Handbuch der speciellen Methodik.
Herausgegeben von Rob. Niedergesäß.
VIII. Theil.

Methodik

des Unterrichts in der

Geometrie und im geometrischen Zeichnen

von

Eduard Bauer,
Bürgerschullehrer in Wien,

und

Alexander Tschiedel,
Bürgerschullehrer in Wien.

Wien, 1884.
Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn,
Buchhandlung für pädagogische Literatur und Lehrmittelanstalt,
V. Margaretenplatz 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alle Rechte vorbehalten.

K. k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Theil:

Die Geometrie in der Volks- und Bürgerschule.

(Mit Berücksichtigung des Lehrstoffes für das geometrische Zeichnen in der VI., resp. I. Classe).

Bearbeitet von **Eduard Bauer.**

I. Allgemeine Betrachtungen.

Die Geometrie ist keine Erfahrungswissenschaft; zu ihren Resultaten ist man nicht auf dem Wege der Beobachtung gekommen, sondern auf dem der Speculation. Die Formen, mit denen die Geometrie sich beschäftigt, sind zum Theile in der Natur vorhanden, zum Theile sind sie künstlich geschaffen worden.

Der betrachtende und speculierende Denker hat die todten Formen zu beleben gewusst, indem er das Gesetzmäßige oder Gesetzlose herauszulesen vermochte und Gleiches mit Gleichem combinierte. Die geometrischen Raumgrößen, wie wir sie heute definieren, sind von den wirklich existierenden Körpern abstrahiert; dieser Process der Abstraction hat die Geometrie zu einer Wissenschaft gemacht.

Jener Theil der Geometrie, welcher der Abstraction nicht bedarf, hat es bloß mit sichtbaren Formen und deren sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften zu thun, er heißt daher auch Formenlehre und ist Gegenstand der fünf ersten Classen der heutigen österreichischen Volksschule. Die Formenlehre soll und muss der Fassungskraft der Schüler auf dieser Stufe entsprechend ihre Wahrheiten durch die Anschauung entwickeln; von der Beweisführung eines geometrischen Lehrsatzes im Sinne Euclids kann und darf daher bei ihr nicht die Rede sein. Die Geometrie im wissenschaftlichen Sinne beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Beziehungen der Raumgrößen, welche nicht sichtbar sind, sie fördert den Geist der geometrischen Gebilde zutage und kann daher nur dem schon abstrahierenden, speculativen Verstande geboten werden, also dem schon reiferen Schüler der drei Oberclassen der achtclassigen Volks-, resp. Bürger- oder Mittelschule.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In der Geometrie gibt es kein „Nebeneinander“ der Wahrheiten und Gesetze, wie in den Naturwissenschaften, sondern nur ein „Hintereinander“. In der Geometrie ist jede Entdeckung die Folge einer früheren, ohne welche sie nicht hätte gemacht werden können. In den Naturwissenschaften sind schwierige, compliciertere Gesetze manchmal vor leichteren, einfacheren entdeckt worden; die Mathematik allein schreitet vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Leichteren zum Schwereren in einer ununterbrochenen Kette fort.

Deswegen bietet auch der Unterricht in der Geometrie in concentrischen Kreisen Schwierigkeiten. Der ganze Stoff hängt innig zusammen, und Wahrheiten auf einer frühern Stufe einfach weglassen und auf der nächstfolgenden behandeln, heißt noch nicht in concentrischen Kreisen lehren.

Die Geometrie erweist ihre Lehrsätze entweder direct, d. h. sie beweist z. B., dass die drei Winkel eines Dreiecks 180 Grade ausmachen müssen, oder sie geht indirect (apagogisch) vor, d. h. sie sucht zu beweisen, dass das Gegentheil von dem, was sie beweisen will, nicht möglich ist. Die erstere Art der Beweisführung ist selbstverständlich der letzteren vorzuziehen.

Die Geometrie hat es mit den Raumgrößen zu thun, mit bloß gedachten Dingen (Abstracta), die von den wirklichen Dingen (Concreta) abstrahiert werden. Der geometrische Körper ist bloß der Raum, den der betreffende physische Körper von derselben Gestalt einnimmt; die geometrischen Flächen sind bloß die Grenzen eines physischen Körpers, die geometrischen Linien sind bloß die Grenzen physischer Flächen und die geometrischen Punkte sind die Grenzen physischer Linien. Der geometrische Körper, wenn auch ein bloßes Gedankending, hat die drei Dimensionen, die Länge, Breite und Dicke; er ist ein dreidimensionaler Raum. Die geometrische Fläche hat zwei Dimensionen, sie hat keine Dicke; die geometrische Linie hat eine Dimension, die Länge, und der geometrische Punkt ist raumlos, also dimensionslos. Es ist klar, dass man die Raumgrößen auf der Unterstufe d. h. von der ersten bis zur 6. Classe nicht in der Weise definiert; eben so klar ist es, dass man dort nicht von einem geometrischen Körper, von einer geometrischen Fläche u. s. w. sprechen wird, weil dies dem kindlichen Geiste nicht fasbar wäre. Der kindliche Geist kann nur fassen, was

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihm durch die Sinne direct vermittelt wird. Das Kind wird begreifen, wenn man ihm einen Würfel zeigt, dass derselbe einen Raum — einen Platz — einnimmt und daher ein Körper sein muss. Das Kind begreift ferner, dass der Würfel von Flächen umgeben ist, weil es die Flächen sehen kann, und weil es von einer Tisch- und Bodenfläche weiß, und man kann ihm auch anschaulich machen, dass es ebene und krumme Flächen gibt.

Die geometrischen Raumgrößen in ihrer richtigen Auffassung müssen jedoch Gegenstand einer höheren Stufe sein.

Aus dem Anschauen der Körper hat man den Begriff „Fläche", aus dem Betrachten der Fläche den Begriff „Linie" und von dem der Linie hat man den Begriff „Punkt" abgenommen. Es ist daher naturgemäß, wenn der Volksschulpädagoge mit der Demonstration eines Körpers und zwar des allereinfachsten, des Würfels, seinen Unterricht in der Formenlehre beginnt.

In der Volksschule und auch in deren weiterem Ausbaue, der Bürgerschule, sollen wo möglich die geometrischen Lehrsätze durch die Anschauung direct erwiesen werden; natürlich kann man nur veranschaulichen, was sich veranschaulichen läßt, sehr oft kann man wohl nur einen Gedankenprocess anregen, der zum richtigen Schlusse, zur Erkenntnis der Wahrheit führen soll.

Die mathematische Beweisführung geht auch vom Anschauen aus, denn es muss ihr eine richtige Zeichnung zur Grundlage dienen, aus welcher sie herausliest, nur dass sie das nach und nach Herausgelesene durch Buchstaben ausdrückt und den gewonnenen Schluss in eine Formel kleidet; es ist aber immer derselbe Gedankenprocess.

Es ist daher nicht nothwendig, einer einfachen mathematischen Beweisführung ängstlich aus dem Wege zu gehen, wenn eine gute Zeichnung vorliegt; denn endlich muss ja doch einmal der Schüler von dem Concreten zum Abstracten geführt werden.

Wenn man also beispielsweise in der 6. Classe durch das Nebeneinanderlegen der drei aus Pappe geschnittenen Winkel eines bestimmten Dreieckes gezeigt hat, dass sie einen gestreckten Winkel, also 180° ausmachen, so wird es kein Verstoß gegen die Didaktik sein, wenn man auch auf die bekannte, einfach mathematische Weise lehrt, dass nicht nur die Winkel dieses Dreieckes, sondern die drei Winkel eines jeden Dreieckes 180 Grade betragen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man darf die Hinüberleitung von der unmittelbaren Anschauung zum Begriff allerdings nicht verfrühen; nachtheilig ist es aber auch, sie unnützer Weise zu verlangsamen.

