Siebenter Abschnitt.

Quadrieren, Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 61.

Der Lehrer lasse eine Zahl z. B. 3 2-, 3-, 4mal als Factor anschreiben und die Multiplication verrichten.

als: $3 \times 3 = 9$

$3 \times 3 \times 3 = 27$

$3 \times 3 \times 3 = 81$

Er weise darauf hin, dass die Producte 9, 27, 81 aus lauter gleichen Factoren bestehen.

Ein Product aus gleichen Factoren nennt man eine Potenz. (Würde.)

Jeder der gleichen Factoren heißt die Wurzel der Potenz.

9 ist die 2. Potenz von 3, 27 ist die 3. und 81 die 4. Potenz von 3.

Eine Zahl zur 2., 3., 4.,... Potenz erheben heißt, diese Zahl 2 mal, 3 mal, 4 mal... als Factor setzen.

Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal die Wurzel als Factor gesetzt wurde, heißt der Exponent.

Des kürzeren Ausdruckes wegen, pflegt man, um anzuzeigen, dass eine Zahl auf eine Potenz erhoben werden soll, dem Exponenten der Potenz rechts etwas über der Wurzel hinzuschreiben. Z. B.

statt 3×3 schreibt man 3^2

„ $3 \times 3 \times 3$ „ „ 3^3

3^2, 4^3 u. s. w. wird gelesen: 3 zur zweiten, 4 zur dritten (Potenz) u. s. w.

Die zweite Potenz einer Zahl wird auch ihr Quadrat, und die dritte Potenz ihr Cubus genannt.

Die Wurzel einer Potenz wird die Quadratwurzel, Cubikwurzel, vierte, fünfte u. s. w. Wurzel genannt, je nachdem sie zum Quadrat, Cubus, zur vierten, fünften Potenz u. s. w. erhoben wurde.

$$4 = 2 \times 2, \quad 27 = 3 \times 3 \times 3, \quad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Wir haben hier die Zahlen 4, 27, 16, 3125 in lauter gleiche Factoren zerlegt.

Das Verfahren, eine gegenbene Zahl in lauter gleiche Factoren zu zerlegen, nennt man das Wurzelausziehen. Aus einer gegebenen Zahl die 2., 3., 4.,... Wurzel ausziehen heißt, eine Zahl finden, die 2 mal, 3 mal, 4 mal... als Factor gesetzt, die gegebene Zahl zum Producte gibt.

Das Wurzelausziehen wird dadurch angezeigt, dass man der gegebenen Zahl das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ vorsetzt, was früher mit dem Buchstaben r, als Anfangsbuchstaben des Wortes radix (Wurzel) bezeichnet wurde. In die Öffnung des Wurzelzeichens setzt man die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Wurzel ausgezogen wurden soll, und die man den Wurzelexponenten heißt. $\sqrt[3]{64}$ bedeutet die 3. Wurzel aus 64. Der Exponent 2 wird nicht gesetzt; $\sqrt{25}$ bedeutet daher die 2. Wurzel aus 25.

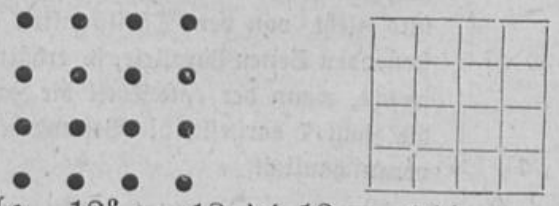
I. Quadrieren.

§. 62.

Der Lehrer lasse mehrere Zahlen mit sich selbst multiplicieren, und sage dann:

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliciert, so heißt das Product das Quadrat dieser Zahl.

Diese Benennung hat darin ihren Grund, weil sich die Menge der Einheiten einer Quadratzahl durch ein Quadrat darstellen läßt, z. B. $4 \times 4 = 16$



Beispiele. $12^2 = 12 \times 12 = 144$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$3{\cdot}75^2 = 3{\cdot}75 \times 3{\cdot}75 = 14{\cdot}0625$$

Der Lehrer mache die Schüler beim Quadrieren von Decimalzahlen aufmerksam, dass das Quadrat der letzteren immer doppelt so viele Decimalen enthält als die Wurzel, weshalb in einem vollständigen Quadrate immer eine gerade Anzahl der Decimalen vorkommen muss.

Hierauf lasse er die Quadrate aller einziffrigen Zahlen suchen, als:

Quadratwurzeln:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Quadrate:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

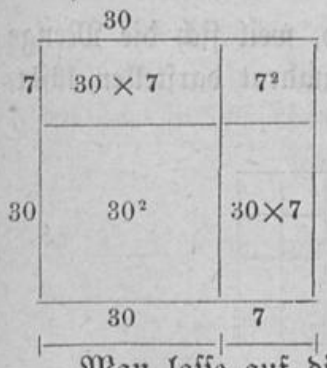
Nun lehre er die Schüler das Quadrieren durch das Verfahren kennen, wodurch das Ausziehen der Quadratwurzel begründet werden kann.

