Über einem mit Wasser angefüllten Glasgefäss (siehe Fig. 6) war ein horizontaler in verschiedenen Höhen über der Wasserfläche einstellbarer Stab angebracht; an diesem befanden sich zwei Rollen, von denen die eine fest, die andere längs des Stabes beweglich war, sodass man dieselben einander beliebig nähern konnte. Über beide Rollen lief ein Faden, an dessen Enden zwei gleich grosse Kugeln von Eschenholz befestigt waren. Durch diese Vorrichtung wurde es möglich, die beiden Kugeln aus beliebiger, genau gleicher Höhe in verschiedenen Abständen gleichzeitig ins Wasser fallen zu lassen, indem man nämlich den Faden zwischen beiden Kugeln durchbrannte. Da das Eschenholz nur wenig specifisch leichter ist als das Wasser, so sanken die Kugeln ziemlich tief im Wasser unter, kamen dann durch den Auftrieb wieder an die Oberfläche und oscillierten infolge des jedesmaligen Überschreitens der Gleichgewichtslage eine gewisse Zeit lang hin und her, immer natürlich in gleichen Phasen, da die Bedingungen für beide genau die gleichen waren. Es zeigte sich in Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten, dass die beiden Kugeln sich während dieser Oscillationen näherten, und zwar, wenn der ursprüngliche Abstand geringer war als 150 mm, bis zum Kontakt. Die Vergrösserung der Fallhöhe begünstigte diese Erscheinung, jedoch nur bis zu einem bestimmten Grade, welcher bei 250 mm erreicht wurde. Bei grösseren Fallhöhen traten Störungen ein durch mitgerissene Luft u. s. w. Entsprechend wurde die Wirkung abgeschwächt bei allzugrossem Abstande beider Kugeln. Nahm man die beiden Kugeln von verschiedenem specifischem Gewicht, so zeigte sich, solange die Phasen noch annähernd gleich waren, Anziehung und zwar näherte die leichtere Kugel sich der schwereren stärker als umgekehrt.

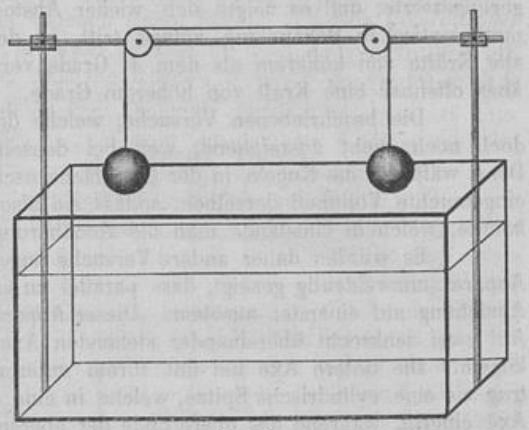


Fig. 6.

Durch eine ähnliche, im einzelnen aus Fig. 7 ersichtliche Anordnung, erhielt man in entgegengesetzter Richtung oscillierende Kugeln. Die eine der beiden Rollen war jetzt nicht über, sondern in dem Wasser angebracht. Vermittelst dieser Rolle wurde durch den Auftrieb des Wassers die eine Kugel unter Wasser schwebend erhalten, während die andere wie vorher über dem Wasser hing. Wurde jetzt der Faden durchgebrannt, so konnte man es bei passender Wahl des Abstandes beider Kugeln von dem Wasserniveau erreichen, dass die Kugeln mit entgegengesetzten Phasen oscillierten. In diesem Falle war das Resultat, entsprechend dem analytisch erhaltenen, dass die beiden Kugeln sich von einander entfernten. Diese Wirkung wurde ebenfalls bis zu einem Abstande von 150 mm beobachtet. Grosse Fallhöhen konnten hier nicht benutzt werden, weil der Auftrieb im Wasser sehr gering war, also die Geschwindigkeit, welche der oberen Kugel in der Luft erteilt wurde, nicht zu gross sein durfte.

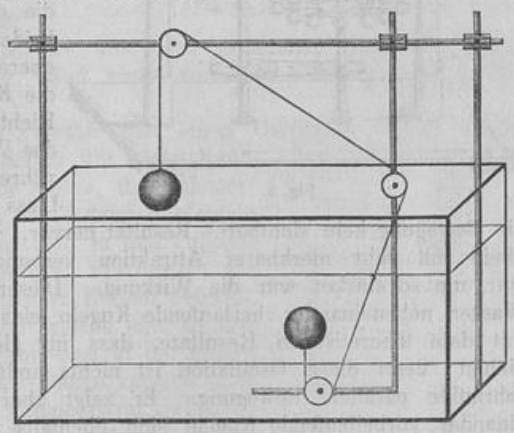


Fig. 7.

[1]) Göttinger Nachr. 1877.

Liess man eine der beiden Kugeln auf der Oberfläche des Wassers ruhig schwimmen und die andere herabfallen oder durch den Auftrieb in die Höhe steigen, so war anfangs keine deutliche Wirkung zu bemerken. Nach kurzer Zeit aber wurde die ruhende Kugel durch die andere oscillierende gleichfalls in Oscillationen versetzt (gleichsam influenziert) und zwar gewöhnlich in entgegengesetzte, und es zeigte sich wieder Abstossung. Dass diese Influenzwirkung nicht bei der mathematischen Behandlung zutage tritt, ist dem Umstande zuzuschreiben, dass bei demselben alle Kräfte von höherem als dem 4. Grade vernachlässigt worden sind; diese Induktionskraft ist aber offenbar eine Kraft von höherem Grade.

Die beschriebenen Versuche, welche die erwarteten Phänomene zeigten, waren nun aber doch noch nicht ausreichend, weil bei denselben die Kräfte 4. Grades nicht allein auftraten. Denn während die Kugeln in der Oberfläche oscillierten, veränderte sich gleichzeitig das in Wasser eingetauchte Volumen derselben, sodass sie also gleichzeitig pulsierten und man so nicht wissen konnte, welchem Umstande man die Annäherung bezw. Entfernung zuzuschreiben hatte.

