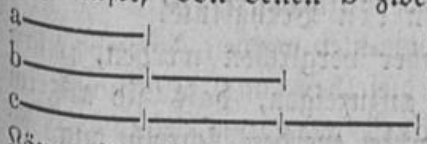
Vierter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

I. Verhältnisse.

§. 49.

Um den Schülern einen deutlichen Begriff von einem Verhältnisse beizubringen, lasse der Lehrer Vergleichungen zwischen benannten und unbenannten Zahlen, insbesondere mit Linien anstellen. Z. B.: Karl hat 12 Kreuzer und Franz 3 Kreuzer; wievielmal soviel Kreuzer hat Karl als Franz? [Um wieviele Kreuzer hat Karl mehr als Franz?]*). Ein Stück Zucker wiegt 2 Kilogramm, ein anderes 6 Kilogramm; wievielmal soviel wiegt das zweite Stück als das erste? (Um wieviel Kilogramm wiegt das zweite mehr als das erste?) Max ist 10 Jahre alt, sein Vater 40 Jahre; wievielmal so alt ist der Vater als Max? (Um wieviele Jahre ist Max jünger als der Vater?) Wievielmal sogroß ist die Zahl 15 als 3? Der Lehrer zeichne 3 gerade Linien an die Schultafel, von denen b zweimal, und c dreimal solang ist als a.



Er messe mittelst einer Schnur die Linie a und lasse die Schüler beachten, dass die Länge dieser Linie in der Länge der Linie b 2 mal, in jener von c 3mal enthalten ist, und frage: Wie oftmal ist a in b, in c enthalten? Wievielmal solang ist c als b, als a? (Um wieviel Theile hat b, und um wieviel Theile c mehr als a?) Die Schüler bemerken, dass sie in allen angegebenen Beispielen zwei Größen oder zwei Zahlen miteinander verglichen, d. i. untersucht haben, wievielmal sogroß

*) Die eingeschalteten Fragen können in der Volksschule wegbleiben.

die eine Größe oder Zahl als die andere ist, oder um wieviel Theile die eine mehr hat als die andere.

Eine Vergleichung zweier Zahlen (oder Größen), durch welche man erfahren will, wievielmal so groß die eine als die andere ist, oder um wieviele Einheiten die eine größer ist als die andere, bei welcher man also untersucht, wie sich zwei Zahlen zu einander verhalten, nennt man ein Verhältnis.

Die Schüler begreifen auch leicht, dass man nicht angeben kann, um wieviel 6 Meter mehr als 3 Kilogramm oder 5 fl. sind, oder wie oft 3 Kilogramm in 6 Meter oder in 6 fl. enthalten sind, u. s. w.; dass man also nur Gleichartiges in Vergleichung bringen kann; es können daher nur unbenannte Zahlen mit unbenannten, und von den benannten nur gleichnamige Zahlen in ein Verhältnis gebracht werden.

Wird bei einem Verhältnisse untersucht, wievielmal so groß die eine Zahl als die andere ist, so nennt man das Verhältnis ein geometrisches; wird hingegen die Vergleichung angestellt, um zu erfahren, um wieviel Einheiten die eine Zahl mehr hat als die andere, so wird das Verhältnis ein arithmetisches genannt. In der Volksschule werden nur die geometrischen Verhältnisse behandelt, daher kann in dieser die Erklärung der Begriffe „geometrisches und arithmetisches Verhältnis" entfallen; wir werden in der Folge unter dem Worte „Verhältnis" immer das geometrische verstehen, und sagen:

Die Vergleichung zweier Zahlen oder zweier gleichartiger Größen, um zu sehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, nennt man ein Verhältnis.

Die zwei Zahlen, welche miteinander verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses. Um anzuzeigen, dass sie als im geometrischen Verhältnisse stehend betrachtet werden, schreibt man sie nebeneinander und setzt zwischen dieselben das Divisionszeichen, weil man ja durch die Division erfährt, wievielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist. Z. B.: 6 : 2, und man liest: 6 verhält sich zu 2. Das Verhältnis wird also als angezeigter Quotient dargestellt.

Das zur Linken stehende Glied, der Dividend, heißt das Vorderglied oder Vordersatz, das zur Rechten stehende Glied,

der Divisor, heißt Hinterglied oder Nachsatz. Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal so groß das Vorderglied ist als das Hinterglied, heißt der Exponent des Verhältnisses.

Wir sehen hieraus, dass die Division im Sinne des Messens auf den Begriff des Verhältnisses führt, ebenso, wie sie als Theilung zur Entstehung der Brüche Anlass gibt.