Er gebe z. B. die Zahl 37 zum Quadrieren, lasse dieselbe in Zehner und Einer zerlegen, und dann die Multiplication nach der Weise verrichten, welche die Schüler beim Multiplicieren der entgegengesetzten Zahlen kennen gelernt haben, als:

$$\begin{array}{rl} & 30 + 7 \\ & 30 + 7 \\ \hline & 30.30 + 30.7 \\ & \qquad\quad 30.7 + 7.7 \\ \hline (30 + 7)^2 = & 30^2 + 2.30.7 + 7^2 \end{array}$$

Die Schüler ersehen:

Das Quadrat einer in zwei Glieder zerlegten Zahl besteht: 1. Aus dem Quadrate des ersten Gliedes, 2. aus dem zweifachen Producte des ersten und zweiten Gliedes; 3. aus dem Quadrate des zweiten Gliedes.



Dieser Satz kann auch durch eine geometrische Figur veranschaulicht werden. Beschreibt man über eine gerade Linie, welche man in zwei Theile getheilt hat, ein Quadrat, theilt die anstoßende Seite ebenso und zieht von den Theilpunkten aus mit den anstoßenden Seiten Parallele, so erhält man diese Figur, welche, wenn der eine Theil die Zahl 30, der andere die Zahl 7 darstellt, die Bestandtheile von $(30 + 7)^2$ veranschaulicht.

Man lasse auf diese Art das Quadrat mehrerer Zahlen z. B. 13, 27, 58 u. s. w. suchen.

Eine dreiziffrige z. B. 624 Zahl wird, um sie zu quadrieren, ebenfalls in zwei Theile zerlegt, in 620 + 4. Man erhält dann

$624^2 = (620 + 4)^2 = 620^2 + 2 . 620 . 4 + 4^2$; es ist aber $620^2 = (600 + 20)^2 = 600^2 + 2 . 600 . 20 + 20^2$; setzt man oben statt 620^2 diesen Wert, so hat man

$$624^2 = 600^2 + 2 . 600 . 20 + 20^2 + 2 . 620 . 4 + 4^2.$$

Schreibt man diese Bestandtheile untereinander und führt die Rechnung aus, so erhält man

$624^2 =$	
600^2	360000
$2 . 600 . 20$	24000
20^2	400
$2 . 620 . 4$	4960
4^2	16
	$= 389376$

Nach demselben Vorgange erhält man

$6243^2 =$	
6000^2	36000000
$2 . 6000 . 200$	2400000
200^2	40000
$2 . 6200 . 40$	496000
40^2	1600
$2 . 6240 . 3$	37440
3^2	9
	$= 38975049$

Nimmt man auf die Stelle der Ziffern Rücksicht, so können die Nullen weggelassen werden, man braucht nur jeden folgenden Bestandtheil, da er immer um eine Null weniger enthält, um eine Stelle weiter rechts zu schieben, also:

624^2	
6^2	36
$2 . 6 . 2$	24
2^2	4
$2 . 62 . 4$	496
4^2	16
	$= 389376$

$$
\begin{array}{lr}
\underline{6243^2 =} & \\
6^2 \;\ldots\ldots & 36 \\
2.6.2 \;\ldots\ldots & 24 \\
2^2 \;\ldots\ldots & 4 \\
2.62.4 \;\ldots\ldots & 496 \\
4^2 \;\ldots\ldots & 16 \\
2.624.3 \;\ldots\ldots & 3744 \\
3^2 \;\ldots\ldots & 9 \\
\hline
 & 38975049
\end{array}
$$

Um also eine mehrziffrige Zahl zum Quadrate zu erheben verfährt man auf folgende Weise:

1. Man erhebe die erste Ziffer links zum Quadrate.

2. Man bilde aus jeder folgenden Ziffer zwei Bestandtheile, nämlich: das doppelte Product aus ihr und der ihr vorangehenden Zahl, und ihr eigenes Quadrat.

3. Man schreibe jeden folgenden Theil unter den nächst vorhergehenden so, dass man immer um eine Stelle rechts hinausrückt, wodurch der Localwert der einzelnen Ziffern berücksichtigt wird. Die Summe dieser Theile ist das verlangte Quadrat.

Wenn eine Zahl auf Nullen endigt, so erhebt man nur die ihnen vorangehenden Ziffern zum Quadrat und hängt diesem doppelt soviele Nullen an, als die Zahl am Ende hat, z. B.

$$1200^2 = 1440000.$$

Der Lehrer lasse nun die Zahlen 1, 9, 10, 99, 100, 999, 1000 zum Quadrate erheben, und weise hiebei die Schüler darauf hin, dass das Quadrat der höchsten einzifferigen Zahl (9) nur 2 Ziffern hat; dass das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl 3 und das Quadrat der größten zweizifferigen Zahl nur 4, das Quadrat der kleinsten dreiziffrigen Zahl 5 das Quadrat der größten dreiziffrigen Zahl nur 6 Ziffern hat u. s. w. Hieraus ersehen die Schüler, dass das Quadrat einer einzifferigen Zahl nicht mehr als 2 Ziffern, das Quadrat einer zweizifferigen Zahl nicht weniger als 3 aber auch nicht mehr als 4 Ziffern haben kann, da ja das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl 3 und das Quadrat der größten zweizifferigen Zahl nur 4 Ziffern hat, u. s. w., dass also, das Quadrat um 1 oder 2 Ziffern mehr erhält, wenn die Zahl der Wurzelziffern

um 1 Ziffer größer wird. Das Quadrat einer Zahl hat also doppelt so viele Ziffern als die Zahl oder um eine Ziffer weniger.