Es wurden daher andere Versuche angestellt, und zunächst durch einen sehr sinnreichen Apparat unzweideutig gezeigt, dass parallel zu einander in einer Flüssigkeit sich bewegende Kugeln Anziehung auf einander ausüben. Dieser Apparat (siehe Fig. 8) war folgendermassen konstruiert. Auf zwei senkrecht übereinander stehenden Axen sassen je eine Rolle und ein Kranz von Holzkugeln. Die untere Axe lief mit ihrem unteren Ende in einem festen Lager; am oberen Ende trug sie eine cylindrische Spitze, welche in eine entsprechende cylindrische Aushöhlung der oberen Axe eingriff, während das obere Ende der oberen Axe wieder in einem festen Lager lief, so jedoch, dass sie sich etwas in ihrer Richtung verschieben konnte. Über die beiden Rollen liefen zwei Seile, welche über zwei andere auf einer zu den beiden ersten parellelen Axe angebrachte Rollen gingen; auf derselben Axe befand sich noch eine dritte Rolle, welche durch eine Transmission mit einer Rotationsmaschine in Verbindung gesetzt werden konnte. Hierdurch war man imstande, die beiden Kugelkränze in gleiche und entgegengesetzt gerichtete Rotation zu versetzen. Der ganze Apparat wurde nun soweit in ein Gefäss mit Wasser gesetzt, dass nur die oberste Rolle herausragte, welche denselben mit der Rotationsmaschine verband. Dabei nahm die obere Axe durch den Auftrieb der Kugeln ihre höchste Stellung ein, wenn das Seil nicht über ihre Rolle geschlungen war, verharrte dagegen infolge der vermehrten Reibung auch in ihrer unteren Stellung, wenn die Verbindung durch das Seil hergestellt war. Wurde nun die obere Axe in ihre obere Lage eingestellt und die beiden Kugelkränze in Rotation versetzt, so wurde der obere Kugelkranz langsam herabgezogen, gleichgültig ob die Kränze sich in derselben oder in entgegengesetzter Richtung bewegten. Da diese Bewegung dem Auftrieb des Wassers entgegen war, so musste sie offenbar daher rühren, dass die beiden Kugelkränze sich anzogen. Liess man nur den oberen Kranz rotieren, so brachte die Bewegung kein sichtbares Resultat hervor, während eine Rotation des unteren Kugelkranzes allein mit sehr merkbarer Attraktion verbunden war. Je tiefer der Apparat unter Wasser war, um so stärker war die Wirkung. Dieser Versuch zeigt also zunächst, dass parallel im Wasser nebeneinander herlaufende Kugeln einander anziehen. Dies steht in Übereinstimmung mit dem theoretischen Resultate, dass mit gleichen Phasen oscillierende Kugeln einander anziehen; denn diese Oscillation ist nichts anderes als eine auf einen begrenzten Raum eingeschränkte parallele Bewegung. Er zeigt aber auch, dass in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeilaufende Kugeln sich ebenfalls anziehen, und dies scheint im Widerspruch mit dem Resultate zu stehen, welches für solche Kugeln abgeleitet worden war, die mit entgegengesetzten Phasen oscillieren. Indessen muss man hierbei bemerken, dass man zwei entgegengesetzt oscillierende Kugeln nicht ohne weiteres mit entgegengesetzt rotierenden Kugelkränzen vergleichen

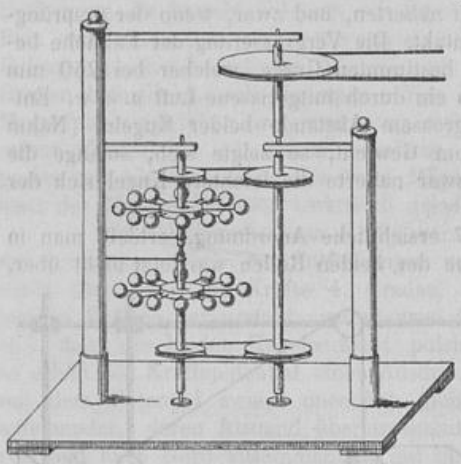


Fig. 8.

darf. Denn während bei den ersteren die Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der gemeinschaftlichen Centrale infolge der gemachten Voraussetzungen mehr oder weniger konstant bleiben, variieren diese bei den Kugelkränzen innerhalb sehr weiter Grenzen. Die Grösse jener Winkel ist aber für das Vorzeichen des Kräftepotentials und damit für den Sinn, in welchem die Kraft wirkt, entscheidend. Ausserdem stimmt dieser Versuch genau überein mit den theoretischen Resultaten, welche Kirchhoff in seiner Mechanik für zwei parallel in einer Flüssigkeit sich bewegende unveränderliche Kugeln erhält. Er findet, dass die Kugeln, gleichgültig, ob sie sich in derselben oder in entgegengesetzter Richtung bewegen, sich scheinbar anziehen.

Dass zwei mit entgegengesetzten Phasen oscillierende Kugeln sich wirklich abstossen, wurde dann durch folgenden einfachen Versuch nachgewiesen. Am Boden und am oberen Ende eines cylindrischen mit Wasser gefüllten Gefässes befand sich je eine feste Rolle (siehe Fig. 9). Über beide Rollen war ein Pferdehaar geschlungen, an welchem in der Mitte zwei Kugeln befestigt waren. Die obere Rolle konnte mittelst eines Zahnrades, in welches ein an der Axe der Rolle angebrachter Stift eingriff, in Oscillationen versetzt werden. Dieselben Oscillationen mussten dann auch die Kugeln ausführen, wobei die Phasen entgegengesetzt wurden. Es zeigte sich hierbei, wenn die Kugeln ursprünglich nicht zu weit von einander entfernt waren, dass dieselben sich merklich abstiessen.

