III. Abtheilung.

Das Rechnen in den oberen Schulclassen.

Erster Abschnitt.

Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen.

§. 30.

Allgemeine Bemerkungen.

So wie in den früheren Schuljahren ist es auch hier wieder angezeigt, zunächst eine Wiederholung vorzunehmen. Diese erstreckt sich in der V. Classe hauptsächlich auf das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen, mit ein- und mehrnamigen Zahlen.

Die Wiederholungsübungen erhalten aber hier eine Erweiterung. Diese besteht in Multiplications- und Divisionsvortheilen und in der abgekürzten Multiplication und Division der Decimalzahlen.

Diese Vortheile erstrecken sich bei der Multiplication auf das Multiplicieren mit 11, und mit Multiplicatoren, in welchen die Ziffer 1 vorkommt, auf das Zerlegen des Multiplicators in Factoren, mit welchen sich leicht multiplicieren läßt, so wie auf das Multiplicieren mit einem Multiplicator, der mit Ausnahmen der Einer oder der höchsten Ziffer lauter 9 enthält. Bei der Division sind die Vortheile zu beschränken auf Aufgaben mit Divisoren, welche sich in 2 Factoren zerlegen lassen, durch welche sich leicht dividieren läßt, und auf das Dividieren durch 25 und 125.

§. 31.

Rechnungsvortheile bei der Multiplication.

a) Wenn der Multiplicator die Ziffer 1 enthält.

Anstatt:	6374 × 31	25409 × 1·04	58·23 × 1·36
	6374	25409	58 23
	19122	101636	17 469
	197594	26425·36	3 4938
			79·1928

kann man das Anschreiben eines Partialproductes ersparen und schreiben

6374 × 31	25409 × 1·04	58·23 × 1·36
19122	101636	17 469
197594	26425·36	3 4938
		79·1928

Kommt also im Multiplicator die Ziffer 1 vor, so läßt man den Multiplicand als erstes Theilproduct gelten, multipliciert ihn dann nur mit den geltenden Ziffern des Multiplicators und setzt die erhaltenen Theilproducte gehörig darunter.

b) Multiplicieren mit 11.

Man multipliciert nach dem eben angegebenen Vortheile z. B.

37429 × 11
37429
411719

Hieraus sieht man folgendes Verfahren: Man schreibt die erste Ziffer rechts unverändert an, addiert dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, kurz zu jeder Ziffer die Ziffer in der nächst höheren Stelle; das so eben gegebene Beispiel auf diese Weise durchgeführt, spricht man: 9 ist 9, 9 und 2 ist 11, bleibt 1; 1 und 2 ist 3 und 4 ist 7; 4 und 7 ist 11, bleibt 1; 1 und 7 ist 8 und 3 ist 11, bleibt 1; 1 und 3 ist 4.

37429 × 11
411719

c) Wenn sich der Multiplicator in Factoren zerlegen läßt, mit denen man leicht multiplicieren kann, so mul-

tipliciere man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor und dann das erhaltene Product mit dem andern Factor.

$$\begin{array}{r} 3824 \\ \underline{26768} \\ 134840 \end{array} \times \begin{array}{r} 35 \\ \underline{7\times5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2756 \\ \underline{19292} \\ 212212 \end{array} \times \begin{array}{r} 77 \\ \underline{7\times11} \end{array}$$

d) Wenn der Multiplicator an allen Stellen 9 hat mit Ausnahme der niedersten Stelle. Soll z. B. die Zahl 1562 mit 994 multipliciert werden und man multipliciert mit 1000, so ist das erhaltene Product um das 6-fache zu viel; daher muss man 1562 mit 6 multiplicieren und dieses Product vom 1000-fachen Producte subtrahieren.