Da nun die Schüler wissen, dass der Exponent eines Verhältnisses der Quotient ist, den man erhält, wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied dividiert, so sind sie auch im Stande, aus dem Exponenten und einem Gliede das andere zu finden.

Das Vorderglied (Dividend) ist gleich dem Hinterglied (Divisor) multipliciert mit dem Exponenten.

Das Hinterglied ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

Ist das Hinterglied eines Verhältnisses größer als das Vorderglied, so heißt das Verhältnis ein steigendes, z. B. 3 : 5; im entgegengesetzten Falle ein fallendes, z. B. 5 : 2.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 65. A. K. VI. R. S. 22 bis 24.

Die Verhältnisse: 12 : 3 und 8 : 2 haben gleiche Exponenten; Verhältnisse, welche gleiche Exponenten haben, heißen gleiche Verhältnisse, d. h. sie haben gleichen Wert.

Man kann daher ein Verhältnis durch größere oder kleinere Zahlen ausdrücken; der Wert desselben bleibt ungeändert, so lange sich der Exponent nicht ändert.

Der Lehrer lasse beide Glieder eines Verhältnisses, z. B.: 12 : 3 mit 2, 3, 5, 10 multiplicieren und den Exponenten aller Verhältnisse angeben; hierauf lasse er beide Glieder eines Verhältnisses z. B. 60 : 40 durch 2, 4, 5, 10 dividieren und ebenfalls den Exponenten der hierdurch erhaltenen Verhältnisse suchen.

Hieraus ersehen die Schüler:

1. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert.

2. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied durch dieselbe Zahl dividiert.

Auf den ersten Satz uns stützend, können wir ein Verhältnis, in welchem Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen ausdrücken, indem wir beide Glieder mit dem zu entfernenden Nenner multiplicieren. Z. B.: das Verhältnis $\frac{2}{3} : 5$ soll durch ganze Zahlen dargestellt werden. Beide Glieder mit dem Nenner 3 multipliciert, gibt das Verhältnis 2 : 15, dessen Exponent $\frac{2}{15}$, so, wie im gegebenen Verhältnisse ist.

Aus dem Verhältnisse $12 : 2\frac{1}{5}$ erhalten wir 60 : 11.

Durch Anwendung des zweiten Satzes können wir ein Verhältnis, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abkürzen, z. B.: statt des Verhältnisses 18 : 72 erhalten wir, indem wir beide Glieder durch 18 dividieren, das einfachere Verhältnis 1 : 4.

Das Verhältnis $3\frac{3}{4} : 8\frac{5}{8}$ soll auf die einfachste Form gebracht werden.

$3\frac{3}{4} : 8\frac{5}{8}$	Wir verwandeln die gemischten Zahlen in
$\frac{15}{4} : \frac{69}{8}$	unechte Brüche; bringen beide Brüche auf den
30 : 69	gemeinschaftlichen Nenner 8, und dividieren beide
10 : 23	Glieder durch 3.

Übungsaufgaben im V. R. M., S. 66, b.

Gulden und Kreuzer sind zwar gleichartige, aber nicht gleichnamige Größen. Es verhalten sich daher 5 Gulden zu 20 Kreuzern nicht wie 5 zu 20. Wollen wir eine Vergleichung anstellen, so müssen wir zuerst die 20 Kreuzer auf die Benennung Gulden bringen oder die Gulden in Kreuzer umwandeln, und wir erhalten $\frac{1}{5}$ fl. : 5 fl. d. i. 1 : 25; oder

20 kr. : 500 kr.
1 : 25

Mehrnamige Zahlen müssen auf eine Benennung gebracht werden.

Aufgaben im V. R. M., S. 66, b.

Nun mache der Lehrer von den Verhältnissen viele Anwendungen. Z. B.: Ein viereckiger Tisch ist 2 m lang und 1 m breit; wie verhält sich die Breite zur Länge?

Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute 540 m und die andere 560 m zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

Franz und Karl haben denselben Weg zur Schule. Franz brauchte, um diesen Weg zu machen, 25 Minuten, Karl 30 Minuten; wie verhält sich die Geschwindigkeit Franzens zu jener Karls?

Es wird hier ein näheres Eingehen nöthig sein. Der Lehrer macht die Schüler aufmerksam, dass Franz, der den nämlichen Weg in 25 Minuten zurücklegt, schneller gehen, also eine größere Geschwindigkeit haben muss, als Karl, der hiezu die längere Zeit von 30 Minuten braucht. Wenn nun die Geschwindigkeit Franzens größer ist, als die Karls, so kann sich die erstere zur zweiten nicht wie 25 : 30 verhalten.