II. Zweck und Ziel des geometr. Unterrichtes in der Volks- und Bürgerschule.

Die Lehrpläne für Volks- und Bürgerschulen, welche auf Grund des Reichsvolksschulgesetzes ausgearbeitet wurden, stellen Geometrie und geometrisches Zeichnen als eine selbständige Unterrichtsdisciplin auf. Da sich aber das geometrische Zeichnen nicht immer mit dem vorgenommenen Lehrstoff aus der Geometrie in Verbindung bringen läſst, da es sich auch mit der Darstellung einfacher technischer Objecte zu befassen hat, welche in den Rahmen des geometrischen Lehrstoffes selten hineinpassen, so ist es angezeigt, mindestens von der 7. Classe an beide Gegenstände gesondert zu behandeln.

Die Geometrie wurde als selbständiger Lehrgegenstand in den Unterrichtsplan aufgenommen, weil die durch das Volksschulgesetz geforderte höhere Volksbildung ohne eine größere Vertiefung überhaupt nicht denkbar wäre. Die eingehende Behandlung dieser Unterrichtsmaterie ist von eminent praktischer Bedeutung. Unsere Zeit verlangt vom Handwerker und gewerbetreibenden Bürger, vom Arbeiter mehr, als daſs er wisse: das ist ein Würfel, das ein Kegel, das eine gerade oder krumme Fläche. Unsere Gewerbetreibenden sollen Entfernungen und Flächen beurtheilen und gegenseitig in ein Verhältnis bringen können, sie sollen geschickt Längen messen, Flächen und Körper berechnen können und einige sogenannte „höhere Gewerbe" verlangen sogar ein gutes Hantieren mit dem Cirkel, eine genaue Wiedergabe des Vorgestellten und Berechneten.

Damit ist auch das Ziel des Unterrichtes in der Geometrie gegeben. Leistet der geometrische Unterricht in der Volks- und Bürgerschule das oben Ausgesprochene, so hat er sein Ziel erreicht und seinem Zwecke entsprochen.

Bei der verhältnismäßig knapp bemessenen Zeit für diesen Unterrichtsgegenstand wird der Lehrer auf außerordentliche Auskunftsmittel bedacht sein müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Schulzeit zu Excursionen nicht verwendet werden darf, und im Lehrplane, in richtiger Weise, nach Thunlichkeit Feldmessübungen mit Kette und Stäben gefordert werden und endlich praktische Geometrie auch thatsächlich nur im Freien, durch wirkliche Vermessungen, betrieben werden kann, so wird es unerläßlich sein, im Sommer an freien Tagen bei günstiger Witterung mit den Schülern Ausflüge in plane Gegenden zu machen, sie dort lehren, Felder abzustecken, im Umfange auszumessen, im verkleinerten Maßstabe auf das Papier zu bringen und zu berechnen.

III. Der Lehrstoff der V. Classe.

Der geometrische Lehrstoff für die V. Classe wird ganz treffend mit dem Collectivnamen „Formenlehre" bezeichnet, weil die einfachsten eckigen und krummen Körper bloß ihrer Form und den zutage tretenden Eigenschaften nach betrachtet werden sollen. An den verschiedenen einfachen Körpern: dem Würfel, dem Prisma, der Pyramide, dem Pyramidalstutz, dem Kreiscylinder, dem Kreiskegel, der Kugel und dem Ellipsoid — sollen die verschiedenen Flächen, Winkel und Linien durch Anschauung (Erklärung und darauffolgende Zeichnung) zur Kenntnis gebracht werden.

In Nachfolgendem soll der Vorgang, wie er beim Vorzeigen jedes Körpers eingehalten werden soll, am Würfel gezeigt werden. (Demonstrieren.)

Der Würfel ist ein Körper, weil er einen Raum einnimmt. Beim Würfel ist die Länge gleich der Breite und gleich der Dicke. Der Würfel ist von sechs gleich großen viereckigen Flächen begrenzt, welche Seiten heißen, und weil diese Flächen durchaus eben sind, heißen sie Ebenen. Die Grenzen dieser sechs gleich großen Ebenen sind gleich lange gerade Linien, in der Anzahl zwölf, sie heißen Kanten; die Endpunkte der Kanten, in der Anzahl acht, heißen Ecken des Würfels. Der Würfel ist also ein Körper mit sechs gleich großen viereckigen Seiten, zwölf gleich großen geraden Kanten und acht Ecken. Schneidet man ihn genau in zwei Hälften, so haben dieselben gleiche Gestalt und Größe, er heißt daher ein regelmäßiger Körper. Drei Seiten des Würfels bilden ein hervorspringendes Eck, ein dreiseitiges Körpereck. Die vier Kanten einer jeden Würfelseite sind

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleich groß und je zwei nebeneinander befindliche schließen einen Winkel ein, den man einen Rechten nennt. Eine Würfelfläche ist also ein Viereck von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln ein solches Viereck heißt ein Quadrat. (Hiebei wird vorläufig von der Größe des Würfels abgesehen.)

Nun wird aber der Lehrer gut thun einen Würfel von bestimmter Größe vorzuzeigen, z. B. einen Kubikdecimeter. Durch geschickte Fragen wird nun folgende Definition für den Kubikdecimeter vermittelt. „Der Kubikdecimeter ist ein Würfel, dessen Seite ein Quadratdecimeter und dessen Kante ein Meter ist.

Daran haben sich die Fragen zu knüpfen: „Was versteht man unter einem Kubikmeter, Kubikcentimeter u. s. w.?

Am Würfel wurden auf diese Weise folgende Begriffe entwickelt: Körper, ebene Fläche, Körpereck, Quadrat, gerade Linie, rechter Winkel.

Am rechtwinkeligen vierseitigen Prisma erklärt man das Rechteck, am schiefwinkeligen vierseitigen Prisma das Rhomboid, den Rhombus, den spitzen und stumpfen Winkel. An der Pyramide die verschiedenen Arten des Dreiecks; am Pyramidalstutz das Trapez und das Trapezoid. Am senkrechten Kreiscylinder den Kreis und die Ellipse. An der Kugel den Kreis und die Kugelfläche. Am regulären fünf- und sechsseitigen Prisma das regelmäßige Fünf- und Sechseck.

Es ist selbstverständlich, dass die Schüler anzuhalten sind, alle diese Körper aus ihren Netzen selbst anzufertigen. Die Körper sind auch an der Tafel vom Lehrer zu zeichnen und in ihre Netze aufzulösen. Man wirke dahin, dass sich die Schüler aus Pappe Körper- und Körpernetzsammlungen anfertigen.

IV. Der Lehrstoff der VI. Classe mit Berücksichtigung des Stoffes für das geometrische Zeichnen.

Der Lehrstoff der 6. Classe hat sich zu verbreiten über die Lagen, welche zwei, drei, vier u. s. w. Gerade zu einander einnehmen können und über die entstandenen Beziehungen derselben zu einander. In der 6. Classe braucht man die Fläche und ihre Figur (Gestalt) nicht mehr von dem engen Standpunkt der bloßen Körper-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

grenze zu betrachten, sondern man kann und soll die verschiedenen planimetrischen Figuren genetisch entstehen lassen.

Zwei Gerade schneiden sich entweder, oder sie berühren sich, oder es geschieht keines von beiden; dann sind sie entweder parallel oder sie convergieren nach der einen und divergieren nach der andern Richtung. Zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden.

Wenn zwei Gerade convergieren, so kann man sie verlängern, bis sie sich treffen.

Was entsteht dann? Warum können parallele Gerade, noch so sehr verlängert, sich nie treffen? Was ist also ein Winkel? Womit wird die Größe eines Winkels gemessen? Was versteht man unter der Winkelfläche? (Die Winkelfläche ist als Theil einer Kreisfläche aufzufassen.) Welcher Art sind die Winkel, wenn zwei Gerade sich schneiden? Welcher Art sind die entstandenen Winkel, wenn zwei Gerade sich berühren? (Nicht in einem Endpunkte.) Wann steht eine Gerade auf einer andern senkrecht? Es sind die Begriffe „senkrecht" und „vertical" festzustellen.