Hat also der Multiplicator in allen Stellen mit Ausnahme der niedrigsten Stelle 9, so addiert man zu der niedersten Ziffer so viel hinzu, dass man 100, 1000 . . bekommt, multipliciert den Multiplicand zuerst mit 100, 1000 . . . . dann mit der zu der niedersten Ziffer addierten Zahl und subtrahiert das letztere Product vom ersten, also:

$$\begin{array}{r} 1562_{000} \\ \underline{9372} \\ 1552628 \end{array} \times \begin{array}{r} 994 \\ \underline{1000-6} \end{array}$$

e) Wenn der Multiplicator in allen Stellen 9 hat mit Ausnahme der höchsten Stelle, wo auch eine andere Ziffer sein kann. Es soll z. B. die Zahl 6827 mit 499 multipliciert werden. Wenn man den Multiplicator um 1 vermehrt, so erhält man eine Zahl (500), welche aus einer einzigen geltenden Ziffer mit rechts lauter Nullen besteht. Multipliciert man nun den Multiplicand mit dieser Zahl, so ist das Product um das 1-fache des Multiplicands, d. i. der Multiplicand selbst, zu groß, weshalb man diesen von jenem Producte zu subtrahieren hat; also:

$$\begin{array}{r} 6827 \\ \underline{3413500} \\ 3406673 \end{array} \times \begin{array}{r} 499 \\ \underline{500-1} \end{array}$$

Hier wird der oben stehende Multiplicand von dem darunter geschriebenen 500fachen Producte subtrahiert.

Aufgaben in Močniks Arithmethik für Bürgerschulen 1. Heft, S. 13. A. K. V. R. S. 5 bis 7.

§. 32

Abgekürzte Multiplication der Decimalzahlen.

Wir haben schon früher gezeigt, wie wertlos sehr niedrige Decimalstellen für das praktische Leben sind, dass aber ein einfaches Weglassen der wertlosen Stellen nicht genügt. Dieses ist namentlich bei der Multiplication der Fall, denn eine an sich wertlose Decimalstelle kann durch Multiplication mit einer Ziffer in einer hohen Stelle zu bedeutendem Einflusse kommen, daher lässt man die Vernachlässigung nicht bei den Factoren, sondern erst im Producte eintreten. Es soll z. B. die Zahl 4·0312 mit 7·0048 multipliciert werden und man verlangt im Producte nur 4 Decimalstellen also Zehntausendtel.

Wir wollen zur besseren Einsicht die unabgekürzte Art neben die abgekürzte setzen.

4·0312 × 7·0048		4·0312 × 7·0048	
28·2184	. . .	282184	
161	248	161	
32	2496	32	
28·2377	4976	28·2377	

Wir multiplicieren zuerst mit den 7 Einern, wobei jede Ziffer des Productes an ihrer Stelle verbleibt, daher kommt die 4 von $7 \times 2 = 14$ an die 4. Stelle d. i. die Stelle der Zehntausendtel. Wenn wir mit 4 Tausendtel multiplicieren, so müssen wir jede Ziffer des Productes um 3 Stellen weiter rechts rücken, die Ziffer 8 von $4 \times 2 = 8$ käme daher an die 7. Stelle, d. i. die Stelle der Zehnmilliontel*), welche wir aber nicht brauchen; wir streichen daher die Ziffer 2 durch. Würden wir die Multiplication mit 0·004 bei der Ziffer 1 beginnen, so käme die Ziffer 4 von $4 \times 1 = 4$ in die 6. Stelle, d. i. in die Stelle der Milliontel **), welche wir ebenfalls nicht brauchen, daher streichen wir auch die Ziffer 1 durch. Beginnen bei der Ziffer 3, so erhalten wir 12 Hunderttausendtel = 1 Zehntausendtel und 2 Hunderttausendtel, wovon die 2 an die 5. Stelle

*) 0·0002 × 0·004 = 0·0000008.
**) 0·001 × 0·004 = 0·000004.

käme, die wir aber nicht brauchen, 1 Zehntausendtel aber gehört schon zur 4. Stelle. Wir durchstreichen daher auch noch die Ziffer 3 und sagen: 4 mal 3 ist 12, gibt 1 zur Correctur, 4 mal 0 ist 0 und 1 ist 1 und schreiben die Ziffer 1 an die 4. Stelle und multiplicieren weiter: $4 \times 4 = 16$. Wir durchstreichen auch die 0 hinter 3, denn eine Ziffer an dieser Stelle würde mit 0·0008 multipliciert Hunderttausendtel geben, welche in die 5. Stelle kämen, und sagen 8 mal 4 ist 32, wovon 3 (als Tausendtel) in die 3. und 2 (als Zehntausendtel) in die 4. Stelle kommt.