Hieraus folgt, dass, wenn man ein gegebenes Quadrat einer ganzen Zahl von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, indem man zu jeder Classe 2 Ziffern nimmt, gerade so viele Classen erhalten werden als die Zahl, aus welcher das Quadrat gebildet wurde, Ziffern enthält.

Dass die letzte Classe zur Linken auch nur eine Ziffer enthalten kann, folgt daraus, dass die höchste Stelle der Wurzel nur ihr eigenes Quadrat gibt, welches auch einziffrig sein kann.

Da jede Decimale im Quadrate zwei Decimalen gibt, so müssen die Decimalen vom Decimalzeichen aus nach rechts eingetheilt werden.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 53 und 54.

II. Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 63.

Der Lehrer gebe die Quadrate mehrerer einzifferigen Zahlen an und frage, welche Zahl man zum Quadrate erheben müsse, um die gegebene Zahl zu erhalten, z. B. Welche Zahl muss man mit sich selbst multiplicieren, um die Zahl 36 zum Producte zu erhalten? u. s. w.

Die Zahl, welche mit sich selbst multipliciert, eine andere gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt die Quadratwurzel dieser Zahl. Welche Zahl ist die Quadratwurzel aus 4, 16 25?.

Eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert, die gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt aus der Zahl die Quadratwurzel ausziehen.

Es ist $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{81} = 9$

Sowie das Addieren und Subtrahieren, das Multiplicieren und Dividieren entgegengesetzte Operationen sind, so ist auch das Quadrieren dem Ausziehen der Quadratwurzel entgegengesetzt. Daher zeige der Lehrer recht genau, wie beim Quadrieren die aus den

Wurzelziffern erhaltenen Bestandtheile des Quadrates in diesem zusammengesetzt wurden, um sie beim Ausziehen der Quadratwurzel ebenso auseinander nehmen zu können.

Es sei z. B. die Zahl 374 zum Quadrate zu erheben und aus dem gefundenen Quadrate die Quadratwurzel zu ziehen. Der Lehrer stelle zur Erleichterung der Vergleichung das Quadrieren und Ausziehen der Quadratwurzel neben einander.

374^2				$\sqrt{13}$	98	76	$= 374$
$3^2 \ldots 9$			.....	9			
			.....	4	98		: 6 . . . 2.3
2.3.7 . . . 4	2		.....	4	2		
$7^2 \ldots$	49		.....		49	76	: 74 . . . 2.37
2.37.4	29	6	.....		29	6	
$4^2 \ldots$		16	.....			16	
	13	98	76	=	==	==	

Theilt man die Quadratzahl von rechts nach links in Classen zu zwei Ziffern, so sieht man, dass in der ersten Classe links (13) das Quadrat der ersten Wurzelziffer ganz vorkommt, dass sich das doppelte Product der zwei ersten Ziffern bis in die erste Stelle der zweiten Classe erstreckt, das Quadrat der zweiten Ziffer vollständig in der zweiten Classe (98) vorkommt, das doppelte Product aus den zwei ersten Ziffern und der dritten bis in die erste Ziffer der dritten Classe (76) reicht und das Quadrat der dritten Ziffer wieder vollständig in der dritten Classe (76) enthalten ist. Sollen wir nun aus der Zahl 139876 die Quadratwurzel ausziehen, so theilen wir dieselbe von rechts nach links in Classen, von zwei Ziffern; wir erhalten aus unserer gegebenen Zahl 3 Classen.

Da das Quadrat der ersten Wurzelziffer in der ersten Classe enthalten ist, so suchen wir, um die erste Wurzelziffer zu finden eine Zahl, deren Quadrat der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist; diese Zahl ist 3. Da beim Wurzelausziehen der entgegengesetzte Weg der Quadrierung eingeschlagen werden muss, so müssen wir bei der Wurzelausziehung nach und nach alle Posten abziehen, die wir bei der Quadrierung addiert haben, daher ziehen wir das Quadrat der ersten gefundenen Ziffer 3, also 9, von der ersten Classe 13 ab. Es bleibt 4. Wenn wir zum Reste 4 die nächste Classe 98 herabsetzen, so müssen in der hiedurch erhaltenen Zahl 498 jene Bestand-

heile enthalten sein, welche die zweite Wurzelziffer im Quadrate erzeugt, d. i. das Product aus der zweiten Wurzelziffer und der doppelten ersten und das Quadrat der zweiten Wurzelziffer. Das doppelte Product aus der ersten und zweiten Wurzelziffer erstreckt sich aber nur bis zur ersten Stelle der zweiten Classe, also bis zu 9, daher können wir den zweiten Wurzeltheil finden, wenn wir 49 d. i. die Zahl 498 mit Hinweglassung der letzten Ziffer rechts durch das doppelte der gefundenen Wurzelziffer, also durch $2 \times 3 = 6$ dividieren. Wir sagen nun: 6 ist in 49 7 mal enthalten. Die zweite Classe enthält das vollständige Quadrat der zweiten Wurzelziffer, daher setzen wir dasselbe unter diese Classe. Ziehen wir nun die Bestandtheile der Quadratzahl, welche die zweiten Wurzelziffer erzeugt, nämlich $2 . 3 . 7 = 42$ und $7^2 = 49$ an den gehörigen Stellen von 498 ab, so bleibt als Rest 29.