Den wievielten Theil des Weges legt Franz in 1 Minute zurück? Den wievielten Theil Karl? Da nun Franz in einer Minute $\frac{1}{25}$, und Karl $\frac{1}{30}$ des nämlichen Weges zurücklegt, so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie $\frac{1}{25} : \frac{1}{30}$, d. i. wie 30 : 25 oder abgekürzt, wie 6 : 5.

Übungsbeispiele V. R. M. S. 67, c und d. A. K. IV. R. S. 24 bis 26.

Der Lehrer lasse mehrere Verhältnisse untereinander schreiben, das Product aller Vorderglieder, sowie aller Hinterglieder und aller Exponenten suchen. Z. B.

Einfache Verhältnisse	3 : 2	Exponent	$\frac{3}{2}$
	5 : 8	"	$\frac{5}{8}$
	7 : 6	"	$\frac{7}{6}$
Zusammengesetztes Verhältnis	$3 \times 5 \times 7 : 2 \times 8 \times 6$	"	$\frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 8 \times 6}$
oder	35 : 32	"	$\frac{35}{32}$

Ein Verhältnis, dessen Vorderglied das Product aus den Vordergliedern mehrerer einfachen Verhältnisse und dessen Hinterglied das Product aus den Hintergliedern derselben Verhältnisse ist, heißt ein zusammengesetztes Verhältnis.

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Anwendung. Von zwei Rechtecken ist das eine 18 m. lang und 12 m. breit, das andere 20 m. lang und 6 m. breit; wie verhalten sich die Flächen der beiden Rechtecke?

Verhältnis der Längen	18 : 20
" " Breiten	12 : 6
" " Flächen	$18 \times 12 : 20 \times 6$
oder	9 : 5 .

II. Proportionen.

§. 50.

Der Lehrer gebe irgend ein Verhältnis an, lasse die Schüler andere diesem gleiche Verhältnisse auffinden, und je zwei Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbinden. Dann sage er:

Wenn zwei gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbunden werden, so entsteht eine Proportion. Z. B. 6 : 3 = 4 : 2. Diese Proportion wird gelesen: 6 verhält sich zu 3, wie sich 4 zu 2 verhält.

Eine Proportion hat also 4 Glieder; das 1. und 4. Glied (6 und 2) nennt man die beiden äußeren, das 2. und 3. Glied (3 und 4) die beiden inneren Glieder.

Eine Proportion, in welcher alle Glieder unbenannte Zahlen sind, heißt eine Zahlenproportion.

Die Glieder einer Proportion können auch benannte Zahlen sein, jedoch müssen die Glieder eines jeden Verhältnisses gleiche Benennung haben. Z. B. 20 Meter : 5 Meter = 16 fl. : 4 fl.

In der Proportion : 16 : 8 = 8 : 4 sind die beiden inneren Glieder einander gleich; eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder einander gleich sind, wird eine stetige Proportion und jedes der beiden inneren Glieder die mittlere geometrisch Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. 8 ist also die mittlere stetige Proportionale zwischen 16 und 4. Der Lehrer lasse eine beliebige Proportion an die Tafel schreiben, z. B. 20 : 4 = 15 : 3. Wie heißt hier der Exponent? Wie werden wir das Vorderglied des ersten Verhältnisses finden, wenn nur das Hinterglied und Exponent bekannt wären? 20 = 4 × 5; ebenso lasse man suchen 15 = 3 × 5.

Setzet nun in unserer Proportion statt der beiden Vorderglieder die für dieselben aufgefundenen Factoren. Hieraus ersehen die Schüler,

4 × 5 : 4 = 3 × 5 : 3 dass sowohl die äußeren als die inneren Glieder miteinander multipliciert, dieselben Factoren 4, 5 und 3 enthalten, also auch dasselbe Product geben.

Zu demselben Resultate kommt man auch, wenn man in einer Proportion edes Verhältnis durch dessen kleineres Glied abkürzt.

20 : 4 = 15 : 3
5 : 1 = 5 : 1

In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Wir haben also für die Richtigkeit einer Proportion zwei Kennzeichen: 1. Die Gleichheit der Verhältnisse, d. i. die Gleichheit der Exponenten und 2. die Gleichheit der Producte aus den beiden äußeren und aus den beiden inneren Gliedern.

Eine Proportion bleibt daher so lange richtig, als das Product der äußeren Glieder dem Producte der beiden inneren Glieder gleich ist.