Um uns die Sache zu erleichtern, wollen wir nun jede Ziffer des Multiplicators unter diejenige Stelle des Multiplicands setzen, bei welcher wir mit jener zu multiplicieren beginnen müssen. Es sei z. B. 375·36249 mit 65·274 zu multiplicieren, und es werden 3 Decimalstellen, also Tausendtel verlangt.

Wir beginnen die Multiplication mit der Ziffer in der höchsten Stelle des Multiplicators, also mit den 6 Zehnern. Um hierdurch Tausendtel zu erhalten, müssen wir bei Zehntausendteln beginnen, wir schreiben daher die 6 Zehner des Multiplicators unter die 4 Zehntausendtel des Multiplicands; um durch die Multiplication mit Einern Tausendtel zu erhalten, müssen bei den Tausendteln beginnen, daher schreiben wir diese 4 Einer unter die 2 Tausendtel des Multiplicands. Um bei der Multiplication mit Zehnteln Tausendtel zu erhalten, müssen bei den Hunderteln anfangen, wir schreiben daher die 2 Zehntel des Multiplicators unter die 6 Hundertel des Multiplicands, und so muss man, um durch Multiplication mit Hundertel die Zehntel und bei jener mit Tausendtel die Einer multiplicieren, um Tausendtel zu erhalten, wir schreiben daher die 7 Hundertel des Multiplicators unter die 3 Zehntel des Multiplicands und die 4 Tausendtel des Multiplicators unter die 8 Einer des Multiplicands. Wir haben also hier die Ziffer der Einer des Multiplicators (5) unter die 3. Decimale (2) des Multiplicands, d. i. die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands gesetzt, welche noch im Producte erscheinen soll.

$$
\begin{array}{r}
378{\cdot}36249 \times 65{\cdot}274 \\
4\,7256 \\
\hline
22701\,749 \\
1891\,812 \\
75\,672 \\
26\,385 \\
1\,513 \\
\hline
24697{\cdot}131
\end{array}
$$

Die Ziffern des Multiplicators rechts von der Einerstelle schrieben wir in umgekehrter Ordnung links und die links von der Einerstelle nach rechts.

Multiplicieren wir nun mit der ersten rechts stehenden Ziffer des Multiplicators, nämlich 6, die erste rechts stehende Ziffer des Multiplicands, nämlich 9, so erhalten wir als Product, da 6 den Wert von Zehnern und 9 den von Hunderttausendteln hat, 54 Zehntausendtel = 5 Tausendtel und 4 Zehntausendtel; wovon wir erstere die 5 Tausendtel, als Correctur nehmen, die 4 Zehntausendtel vernachlässigen, und sagen weiter: 6 mal 4 ist 24 und 5 (die Correctur) ist 29 u. s. w. In gleicher Weise multiplicieren wir mit jeder nach links folgenden Ziffer. Es ergibt sich auch hier, dass man die Theilproducte, so wie die Summanden unter einander schreiben muss.

Die abgekürzte Multiplication wird nun auf folgende Art verrichtet:

1. Man schreibt die Ziffer der Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche im Producte noch vorkommen soll, und die übrigen Ziffern aber in umgekehrter Folge so an, dass die Ziffer der niedrigsten Stelle an die höchste Stelle zu stehen kommt. Leere Stellen über dem Multiplicator zur Rechten oder Linken besetzt man mit Nullen, oder denkt sich dieselben mit Nullen besetzt.

2. Man multipliciert mit jeder Ziffer des Multiplicators einzeln den Multiplicand, von der gerade über ihr stehenden Ziffer anfangend und schreibt die so erhaltenen Theilproducte wie Additionsposten untereinander, ihre Summe ist dann das verlangte Product. Um aber die Fehler der letzten Ziffer rechts einigermaßen zu verbessern, beginnt man die Multiplication mit jeder einzelnen Ziffer nicht mit der gerade über ihr stehenden Ziffer des Multiplicands, sondern mit deren Nachbarin rechts, schreibt jedoch dieses Product nicht an, sondern merkt sich hiervon die nächsten Zehner (die Übertragsziffer) und zählt diese als Correctur zu dem Producte aus der betreffenden Ziffer des Multiplicators und der gerade über ihr stehenden Ziffer, aber nur dann, wenn dieses Product nicht unter 5 schließt, erhöht sie aber um 1, wenn dieses Product über 4 schließt.