Drei Gerade können sich in einem, in zwei und in drei Punkten schneiden. Schneiden sie sich in einem Punkte, so bilden sie ein Strahlenbüschel; die Winkel, welche sie solchergestalt einschließen, werden mit einer ganzen Kreislinie gemessen, sie bilden daher 360°. (Construction von Winkeln bestimmter Größe, Addition und Subtraction der Winkel.)

Schneiden sie sich in zwei Punkten, so kann man an ihnen die Begriffe: „Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel" zur Erklärung bringen.

Läßt man die zwei geschnittenen Geraden parallel werden, so werden je zwei Gegen- und je zwei Wechselwinkel einander gleich und die Summe zweier Anwinkel beträgt 180°.

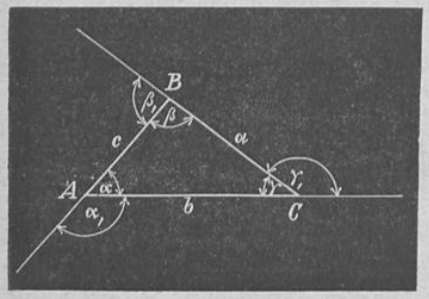
(Bevor man für diese Lehrsätze den Beweis erbringt, wird es gut sein, über den Unterschied zwischen Grundsätzen (Axiome) und Lehrsätzen (Theoreme) zu sprechen; es wird angezeigt sein, einige mathematische Axiome, welche später zu Beweisen unumgänglich nöthig sind, vorzuführen und zu beleuchten. Wie z. B.: Jede Größe ist sich selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addiert und subtrahiert, Gleiches mit Gleichem multipliciert oder durch Gleiches dividiert gibt wieder Gleiches. Zwei Größen einer dritten gleich sind untereinander

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleich u. s. f.) Wo es angeht, soll man freilich geometrische Beweise mit Hilfe der Anschauung machen, aber den einfachen mathematischen Beweis braucht man darüber nicht zu vernachlässigen; denn wird er begriffen, so haben die Schüler auf diesem Wege ihre Denkkraft mehr geübt, als mit Hilfe der Anschauung.

Bei mathematischen Beweisen, wie sie die Oberclassen der Volks- und Bürgerschule nothwendig haben, empfiehlt sich noch immer ganz gut die Euclid'sche Form, welche auf Grund einer vorhandenen Voraussetzung eine Behauptung aufstellt und diese mit Hilfe der Voraussetzung zu erweisen sucht. Was das Axiom: wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich, welches so oft bei den geometrischen Beweisen nothwendig ist, in seiner Anwendung auf mathematische Größen betrifft, so gebe man sich keineswegs der sichern Hoffnung hin, dass es den Schülern so ohne weiters verständlich ist; es wird sich vielmehr empfehlen, dieses Axiom durch mehrere Beispiele den Sinnen vorzuführen. Z. E. Der Schüler A ist ebenso groß, wie der Schüler B, der Schüler C ist auch so groß, wie der Schüler B, also muss — der Schüler A auch so groß sein, wie der Schüler C.

Schneiden sich drei Gerade in drei Punkten, so schließen sie ein Dreieck ein.



Am zweckmäßigsten wird es sein, die drei Ecken eines Dreieckes mit A, B und C; die drei Winkel mit α, β, γ, und die drei Seiten mit a, b und c zu bezeichnen. Dem Winkel α liegt die Seite a, dem Winkel β die Seite b und dem Winkel γ die Seite c gegenüber.

Nennen wir dieser Bezeichnung entsprechend die drei Außenwinkel zum Unterschied von den drei Innenwinkel α_1, β_1, und γ_1, so lassen sich sämmtliche Lehrsätze über das Dreieck in folgende Formeln kleiden:

$$\text{I.}\begin{cases} 1.\ \sphericalangle\,\alpha + \sphericalangle\,\beta + \sphericalangle\,\gamma = 2\ \text{R} \\ 2.\ \sphericalangle\,\alpha_1 = \sphericalangle\,\beta + \sphericalangle\,\gamma \\ 3.\ \sphericalangle\,\alpha_1 + \sphericalangle\,\beta_1 + \sphericalangle\,\gamma_1 = 4\ \text{R} \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{II.}\begin{cases}\text{Angenommen es wäre} & a > c\,. \\ \text{und} & b > a \\ \text{so muss bekanntlich} & \sphericalangle\,\alpha > \sphericalangle\,\gamma \\ \text{und} & \sphericalangle\,\beta > \sphericalangle\,\alpha\end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases}\text{und: } a + c > b \\ a + b > c \\ b + c > a \text{ sein.}\end{cases}$$

Man ersieht aus diesen Formeln, dass man 1. die drei kleinen Anfangsbuchstaben des griechischen Alphabets verwerten muss, um klar zu sein und dass 2. eine derartige Formel ein deutliches Bild eines geometrischen Lehrsatzes vorstellt. Wissen die Kinder, was die einzelnen Zeichen der Formel bedeuten und haben sie die Beweisführung für den ausgedrückten Lehrsatz erfasst, dann ist die Formel für sie ein verständnisvoller Ausdruck eines ganzen Ideenganges.

Nicht früh genug kann in dem angedeuteten Sinne der Schüler mit der mathematischen Formel vertraut gemacht werden; auf den höheren Stufen, beim Berechnen der Flächen- und Körperinhalte ist ja die Formel absolut nicht zu übergehen, sie soll dann aber den Schülern schon bekannt sein.

Wann ist ein Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt, und wann sind zwei Dreiecke einander congruent?

Bekanntlich sind zwei Figuren einander gleich, wenn sie gleich groß sind, oder kürzer gesagt, wenn sie inhaltsgleich sind; die Gestalt der beiden Figuren kommt dabei gar nicht in Betracht, da ein 27-Eck ebenso viele Flächeneinheiten (m^2) haben kann, wie ein Dreieck.

Die Ähnlichkeit zweier Figuren hingegen hat gar nichts mit der Größe, mit dem Flächeninhalte derselben zu schaffen, sie ist bedingt ausschließlich durch die gleiche Gestalt; die Gestalt planimetrischer Figuren aber ist abhängig von der Größe und Anordnung der Winkel. Wenn aber zwei planimetrische Figuren dieselbe Größe (dieselbe Anzahl Flächeneinheiten) und dieselbe Gestalt haben, dann decken sie sich aufeinandergelegt vollständig mit ihren Seiten und Winkeln und dann sagt man, diese Figuren seien congruent.

(≌) Das Zeichen ≌ (gleich und ähnlich) wird nicht von allen Geometern für congruent gebraucht. Schulz v. Straßnitzky und Wittstein gebrauchen das

einfachere Zeichen: $\equiv$. Euclid kannte weder das Wort congruent (einerlei), noch das Zeichen dafür; aber der Begriff, den das Wort zum Ausdruck bringt, ist von ihm klar und präcise ausgesprochen worden.

Gehen wir aber nun vom Allgemeinen zum Besonderen über. Zwei Dreiecke werden also nach dem Vorhergehenden congruent sein, wenn sie gleiche Größe und gleiche Gestalt haben oder anders gesagt, wenn sie alle drei Seiten und alle drei Winkel der Reihe nach gleich haben. Nun wäre es aber gewiss sehr umständlich, um zwei Dreiecke auf ihre Congruenz prüfen zu wollen, nachweisen zu müssen, dass sie alle Seiten und Winkel gleich haben. Das sind sechs Stücke, welche man nicht nothwendig alle zu wissen braucht, um auf Größe und Gestalt eines Dreiecks einen Schluss ziehen zu können. Man erbrachte nämlich sehr bald, nachdem der Begriff Congruenz feststand, den Beweis, dass drei von einander unabhängige, d. h. zu einander in keiner Beziehung (Relation) stehende Stücke ein Dreieck der Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmen. Zu einander in Relation stehen z. B. die drei Dreieckswinkel, da ihre Summe 2 R gibt. Die drei Winkel eines schiefwinkeligen Dreiecks werden also ein Dreieck nicht der Größe und Gestalt nach bestimmen und es ermöglichen, die drei Seiten aufzufinden.