Hieraus folgt:

1. Aus einer Proportion, z. B. $6 : 3 = 4 : 2$ lassen sich 7 weitere Proportionen ableiten:

a) Wenn man die beiden inneren Glieder verwechselt.

$$6 : 4 = 3 : 2$$

b) Durch Vertauschung der äußeren Glieder.

$$2 : 3 = 4 : 6$$

c) Durch gleichzeitige Verwechslung sowohl der inneren als auch der äußeren Glieder.

$$2 : 4 = 3 : 6$$

d) Wenn man die inneren Glieder zu den äußern und die äußern zu den inneren Gliedern macht.

$$3 : 6 = 2 : 4$$

e) Durch Wiederholung der schon oben angegebenen Verwechslungen, an der letzten Proportion $3 : 6 = 2 : 4$ ausgeführt.

$$3 : 2 = 6 : 4$$
$$4 : 6 = 2 : 3$$
$$4 : 2 = 6 : 3$$

Der bloße Anblick dieser Proportionen zeigt ihre Richtigkeit.

2. Man kann in einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied mit einer beliebigen Zahl multiplicieren, und die daraus erhaltene Proportion bleibt richtig. Z. B. Aus:

$3 : 2 = 6 : 4$ folgt auch:

$3 \times 3 : 2 \times 3 = 6 : 4$ oder $9 : 6 = 6 : 4$
$3 \times 3 : 2 = 6 \times 3 : 4$ „ $9 : 2 = 18 : 4$
$3 : 2 \times 3 = 6 : 4 \times 3$ „ $3 : 6 = 6 : 12$
$3 : 2 = 6 \times 3 : 4 \times 3$ „ $3 : 2 = 18 : 12$.

Mittelst dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen, wenn man den Nenner eines äußeren Gliedes als Factor in ein inneres, und den Nenner eines inneren Gliedes als Factor in ein äußeres überträgt. Z. B.

$$8 : 13\tfrac{1}{3} = 3 : 5 \qquad \tfrac{40}{3} : 8 = 5 : 3$$
$$8 : \tfrac{40}{3} = 3 : 5 \qquad 40 : 8 \times 3 = 5 : 3$$
$$8 : 40 = 3 : 5 \times 3 \qquad 40 : 24 = 5 : 3$$
$$8 : 40 = 3 : 15$$

oder oder

$$8 \times 3 : 40 = 3 : 5 \qquad 40 : 8 = 5 \times 3 : 3$$
$$24 : 40 = 3 : 5 \qquad 40 : 8 = 15 : 3$$

3. In jeder Proportion kann man ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl dividieren, ohne dass die Proportion aufhört, richtig zu sein. Z. B.

Aus $15 : 12 = 30 : 24$ folgt:

$$(15 : 3) : (12 : 3) = 30 : 24 \qquad \text{oder } 5 : 4 = 30 : 24$$
$$(15 : 3) : 12 = (30 : 3) : 24 \qquad \text{„ } 5 : 12 = 10 : 24$$
$$15 : (12 : 3) = 30 : (24 : 3) \qquad \text{„ } 15 : 4 = 30 : 8$$
$$15 : 12 = (30 : 3) : (24 : 3) \qquad \text{„ } 15 : 12 = 10 : 8$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Proportion durch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn in derselben ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben. Z. B.

Aus $x : 8 = 6 : 24$ erhält man $x : 1 = 2 : 1$
„ $9 : x = 80 : 16$ „ „ $9 : x = 5 : 1$
„ $8 : 20 = 7 : x$ „ „ $2 : 5 = 7 : x$

4. **Wenn man von zwei oder mehreren Proportionen die ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multipliciert, so geben die Producte in derselben Ordnung wieder eine Proportion.** Z. B.

$$3 : 4 = 6 : 8$$
$$5 : 8 = 15 : 24$$
$$7 : 9 = 28 : 36$$

$$3 \times 5 \times 7 : 4 \times 8 \times 9 = 6 \times 15 \times 28 : 8 \times 24 \times 36$$
$$105 : 288 = 2520 : 6912$$

Eine durch Multiplication der gleichvielten Glieder mehrerer Proportionen entstandene Proportion nennt man eine zusammengesetzte Proportion.

5. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hinterglieder.

Aus $16 : 4 = 12 : 3$ folgt:

$(16 + 12) : (4 + 3) = 16 : 4$ und $12 : 3$

$(16 - 12) : (4 - 3) = 16 : 4$ und $12 : 3$

6. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Differenz, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.*)

Aus $16 : 4 = 12 : 3$ folgt:

$(16 + 4) : (16 - 4) = (12 + 3) : (12 - 3)$

oder $20 : 12 = 15 : 9$

Wenn drei Glieder einer Proportion bekannt sind, so läßt sich jedesmal das noch unbekannte Glied finden, d. h. die Proportion auflösen. Das unbekannte Glied bezeichnet man gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z. Es sei z. B. die Proportion $12 : 4 = x : 5$ aufzulösen. Der Exponent des ersten Verhältnisses ist 3, folglich auch der Exponent des zweiten Verhältnisses, daher ist das Vorderglied desselben $x = 5 \times 3 = 15$ und man hat die Proportion $12 : 4 = 15 : 5$.