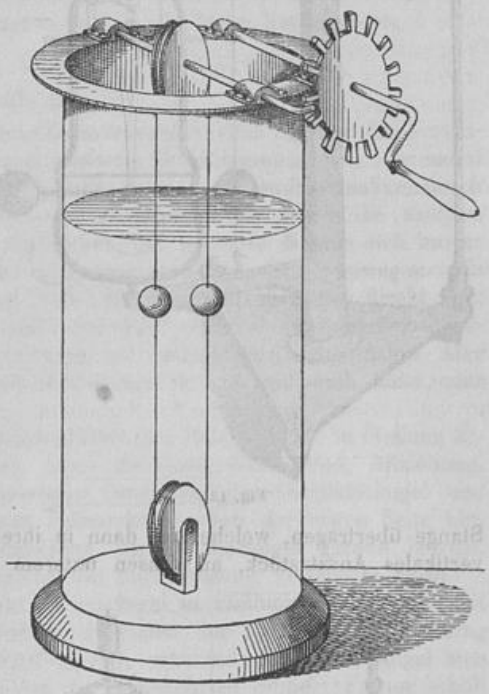


Fig. 9.

Die Anziehung beziehungsweise Abstossung pulsierender Kugeln ohne alle Nebenwirkungen experimentell nachzuweisen, war damals noch nicht gelungen. Man hatte wohl Versuche mit einer pulsierenden Kugel gemacht und gefunden, dass leichte Körper von derselben langsam angezogen wurden, aber dies steht im Widerspruch mit dem ersten theoretisch gefundenen Resultate und hat daher seinen Grund wohl in Kräften von höherem als dem zweiten Grade.

Auf der elektrischen Ausstellung in Paris im Jahre 1881 zeigte nun Bjerknes einige sehr vervollkommnete Apparate vor, mit deren Hülfe alle analytisch erhaltenen Resultate leicht nachzuweisen sind. Wir wollen dieselben an der Hand einer von ihm selbst gegebenen Beschreibung[1]) besprechen.

Bjerknes unterscheidet zunächst einen Pulsator und einen Oscillator. Unter einem Pulsator (Fig. 10) versteht er eine zu beiden Seiten mit einer Kautschukmembran bedeckte Trommel, zu welcher eine Röhre, die Pulsatorröhre führt; diese kann durch einen Schlauch in Verbindung mit einem Pumpapparate gesetzt werden, welcher abwechselnd Luft in den Pulsator einblässt und dann wieder aussaugt. Der Oscillator (Fig. 11) besteht aus einem Cylinder, in welchem sich ein leicht beweglicher Kolben befindet. An den Cylinder schliesst sich eine Röhre an, durch welche eine an dem Kolben befestigte Stange in eine Kapsel führt. Durch eine in der Kapsel befindliche Kurbel wird die Bewegung, in welche jene Stange versetzt wird, wenn der Cylinder durch einen Schlauch mit dem Pumpapparat verbunden wird, in eine dazu senkrechte verwandelt und auf die entweder in der unteren oder in der punktierten Lage befestigte Kugel übertragen. Pulsator und Oscillator werden mit der Hand im Wasser gehalten und stellen unbewegliche pulsierende resp. oscillierende Kugeln dar.

Fig. 10. Fig. 11.

[1]) Rep. f. Phys. Bd. 19. 1883.

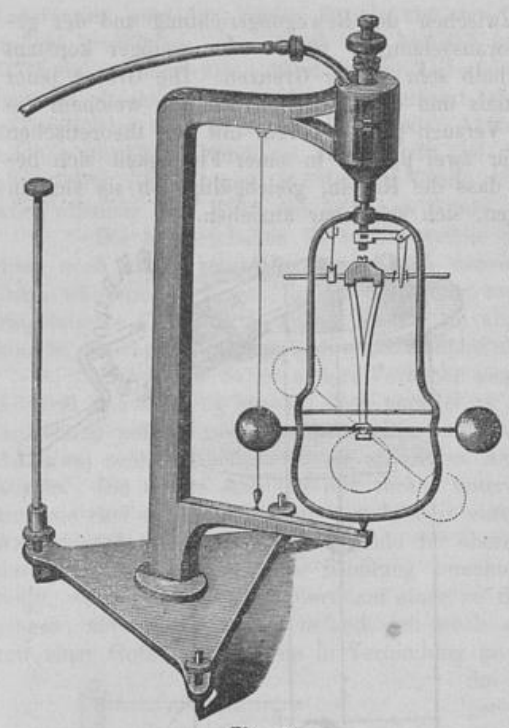


Fig. 12.

Um bewegliche Kugeln derselben Art zu erhalten, konstruierte Bjerknes das in Fig. 12 dargestellte Stativ. Dasselbe besteht im wesentlichen aus einem Cylinder, der oben geschlossen und unten offen ist, und zu welchem ein Rohr führt, welches mit der Pumpe in Verbindung gesetzt werden kann. In den Raum zwischen dem Cylinder und dem unteren Arm des Stativs können nun zwei Apparate eingesetzt werden, die Pulsationsbalance und die Oscillationsbalance. Die erstere stellt Figur 13 dar.

Sie besteht aus einer rechtwinklig gebogenen Röhre, deren einer Schenkel in einen offenen Cylinder ausläuft, welcher genau in das untere Ende des Cylinders am Stativ passt, während die Verlängerung desselben über den anderen Schenkel hinaus von einer massiven Spitze gebildet wird. Der zweite Schenkel endet in einer Trommel, welche durch ein Gegengewicht balanciert wird. Wird dieser Apparat in das Stativ eingesetzt, so übertragen sich die Luftstösse der Pumpe auf die Trommel, während die ganze Pulsationsbalance gleichzeitig drehbar ist. Die Oscillationsbalance Figur 14 besteht ebenfalls aus einem oben offenen und dicht in das Stativ passenden Cylinder, der aber unten in einen beweglichen Stempel mündet. An dem Cylinder ist ein Rahmen befestigt. Die vertikalen Bewegungen des Stempels werden durch einen Hebel auf eine horizontale Stange übertragen, welche sich dann in ihrer Richtung bewegt. An der Stange befindet sich ein vertikales Ansatzstück, an dessen unterem Ende die Kugeln, an langen Stäben befestigt, in den Lagen *1* und *2* oder direkt in der Lage *3* angebracht werden können. Der ganze Rahmen ist, wenn er in das Stativ eingesetzt wird, um seine vertikale Axe drehbar.