Wenn wir, conform der schon früher gewählten Bezeichnung — und wir wollen dieselbe immer beibehalten — die drei Seiten eines Dreiecks mit a, b und c, die drei Winkel mit α, β und γ bezeichnen, so sind unter den sechs Stücken folgende Combinationen zur dritten Classe möglich:

a, b, c, α, β, γ

I. a, b, c,	II. a, b, α,	III. a, b, β,
IV. a, b, γ,	V. b, c, α,	VI. b, c, β,
VII. b, c, γ,	VIII. c, α, β,	IX. c, α, γ,

und X. α, β, γ.

Wenn also drei Stücke eines Dreiecks gegeben sind, so können es sein:

1. Die drei Seiten (a, b und c).

2. Zwei Seiten a und b und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α.

3. Zwei Seiten und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

4. Zwei Seiten (a und b) und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ.

5. Zwei Seiten (b und c) und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

6. Zwei Seiten (b und c) und der b gegenüberliegende Winkel β.

7. Zwei Seiten (b und c) und der c gegenüberliegende Winkel γ.

8. Eine Seite (c) und die derselben anliegenden Winkel α und β.

9. Eine Seite (c), der anliegende Winkel α und der gegenüberliegende Winkel γ, und endlich:

10. Alle drei Winkel.

Der 10. Fall kommt nicht in Betracht, da die drei Winkel eigentlich nur zwei Stücke des Dreiecks repräsentieren; die neun ersten Fälle aber können, wie man leicht begreift, allgemein in fünf Sätze zusammengefasst werden, welche angeben, wodurch ein Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt ist, oder — anders gesagt — was man wissen muss, um es construieren zu können. Es müssen gegeben sein:

1. Die drei Seiten
oder 2. Zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel,
oder 3. Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
oder 4. Eine Seite und die ihr anliegenden Winkel,
und 5. Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

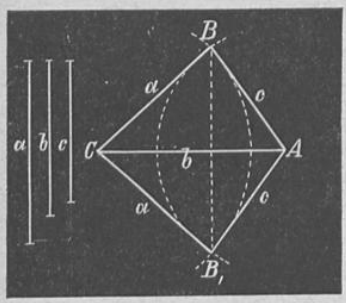
Nachdem durch das Bekanntsein zweier Dreieckswinkel auch der dritte gegeben ist, kann man den Fall 5 als identisch mit Fall 4 betrachten. Es bleiben also eigentlich von den 10 angeführten denkbaren Combinationen nur vier discutierbare übrig.

Wir werden uns nun überzeugen, dass ein Dreieck wirklich mit den in den Fällen 1, 3 und 4 angegebenen Stücken sich construieren läßt, dass aber der Fall 2 dahin präcisiert werden muss, dass es heißt: „Zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel.“ Ist ein ungleichseitiges Dreieck nun wirklich durch drei solche Stücke der Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt, wie sie in den obigen Fällen angeführt sind, so muss es einem zweiten Dreieck, welches dieselben Stücke enthält, congruent sein.

Die Constructionsfälle fallen also mit den Congruenzfällen zusammen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

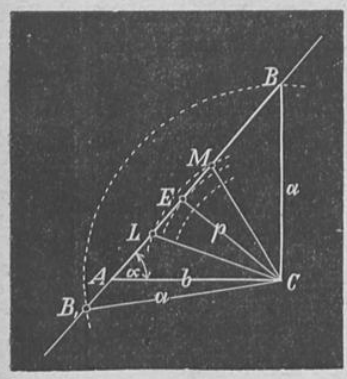
1. Congruenzfall. Es sind gegeben: a, b und c.



Es wird sich leicht zeigen lassen, dass die beiden entstandenen Dreiecke ABC und AB'C vollkommen identisch sind, dass also nur ein Dreieck den gegebenen Bedingungen entspricht. Durch die drei Seiten ist also ein ungleichseitiges Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt.

2. Congruenzfall. Es sind gegeben zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel. Z. B. a, b und der Winkel α. Wir wollen vorderhand nicht davon sprechen, ob Seite a größer oder kleiner als Seite b ist, sondern nur den Vorgang beleuchten, wie er bei der Construction des Dreieckes in diesem Falle einzuschlagen ist.

Da der Winkel α der Seite a gegenüber- und an der Seite b liegt, so wird das Maß der Seite b zuerst auf einer Standlinie aufgetragen und der Winkel α an dem einen Ende (A) der Seite b construiert werden müssen. Sodann nimmt man die Seite a in den Zirkel und beschreibt vom Punkte C einen Kreisbogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels α entweder nicht berührt, oder berührt oder in zwei Punkten schneidet. Der erste Specialfall kommt nicht in Betracht, weil gar kein Dreieck möglich ist. Im zweiten Falle entspricht ein rechtwinkeliges Dreieck den gegebenen Bedingungen; im dritten Falle, (wenn beide Schnittpunkte rechts vom Punkte A liegen), entsprechen zwei Dreiecke den gegebenen Bedingungen oder wenn ein Schnittpunkt rechts von A und einer links von A zu liegen kommt, entspricht ein einziges schiefwinkeliges Dreieck den gegebenen Stücken. Siehe die Zeichnung.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus dieser Zeichnung erhellt deutlich, dass nur in dem einen Falle, wo die Seite a > ist, als Seite b ein einziges schiefwinkeliges Dreieck den gestellten Anforderungen entspricht, d. h. die Seite a die Seite b und den Winkel α enthält und das ist das $\triangle$ ABC.

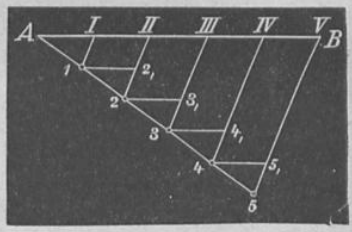
Die Congruenzfälle 3 und 4 bedürfen an dieser Stelle wohl keiner besonderen Behandlung.

Nachdem die Congruenzfälle in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen erläutert worden sind, kann man folgende Constructionsaufgaben daran reihen:

1. Eine gerade Linie von bestimmter Länge ist zu halbieren.
2. Ein gegebener Winkel ist zu halbieren.
3. Ein rechter Winkel ist in drei, vier und mehr Theile zu theilen.

Mit Hilfe der Congruenz der Dreiecke läßt sich ferner zeigen, wie eine Gerade AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Siehe beistehende Figur.



$\triangle AI1 \cong \triangle 1 2_1 2 \cong \triangle 2 3_1 3 \cong \triangle 3 4_1 4 \cong \triangle 4 5_1 5$, also $AI = 1 2_1 = 2 3_1 = 3 4_1 = 4 5_1$ und da Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind, so muss auch: A, I = I, II = II, III, = = III, IV = IV, V sein.

Aufgaben, wie z. B.

Es ist ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind:

1. Die Summe dreier Seiten und die beiden Winkel an der Basis.

2. Die Grundlinie, die Winkel an der Grundlinie und die Summe der beiden übrigen Seiten; — oder:

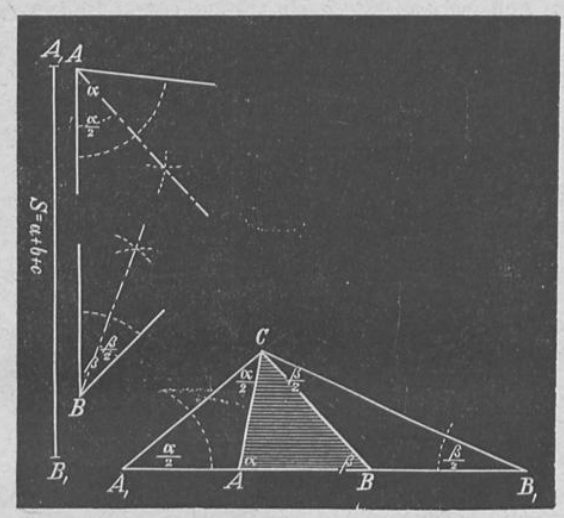
Es ist ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, 1. wenn die Grundlinie und die Höhe und 2. wenn die Grundlinie und die Winkel an der Spitze gegeben sind,

kann der Lehrer dem häuslichen Fleiße der Schüler überlassen, oder zu ihrer Lösung anregen. Solche Aufgaben reizen zum Nachdenken und üben die Vorstellungskraft der Schüler.