Setzen wir zu diesem Reste nun die dritte Classe 76 herab, so erhalten wir die Zahl 2976. In dieser müssen jene Bestandtheile des Quadrates enthalten sein, welche die dritte Wurzelziffer erzeugt, nämlich das doppelte Product aus ihr und dem bereits gefundenen Wurzeltheile und ihr Quadrat. Da sich aber das genannte Product nur bis zur ersten Ziffer der dritten Classe erstreckt, so dividieren wir, um die dritte Wurzelziffer zu erhalten die Zahl 2976 mit Hinweglassung der letzten Ziffer d. i. die Zahl 297 durch den doppelten Theil der bereits gefundenen Wurzel, also durch $2 . 37 = 74$ und wir erhalten 4, deren im Quadrate erzeugten Bestandtheile $2 . 37 . 4 = 296$ und $4^2 = 16$ an den gehörigen Stellen von 2976 subtrahiert keinen Rest geben.

Kürzer verfährt man, wenn man die beiden Bestandtheile, welche jede neue Wurzelziffer erzeugt, sogleich zu dem Doppelten der vorhergehenden Wurzelziffern, nämlich zum Divisor hinzusetzt und das Product aus der hieraus entstandenen Zahl und der neuen Wurzelziffer subtrahiert. Unsere frühere Rechnung auf diese Art durchgeführt ist dann:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{13|98|76} & = 374 \\
3^2 \ldots & 9 & \\
\hline
 & 498 & : 67 \\
67.7 \ldots & 469 & \\
\hline
 & 2976 & : 744 \\
744.4 \ldots & 2976 & \\
\hline
\end{array}$$

Noch kürzer: Man subtrahiert das Product aus dem jedesmaligen neuen Divisor, nachdem man demselben die neue Wurzelziffer angehängt hat, sogleich während des Multiplicierens vom Dividende, als:

$$\sqrt{13|98|76} = 374$$
$$498 \quad : 67$$
$$2976 \quad : 744$$

Hieraus ergeben sich für das Ausziehen der Quadratwurzel folgende Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von rechts nach links in Abtheilungen oder Classen von je zwei Ziffern; die höchste Classe kann auch nur aus einer Ziffer bestehen.

2. Man suche eine Zahl, deren Quadrat der ersten Classe links gleich oder nächst kleiner ist, schreibe diese als erste Ziffer der Wurzel an, und subtrahiere ihr Quadrat von der ersten Classe.

3. Zum Reste setze man die nächste Classe, dividiere die hieraus entstandene Zahl mit Hinweglassung der niedrigsten Stelle durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so gibt der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel. Diese schreibe man sowohl zur Wurzel als auch zum Divisor.

4. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neu gefundenen Wurzelziffer und subtrahiere das Product von dem Dividende mit Zuziehung der vorher weggelassenen Ziffer sogleich während des Multiplicierens.

5. Man setze zum Reste wieder die nächste Classe herab, und wiederhole dieses Verfahren bis man alle Classen der gegebenen Zahl in Rechnung gezogen hat.

Ist eine Wurzelziffer 0, so wird sogleich die nächste Classe herabgesetzt, diese Null muss aber nicht nur in die Wurzel, sondern auch zu dem Divisor gesetzt werden, z. B.

$$\sqrt{36|58|16} = 604$$
$$5816 \quad : 1204$$

Ist aus einem Decimalbruche oder aus einer ganzen Zahl mit einem angehängten Decimalbruche die Quadratwurzel zu ziehen, so theile man vom Decimalzeichen aus die Zahl nach der linken und rechten Seite hin in Classen ein, hänge, wenn die Anzahl der Decimalen eine ungerade ist, hinten eine Null an und ziehe die Qua-

dratwurzel wie aus einer ganzen Zahl, setze aber in der Wurzel das Decimalzeichen, bevor die erste Classe der Decimalen in Rechnung gezogen wird, z. B.

$\sqrt{10|32{\cdot}97|96} = 32{\cdot}14$ $\quad$ $\sqrt{0{\cdot}06|25} = 0{\cdot}25$ $\quad$ $\sqrt{0{\cdot}37|5_0} = 0{\cdot}61$

132 : 62 $\quad$ 225 : 45 $\quad$ 150 : 121

897 : 641 $\quad$ 29 Rest.

25696 : 6424

Wenn beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest bleibt, so ist die gegebene Zahl kein vollständiges Quadrat; in diesem Falle ist die Wurzel nicht ganz genau, sie ist irrational; sie kann jedoch bis auf jeden beliebigen Grad von Genauigkeit gefunden werden, wenn man dem zuletzt erhaltenen und jedem folgenden Reste zwei Nullen anhängt und das Verfahren, wie vorher, fortsetzt, z. B.