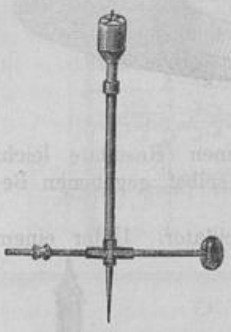


Fig. 13.

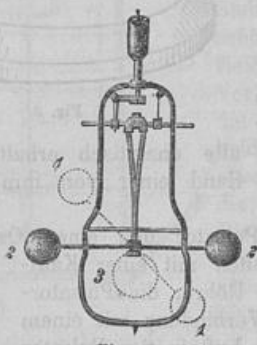


Fig. 14.

Mit Hülfe dieser Apparate kann man alle Wirkungen zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln (die Trommel vertritt hier eine Kugel) leicht feststellen. Das Stativ mit der Pulsations- resp. der Oscillationsbalance wird in ein grosses Gefäss mit Wasser gesetzt und der beweglichen Trommel resp. Kugel der Pulsator oder Oscillator genähert, während beide Apparate mit der Pumpe verbunden sind. Mit diesen Apparaten ergaben sich nun folgende Resultate:

I. Kraftwirkungen gegen einen beweglichen Pol (bewegl. pulsierende Kugel).

1. Mit gleichen Phasen pulsierende Kugeln ziehen sich an.
2. Mit entgegengesetzten Phasen pulsierende Kugeln stossen sich ab.

Vergleicht man die Kugeln während ihrer Contraktion mit einem Südpol, während ihrer Dilatation mit einem Nordpol, so erhält man das Gesetz: Gleiche Pole ziehen sich an, entgegengesetzte Pole stossen sich ab. Übereinstimmend mit den analytischen Resultaten ist also das Gesetz gerade das umgekehrte wie bei der magnetischen Fernwirkung. Es ergiebt sich ausserdem noch folgende Eigentümlichkeit. Wenn man bei entgegengesetzten Pulsationen die Pulsationen des Pulsators abschwächt, zeigt sich, wie vorher, Abstossung, aber mit geringerer Stärke. Die Abstossung

geht aber, wenn man die beiden Körper in hinreichend grosse Nähe bringt, in Anziehung über. Die entsprechende Erscheinung beim Magnetismus (bezw. der Elektrizität) erklärt sich dadurch, dass der stärkere Pol in dem anderen einen temporären Magnetismus erregt, welcher von solcher Stärke ist, dass die ursprügliche Abstossung zwischen den Polen überwunden wird.

3. Lässt man eine oscillierende Kugel in der Richtung der gemeinschaftlichen Centralen auf eine bewegliche pulsierende einwirken, so wird dieselbe angezogen, wenn die oscillierende Kugel sich der pulsierenden in dem Augenblicke ihrer Dilatation nähert, abgestossen, wenn sie sich derselben in dem Augenblicke ihrer Contraktion nähert. Vergleicht man wie früher eine oscillierende Kugel mit einem Magneten, dessen Nordpol nach der Seite der gerade stattfindenden Bewegung gerichtet ist, so hat man auch hier das inverse Gesetz wie beim Magnetismus.

II. Kraftwirkungen gegen einen beweglichen Magneten (bewegliche oscillierende Kugel).

1. Kraftwirkungen längs der Oscillationslinie (die Balancekugel in Stellung 1). Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise führt hier Bjerknes einige einfache Bezeichnungen ein. Er nennt Oscillationen in Bezug auf einen kugelförmigen Körper longitudinal, wenn die Oscillationslinie durch den Mittelpunkt dieses Körpers geht, transversal, wenn die Oscillationslinie gegen die mittlere Centrale senkrecht steht, ferner parallele Oscillationen direkt parallel, wenn die Kugeln sich immer in demselben Sinne, indirekt parellel, wenn sie sich im entgegengesetzten Sinne bewegen. Es ergiebt sich nun für longitudinale parallele Oscillationen beider Kugeln, wenn dieselben direkt sind, Abstossung, wenn dieselben indirekt sind, Anziehung; für longitudinale Oscillationen der Oscillatorkugel und transversale der Balancekugel kurze Verschiebung der Balancekugel nach rechts oder links, je nachdem dieselbe bei der Annäherung der Oscillatorkugel sich gerade nach links oder rechts bewegt.

2. Kraftwirkungen senkrecht gegen die Schwingungslinie (die Balancekugel in Stellung *2*). Man findet bei transversalen, parallelen Oscillationen, wenn dieselben direkt sind, Anziehung, wenn dieselben indirekt sind, Abstossung; bei transversaler Oscillation der Oscillatorkugel und longitudinaler der Balancekugel kleine Verschiebung der Balancekugel nach derjenigen Seite hin, nach welcher sich die Oscillatorkugel bei der Annäherung der Balancekugel gerade bewegt. Ahnliche Erscheinungen ergeben sich, wenn der Oscillator mit dem Pulsator vertauscht wird.

3. Cirkuläre und rotative Kraftwirkungen (die Balancekugel in Stellung *3*). Man erhält bei longitudinalen Oscillationen der Oscillatorkugel und transversalen der Balancekugel Drehung im Sinne des Uhrzeigers, wenn sich die Oscillatorkugel nähert, während die Balancekugel sich von links nach rechts bewegt; im anderen Falle Drehung im umgekehrten Sinne. Ferner erhält man bei transversalen und normalen Oscillationen beider Kugeln Drehung nach derjenigen Seite hin, nach welcher die Oscillatorkugel gerade schwingt.

Bei allen diesen Anziehungs- und Abstossungserscheinungen, welche die theoretischen Resultate bestätigen, finden wir also die entgegengesetzten Wirkungen wie beim Magnetismus.