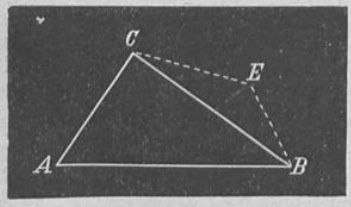
Schließlich möge Aufgabe 1 hier ihre Lösung finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Richtigkeit dieser Construction basiert auf dem Satze, dass ein Außenwinkel eines Dreiecks gleich ist der Summe der beiden inneren ihm gegenüberliegenden Dreieckwinkel.



An die Besprechung und Construction des Dreiecks schließt sich logisch die Besprechung und Construction der verschiedenen Arten der Vierecke. Es ist leicht zu zeigen, nachdem man den Schülern begreiflich gemacht hat, dass zur Construction eines schiefwinkeligen Dreiecks drei von einander unabhängige Stücke nothwendig sind, dass ein Viereck durch fünf Stücke bestimmt ist und zwar durch eine einfache Reflexion:



Setzen wir auf die Seite CB des Dreiecks ABC den Winkel CEB, so entsteht das Viereck ABEC, welches durch fünf Stücke bestimmt sein muss, da die Seite CB beiden Dreiecken gemein ist.

Für ein Dreieck sind $(2 \times 3) - 3 = 3$ Stücke nothwendig, für ein Viereck sind $(2 \times 4) - 3 = 5$ Stücke nothwendig; also nach demselben Gedankenvorgange für ein Fünfeck $(2 \times 5) - 3$ und für ein n Eck $(2 \times n) - 3$ Stücke zur Construction erforderlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergibt sich die Regel: Wenn man die Seitenzahl eines Vieleckes um eins vermehrt, so bedarf es zweier weiterer Stücke zur Construction des neuen Vieleckes.

Es ist einleuchtend, dass zur Construction eines Trapezes nur vier Bestandtheile nothwendig sind, dass man, um ein Rhomboid zu construieren, nur drei, um einen Rhombus und ein Rechteck zu construieren, nur zwei Bestandtheile zu wissen braucht. Das Quadrat ist durch seine Seitenlänge bestimmt.

Auf diesen Platz gehören folgende Constructionsaufgaben.

1. Es ist ein Trapezoid zu construieren, von welchem die vier Seiten und ein Winkel gegeben sind.

2. Es ist ein Rhomboid zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

3. Es ist ein Rhombus zu zeichnen, von dem die Seite und ein Winkel gegeben sind.

4. Man zeichne ein Trapez, von dem man die vier Seiten kennt. und 5. Es ist ein Trapez zu zeichnen, von welchem man die beiden parallelen Seiten und die Winkel an einer derselben kennt.

In der 5. Classe haben die Schüler die verschiedenen Arten der Vierecke (als Begrenzungsflächen vorgezeigter Körper) mit ihren wichtigsten Eigenschaften kennen gelernt. In der 6. Classe kann man die verschiedenen Vierecke entstehen lassen, indem man vier Gerade sich schneiden läfst.

1. Von den vier sich schneidenden Geraden sei keine zu einer andern parallel und dann entsteht ein Trapezoid.

2. Es seien zwei zu einander parallel und die andern nicht, dann entsteht ein Trapez.

3. Es seien je zwei zu einander parallel und dann entsteht ein Parallelogramm, welches ein Quadrat oder Rechteck, ein Rhombus oder Rhomboid sein kann.

Die ersten beiden heißen „rechtwinkelige", die letzteren beiden „schiefwinkelige Parallelogramme".

Nun hat die Construction des regelmäßigen Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn- und Zwölfeckes zu folgen.

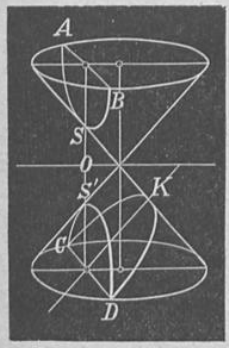
An die Constructionsaufgaben über die regelmäßigen Polygone wird man einige Aufgaben über Flächenverwandlungen mit Erfolg anreihen können, nachdem man zuvor den Schülern einleuchtend

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gemacht hat, dass zwei Dreiecke gleich groß sein müssen, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben, da sich die meisten dieser Constructionen auf diesen Satz stützen.

Den Abschluss des geometrischen Unterrichtes in der VI. Classe bilden die Kegelschnittslinien, welche aber nur in ihren wichtigsten Eigenschaften besprochen und sodann construiert werden müssen. Zur Anschauung sollen die Kegelschnittslinien an zwei mit der Spitze sich berührenden senkrechten gleichen Kreiskegeln gebracht werden.

Wird ein Kreiskegel parallel zur Basis durch eine Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein Kreis; erfolgt der Schnitt schief zur Basis, so ist die Schnittfläche eine Ellipse; wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Kegels geführt, so zeigt die Schnittfläche eine Parabel, und wenn er parallel zur Höhe geführt wird, so werden durch die Ebene beide Kegel geschnitten und die beiden an den Schnittflächen sich zeigenden Curven bilden eine Hyperbel. Siehe die Zeichnung.



Curve CKD ist die entstandene Parabel. ASB und CS'D sind die beiden Hyperbelcurven und O ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Natürlich muss der Lehrer bei seinen Auseinandersetzungen bemerken, dass man sich die beiden Kegel unendlich groß denken muss, da die Parabel und Hyperbel eigentlich unendlich lange Schenkel besitzen. Constructionsaufgaben über die Kegelschnittslinien.

1. Es ist ein Kreis zu zeichnen, dessen Radius gegeben ist und in 4, 6, 8, 10 gleiche Theile zu theilen.

2. An einen Punkt eines Kreises ist eine Tangente zu construieren.

3. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises sind zwei Tangenten an denselben zu construieren.

4. Es sind zwei ungleich große Kreise in den verschiedenen Lagen zu zeichnen, die sie zu einander einnehmen können.

5. Es sind einem Kreise 3, 4, 5 und mehr berührende Kreise einzuschreiben.

6. Es ist eine Ellipse zu construieren, deren Axen gegeben sind.

7. Einem gegebenen Rechteck ist eine Ellipse einzuschreiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Es ist eine Ellipse zu construieren, wenn man ein paar conjugierter Durchmesser derselben kennt.

9. Es ist eine Parabel zu construieren, deren Brennweite gegeben ist.

10. Es ist eine Parabel zu zeichnen, deren Parameter bekannt ist.

11. Es ist eine Hyperbel mit Hilfe der beiden Axen (reelle und imaginäre) zu construieren.

Sodann empfiehlt es sich, vom Würfel ausgehend, die Netze der wichtigsten geometrischen Körpergestalten zu entwickeln und mit einigen einfachen technischen Objecten zu schließen.

Im Voranstehenden ist gezeigt worden, wie leicht man den Unterricht im geometrischen Zeichnen in der VI. Classe an den Unterricht in der Geometrie anschließen kann, und es ist daher kein Grund vorhanden, auf dieser Stufe beide Disciplinen gesondert zu behandeln oder gar zwei verschiedenen Lehrkräften zu übergeben.

V. Der Lehrstoff der VII. Classe.

In der VII. Classe soll die aus dem Gebiete der Planimetrie in der VI. Classe gelehrte Materie wiederholt und durch die Ähnlichkeitssätze und die Flächeninhalts-Berechnungen vermehrt werden.

Da bei der Ähnlichkeit zweier Dreiecke oder zweier anderer planimetrischen Figuren die Proportionalität der homologen Seiten eine bedeutende Rolle spielt, so sind selbstverständlich auch alle wichtigen planimetrischen Lehrsätze, welche mit Hilfe der Proportionalität der Seiten erwiesen werden können, zu behandeln.

