Neunter Abschnitt.

I. Theilregel oder Gesellschaftsrechnung.

§. 69.

Jede Zahl läſst sich in gleiche oder ungleiche Theile zerlegen. Die Zerlegung einer Zahl in gleiche Theile lehrt die Division. Soll aber eine Zahl in ungleiche Theile zerlegt werden, so muſs außer der Zahl der Theile auch noch angegeben werden, wie groß sie im Vergleiche zu einander werden, oder wie sie sich zu einander verhalten sollen. Das Verhältnis der Theile zu einander wird durch im Voraus gegebenen Zahlen bestimmt, welche Verhältniszahlen heißen.

Die Rechnung, durch welche Zahl so getheilt wird, daſs sich die Theile wie gegebene Zahlen zu einander verhalten, nennt man Theilregel oder Gesellschaftsrechnung.

Ist in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so heißt die Theilregel die einfache; sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird sie die zusammengesetzte Theilregel genannt.

A) Einfache Theilregel.

Der Lehrer gebe z. B. die Aufgabe: A, B und C haben 60 fl. so zu theilen, daſs sich der Theil des A zu jenem des B wie 1 zu 2, der des B zu jenem des C wie 2 zu 3, oder kurz, daſs sich die Theile wie 1 zu 2 zu 3 zu einander verhalten. Wieviel bekommt jeder? Er frage: Wenn A 1 Theil bekommt, wieviel solche Theile muſs B erhalten? Wieviel C? Wieviel Theile sind dies zusammen. In wieviel gleiche Theile müssen daher die 60 fl. getheilt werden? Wieviel beträgt der 6. Theil von 60 fl? Wenn nun A 1 solchen Theil also 10 fl., B 2 Theile oder 20 fl. erhält; wie

verhält sich der Antheil des A zu jenem des B? Wenn B 2 Theile oder 20 fl. und C 3 Theile oder 30 fl. erhält, wie verhält sich der Antheil des B zu jenem des C? Es ist hier die Zahl 60 in die Theile 10, 20 und 30 getheilt werden, die sich eben so zu einander verhalten, wie die gegebene Zahlen 1, 2 und 3.

Man gebe mehrere ähnliche Beispiele, welche die Schüler leicht im Kopfe ausrechnen können und leite sie hierbei auf die Regel hin:

Man addiere die Verhältniszahlen, dividiere durch ihre Summe die zu theilende Zahl und multipliciere den Quotienten mit jeder einzelnen Verhältniszahl.

Die so gefundenen Theile müssen zusammengenommen dem Ganzen gleich sein.

Nun werden Aufgaben für das schriftliche Rechnen gegeben, z. B. Zu einem Geschäfte gibt A 1500 fl. B 1000 und C 800 fl.; sie gewinnen 660 fl.; wieviel gebürt jedem hiervon?

A	1500	15
B	1000	10
C	800	8
		33

Die Antheile am Gewinne müssen sich wie die Einlagen verhalten, also wie die Zahlen 1500, 1000, 800 oder wie 15, 10, 8.

660 fl. : 33 = 20 fl.

A erhält 20 × 15 = 300 fl.
B „ 20 × 10 = 200 „
C „ 20 × 8 = 160 „
660 fl.

Man kann auch so schließen:

3360 fl. geben einen Gewinn von 660 fl.
1 „ gibt „ „ „ $\frac{660}{3360}$ „ = $\frac{1}{5}$ fl.
1500 „ geben „ „ „ $\frac{1500}{5}$ „ = 300 „ erhält A
1000 „ „ „ „ „ $\frac{1000}{5}$ „ = 200 „ „ B
800 „ „ „ „ „ $\frac{800}{5}$ „ = 160 „ „ C

Sind die Verhältniszahlen Brüche, so bringt man diese auf gleichen Nenner und betrachtet dann blos die Zähler als Verhältniszahlen.

Aufgaben im V. R. M. S. 97 und 98.

B) Zusammengesetzte Theilregel.

Zwei Arbeiter A und B erhalten für eine vollbrachte Arbeit 42 fl.; wieviel gebürt jedem, wenn A 3 Tage, jeden Tag 10 Stunden und B 5 Tage, jeden Tag 8 Stunden gearbeitet hat? Da A 3 Tage, jeden Tag 10 Stunden gearbeitet hat, so hat er 3 mal 10 Stunden oder 30 Stunden gearbeitet, während B 40 Stunden arbeitete; daher ist die Rechnung.