$\sqrt{23} = 4{\cdot}79$

700 : 87

9100 : 949

559

Um die Schüler auf das abgekürzte Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel zu führen, lasse er aus einer entsprechenden Zahl, z. B. aus 43, die Quadratwurzel ziehen;

Ohne Abkürzung:

$\sqrt{43} = 6{\cdot}557438$

700 : 125

7500 : 1305

97500 : 13107

5751 00 : 131144

505 2400 : 1311483

111 795100 : 13114868

6 876156

Abgekürzt

$\sqrt{43} = 6{\cdot}557438$

700 : 125

7500 : 1305

97500 : 13107

5751 : 13114

505

112

7

Bei Vergleichung beider Verfahrungsarten ersehen die Schüler, dass man, wenn es sich darum handelt, viele Decimalen zu entwickeln, die Arbeit bedeutend abkürzen kann. Wenn man nämlich, nachdem man mehr als die Hälfte der verlangten Wurzelziffern gefunden hat, anstatt eine neue Classe von Nullen anzuhängen, im neuen Divisor die letzte Ziffer weglässt und die folgenden Wurzelziffern durch die abgekürzte Division entwickelt.

Zur Begründung dieses Verfahrens merke man: Das Ausziehen der Quadratwurzel unterscheidet sich von einer Divisionsaufgabe, dass bei letzterer der Divisor beständig bleibt, beim Ausziehen der Quadratwurzel aber für jeden neuen

Wurzeltheil neu aufgestellt werden muss. Der Quotient ist in jeder Aufgabe von den höchsten Stellen des Dividendes und des Divisors abhängig, alle späteren Stellen dienen nur zu genauen Bestimmung des Restes. Wie die neben befindliche Darstellung zeigt, sind diese höheren Stellen der Divisoren beim Wurzelziehen beständig dieselben, besonders dann, wenn man schon die Hälfte der Ausarbeitung gemacht hat.

Werden die Schüler hingewiesen, dass man einen gemeinen Bruch quadriert, indem man sowohl Zähler als Nenner zum Quadrat erhebt; so ist es ihnen auch einleuchtend, dass man aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszieht, indem man sie sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner zieht, z. B.

$$\sqrt{\tfrac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}; \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}, \ \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}25, \ \sqrt{0{\cdot}25} = 0{\cdot}5$$

Man kann auch den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln und dann aus diesem die Quadratwurzel ziehen.

Das Quadratwurzel-Ausziehen findet seine vorzüglichste Anwendung in der Geometrie. Wir verweisen hier auf die Methodik der geometrischen Formenlehre und auf die Aufgaben im M. Arithm. für Bürgerschulen, II. Heft, S. 44 bis 46.

Hier wollen wir nur auf die eine Anwendung für die Proportionslehre hinweisen, nämlich auf die Berechnung der mittleren geometrischen Proportionale. Es sei die stetige geometrische Proportion $3 : x = x : 12$ gegeben, so ist $x \times x = 3 \times 12$ oder $x^2 = 36$, und daher $x = \sqrt{36} = 6$.

Die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

III. Cubieren.

§. 64.

Der Lehrer lasse mehrere Zahlen mit sich selbst und das hieraus erhaltene Quadrat noch einmal mit der Zahl selbst multiplicieren z. B. 6, 12, 150, 0·5, 0·25, 1·037, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$ u. s. w.

Er lasse die Schüler hierbei bemerken, dass sie diese Zahlen dreimal als Factor gesetzt haben, und sage, dass man das erhaltene Product den Cubus der Zahl heißt:

Eine Zahl zum Cubus erheben oder cubieren heißt, sie dreimal als Factor setzen.

Beim Cubieren der Decimalbrüche weise der Lehrer darauf hin, dass der Cubus dreimal soviel Decimalen enthält, als der gegebene

Decimalbruch, und dass daher in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen ein Vielfaches von 3 sein muss.

Nun lasse der Lehrer die dritten Potenzen aller einziffrigen Zahlen suchen, als:

Cubikwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cubus: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Nun lehre man die Schüler das Cubieren durch das Verfahren kennen, wodurch das Ausziehen der Cubikwurzel begründet wird.

Der Lehrer lasse eine zweiziffrige Zahl, z. B. $45 = 40 + 5$ zum Cubus erheben. Ihr Quadrat ist

$40.40 + 2.40.5 + 5.5$, wird dieses noch mit $40 + 5$ multipliciert, so hat man:

$$\begin{array}{l}
40 . 40 + 2 . 40 . 5 + 5 . 5 \\
\underline{40 + 5} \\
40 . 40 . 40 + 2 . 40 . 40 . 5 + 40 . 5 . 5 \\
\underline{40 . 40 . 5 + 2 . 40 . 5 . 5 + 5 . 5 . 5.} \\
(40 + 5)^3 = 40^3 + 3 . 40^2 . 5 + 3 . 40 . 5^2 + 5^3
\end{array}$$

Hieraus ersehen wir:

Der Cubus einer in zwei Glieder zerlegten Zahl besteht:

1. Aus dem Cubus des ersten Gliedes.

2. Aus dem Producte des dreifachen Quadrates des Gliedes mit dem zweiten Gliede.

3. Aus dem Producte des dreifachen ersten Gliedes mit dem Quadrate des zweiten Gliedes.

4. Aus dem Cubus des zweiten Gliedes.

Man lasse auf diese Art den Cubus mehrerer Zahlen, z. B. 27, 59, 92 u. s. w. suchen.

Nun schreite der Lehrer zum Cubieren einer dreiziffrigen Zahl; er lasse dieselbe ebenfalls zunächst in zwei Glieder zerlegen, z. B. 436. $436^3 = (430 + 6)^3 = 430^3 + 3 . 430^2 . 6 + 3 . 430 . 6^2 + 6^3$; es ist aber $430^3 = (400 + 30)^3 = 400^3 + 3 . 400^2 . 30 + 3 . 400 . 30^2 + 30^3$.