Zwischen die Behandlung der Ähnlichkeitssätze und die Berechnung der Flächeninhalte ist zweckmäßig das Capitel über den „pythagoräischen Lehrsatz" am besten einzufügen, insbesondere deswegen, weil ja eine Beweisführung desselben mit Hilfe eines Ähnlichkeitssatzes geführt wird und auch deshalb, weil man den pythagoräischen Satz in der rechnenden Geometrie (die sich ja hauptsächlich mit der Flächen- und Körperinhalts-Berechnung beschäftigt), nöthig hat.

Den Satz des Pythagoras schon in der VI. Classe abzuhandeln, ist wohl verfrüht, da er auf dieser Stelle nur mit Hilfe der An-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

schauung erwiesen werden kann und keine Nutzanwendung deswegen zuläßt, weil erst in der VII. Classe das Quadrieren und Wurzelausziehen vorgenommen werden darf.

In nachfolgenden Fragen soll vorderhand der Lehrstoff der VII. Classe seine Skizzierung finden:

1. Wann sind zwei planimetrische Figuren im allgemeinen und zwei Dreiecke im besondern einander ähnlich?

2. Warum sind in ähnlichen Dreiecken die homologen, d. h. die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, zu einander proportional? und welche Nutzanwendung findet dieser Satz in der praktischen Geometrie?

3. Warum ist die Senkrechte, welche man von der Spitze des rechten Winkels, in einem rechtwinkeligen Dreieck, auf die Hypothenuse fällen kann, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusensegmenten?

4. Wie kann man mit Hilfe des vorigen Satzes die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei gegebenen Geraden construieren und aus einer Zahl zwischen 1 und 10, welche eine Länge repräsentiert, graphisch die Wurzel ausziehen?

5. Warum ist eine Kathete in einem rechtwinkeligen Dreieck die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypothenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt?

6. Wie kann man mit Anwendung des Satzes 5 den pythagoräischen Satz beweisen?

7. Wie kann man den pythagoräischen Lehrsatz durch die Anschauung erweisen?

8. Wie kann man den Satz des Pythagoras durch Flächenvergleichung nachweisen?

9. Wie kann man ein Rechteck in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln, und auf welchen der früher erwähnten Sätze stützt sich die Beweisführung dafür?

10. Wie berechnet man den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Parallelogramms? (Durch die Anschauung zu erweisen.)

11. Wie berechnet man den Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelogrammes?

12. Wie berechnet man den Inhalt eines schiefwinkeligen Dreiecks?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13. Wie berechnet man den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen und gleichseitigen Dreiecks, wenn die Höhe nicht gemessen werden kann?

14. Wie findet man den Flächeninhalt eines Trapezes?

15. Wie verhält sich in einem Kreise der Durchmesser zum Umfange?

16. Wie findet man den Umfang eines Kreises, wenn der Radius oder Diameter desselben gegeben ist?

17. Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreises aus dem Durchmesser, oder den Radius aus dem Flächeninhalte?

18. Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreisringes, eines Kreisaus- und Kreisabschnittes?

19. Wie findet man den Umfang und Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes und Achteckes?

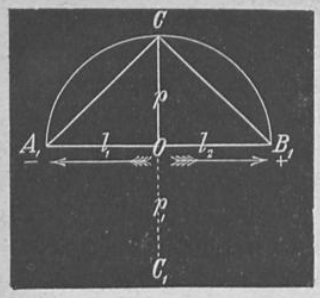
20. Wie findet man den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Polygons?

21. Wie findet man den Flächeninhalt einer Ellipse?

Die Besprechung und Beantwortung dieser Fragen dürfte mit Inbegriff der für die Wiederholung nothwendigen Zeit, die vierzig bis zweiundvierzig Geometriestunden, welche in der VII. Classe auf das Schuljahr entfallen, vollauf in Anspruch nehmen.

Näheres zur Frage 4. Da die Kenntnis des graphischen Wurzelausziehens noch nicht in weitere Kreise gedrungen ist, so soll an dieser Stelle des Näheren davon gesprochen werden, und zwar in einer Weise, welche der Volks- und Bürgerschule entsprechen dürfte. Es gründet sich auf den Satz, dass in jedem rechtwinkeligen Dreieck das Perpendikel, d. i. die von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Senkrechte, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusenabschnitten ist. Beschreiben wir nun mit dem Radius I einen Halbkreis (siehe die nächste Fig.) und errichten über dem Durchmesser ein Dreieck, dessen Spitze in der Peripherie des Halbkreises liegt, so ist dieses (nach dem Lehrsatze des Thales) ein rechtwinkeliges; es verhält sich also nach dem obigen Satz der linke Hypothenusenabschnitt zum Perpendikel wie sich das Perpendikel zum rechten Segment verhält; das Quadrat der Längenzahl des Perpendikels ist somit gleich dem Producte der Längenzahlen der beiden Segmente und die Länge des Perpendikels selbst ist die Wurzel aus diesem Producte.

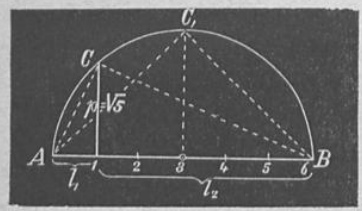
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



$$l_1 : p = p : l_2$$
$$p^2 = l_1 \times l_2$$
$$p = \sqrt{l_1 \times l_2}$$

Setzen wir für $l_2 = +1$ und für $l_1 = -1$, so erhalten wir für p den Wert $[+\sqrt{(-1) \times (+1)}] = = +\sqrt{-1}$. Das entgegengesetzte Perpendikel (p_1) hat somit den Wert: $-\sqrt{-1}$.

Sei beispielsweise aus der Zahl 5 graphisch die Wurzel zu ziehen, (durch Rechnung läßt sich bekanntlich der Wert dieser Wurzel nur annähernd bestimmen), so wird man auf einer Geraden 6 Einheiten auftragen und darüber einen Halbkreis errichten. Das Perpendikel vom Punkte 1 zur Peripherie gezogen, ist nach dem Vorigen die Wurzel aus 5. (Siehe die Figur.)



$$l_1 = 1 \text{ Einheit}$$
$$l_2 = 5 \text{ Einheiten}$$
$$p^2 = 1 \times 5 = 5$$
$$p = \sqrt{5}$$

In diesem Falle wurde der Mittelpunkt des Kreises natürlich nicht wie früher als der Nullpunkt angenommen, sondern der Punkt A.

Auf ähnliche Weise wird man aus 2, 3, 7 u. s. w. graphisch die Wurzel ziehen.

Zur Frage 17. Die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises ($F = \frac{1}{2} . U . r = r^2 . \pi$) kann bekanntlich auf zweierlei Weise gefunden werden. Man kann sich nämlich 1. auf die Formel, welche den Flächeninhalt eines regelmäßigen, dem Kreise umschriebenen Vieleckes angibt ($F = \frac{1}{2} U . r$), berufen, vorausgesetzt, daß man sie früher entwickelt hat, und sagen, daß ein Kreis nichts anderes ist, als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten oder 2. sich den Kreis in unendlich viele congruente Dreieckchen zerlegt denken, wovon man eines berechnet und mit der Anzahl der Dreiecke multipliciert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Trotzdem die zweite Art den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, vom logischen Standpunkte etwas anfechtbar ist, wenn sie auch zum richtigen Resultate führt, so ist sie doch der ersteren in der Volks- und Bürgerschule vorzuziehen, weil die Auffindung der Formel für den Flächeninhalt der umschriebenen Vielecke mathematische Transformationen erfordert, die man nicht gut auf dieser Stufe vornehmen kann.