A 3Ø	3	42 fl.: 7 = 6 fl.	6 fl. × 3 = 18 fl.	gebürt	A,
B 4Ø	4		6 „ × 4 = 24 „	„	B
	7		42 fl.	zusammen.	

Bei dieser Aufgabe hängt die Theilung nicht nur von der Zahl der Arbeitstage, sondern auch von der an jedem Tage zur Arbeit verwendeten Stundenzahl ab; die Rechnung ist daher eine zusammengesetzte Theilregel. Wir haben sie aber auf eine einfache Theilregel zurückgeführt, was man bei der zusammengesetzten Theilregel immer zu thun hat.

Zu einem Geschäfte traten drei Personen A, B und C zusammen. A gab 1000 fl. auf 2 Monate, B 800 fl. auf 5 Monate und C 600 fl. auf 6 Monate; sie gewannen zusammen 960 fl.; wieviel erhält jeder vom Gewinne? Hier sind Antheile am Gewinne nicht nur von der Einlage, sondern auch von der Zeit abhängig. Es ist aber einerlei,

ob	A	1000 fl.	2	Monate	oder	2000 fl.	1	Monat
„	B	800 „	5	„	„	4000 „	1	„
„	C	600 „	6	„	„	3600 „	1	„

im Geschäfte liegen läßt. Im zweiten Falle ist die Zeit für alle drei Einlagen gleich, daher hängen die Antheile nur von den zu dieser Zeit gehörigen Anlagen, d. i. von dem Producte 2000 fl., 4000 fl. und 3600 fl. ab. Diese können daher als die Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung angenommen werden. Daher die Rechnung:

A	1000 fl.	2 M.	= 2000	5	40	× 5	=	200 fl.
B	800 „	5 „	= 4000	10	40	× 10	=	400 „
C	600 „	6 „	= 3600	9	40	× 9	=	360 „
			960 :	24 =	40			960 fl.

Hieraus ersieht man:

Man verwandelt eine zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung in eine einfache, indem man die zusammengehörigen Verhältniszahlen miteinander multipliciert, und diese Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet.

Aufgaben in V. R. S. 98 und A. K. VII. S. 55 — 58.

II. Die Mischungsrechnung.

§. 70.

Die zur Mischungrechnung gehörigen Aufgaben scheiden sich in zwei Arten, und zwar:

a) In der Aufgabe: 3 hl Wein à 40 fl., 2 hl à 30 fl. und 1 hl à 25 fl. werden gemischt; was kostet 1 hl dieser Mischung? ist die Menge der zur Mischung verwendeten Stoffe nebst dem Werte derselben gegeben, und es soll der Wert der Einheit der Mischung gesucht werden. Hier heißt die Rechnung die Durchschnittsrechnung.

b) Aus Wein, von welchem 1 hl 30 fl. und aus solchem, von welchem 1 hl 20 fl. kostet, soll eine Sorte gemischt werden, von welcher 1 hl 24 fl. kostet.

In dieser Aufgabe ist der Wert der zur Mischung zu verwendenden Stoffe und der Wert der Mischung, der Mittelwert, gegeben, und es soll gesucht werden, wieviel von jedem Bestandtheile genommen werden soll. In diesem Falle ist die Mischungsrechnung eine Alligationsrechnung.

Der Lehrer lasse zuerst Aufgaben der ersten Art lösen. Er lasse bei der hier gegebenen Aufgabe berechnen, wieviel der gesammte zur Mischung verwendete Wein kostet, und frage, wieviel Hektoliter durch die Mischung erhalten werden, und es wird den Schülern leicht sein, einzusehen, dass sie hier nur den ganzen Wert des zur Mischung verwendeten Weines durch die Anzahl der darin enthaltenen Hektoliter zu dividieren haben.

3 hl	à 40 fl.	betragen	120 fl.
2 „	à 30 „	„	60 „
1 „	à 25 „	beträgt	25 „
6 hl	. . .	betragen	205 fl.

Daher 1 hl 205 fl. : 6 = $34\frac{1}{6}$ fl.