Um eine Proportion aufzulösen, sucht man aus dem bekannten Verhältnisse den Exponenten und mittelst desselben das unbekannte Glied des andern Verhältnisses.

Man lasse eine Proportion, z. B. $15 : 3 = 10 : x$ an die Tafel schreiben, und frage:

Welches Product geben die beiden inneren Glieder? Welches Product müssen auch die beiden äußeren geben? Da uns von dem Producte 30 ein Factor bekannt, wie finden wir den anderen? Wie groß ist also

*) Von den Sätzen 1, 5 und 6 kann in der Volksschule Umgang genommen werden.

das äußere Glied x? $x = \frac{3 \times 10}{15} = 2$; die Proportion ist also 15 : 3 = 10 : 2. Die Schüler ersehen:

Man findet ein äußeres Glied der Proportion, indem man die beiden inneren Glieder miteinander multipliciert und das Product durch das bekannte äußere Glied dividiert.

Um aus der Proportion 15 : x = 10 : 2 das innere Glied x zu finden, frage man nach dem Producte der beiden äußeren Glieder, erinnere die Schüler, dass dieses auch das Product der beiden inneren Glieder ist, dass sie von diesem Producte schon einen Factor, nämlich 10 wissen, und daher den anderen Factor finden, indem sie das Product durch den bekannten Factor, das innere Glied 10 dividieren. Also $x = \frac{15 \times 2}{10} = 3$.

Man findet ein inneres Glied, indem man die beiden äußeren Glieder miteinander multipliciert und das Product durch das bekannte innere Glied dividiert.

Übungsaufgaben V. R. M. S. 68 und 69. A. K. VI. R. S. 27 bis 28.

Die bisher besprochenen Proportionen heißen geometrische Proportionen. Durch Gleichstellung zweier arithmetischer Verhältnisse erhält man eine arithmetische Proportion. Diese hat jedoch für die Volksschule fast nur als stetige Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder einander gleich sind, ein Interesse. Z. B. 8 ÷ 5 = 5 ÷ 2. Das gleiche innere Glied (5) heißt das arithmetische Mittel zwischen 8 und 2.

In einer arithmetischen Proportion ist aber die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder, also 8 + 2 = 5 + 5. Ist das innere Glied unbekannt, wie in 8 ÷ x = x ÷ 2, so ist 8 + 2 = 2 x, und $x = \frac{8 + 2}{2} = 5$.

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen oder Größen findet man, wenn man ihre Summe durch 2 dividiert.

III. Anwendung der Proportionen.

§. 51.

Die Schüler begreifen leicht, dass z. B. 4 Meter Tuch 20 fl. kosten, wenn 2 Meter derselben Gattung Tuch 10 fl. kosten, und dass hier 4 benannte Zahlen als: 4 Meter und 2 Meter 20 fl. und 10 fl. in einem gewissen Zusammenhange zueinander stehen.

Es gibt im Leben und in der Natur Größen der mannigfaltigsten Art, die miteinander in so innigem Zusammenhange stehen, dass, wenn die eine sich ändert, wächst, auch die andere sich ändern, wachsen oder abnehmen muss.

Zur Lösung der Aufgaben mit Anwendung der Proportion ist es sehr wichtig, dass die Schüler über diesen Zusammenhang klar werden, daher muss sie der Lehrer durch gründliche Beurtheilung vieler und mannigfaltiger Beispiele zu dieser Einsicht führen.

Der einfachste Zusammenhang, der zwischen solchen Größen stattfinden kann, ist der, dass, wenn die eine 2 mal, 3 mal, 4 mal u. s. w. so groß wird, auch die andere 2 mal, 3 mal, 4 mal u. s. w. so groß werden muss, so dass ihr Quotient stets derselbe ist; man sagt dann: solche Größen stehen in einem geraden Verhältnisse oder sie sind gerade proportioniert. Z. B. Die Größe, Ware und ihr Preis, Arbeitszeit und Arbeitslohn, Gewicht und Rauminhalt eines Körpers, die Zeit und der zurückgelegte Weg, Capital und Interessen u. s. w. bei übrigens gleichen Umständen. Zur Erläuterung dessen kann der Lehrer folgende Betrachtung anstellen lassen:

Kostet 1 Meter Tuch 5 Gulden, so kosten
2 Meter 2 mal 5 also, 10 Gulden
3 „ 3 „ 5 „ 15 „
4 „ 4 „ 5 „ 20 „

Daher kostet die doppelte Ware (Warenmenge) auch das doppelte Geld, die dreifache, vierfache Ware u. s. w. auch das dreifache, vierfache Geld u. s. w.