Aus der Formel: $\frac{1}{2} U . r = \frac{U . r}{2}$ ersieht man, dass der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Flächeninhalte eines Dreieckes, welches zur Basis den Kreisumfang und zur Höhe den Kreisradius hat. Da man aber ein Dreieck in ein inhaltsgleiches Rechteck und dieses in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln kann, so lässt sich die Seite eines Quadrates finden, welches mit einem Kreise inhaltsgleich ist. Diese Aufgabe nennt man die Quadratur des Kreises. Ist a die Seite dieses Quadrates, so folgt: $a^2 = r^2 . \pi$ und $a = r . \sqrt{\pi}$.

Nachdem sich aber die Länge der Kreisperipherie nur durch Rechnung finden lässt, ist es natürlich, dass alle Geometer der Vergangenheit sich vergeblich bemüht haben, diese Aufgabe mit dem Cirkel lösen zu wollen.

VI. Methodisch geordneter Lehrstoff für die VIII. Classe.

Der geometrische Lehrstoff der VIII. Classe beschäftigt sich mit jenem Theil der Geometrie des Raumes, den man Stereometrie zu nennen pflegt. Die Stereometrie zieht nicht nur Punkte und Linien, die in der Ebene liegen, (wie die Planimetrie), sondern sämmtliche Raumgrößen in den Kreis ihrer Betrachtungen. Da der Stereometer im Raume operiert, so kann er seine Constructionen und Gebilde nur mit Hilfe perspectivischer Bilder auf dem Papiere zur Anschauung bringen und er bedient sich dabei je nach Bedarf der Freien- oder Parallelperspective. (Siehe Methodik des Zeichenunterrichts von Grandauer.)

Wir wollen wieder den Lehrstoff in Form von Fragen, methodisch geordnet vorführen und zum Schlusse an die eine oder andere Frage Erörterungen knüpfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Wie entsteht eine ebene Fläche?

2. Wie entsteht eine krumme Fläche?

3. Wie entsteht eine Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche?

4. Wodurch ist eine Ebene im Raume ihrer Lage nach bestimmt?

5. Wann steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht?

6. Was versteht man unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene?

7. Wie findet man den Neigungswinkel zweier Ebenen?

8. Wann sind zwei Ebenen zu einander parallel?

9. Was versteht man unter „sich kreuzenden Geraden", und wann sind sich kreuzende Gerade parallel?

10. Was versteht man unter einem Körperwinkel oder Körpereck?

11. Was ist ein regelmäßiges Körpereck?

12. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Kantenwinkeln einer Körperecke?

13. Was versteht man unter einer Supplementarecke?

14. Was ist ein geometrischer Körper?

15. Wie theilt man die geometrischen Körper ein?

16. Wie heißen die wichtigsten ebenflächigen geometrischen Körper?

17. Welche Beziehung besteht zwischen den Ecken, Flächen und Kanten eines ebenflächigen Körpers oder Polyëders? ($E + F = K + 2$).

18. Welche Eigenschaften hat der Würfel, das Tetraëder, Octaëder, Dodekaëder und Ikositetraëder?

19. Wann sind zwei Prismen und zwei Pyramiden congruent, wann sind sie ähnlich und wie verhalten sich die Grundflächen ähnlicher Pyramiden zu einander?

20. Wie verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Prismen und ähnlicher Pyramiden zu einander?

21. Wann sind zwei Prismen und wann zwei Pyramiden einander inhaltsgleich?

Auf welche Weise kann man zeigen, dass eine dreiseitige Pyramide der dritte Theil eines dreiseitigen Prismas ist, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat?

23. Wie berechnet man den Körperinhalt und die Oberfläche eines Parallelepipeds und wie eines Würfels. (Beweisführung durch Anschauung)?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

24. Wie berechnet man die Oberfläche und den Körperinhalt der verschiedenen Prismen?

25. Wie berechnet man den Körperinhalt und die Oberfläche einer Pyramide und eines Pyramidenstutzes?

26. Wie berechnet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kreis- und elliptischen Cylinders?

27. Wie findet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kreis- und elliptischen Kegels?

28. Wie findet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kegelstutzes?

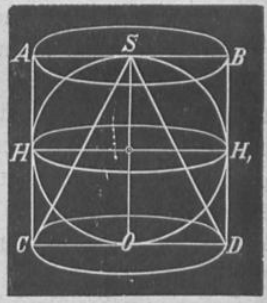
29. Wie entsteht eine Kugel?

30. Was versteht man unter einem größten Kreis an der Kugel?

31. Was ist ein sphärisches Zwei- und Dreieck?

32. Wie findet man die Oberfläche und den Kubikinhalt einer Kugel?

33. Wie verhalten sich die Körperinhalte eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders, von gleicher Höhe zu einander, wenn ein größter Kreis der Kugel gleichen Flächeninhalt mit der Basis des Kegels und Cylinders hat? (Siehe beistehende Zeichnung.)



$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{SO}$$

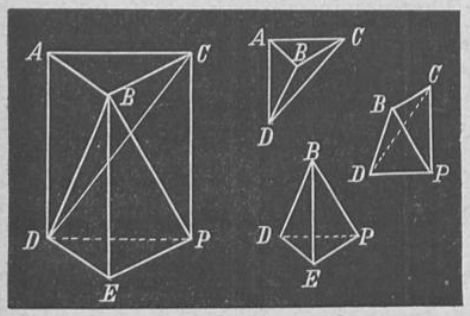
34. Wie berechnet man den kubischen Inhalt und die Oberfläche eines Kugelsectors, eines Kugelabschnittes und einer Kugelschichte?

Für die Zeit von 40 Stunden, welche ungefähr auf diesen Gegenstand in der VIII. Classe entfallen, erscheint das angeführte Materiale sehr umfangreich und fast nicht zu bewältigen. Es reduciert sich aber bedeutend, wenn man bedenkt, dass die Fragen 1 bis 11 schon in der VI. Classe — um in das Gebiet der Perspective einzuführen — ihre Beantwortung fanden, und dass manche der folgenden Fragen auch schon früher theilweise berührt wurden.

Zur Frage 22. Schneiden wir das dreiseitige Prisma (siehe umstehende Fig.) (ABCDEF) durch die Ebene BPD, so erhalten wir eine dreiseitige Pyramide DEPB mit der Spitze in B und eine vierseitige Pyramide ACDPB ebenfalls mit der Spitze in B; die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

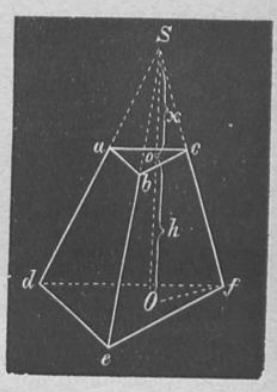
vierseitige Pyramide läſst sich durch den Schnitt BCD in zwei dreiseitige zerlegen, (Pyramide ACDB und Pyramide CDPB) welche gleiche Grundflächen und eine gleiche Höhe haben, also gleichen Körperinhalt besitzen; da aber auch Pyramide ACDB, wenn wir als ihre Basis das Dreieck ABC annehmen, mit der Pyramide DEPB gleiche Grundfläche und Höhe hat, also inhaltsgleich ist, so muſs auch Pyramide CDPB mit der Pyramide DEPB identisch sein. Wir haben also gezeigt, daſs ein jedes dreiseitige Prisma in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden kann. Da zwei Pyramiden (nach Beantwortung der Frage 21) inhaltsgleich sind, wenn sie gleiche Grundfläche und Höhe haben und jedes Polygon sich in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandeln läſst, so kann man auch jede vier- und mehrseitige Pyramide in eine inhaltsgleiche dreiseitige verwandeln. Man kann also den allgemeinen Satz aufstellen: Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat. Der Lehrer der Geometrie wird sehr gut thun, wenn er sich ein dreiseitiges Prisma, welches in obiger Weise geschnitten ist, aus Holz anfertigt, um der Vorstellungskraft der Schüler zuhilfe zu kommen.