Bjerknes giebt in der citierten Abhandlung auch eine populäre Erklärung dieser Erscheinungen und zwar speciell der Anziehung zweier mit gleichen Phasen pulsierender Kugeln. Er setzt dabei als bekannt voraus, dass ein fester Körper sich in einer Flüssigkeit so bewegt, als sei seine Masse um die halbe Masse der von ihm verdrängten Flüssigkeit vermehrt. Da eine pulsierende Kugel A ihre Schwingungen der ganzen Flüssigkeit mitteilt, so wird eine zweite Kugel B diese Schwingungen auch mitmachen müssen. Bei der Ausdehnung der Kugel A wird sie sich entfernen; da sie sich aber gleichzeitig selbst ausdehnt, so wird ihre ideale Masse wachsen, also ihre Geschwindigkeit, weil die Kraft dieselbe bleibt, abnehmen. Bei der Contraktion der Kugel A wird die Kugel B sich der Kugel A nähern, aber, weil sie sich zusammenzieht, ihre ideale Masse abnehmen, ihre Geschwindigkeit also wachsen. Infolgedessen wird sie sich im Laufe einer ganzen Periode der Kugel A nähern müssen. In derselben Weise erklärt sich auch die Abstossung bei entgegengesetzten Phasen.

An diese Erklärung schliesst sich sodann eine Besprechung gewisser Erscheinungen an, welche dem temporären Magnetismus und den magnetischen Influenzerscheinungen entsprechen. Wenn in einer Flüssigkeit eine Kugel pulsiert oder oscilliert, so werden sämtliche Teile derselben

ebenfalls in oscillierende Bewegung versetzt und zwar ist die Richtung der Bewegung in jedem Punkte dieselbe wie die durch ihn hindurchgehende Kraftlinie des magnetischen Pols oder des Magneten, mit welchem die pulsierende bezw. oscillierende Kugel zu vergleichen ist. Für eine einfach fortschreitende, nicht pulsierende Kugel ergiebt sich dies sofort aus der Formel des Geschwindigkeitspotentials der Flüssigkeit für diesen Fall. Denn man findet leicht, dass dasselbe übereinstimmt mit dem Potential eines kleinen Magneten, welcher sich im Mittelpunkt der Kugel befindet, dessen magnetische Axe die Richtung der Bewegung hat und dessen magnetisches Moment gleich der Geschwindigkeit des Mittelpunktes multipliciert mit der halben dritten Potenz des Radius ist, in Bezug auf einen magnetischen Einheitspol.

Jedes einzelne Flüssigkeitsteilchen verhält sich also, da es mitschwingt, wie ein kleiner Magnet und zwar wie ein temporärer Magnet, da seine Wirksamkeit aufhört, sobald die Kugel aufhört zu pulsieren oder zu oscillieren. Bringt man nun in die Flüssigkeit einen neutralen, d. h. einen nicht vibrierenden Körper, so wird dieser, wenn er dieselbe Dichtigkeit hat wie die Flüssigkeit, an derselben Stelle hin und herschwingen. Ist der Körper aber specifisch leichter als die Flüssigkeit, so wird er in stärkere Schwingungen versetzt werden, also eine grössere Menge von sogenanntem Hydromagnetismus bekommen. Man erhält in diesem Falle eine Abstossung, welche dem Paramagnetismus entspricht. Ist der neutrale Körper specifisch schwerer als die Flüssigkeit, so wird er sich langsamer bewegen als diese an der von ihm eingenommenen Stelle. Die oscillationen sind also relativ zu denen der Flüssigkeit entgegengesetzt. Es erfolgt also Anziehung, welche dem Diamagnetismus entspricht. Bjerknes fügt hinzu, dass die Richtigkeit dieser Betrachtung sich analytisch bekräftigen und durch Versuche bestätigen lasse.

Den experimentellen Nachweis dieser temporären hydromagnetischen Erscheinungen hat er folgendermassen erbracht. Eine Metallstange (Fig. 15) wird durch zwei Schwimmer im Wasser in horizontaler Lage erhalten. An der Stange ist durch einen Faden eine Kork- oder Hollundermarkkugel befestigt, welche auf diese Weise im Wasser schwebend erhalten wird und leicht in horizontaler Richtung verschiebbar ist. Nähert man nun der Kugel die Trommel eines Pulsators, so wird die Kugel abgestossen; dasselbe geschieht bei einem Oscillator. Eine Abweichung findet nur statt, wenn die Oscillatorkugel verhältnismässig gross ist. Man erhält dann nämlich in grösserer Nähe Anziehung. Diese Erscheinung beruht auf einer Induktion höherer Ordnung. Um die Anziehung eines specifisch schwereren Körpers zu zeigen, braucht man denselben nur an einem Schwimmer aufzuhängen (Fig. 16). Dieselben Induktionsgesetze findet man auch bei cylindrischen Stäben bestätigt. Ein leichter Cylinder von Kork oder Hollundermark stellt sich äquatorial, ein schwerer axial gegen den Pol.

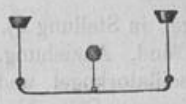


Fig. 15.

Fig. 16.

Ja sogar eine magnetische Interferenzerscheinung hat Bjerknes hydrodynamisch nachgeahmt. Wenn man zwei Magnete vertikal so übereinanderstellt, dass sie sich nicht berühren und die ungleichnamigen Pole einander zugekehrt sind, und in den Zwischenraum ein Stück weiches Eisen bringt, welches sich nur in horizontaler Richtung bewegen kann, so wird es nach dem Mittelpunkte hingezogen, welcher in der Axe liegt. Kehrt man aber den einen der Magnete um, so wird es von dem Mittelpunkte abgestossen und stellt sich in einer gewissen Peripherie ein, innerhalb deren Abstossung, ausserhalb deren Anziehung stattfindet. Diese Erscheinung ist leicht zu erklären. Um dieselbe hydrodynamisch nachzuahmen, konstruierte Bjerknes seinen sogenannten Interferenzpulsator, welcher aus zwei feststehenden Pulsatortrommeln besteht, welche vertikal übereinander und horizontal nebeneinander gestellt werden können. Bringt man zwischen die beiden Trommeln in der ersten Stellung einen kleinen schweren Körper, welcher sich leicht nur in der Horizontalen bewegen kann, — dies lässt sich durch eine Kugel bewerkstelligen, die auf einer durch einen Schwimmer getragenen Stange verschiebbar ist — so wird die Kugel nach der Mitte hingezogen, wenn die Trommeln entgegengesetzt pulsieren; pulsieren die Trommeln dagegen mit gleichen Phasen, so wird der Körper auch hier abgestossen und in einer gewissen Peripherie festgehalten. Dass hier eine vollkommene Übereinstimmung der Erscheinungen erzielt ist, kommt daher, dass der specifisch schwere Körper wie vorher gezeigt wurde, einem paramagnetischen Körper entspricht. Die Umkehrung wäre also bei einem Körper zu erwarten,

welcher specifisch leichter ist als das Wasser. Dieser Versuch ist indessen nicht mit voller Deutlichkeit gelungen.