Es sei das Product $326{\cdot}75 \times 0{\cdot}00587$ mit 4 Decimalstellen zu suchen, so ist nach den angegebenen Regeln:

$326{\cdot}75_{00} \times 0{\cdot}00587$		$0{\cdot}00587_{0} \times 326{\cdot}75$
78 5000		57623
1 6338	oder	1 7610
2614		1174
228		352
1·9180		41
		3
		1·9180

Die letzte Decimalstelle im Producte ist bei der abgekürzten Multiplication nicht immer genau; will man dieselbe genau erhalten, so entwickle man um eine Decimale mehr, als verlangt wird.

Aufgaben in M. V. R., S. 9 und 10.

§. 33.

Rechnungsvortheile bei der Division und nachträgliche bei der Multiplication.

a) Eine Zahl wird durch 25 dividiert, indem man den Dividend mit 4 multipliciert und das erhaltene Product durch 100 dividiert. Z. B.

98725 : 25	74383 : 25
3949·00	2975·32

b) Eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man den Dividend mit 8 multipliciert und das erhaltene Product durch 1000 dividiert. Z. B.

843625 : 125	374613 : 125
6749 000	2996·904

c) Läßt sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend zuerst durch den einen Factor und dann den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor. Z. B.

41076 : 42	37863 : 72
: 6	: 8
6846	4732·875
: 7	: 9
978	525·875

d) Auch die Multiplication mit 25 und 125 läßt mit Hilfe der Division vortheilhaft durchführen. Man multipliciert eine Zahl

anstatt mit 25 mit 100 und dividiert das Product durch 4; anstatt mit 125 zu multiplicieren, multipliciert man mit 1000 und dividiert das Product durch 8. Z. B.

$$\frac{234_{00}}{5850} \times 25 \qquad \frac{537_{000}}{67125} \times 125$$

Aufgaben in M. Arithmetik für Bürgerschulen, 1. H., S. 20.

§. 34.

Abgekürzte Division der Decimalzahlen.

Um den Vorgang bei der abgekürzten Division klar zu machen, wollen wir von einem Beispiele ausgehen: 2907·94604 soll durch 83·42036 dividiert werden, und man verlangt im Quotienten nur 4 Decimalstellen.

2907·946 : 83·4204 = 34·8589.

405334
71652
4916
745
78
3

Wir sprechen hier: 8 in 29 ist 3 mal enthalten. Da diese 3 Zehner sind, so haben wir im Quotienten 2 Ziffern vor dem Decimalzeichen, und noch 4 Decimalstellen, also zusammen 6 Ziffern; daher brauchen wir im Dividende 7 Ziffern und im Divisor 6 Ziffern. Wir werden also 2907·946 durch 83·4204 dividieren. Das Wesen unserer Abkürzung besteht zunächst darin, dass wir bei jeder folgenden Theildivision anstatt zu dem Reste eine weitere Ziffer des Dividends herabzusetzen, immer eine Ziffer rechts im Divisor weglassen. So streichen wir, nachdem wir die Ziffer 3 im Quotienten erhalten und das Theilproduct subtrahiert haben, die letzte Ziffer (4) im Divisor durch. Nachdem wir die Ziffer 4 im Quotienten gefunden haben, multiplicieren wir mit derselben die durchgestrichene 4 des Divisors, und sagen 4 mal 4 ist 16, gibt 2 zur Correctur, 4 mal 0 ist 0 und 2 ist 2, welche 2 wir von der niedrigsten Ziffer (4) des 2. Theildividends subtrahieren, indem wir daraufzählend sagend: und 2 ist 4. Nachdem wir so den Divisor (83·420) mit dem Quotienten multipliciert und das 2. Theilproduct vom Theildividend (405·334) subtrahiert haben, streichen wir die nächste Ziffer 0 im Divisor und sagen 8 in 71 ist 8 mal enthalten.

multiplicieren nun den Divisor (83·42) mit 8 und da 8 mal 0 keine Correctur gibt, sagen wir sogleich 8 mal 2 ist 16 u. s. w. und subtrahieren das 3. Theilproduct vom 3. Theildividend (71652), wodurch wir den 4. Theildividend (4916) erhalten u. s. w.