Aus dem Obigen ersehen die Schüler, dass sich 2 Meter zu 3 Meter ebenso verhalten, wie 10 fl. zu 15 fl. u. s. w. Wir können daher die Proportionen aufstellen:

2 Meter : 3 Meter = 10 fl. : 15 fl.
2 „ : 4 „ = 10 fl. : 20 fl. u. s. w.

Hierauf wird der Begriff des umgekehrten Verhältnisses oder der verkehrt proportionierten Größen entwickelt.

Wenn 1 Arbeiter zu einer Arbeit 2 Tage braucht, so würden 2 Arbeiter (unter sonst gleichen Umständen) nicht etwa 4 Tage, sondern bei gleichem Fleiße nur die halbe Zeit, also nur 1 Tag

brauchen; 3 Arbeiter brauchen nur den 3. Theil von 2 Tagen (d. i. $\frac{2}{3}$ Tage) u. s. w.

Wenn z. B. 1 Arbeiter zu einer Arbeit 24 Tage braucht, so brauchen 2 Arbeiter nur die Hälfte von 24 Tagen, also 12 Tage,
„ „ 3 „ „ den 3. Theil „ 24 „ „ 8 „
„ „ 4 „ „ den 4. „ „ 24 „ „ 6 „
u. s. w.

Es brauchen daher: die doppelte Zahl der Arbeiter nur die Hälfte, die dreifache Zahl der Arbeiter nur ein Drittel der Zeit u. s. w.

Man kann daher folgende Proportionen aufstellen:

2 Arb. : 3 Arb. = 8 Tg. : 12 Tg. oder 2 : 3 = 8 : 12
1 „ : 4 „ = 6 „ : 24 „ „ 1 : 4 = 6 : 24

Die Zahl der Arbeiter und die Zahl der Arbeitstage stehen in einem solchen Zusammenhange, dass zu einer 2-, 3-, 4-mal so großen Zahl der einen Art nur die Hälfte, das Drittel, das Viertel der anderen Art gehören. Von solchen Zahlen sagt man, sie stehen in einem umgekehrten Verhältnisse oder sie sind umgekehrt proportioniert.

Im umgekehrten Verhältnisse stehen auch: die Zahl der zu Nährenden und die Dauer der Lebensmittel, mit welchen sie ausreichen sollen, das Capital und die Zeit (bei gleichen Interessen), die Geschwindigkeit einer Bewegung und die Zeit derselben (bei gleichem Wege), der Preis des Getreides und das Gewicht des Gebäckes u. s. w.

Ist eine Rechenaufgabe derart, dass man aus den gegebenen Größen und der unbekannten Größe x eine Proportion bilden kann, so nennt man sie eine Regeldetrie-Aufgabe, weil das Rechnungsverfahren bei solchen Aufgaben „Regel von Dreien" (lateinisch: Regula de tribus) heißt.

Der Lehrer gebe eine solche Aufgabe und mache die Schüler aufmerksam, dass darin eine Frage, ein Fragesatz, und eine Bedingung, ein Bedingungssatz, vorkommt. So heißt z. B. in der Aufgabe: Was kosten 5 Hektoliter Wein, wenn 3 Hektoliter 36 fl. kosten? der Fragesatz: Was kosten 5 Hektoliter Wein? und der Bedingungssatz ist „wenn 3 Hektoliter 36 fl. kosten."

Der Lehrer lasse den Bedingungssatz aufschreiben und unter denselben den Fragesatz setzen, als:

3 hl 36 fl. (Bedingungssatz)
5 „ x „ (Fragesatz).

Man lasse das Verhältnis 36 fl. : x fl. ansetzen und frage, ob die 5 hl mehr oder weniger kosten werden, als 3 hl. Wenn nun 5 hl mehr kosten als 36 fl., werden dann unter x fl. mehr oder weniger gedacht werden müssen als 36 fl.? Wenn nun unter x fl. mehr als 36 fl. gedacht werden müssen, ist dann das Verhältnis 36 fl. : x fl. steigend oder fallend? Wenn nun das eine Verhältnis steigend ist, wie muss in einer Proportion auch das andere Verhältnis sein? Werden wir daher 5 hl : 3 hl oder 3 hl zu 5 hl setzen? Wir wollen das Verhältnis 3 hl : 5 hl als das erste annehmen; und erhalten dann die Proportion 3 hl : 5 hl = 36 fl. : x fl. Wir können aber auch das Verhältnis 36 fl. : x fl. als das erste setzen, und erhalten dann die Proportion 36 fl. : x fl. = 3 hl : 5 hl. Welche Proportionen lassen sich nun bilden, wenn wir x fl. : 36 fl. setzen? Da die Schüler in der Auflösung der Proportionen schon geübt sind, so wird ihnen diese selbst überlassen.