Schwieriger fällt den Schülern die Lösung der Alligationsrechnung. Durch folgendes Verfahren kann aber das Ganze den Schülern leicht verständlich machen.

Wenn man 1 hl zu 20 fl. und 1 hl zu 30 fl. zusammenmischt, so kosten die 2 hl des gemischten Weines 20 fl. + 30 fl. = 50 fl., daher 1 hl 25 fl. Man hat also von beiden Sorten gleich viel zu nehmen. Will man aber Wein erhalten, von welchem 1 hl nur 24 fl. kostet, so muss man begreiflich von der minderen Sorte mehr nehmen als von der besseren, da ja die Mischung billiger werden soll als die frühere. Nun kostet aber 1 hl der minderen Sorte um 4 fl. weniger, und 1 hl der besseren um 6 fl. mehr, als 1 hl der Mischung kosten soll, daher würde man, wenn man lauter Wein der niederen Sorte nehmen würde, 4 fl. gewinnen, und hingegen 6 fl. verlieren, wenn man die bessere Sorte à hl zu 24 fl. verkaufen würde. Nimmt man aber von der minderen Sorte 3 hl und von der besseren 2 hl, so wird der Gewinn einerseits durch den Verlust anderseits ausgeglichen; denn 3 hl à 20 fl, kosten 60 fl. und 2 hl à 30 fl. kosten ja ebenfalls 60 fl.; die erhaltenen 5 hl kosten also 120 fl. und daher 1 hl 120 fl. : 5 = 24 fl.

Man hat also von der niederen Sorte 3 Theile und von der besseren 2 Theile zu nehmen, d. h. die Mischung muss in dem Verhältnisse 3 zu 2 oder 6 zu 4 geschehen. Dieses Verhältnis können wir aber auch finden, wenn wir den Abgang der niederen Sorte vom Mischungswerte 24 — 20 = 4, und den Überschuss der besseren Sorte 30 — 24 = 6 suchen. Wir sehen, dass der Unterschied zwischen dem Werte der minderen Sorte und dem Mischungswerte angibt, wieviel man von der besseren und Unterschied zwischen dem Werte der besseren Sorte und dem Mischungswerte aber angibt, wieviel man von der minderen Sorte zur Mischung zu nehmen hat. Hieraus ergibt sich folgende Regel:

	30	4	2
24			
	20	6	3

Man schreibe die Werte der zur Mischung zu nehmenden Stoffe so unter einander, dass der mindere Wert unter den höheren Wert zu stehen kommt; vor diese Werte setze man den Mittelwert, schreibe den Unterschied zwischen dem Mittelwerte und der minderen Sorte neben den höheren, und deren Unterschied zwischen dem höheren und dem Mittelwerte neben den minderen Wert. Die jedem Werte beigesetzten Unterschiede geben an wieviel man von jeder Sorte zu nehmen hat. Dividiert man in diesem Beispiele die Verhältniszahlen 6 und 4 durch ihr gemeinschaftliches Maß 2, so erhält man die Verhältniszahlen 3 und 2.

Wenn man die Mischung auf die hier angezeigte Weise vornimmt, d. i. von der besseren Sorte 2 hl und von der minderen 3 hl nimmt, so erhält man 5 hl. Würde aber verlangt, dass man 15 hl erhalten soll, so müßte man so schließen: Zu 5 hl muss man von der besseren Sorte 2 hl, von der minderen 3 hl nehmen, wieviel muss man von jeder Sorte verwenden um 15 hl zu erhalten?

Hier tritt mit der Alligationsrechnung die Gesellschaftsrechnung in Verbindung, da ja die 15 hl nach dem Verhältnisse wie 2 : 3 zu theilen sind, und wir erhalten:

2 $\quad 3 \times 2 = 6$ hl à 30 fl.
3
15 hl : 5 = 3 hl $\quad 3 \times 3 = 9$ hl „ 20 „
6 hl à 30 fl. kosten 180 fl.
9 hl à 20 „ „ 180 fl.
15 hl kosten 360 fl.
1 „ kostet 24 fl.

Hieraus zeigt sich, dass die Probe über die Alligationsrechnung durch die Durchschnittsrechnung gemacht wird.

Aufgaben in M. V. R. S. 99 und 100. VII. A. K. S. 61 bis 64.