Wenn auf diese Art mehrere Beispiele durchgeführt werden, so ersehen die Schüler folgende Regeln:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und ihren Stellenwert, wodurch zugleich bekannt ist, wieviele Stellen der Quotient erhält.

2. Man bestimme den abgekürzten Divisor, welcher so viele Stellen haben muss, als der Quotient hat.

3. Man bestimme den abgekürzten Dividend, welcher entweder eben so viele Stellen hat, als der Quotient oder auch um 1 mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividendes nicht enthalten ist.

4. Man dividiere nach den Regeln der gewöhnlichen Divisior so lange fort, bis die Ziffer an der niedrigsten Stelle des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde, wenn dieses nicht schon im Anfange der Auflösung geschehen sein sollte. Nun schneide man bei Bestimmung jedes folgenden Theilquotienten die niederste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab, multipliciere den neuen Theilquotienten mit den noch übrigen Ziffern des Divisors und nehme jedesmal noch aus dem Producte der zuletzt abgeschnittenen Ziffer und dem neuen Theilquotienten die Zehner als Correctur in das erste eigentliche Product auf.

5. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

In folgenden Aufgaben soll der Quotient mit 3 Dec. bestimmt werden:

24·548|4 : 7·163|5 = 3·426
3057
192
49
6

Da hier die erste Ziffer 3 des Quotienten Einer bedeutet, so wird der Quotient im Ganzen 4 Ziffern enthalten; de abgekürzte Divisor muss daher ebenfalls 4 Ziffern haben, deshalb schneiden wir die letzte Ziffer rechts vom Divisor ab. Der abgekürzte Divisor ist daher 7·163. Der abgekürzte Dividend muss aber

5 Ziffern bekommen, da der Divisor in 4 Ziffern desselben nicht enthalten ist, er ist daher 24·548. Nun multiplicieren wir den abgekürzten Divisor mit 3, sagen aber: 3 mal 5 ist 15, gibt 2 zur Correctur; 3 mal 3 ist 9 und 2 ist 11 und 7 ist 18 u. s. w. Anstatt die Ziffer 4 des Dividends herabzusetzen, schneiden wir vom Dividend die niedrigste Ziffer 3 ab und unser neuer Divisor ist 716, durch welchen wir nun 3057 dividieren, und die Ziffer 4 im Quotienten erhalten; 4 mal 3 ist 12, gibt 1 zur Correctur; 4 mal 6 ist 24 und 1 ist 25 und 2 ist 27 u. s. w.

5·97521 : 25·6853 = 0·232

83
6
1

Da hier die erste Ziffer des Quotienten 2 Zehntel bedeutet, so hat man im Quotienten 3 Ziffern zu entwickeln, daher ist der abgekürzte Divisor 25·6 und der abgekürzte Dividend 5·97.

37842·5897|4 : 0·837 = 45212·174

4362
1775
1018
1819
1457
620
34
1

Da hier die erste Ziffer 4 im Quotienten Zehntausende bedeutet, so erhält der Quotient vor dem Decimalzeichen 5 Stellen, also mit den 3 Decimalen zusammen 8 Ziffern. Der abgekürzte Divisor sollte daher 8 und der abgekürzte Dividend 9 Stellen haben; da aber der Divisor nur 3 Ziffern hat, so müssen, bevor die Abkürzung beginnen kann, durch die gewöhnliche Division so viele Ziffern entwickelt werden, dass sie mit den hierauf durch die Abkürzung zu erhaltenden zusammen die verlangte Zahl ausmachen, also hier nachdem die niedrigste Ziffer 7 des abgekürzten Dividendes in Rechnung gebracht wurde.

Aufgaben in M. V. R., S. 13 und 14.