Wenn wir nun diesen Wert oben anstatt 430^3 setzen, so erhalten wir $436^3 = 400^3 + 3 . 400^2 . 30 + 3 . 400 . 30^2 + 30^3 + 3 . 430^2 . 6 + 3 . 430 . 6^2 + 6^3$. Schreiben wir diese Bestandtheile unter einander und berechnen sie wirklich.

$$
\begin{array}{rr}
\underline{436^3 =} & \\
400^3 \;\ldots\ldots & 64000000 \\
3 \,.\, 400^2 \,.\, 30 \;\ldots\ldots & 14400000 \\
3 \,.\, 400 \,.\, 30^2 \;\ldots\ldots & 1080000 \\
30^3 \;\ldots\ldots & 27000 \\
3 \,.\, 430^2 \,.\, 6 \;\ldots\ldots & 3328200 \\
3 \,.\, 430 \,.\, 6^2 \;\ldots\ldots & 46440 \\
6^3 \;\ldots\ldots & 216 \\
\hline
 & = 82881856
\end{array}
$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$
\begin{array}{rr}
\underline{4572^3 =} & \\
4000^3 \;\ldots\ldots & 64000000000 \\
3 \,.\, 4000^2 \,.\, 500 \;\ldots & 24000000000 \\
3 \,.\, 4000 \,.\, 500^2 \;\ldots & 3000000000 \\
500^3 \;\ldots\ldots & 125000000 \\
3 \,.\, 4500^2 \,.\, 70 \;\ldots & 4252500000 \\
3 \,.\, 4500 \,.\, 70^2 \;\ldots & 66150000 \\
70^3 \;\ldots\ldots & 343000 \\
3 \,.\, 457^2 \,.\, 2 \;\ldots & 125309400 \\
3 \,.\, 457 \,.\, 2^2 \;\ldots & 54840 \\
2^3 & 8 \\
\hline
 & = 95569357248
\end{array}
$$

Lassen wir in diesen beiden Beispielen die Nullen weg, so erhalten wir

$$
\begin{array}{rr}
\underline{436^3} & \\
4^3 \;\ldots & 64 \\
3 \,.\, 4^2 \,.\, 3 \;\ldots & 144 \\
3 \,.\, 4 \,.\, 3^2 \;\ldots & 108 \\
3^3 \;\ldots & 27 \\
3 \,.\, 43^2 \,.\, 6 \;\ldots & 33282 \\
3 \,.\, 43 \,.\, 6^2 \;\ldots & 4644 \\
6^3 \;\ldots & 216 \\
\hline
 & 82881856
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\underline{4572^3} & \\
4^3 \;\ldots & 64 \\
3 \,.\, 4^2 \,.\, 5 \;\ldots & 240 \\
3 \,.\, 4 \,.\, 5^2 \;\ldots & 300 \\
5^3 \;\ldots & 125 \\
3 \,.\, 45^2 \,.\, 7 \;\ldots & 42525 \\
3 \,.\, 45 \,.\, 7^2 \;\ldots & 6615 \\
7^3 \;\ldots & 343 \\
3 \,.\, 457^3 \,.\, 2 \;\ldots & 1253094 \\
3 \,.\, 457 \,.\, 2^3 \;\ldots & 5484 \\
2^3 & 8 \\
\hline
 & 95569357248
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich folgende Regeln für das Cubieren einer mehrziffrigen Zahl:

1. Die erste Ziffer links gibt ihren Cubus.

2. Jede folgende Ziffer gibt drei Bestandtheile: a) das dreifache Product aus dem Quadrate der vorhergehenden Ziffern (als Zahl für sich betrachtet) und dieser Ziffer; b) das dreifache Product aus der vorhergehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer und c) ihren eigenen Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so untereinander geschrieben, dass man mit jedem derselben um eine Stelle weiter rechts hinausrückt, wodurch der Localwert jeder einzelnen Ziffer berücksichtigt wird; sodann werden diese Theile, so wie sie stehen, addiert.

Aufgaben in M. Arithmetik für Bürgerschulen S. 49.

Der Lehrer lasse nun die Zahl, 1, 3, 9, 10, 99, 100, 999, 1000 zum Cubus erheben, und weise die Schüler darauf hin, dass der Cubus einer einzifferigen 1, 2, aber nicht mehr als 3 Ziffern haben kann, da der Cubus der höchsten einzifferigen Zahl (9) nur 3 Ziffern hat, dass der Cubus der kleinsten zweizifferigen Zahl 4 und der größten zweizifferigen Zahl nur 6 Ziffern, der Cubus der kleinsten dreizifferigen Zahl (100) 7 und der der größten dreizifferigen Zahl nur 9 Ziffern hat u. s. w. Hieraus ersehen die Schüler, dass der Cubus einer einziffriger Zahl nicht mehr als 3 Ziffern, der Cubus einer zweizifferigen Zahl nicht weniger als 4, aber nicht mehr als 6 Ziffern haben kann, da ja der Cubus der kleinsten zweizifferigen Zahl 4 und der der größten zweiziffrigen Zahl nur 6 Ziffern hat u. s. w., dass also der Cubus um 1, 2 oder 3 Ziffern mehr erhält, wenn die Anzahl der Wurzelziffer um 1 Ziffer größer wird. Da aber der Cubus der ersten Wurzelziffer auch eine oder zwei Stellen haben kann, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal soviele Ziffern als die Wurzel oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Cubus einer gegebenen Zahl von der Rechten zur Linken in Classen ein und nimmt zu jeder drei Ziffern (die erste Classe links ausgenommen, welche auch nur zwei oder gar nur eine Ziffer haben kann), so erhält man so viele Classen, als in der Wurzel Ziffern sind.

Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 65.

Der Lehrer gebe von mehreren einziffrigen Zahlen den Cubus an, und frage, welche Zahl man zum Cubus erheben müsse, um die gegebene Zahl zu erhalten, z. B. Welche Zahl muss man dreimal als Factor setzen, um zum Producte 64 zu erhalten? u. s. w. Die Zahl, welche dreimal als Factor gesetzt, eine andere gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt die Cubikwurzel dieser Zahl.

Welche Zahl ist die Cubikwurzel aus 8? Welche aus 27?

Eine Zahl suchen, welche dreimal als Factor gesetzt, die gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt aus dieser Zahl die Cubikwurzel ausziehen.

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{729} = 9$

Um den Schülern das Verfahren, aus einer mehrzifferigen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen, möglichst zum Verständnisse zu bringen, zeige er recht genau, wie beim Cubieren die aus den Wurzelziffern erhaltenen Bestandtheile des Cubus in diesem zusammengesetzt wurden, um sie beim Ausziehen der Cubikwurzel ebenso auseinander nehmen zu können. Es sei z. B. die Zahl 246 zum Cubus zu erheben und dann aus dem erhaltenen Cubus wieder die Cubikwurzel zu ziehen.

Der Lehrer stelle zur leichteren Vergleichung das Cubieren und Ausziehen der Cubikwurzel neben einander.

246^3			$\sqrt[3]{14}$	886	936	$= 246$
$2^3 \ldots 8$			$\ldots\ldots 8$			
			$\ldots\ldots 6$	886		$:12 \ldots 3 \cdot 2^2$
$3 \cdot 2^2 \cdot 4 \ldots 4$	8		$\ldots\ldots 4$	8		
$3 \cdot 2 \cdot 4^2 \ldots$	96		$\ldots\ldots$	93		
$4^3 \ldots\ldots$	64		$\ldots\ldots$	64		
			$\ldots\ldots 1$	062	936	$: 1728 \ldots 3 \cdot 24^2$
$3 \cdot 24^2 \cdot 6 \ldots 1$	036	8	$\ldots\ldots 1$	036	8	
$3 \cdot 24 \cdot 6^2 \ldots$	25	92	$\ldots\ldots$	25	92	
$6^3 \ldots\ldots$		216	$\ldots\ldots$		216	
	14	886	936	=	==	==

Theilt man die Zahl 14886936 in Classen zu drei Ziffern, so sieht man, dass in der ersten Classe (14) der Cubus der ersten Wurzelziffer vollständig vorkommt, das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten erstreckt sich bis zur ersten Ziffer der zweiten Classe, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer mit dem Quadrate der zweiten (96) beeinflusst noch die zweite Ziffer der zweiten Classe, der Cubus der zweiten Wurzelziffer 4 liegt vollständig in der zweiten Classe. Das dreifache Product aus dem Quadrate der beiden ersten Wurzelziffern (24) mit der dritten (6) reicht bis in die erste Ziffer der dritten Classe, dreifache Product der beiden ersten Wurzelziffern mit dem Quadrate der dritten reicht bis zur zweiten Ziffer der dritten Classe und der Cubus der dritten Wurzelziffer liegt vollständig in der dritten Classe.

Gehen wir nun zum Ausziehen der Cubikwurzel.

Da in der ersten Classe 14 der Cubus der ersten Wurzelziffer ganz enthalten ist, so suchen wir eine Zahl, die zum Cubus erhoben, der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist; nun haben wir die erste Ziffer der Wurzel, also 2. Der Cubus von 2, nämlich 8, von der ersten Classe 14 subtrahiert gibt 6 als Rest. Setzen wir zum Reste die zweite Classe hinzu, so entsteht die Zahl 6886, in welcher die Bestandtheile enthalten sind, die die zweite Wurzelziffer veranlasst, d. i. das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer und dem Quadrate der zweiten und den Cubus der zweiten Wurzelziffer. Das erste Product erstreckt sich aber nur bis zur ersten Ziffer der zweiten Classe; dividieren wir daher die Zahl 6886 mit Hinweglassung der beiden letzten Ziffern rechts, also 68 durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, d. i. durch $3 . 2^2 = 12$., so erhalten wir die zweite Wurzelziffer 4. Bilden wir nun die drei Bestandtheile, welche die neue Wurzelziffer erzeugt, nämlich $3 . 2^2\ 4 = 48$, $3 . 2 . 4^2 = 96$ und $4^3 = 64$, schreiben wir jede folgende Bestandtheile um eine Stelle nach rechts und subtrahieren dann diese Zahlen von 6886, so erhalten wir den Rest 1062. Wenn wir nun zu diesem Reste die dritte Classe hinzusetzen, so enthält die hieraus entstandene Zahl 1062936 alle Bestandtheile, welche im Cubus die dritte Ziffer erzeugt, nämlich das dreifache Product aus dem Quadrate der dieser Ziffer vorhergehenden Zahl

mit ihr, welches aber nur bis zur ersten Ziffer in der dritten Classe sich erstreckt; dividieren wir daher die Zahl 1062936 mit Ausschluss der zwei letzten Ziffern, d. i. 10629 durch $3 . 24^2 = 1728$, so erhalten wir die dritte Wurzelziffer 6 u. s. w.