Nach dem hier angegebenen Vorgange entfällt die Eintheilung der Aufgaben in solche, welche zur geraden und in solche, welche zur ungeraden Regeldetrie gehören, die Schüler haben immer nur zu beurtheilen, ob das Verhältnis, welches das Glied x enthält, ein steigendes oder fallendes werde, und hienach auch das andere Verhältnis als steigendes oder fallendes hinzuzusetzen.

Geht man nach der Eintheilung der Aufgaben in solche, welche zur geraden und zur umgekehrten Regeldetri gehören, vor, so setze man das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der anderen Art, und zwar, wenn beide Arten gerade sind, in der nämlichen Ordnung, sind sie aber verkehrt proportioniert, in umgekehrter Ordnung.

In der soeben behandelten Aufgabe sind beide Arten von Zahlen gerade proportioniert, da 2-, 3-, 4-mal so viel Hektoliter auch 2-, 3-, 4-mal so viel Gulden kosten, daher setzt man das Verhältnis x fl. : 36 fl. gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Hektoliter (zu x fl. gehören 5 Hektoliter zu 36 fl. 3 Hektoliter) in der nämlichen

Ordnung genommen, also 5 : 3 und löst dann die erhaltene Proportion auf.

3 hl 36 fl. $3 : 5 = 36 : x$

5 „ x „ $x = \frac{36 \times 5}{3} = 60$ fl.

In der Aufgabe: 6 Arbeiter können eine Arbeit in 20 Tagen verrichten; wieviel Tage brauchen 10 Arbeiter hiezu? sind beide Arten der Zahlen verkehrt proportioniert, denn 2-, 3-, 4-mal so viele Arbeiter brauchen zur Verrichtung derselben Arbeit nur die Hälfte, das Drittel, das Viertel der Zeit; daher setzt man wohl das Verhältnis zwischen den 2 Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der 2 Zahlen der andern Art, jedoch in umgekehrter Ordnung, also:

6 Arb. 20 Tage T. T. Arb. Arb.

10 „ x „ $x : 20 = 6 : 10$

$x = 2 \times 6 = 12$ Tage.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 68 bis 75.

Der Lehrer verbindet mit der Lösung der Aufgaben mittelst der Proportion die Lösung nach der Schlussrechnung. Wir wollen nachfolgend in einigen Beispielen die Lösung nach dieser Art zeigen.

a) Was kosten 25 Liter, wenn 5 Liter 90 Kreuzer kosten?

25 Liter sind 5 mal 5 Liter; daher kosten 25 Liter 5 mal 90 kr. = 4 fl. 50 kr.

b) 36 kg kosten 8 fl.; was kosten 9 kg?

9 kg sind der 4. Theil von 36 kg; daher kosten 9 kg $\frac{1}{4}$ von 8 fl., also 2 fl.

c) Bei 100 Einkaufspreis gewinnt man 18·25 fl.; wieviel bei 275 fl. Einkaufspreis?

bei 200 fl. 2 mal 18·25 . . . . 36·5

„ 50 „ $\frac{1}{2}$ mal 18·25 . . . . 9·125

„ 25 „ $\frac{1}{2}$ mal 9·125 . . . . 4·5625

275 50·188 fl.

d) Für 63 hl zahlt man 420 fl.; wieviel für 18 hl?

63 hl . . . . . kosten 420 fl.

9 „ = $\frac{1}{7}$ von 63 hl „ 60 „

18 „ = 2 mal 9 „ „ 120 „

e) Der Schall legt in 5 Secunden 1660 Meter zurück; wieviel in 8 Sekunden?

In 5 Sec. 1660 m
" 1 " $\frac{1}{5}$ von 1660 m = 332 m
8 " 8 mal 332 m = 2656 m

f) Eine Locomotive legt in 1 Minute 500 Meter zurück und braucht, um eine gewisse Strecke zu durchfahren, 20 Minuten; wieviel Meter müsste sie in 1 Minute zurücklegen, wenn sie dieselbe Strecke in 15 Minuten durchlaufen sollte?

Die bestimmte Strecke ist 500 m × 20 = 10000 m.