Hiermit sind die von Bjerknes veröffentlichten Untersuchungen über das m-Kugelproblem, soweit sie hier in Betracht kommen, erschöpft. Mit demselben Problem hat sich noch eine Reihe von anderen Autoren beschäftigt und dasselbe nach verschiedenen Richtungen hin erweitert. Unter diesen ist zunächst Kirchhoff[1]) zu nennen, dessen Resultate mit den Bjerknes'schen im Wesentlichen übereinstimmen. Karl Pearson[2]) erweiterte das Problem auf den Fall von Ellipsoiden und fand dabei ähnliche Analogieen. Da dieselben im Grunde nichts neues bringen, können sie hier übergangen werden.

Zu einer anderen Art von Analogieen dagegen führte die Untersuchung der Bewegung starrer Ringe in einer Flüssigkeit. Die ersten Untersuchungen über diesen Gegenstand verdanken wir Kirchhoff. Er veröffentlichte dieselben unter dem Titel: „Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können" im Jahre 1870[2]). Seine Voraussetzungen sind dabei folgende. In einer unendlich ausgedehnten incompressibeln Flüssigkeit, welche im endlichen bewegt ist, in der Unendlichkeit aber ruht, befinden sich zwei starre Ringe von unendlich kleinem, konstantem, kreisförmigem Querschnitt. Die Flüssigkeit soll ohne Reibung und ohne Wirbelbewegung sein, sodass dieselbe ein Geschwindigkeitspotential besitzt, und dieselbe wird ausser von den Ringoberflächen in der Unendlichkeit als von einer festen, geschlossenen Fläche begrenzt gedacht. Auf die Flüssigkeit wirken keine äusseren Kräfte. Unter diesen Voraussetzungen stellt nun Kirchhoff das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit und das Integral der lebendigen Kraft auf, und schliesst aus den hierfür gefundenen Formeln, dass die Ringe bei ihrer Bewegung in der Flüssigkeit scheinbar dieselben Kräfte aufeinander ausüben, wie zwei elektrische Ströme, welche mit gewissen Intensitäten die Ringe selbst durchfliessen. Dieser Schluss ist aber aus zwei Gründen nicht vollständig strenge. Zunächst hätte er aus den Formeln schliessen müssen, dass die scheinbaren Wirkungen der Ringe aufeinander die entgegengesetzten sind von denjenigen, welche die genannten Ströme aufeinander ausüben würden, was auch mit den früheren Resultaten besser im Einklang steht.

Auf eine weitere Inkorrektheit in dem von Kirchhoff gezogenen Schlusse macht Boltzmann in einer Abhandlung aus dem Jahre 1881 aufmerksam[3]). Kirchhoff hatte aus der Gleichheit der von den Ringen bei einer Bewegung in der Flüssigkeit und der von den stromdurchflossenen Leitern bei derselben Bewegung geleisteten Arbeit auf die Gleichheit der Kraftkomponenten senkrecht zur Bewegungsrichtung geschlossen, während er nur auf die Gleichheit der in die Bewegungsrichtung fallenden Kraftkomponente schliessen durfte. Boltzmann nun behandelt in der genannten Arbeit dasselbe Problem in ganz anderer Weise wie Kirchhoff. Er kommt dabei zu dem Resultat, dass die Kraft, welche die Ringe scheinbar aufeinander ausüben, bis auf einen konstanten Faktor dieselbe ist wie die elektrodynamische Wirkung, welche die Ringe ausüben würden, wenn sie an der ganzen Oberfläche mit unendlich vielen elektrischen Strömen mit konstanter unendlich kleiner Intensität überzogen wären, dass aber hierzu noch eine Kraft zu addieren ist, welche auf dem Stromelemente, auf welches sie wirkt, und auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht. Diese Kraft ist bei Kirchhoff ganz vernachlässigt.

Riecke geht in seiner Behandlung dieses Problems[4]) aus von einer Schar von geschlossenen galvanischen Strömen und konstruiert mit Hülfe der zu einem jeden gehörigen Kraftlinien geschlossene Ringflächen, welche je einen Strom umfliessen. Dann beweist er, dass man die ursprünglichen Ströme ersetzen kann durch eine gewisse Bedeckung der Ringoberflächen mit galvanischen Strömen, welche nach aussen dieselbe Wirkung haben wie jene. Darauf berechnet er den elektrodynamischen Druck, welchen alle Ringe auf das Oberflächenelement eines derselben ausüben und findet hierfür denselben Wert, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, welcher vorhanden ist, wenn die Ringflächen ruhende starre Körper sind und der Raum zwischen ihnen erfüllt ist von einer inkompressibeln Flüssigkeit, welche in der Nähe der Ringe in einer wirbellosen Strömung begriffen ist, deren Dichtigkeit den Wert $\frac{1}{4\pi}$ hat.

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik, Mechanik. Leipzig 1876. [2]) Crelle's Journal, Bd. 71. [3]) Crelle's Journal Bd. 73. [4]) Riecke, „Über die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer inkompressibeln Flüssigkeit in Ruhe sich befinden." Göttinger Nachr. 1887.

Diese Riecke'sche Behandlung, welche sich auf die Betrachtung ruhender Ringe beschränkt, hat vor den vorhergenannten den Vorzug, dass die Analogie bis auf den Sinn der Kraftwirkung eine vollständige ist und dass seine Ringe einen endlichen Querschnitt besitzen, wenn dieselben auch nicht beliebige Gestalt haben.