Aus mehreren in dieser Weise durchgeführten Beispielen erlernen die Schüler für das Ausziehen der Cubikwurzel folgendes Verfahren:

1. Man theilt die Zahl von rechts nach links in Classen von je drei Ziffern, wobei die erste Classe links auch eine oder zwei Ziffern enthalten kann.

2. Man sucht eine Zahl, deren Cubus der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer in die Wurzel, und subtrahiert ihren Cubus von der ersten Classe.

3. Zu dem etwa sich ergebenden Reste setze man die zweite Classe herab, betrachte die so entstandene Zahl mit Abschluss der zwei letzten Ziffern rechts als Dividend und das dreifache Quadrat der gefundenen ersten Wurzelziffer als Divisor, der Quotient wird als zweite Wurzelziffer angeschrieben.

4. Nun bilde man die drei Bestandtheile, welche die zweite Wurzelziffer erzeugt, nämlich: das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer und dem Quadrate der zweiten und den Cubus der zweiten Wurzelziffer, setzt den ersten Bestandtheil unter den Dividend und jeden folgenden Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts darunter und zieht die Summe der so gesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Einschluss der früher weggelassenen zwei Ziffern ab. Lässt sich diese Summe nicht subtrahieren, so ist die neue Wurzelziffer zu groß; man nimmt sie dann nach und nach kleiner, bis man subtrahieren kann. Sollte wieder ein Rest bleiben, so setze man hierzu die folgende Ziffercclasse, dividiere wieder mit Abschluss der zwei letzten Ziffern rechts durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzelzahl, so bekommt man die dritte Wurzelziffer. Hierauf bilde man wieder die drei Bestandtheile, welche sie im Cubus erzeugt, ziehe ihre Summe vom Dividende mit Einbeziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern ab. Nun be-

trachte man das dreifache Quadrat der von den drei gefundenen Ziffern gebildeten Zahl als Divisor u. s. w. Diese Operation wiederholt man solange bis alle Classen der gegebenen Cubikzahl herabgesetzt sind.

Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel irrational. Zum Reste setze man eine Classe von drei Nullen und wiederhole das frühere Verfahren; zum neuen Reste werden wieder drei Nullen gesetzt und dieses solange fortgesetzt, als nach dem Zwecke der Aufgabe Decimalstellen in der Wurzel gesucht werden sollen.

Wenn die gegebene Zahl auch Decimalen enthält, so theilt man diese vom Decimalzeichen an nach rechts in Classen; und wenn hiedurch die letzte Classe rechts weniger als drei Ziffern erhält, so ersetzt man die fehlenden durch Nullen. Bevor die erste Classe der Decimalen herabgesetzt wird, macht man in der Wurzel das Decimalzeichen.

Beispiele.

$\sqrt[3]{70{\cdot}957|944} = 4{\cdot}14$

```
 64
 ----
  6957 : 48
  48
   12
    1
 -------
 2036944 : 5043
 20172
   1968
     64
 -------
     "
```

$\sqrt[3]{0{\cdot}584|600} = 0{\cdot}836$

```
  512
 -----
  72600 : 192
  576
   216
    27
 --------
 12813000 : 20667
 124002
    8964
     216
 --------
 322944 u. s. f.
```

Auf ganz ähnliche Weise, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel führe man die Schüler darauf, dass man auch die letzteren Ziffern der Cubikwurzeln durch abgekürzte Division erhalten kann, indem man nämlich den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der gefundenen Wurzelzahl mit Hinweglassung der letzten Ziffer dividiert. Der Quotient gibt dann die noch übrigen Stellen der Wurzel, z. B.

$$\sqrt[3]{175} = 5{\cdot}5934468$$

125
50000 : 75
375
375
125
8525000 : 9075
81675
13365
729
323121 : 937443
41888
4390
640
78
4

Wird eine bestimmte Anzahl von Wurzelziffern verlangt, so sucht man mehr als die Hälfte derselben durch das gewöhnliche Verfahren und sodann die übrigen mittelst der abgekürzten Division.

Aus einem gemeinen Bruche wird die Cubikwurzel ausgezogen, indem sie aus dem Zähler und aus dem Nenner auszieht, oder indem man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt und sodann aus diesem die Cubikwurzel auszieht, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt{512}} = \frac{5}{8}\ ;\ \frac{125}{512} = 0{\cdot}244140625$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{0{\cdot}244|140|625} = 0{\cdot}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

Das Ausziehen der Cubikwurzel findet hauptsächlich bei der Körperberechnung seine Anwendung.

Aufgaben im V. R. M. S. 61 bis 63. und M. Arithmetik für Bürgerschulen II. Heft S. 53 und 54.