Die Locomotive muss also in 1 Minute den 15. Theil von 10000 m zurücklegen;

der 5. Theil von 10000 m ist 2000 m, daher der 15. Theil $\frac{1}{3}$ von 2000 m $666\frac{1}{3}$ Meter.

Aufgaben der Regeldetri lassen sich auch manchmal durch eine passende Zerfällung der Mehrheit, deren Wert gesucht werden soll, lösen. Z. B.

Was kosten 27 kg, wenn 8 kg 16 fl. 48 kr. kosten?

27 kg sind 3 mal 8 kg und noch 3 kg; 3 mal 8 kg kosten 3 mal 16 fl. 48 kr., d. i. 49 fl. 44 kr.; 3 kg = 2 kg + 1 kg 2 kg sind von 8 kg der 4. Theil, daher kosten sie auch den 4. Theil von 16 fl. 48 kr., d. i. 4 fl. 12 kr.; 1 kg kostet davon die Hälfte, also 2 fl. 6 kr.; daher 27 kg

49 fl. 44 kr.
4 " 12 "
2 " 6 "
55 fl. 62 kr.

Was kosten 15 hl 75 l Wein, wenn 36 hl 432 fl. 60 kr. kosten?

36 hl			432·6 fl.
12 hl	= $\frac{1}{3}$ von 36 hl	. . . . .	144·2 fl.
3 "	= $\frac{1}{4}$ " 12 "	. . . . .	36·05
50 l	= $\frac{1}{6}$ " 3 "	. . . . .	6·008
25 "	= $\frac{1}{2}$ " 50 l	. . . . .	3·004
15 hl 75 l		. . . . .	189·262 fl.

IV. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 52.

Ein Fuhrmann hat 12 Centner Ware für 60 fl. 50 Meilen weit zu fahren, wieviel würde er für 9 Centner erhalten, wenn er diese auf derselben Straße 20 Meilen weit fahren soll?

Nehmen wir bei dieser Aufgabe auf die Anzahl der Meilen keine Rücksicht, so hat man die Aufgabe: Ein Fuhrmann hat 12 Centner für 60 fl. zu fahren, wieviel wird er für 9 Centner erhalten? 12 Ctr.: 9 Ctr. = 60 fl.: x fl.; x = 45 fl. Nun heißt die Aufgabe weiter: Wenn man für 50 Meilen Weges 45 fl. bezahlt, wieviel hat man für 20 Meilen zu bezahlen?

50 M.: 20 M. = 45 fl.: x fl.; x = 18 fl.

Hat der Lehrer viele solcher Auflösungen vorgenommen, so kann er zu Ansätzen schreiten, durch welche die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri mit einemmale gelöst werden. Er lasse dann bei der Lösung der Proportionen die Operationen nicht wirklich ausführen, sondern nur anzeigen. So wäre z. B. obige Aufgabe auf folgende Art durchzuführen: Aus der Proportion

12 Ctr.: 9 Ctr. = 60 fl.: x fl. erhält man $x = \frac{60 \times 9}{12}$ fl.

Nun lasse man in die zweite Proportion diese angezeigte Rechnung anstatt 45 fl. einsetzen, und man erhält dann die Proportion $50\,M.: 20\,M. = \frac{60 \times 9}{12}$ fl.: x fl. Versetzt man den Nenner 12 in das erste Glied, so erhält man $12 \times 50 : 20 = 60 \times 9 : x$ und hieraus

$$x = \frac{60 \times 9 \times 20}{12 \times 50} = 18 \text{ fl.}$$

Durch die Schlussrechnung:

für 12 Ctr. 50 Meilen gefahren zahlt man 60 fl.
" 9 " 20 " " " " ? "

für 1 Ctr. 50 Meilen gefahren zahlt man den 12. Theil
" 9 " 50 " " " " 9 mal soviel.
" 9 " 1 " " " " den 50. Theil
" 9 " 20 " " " " 20 mal soviel.

$$\text{daher } \frac{60 \text{ fl.} \times 9 \times 20}{12 \times 50} = 18 \text{ fl.}$$

Setzen wir die Aufgabe so an, wie bei der einfachen Regeldetrie, als:

12 Ctr. 50 M. 60 fl. Bedingungssatz.
9 Ctr. 20 M. x fl. Fragesatz.

Die aufmerksame Betrachtung des obigen Aufsatzes zeigt, dass alle Glieder des Bedingungssatzes mit Ausnahme der Zahl 60 als Nenner des Bruches, und alle Glieder des Fragesatzes mit Ausnahme des unbekannten Gliedes als Zähler erscheinen.

Übungsaufgaben V. R. M. S. 75, 76.

Wiederholungsaufgaben V. R. M. S. 77, 78. A. K. S. 37 — 41.