In ganz umfassender Weise und mit grossem mathematischem Apparate sind neuerdings die Analogieen zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik von Carl Neumann[1]) untersucht worden. Derselbe kommt dabei zu dem höchst bemerkenswerten allgemeinen Resultate, dass drei ganz willkürlich gegebene Funktionen der Coordinaten, welche in einem gegebenen Raume stetig sind, immer elektrodynamisch dargestellt werden können als die Komponenten der Gesamtwirkung gewisser teils elektrischer teils magnetischer Ursachen. An diesen Satz knüpft er die Bemerkung, es stehe auf Grund desselben zu erwarten, dass wir viele physikalische Vorgänge, falls dieselben nur in stetiger Weise erfolgen, elektrodynamisch zu konstruieren oder, anders ausgedrückt, mittelst elektrodynamischer Gesetze zu beschreiben imstande sein würden.

Fr. Guthrie ist es, welcher zuerst Versuche[2]) veröffentlichte, bei denen er ähnliche Erscheinungen in kompressibeln Flüssigkeiten erhielt, wie Bjerknes in inkompressibeln. Die wichtigsten derselben sind die folgenden. An einem feinen 0,5 m langen Holzstäbchen war ein Stück Kartenpapier von 0,08 m im Quadrat so befestigt, dass die Ebene des Papiers vertikal war und die Linie das Stäbchens in sich enthielt; das Ganze hing an einem ungedrehten Seidenfaden. Näherte man nun dem Kartenblatt eine vorher in Schwingungen versetzte Stimmgabel, so wurde das Kartenblatt angezogen, gleichgiltig, welche Seitenfläche der Stimmgabel man zu dem Kartenblatt parallel hielt. Um die Gegenseitigkeit dieser Anziehung nachzuweisen, wurde die Stimmgabel am Ende eines 1 m langen Stabes befestigt, an dem anderen Ende desselben ein Gegengewicht angebracht und das ganze an einem seidenen Bande aufgehängt. Wurde die Gabel nun angestrichen und ihr ein Kartenblatt gegenübergehalten, so näherte sich die Stimmgabel diesem. Die Bewegung erfolgte aber langsamer infolge der grösseren Trägheit der bewegten Masse und war infolgedessen weniger auffallend. Statt der Karten wurde sodann eine zweite Gabel in Anwendung gebracht. Auch in diesem Falle näherte sich die bewegliche Gabel der festen. Ebenso wie das Kartenblatt verhielten sich andere leichte Körper wie Baumwolle, Mousselin etc. Diese Resultate werden ergänzt durch die von K. H. Schellbach[3]) mit Flammen angestellten Versuche. Aus denselben ergiebt sich nämlich folgendes. Bringt man eine brennende Stearinkerze in die Nähe einer horizontal befestigten Stimmgabel, so wird die Flamme, sobald die Stimmgabel in Schwingung versetzt ist, deutlich abgestossen. Wird die Flamme unter die Stimmgabel gebracht, so wird sie flach gedrückt. Dieselbe Wirkung zeigt sich bei Orgelpfeifen, und wenn man die Flamme vor die Mündung des Resonanzkastens einer Stimmgabel bringt, wird dieselbe bei starkem Anstreichen der Stimmgabel sogar ausgelöscht. Dasselbe Phänomen liess sich mit Rauch nachweisen. Aus dem Umstande nun, dass die Flamme, welche einen Körper darstellt, welcher specifisch leichter ist als Luft, von der schwingenden Stimmgabel abgestossen wird, während die in den Guthrie'schen Versuchen benutzten Körper, welche alle specifisch schwerer waren als Luft, immer angezogen wurden, folgerte Schellbach die Gültigkeit des folgenden allgemeinen Gesetzes.

„Die Schallschwingungen eines elastischen Mediums ziehen specifisch schwerere Körper gegen das Centrum der Störung hin an und stossen specifisch leichtere ab.“ Dieses Gesetz, welches auch noch durch andere Versuche mit 2 Ballons, von denen der eine mit Luft, der andere mit Wasserstoff gefüllt war, bestätigt worden ist, stimmt in der Hauptsache überein mit dem von Thomson für inkompressible Flüssigkeiten theoretisch abgeleiteten Gesetze, welches früher erwähnt wurde und den Bjerknes'schen Versuchen. Es folgt daraus, dass in dieser Beziehung zwischen kompressibeln und inkompressibeln Flüssigkeiten kein wesentlicher Unterschied besteht. Zu dieser Ansicht ist auch Bjerknes durch andere nicht veröffentlichte Versuche, bei denen feste Körper sich in Luft bewegten, gelangt.

---

[1]) C. Neumann, Beiträge zu einzelnen Teilen der math. Physik. Leipzig 1893. [2]) Fr. Guthrie, „On approach caused by vibration“ Phil. Mag. (4) 40. 1870. Pag. 345. [3]) K. H. Schellbach „Akustische Anziehung und Abstossung“ Pogg. Ann. Bd. 139. Pag. 670.

Die Franzosen Berson und Juppon[1]) haben endlich eine Drehwage konstruiert, mittelst deren sie die Anziehungskraft zwischen zwei vibrierenden Platten zu messen und in Krafteinheiten auszudrücken imstande waren. Da sich indessen aus ihren Versuchen für diese Kraft kein einfaches Gesetz ergeben hat, so wird durch dieselben dem bereits bekannten nichts wesentlich neues hinzugefügt.

5.

Nachdem wir im Vorigen alle hydrodynamischen Analogieen, soweit sie uns bekannt geworden sind, ausführlich dargelegt haben, müssen wir uns nun ein Urteil darüber bilden, welche Bedeutung denselben, insbesondere mit Rücksicht auf die Frage nach dem Wesen der Elektricität, beizumessen ist.

Die erste Reihe von Analogieen, welche man kurz die Decharme'schen nennen kann, hat, wie schon oben zur genüge hervorgehoben wurde, zu der Elektricität überhaupt keine innere Beziehung. Sie verdankt ihren Ursprung nur zufälligen äusseren Übereinstimmungen und kann daher keinen Anspruch darauf machen, dass ihr in diesem Zusammenhange irgend eine Bedeutung beigelegt werde, es sei denn die, dass man an ihr erkennen kann, wie man Analogieen nicht aufstellen soll.

Den Analogieen der zweiten Reihe haben wir gleich vorausgeschickt, dass sie nicht den Zweck haben sollen, neues Licht in das Dunkel jener Frage zu werfen, dass sie dies vielmehr überhaupt nicht können, da sie sich von vornherein auf den Boden einer mehr oder weniger überwundenen Theorie, der Fluxionstheorie, stellen. Trotzdem haben wir behauptet, dass sie mit mehr Recht wahre Analogieen genannt zu werden verdienen als die Decharme'schen, da sie sämtlich zurückgehen auf die Gleichheit des Anziehungsgesetzes der Elektricität und der ponderablen Materie. Es ist besonderer Wert darauf gelegt worden, zu zeigen, wie aus der Übereinstimmung dieser beiden Grundgesetze die Analogie zwischen dem elektrischen und dem Gravitations(-ergänzungs)-Potential folgt; hieraus ergab sich dann die Berechtigung das elektrische Potential mit dem Wasserdruck zu vergleichen, und gerade dieser Umstand ermöglicht es, den Begriff des Potentials auch ohne jede wissenschaftliche Definition verständlich zu machen, wie an einer Reihe von Beispielen gezeigt wurde, welche sich leicht noch erweitern liesse. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus trägt also die zweite Reihe von Analogieen nichts zur Lösung der Frage nach dem Wesen der Elektricität bei, wohl aber insofern, als sie das Verständnis einer der wesentlichsten Eigenschaften der Elektricität für eine grosse Menge von Menschen erleichtert oder geradezu erst ermöglicht.

Ganz anders steht es mit der dritten Reihe von Analogieen. Hier finden wir rein wissenschaftliche Untersuchungen, welche das gemeinschaftliche Ziel verfolgen, solche hydrodynamische Vorgänge zu finden, bei welchen scheinbare Anziehungen und Abstossungen nach denselben Gesetzen stattfinden, wie bei der Elektricität und dem Magnetismus. Wir haben gesehen, dass auf theoretischem wie auf experimentellem Wege bewiesen worden ist, dass zwei in einer inkompressibeln Flüssigkeit fortschreitende oder oscillierende Körper unter gewissen Bedingungen scheinbare Kräfte aufeinander ausüben wie zwei kleine Magnete, zwei pulsierende Körper solche wie zwei isolierte Magnetpole, ja wir haben Analogieen zu Erscheinungen der magnetischen Influenz und des Diamagnetismus gefunden. Ferner sahen wir, dass ruhende starre Ringe in einer bewegten Flüssigkeit in ihrer scheinbaren Wirkung aufeinander verglichen werden können mit elektrischen Strömen, welche ihre Mittellinien durchfliessen. Endlich wurde von den meisten dieser Resultate gezeigt, dass sie auch für kompressible Flüssigkeiten gelten. Bei fast allen miteinander verglichenen Erscheinungen ergab sich allerdings, dass der Sinn, in welchem die scheinbare Kraft wirkte, demjenigen bei der entsprechenden elektrischen oder magnetischen Erscheinung entgegengesetzt war.

Bezüglich der Beurteilung dieser Analogieen spielt nun die Frage eine wesentliche Rolle, was man von ihnen verlangt. Verlangt man von ihnen — was übrigens Bjerknes selbst

[1]) Berson et Juppon, Actions mutuelles des corps vibrants dans les milieux fluides. Compt. rend. T. 117. Pag. 724—726.

niemals gethan hat — dass sie die elektrischen oder magnetischen Anziehungs- und Abstossungs-Erscheinungen direkt erklären sollen, so muss man sagen, dass sie hierzu allerdings nicht ausreichen. Denn dazu müssten vor allem die Analogieen in jeder Beziehung vollkommen sein, es dürfte also jene Umkehrung von Anziehung und Abstossung, es dürften die gedachten isolierten Magnetpole, welche es in Wirklichkeit nicht giebt, und es dürfte die Abweichung von dem Gesetze actio est par reactioni nicht vorhanden sein; wollte man einen Molekularmagneten als ein im Äther als Flüssigkeit oscillierendes Molekül erklären, so würde der fortgesetzte Polwechsel dieser Auffassung widersprechen. Aber damit werden die Analogieen noch lange nicht wertlos. Im Gegenteil scheint durch die Untersuchungen, welche sie zu Tage gefördert haben, abgesehen davon, dass dieselben an und für sich von grossem wissenschaftlichem Interesse sind, die Lösung einer Frage von höchster Wichtigkeit angebahnt worden zu sein, nämlich derjenigen nach der Erklärung der Fernwirkung, sowohl der elektrischen als auch der allgemeinen Gravitation. Wir sehen hier thatsächlich zum ersten Male nicht durch philosophische Spekulationen, sondern durch exakte mathematische Berechnung und das Experiment eine Art von Fernwirkung zweier Körper aufeinander auf die Bewegung eines dazwischen liegenden Mediums zurückgeführt und damit die Möglichkeit einer ähnlichen Lösung jener Frage bewiesen.

Wenn Profesor C. Neumann auf Grund des von ihm bewiesenen Satzes von der elektrodynamischen Darstellbarkeit dreier willkürlich gegebener stetiger Funktionen der Koordinaten zu dem Schlusse kommt, dass hierin allein die Ursache zu den Beziehungen zwischen Elektrodynamik und Hydrodynamik liege, so scheint dieser Schluss doch nicht durchaus zwingend zu sein. Von der Notwendigkeit eines inneren Zusammenhanges jener beiden Disciplinen, an die man vorher leicht glauben konnte, kann nach der Entdeckung jenes allgemeinen Theorems zwar keine Rede mehr sein, aber die Möglichkeit eines solchen bleibt, und das reicht aus. Es wäre sehr zu bedauern, wenn hiermit die weitere Forschung auf diesem Gebiete, wie Professor C. Neumann meint, aufhören würde: ist es doch durchaus nicht ausgeschlossen, dass sich, vielleicht auf dem von Riecke zuerst eingeschlagenen Wege, welcher von der Elektricität ausgeht, bei richtiger Wahl aller in Betracht kommenden Grössen, vollkommene Analogieen aufstellen liessen, auf welche dann eine hydrodynamische Theorie der elektrischen und der Massen-Fernwirkung aufgebaut werden könnte.