Zur Frage 25. Es ist selbstverständlich, daſs man die Formel für den Pyramidalstutz: $K = \frac{1}{3} h (B + \sqrt{B . b} + b)$, in der h die Höhe des Stutzes, B die große und b die kleine Basis vorstellt, in der Volks- und Bürgerschule nicht auf die allgemeine mathematische Weise entwickeln darf, sondern sie durch mehrere einfache Beispiele, in denen für h, B und b kleine, bestimmte Zahlen angegeben sind, in ihrer Richtigkeit erweisen wird. Es ist dies der entgegengesetzte Weg, den die Mittelschule einschlägt; diese geht vom Allgemeinen zum Besonderen über, während in der Volksschule meist der inductive Weg eingeschlagen werden muſs, welcher darin besteht, aus den speciellen, aber zusammengehörigen Fällen das allgemeine Gesetz, die allgemeine Formel zu finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a b c d e f sei der Pyramidalstutz, dessen Körperinhalt zu berechnen ist; $h = 2\,cm$ wäre seine Höhe; $b = 2\,dm^2$ seine obere Basis und $B = 4\,cm^2$ seine untere Basis; (wir nehmen an, dass es einen solchen Pyramidalstutz gibt). Denken wir uns den Stutz zu einer ganzen Pyramide ergänzt; nennen wir den Körperinhalt der ganzen Pyramide K und den der kleinen k und ihre Höhe, da diese unbekannt ist, x, so ist der Körperinhalt K des Stutzes = K—k.



Setzen wir für K und k die Werte, so erhalten wir:

$$K = K - k = \frac{1}{3}(h + x) \,.\, B - \frac{1}{3} x \,.\, b = \frac{1}{3}(2 + x) \,.\, 4 - \frac{1}{3} \,.\, x \,.\, 2$$

und daraus

$$K = \frac{8}{3} + \frac{x}{3} \,.\, 4 - \frac{2x}{3} = \frac{8}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{8 + 2x}{3}$$

$$K = \frac{1}{3}(8 + 2x) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha.$$

Da nun x unbekannt ist, so müssen wir es aus den bekannten Größen suchen.

Bei ähnlichen Pyramiden verhalten sich (und die kleine Pyramide ist doch der großen ähnlich) bekanntlich die Grundflächen, wie die Quadrate der Höhen, also besteht die Proportion:

$$B : b = (h + x)^2 : x^2 \text{ oder: } 4 : 2 = (2 + x)^2 : x^2.$$

Die Differenz der beiden Glieder des ersten Verhältnisses verhält sich aber zum Hinterglied desselben, wie sich die Differenz der beiden Glieder des zweiten Verhältnisses zum Hinterglied desselben verhält. (Siehe die Lehre von den Proportionen.) Nach diesem Satze bekommen wir die neue Proportion:

$$(4—2) : 2 = (2 + x)^2 - x^2 : x^2$$

Daraus folgt: $2 : 2 = 4 + 4x + x^2 - x^2 : x^2$

oder $2 : 2 = 4 + 4x : x^2$

oder $2x^2 = 8 + 8x$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{oder } 2x^2 - 8x = 8$$
$$\text{oder } x^2 - 4x = 4$$
$$\text{oder } x^2 - 4x + 2^2 = 4 + 2^2 = 8$$

oder endlich, weil $x^2 - 4x + 2^2 = (x - 2)^2$, so folgt:

$$x - 2 = \sqrt{8}$$
$$\text{und } x = 2 + \sqrt{8}$$

Den Wert für x brauchen wir nur in Gleichung α) zu setzen und wir erhalten: $K = \frac{1}{3}\left[8 + 2\,(2 + \sqrt{8})\right] =$

$$= \tfrac{1}{3}\left[8 + 4 + 2\sqrt{8}\right] = 2 \times \tfrac{1}{3}\left[4 + 2 + \sqrt{8}\right].$$

Setzen wir für $2 = h$, für $4 = B$, für $2 = b$ und für $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{B.b}$, so erhalten wir die Formel:

$$K = h \times \tfrac{1}{3}(B + b + \sqrt{B.b}).$$

Es ist einleuchtend, dass, wenn man auf diese Weise durch mehrere specielle Beispiele die Richtigkeit der Formel erwiesen hat, dieselbe auch allgemeine Richtigkeit haben muss, nach dem in der Mathematik ganz gewiss geltenden Satz: „Weil das Erst und Zweite so ist, muss das Dritt und Vierte auch so sein."

Noch sollen die Gründe dafür angegeben werden, warum der größte Kreis und das sphärische Zwei- und Dreieck mit seinen Eigenschaften in das Lehrmateriale aufgenommen wurden. Die größten Kreise an der Erdkugel und die sphärischen Zwei- und Dreiecke spielen nämlich in der mathematischen Geographie, in der Astronomie und Nautik eine so große Rolle, dass man diese Wissenschaften ohne Kenntnis der wichtigsten Linien und Flächen an der Kugeloberfläche nicht studieren kann; aus diesem Grunde ist die Behandlung der in Rede stehenden Materie wohl wünschenswert.

VII. Die Hilfsmittel beim Unterricht in der Geometrie.

Mehr vielleicht als bei jeder andern Disciplin (mit Ausnahme der Naturgeschichte) muss beim Unterrichte in der Geometrie, auf dem Boden der Volksschule dem Principe der Anschauung Rechnung getragen werden; denn was nicht am Modelle zur Vorstellung und

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Erklärung gebracht werden kann, soll wenigstens durch eine deutliche, lebendige Zeichnung vor die Sinne der Schüler treten, um sofort durch die Erläuterung des Lehrers Eigenthum der Vorstellungskraft und des Verstandes derselben zu werden.

In Nachfolgendem sollen die leicht anschaffbaren und nothwendigsten Anschauungsmittel für den geometrischen Unterricht und deren Gebrauch kurz besprochen werden.

1. Das Bleiloth. Es dient dazu, den Schülern den Begriff „vertical" d. i. die Richtung nach dem Erdmittelpunkt, zu demonstrieren. „Vertical" ist nicht zu verwechseln mit „senkrecht". Eine verticale Linie steht nur auf einer „wasserrechten oder horizontalen" senkrecht, d. h. auf einer solchen, welche in der Ebene des ruhig stehenden Wassers oder in einer dazu parallelen Ebene liegt.

2. Die Schrotwage. Sie besteht aus einem hölzernen gleichschenkeligen oder gleichseitigen Dreieck, an dessen Spitze ein Bleiloth hängt. Setzt man die Basis des Dreieckes auf eine Fläche, welche horizontal ist, so fällt die Kugel des Lothes in ein Grübchen, welches im Mittelpunkte der hölzernen Basis ausgeschnitten ist. Ist die Ebene, welche auf ihre Horizontalität geprüft wird, nicht horizontal, so fällt die Kugel nicht in die Höhlung.

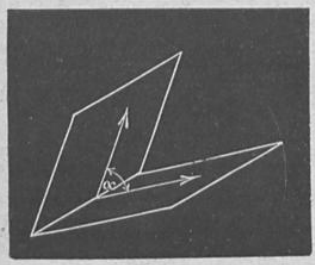
3. Die Wasserwage oder Libelle. Sie dient ebenfalls dazu, um eine Linie oder Ebene auf ihre Horizontalität zu prüfen. Steht die Luftblase, nachdem man das Instrument in mehreren Richtungen auf die Ebene gestellt hat, immer in der Mitte, so kann man annehmen, dass die Fläche „horizontal" und vollständig „eben" ist.

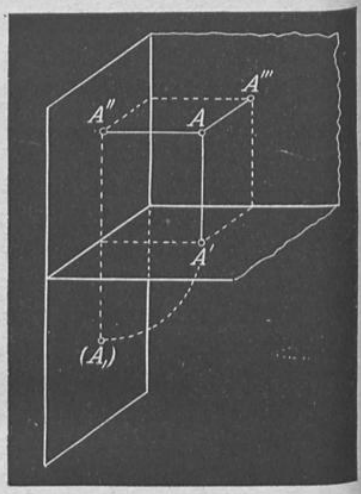
4. Eine in 360 oder wenigstens in 72 gleiche Theile getheilte Scheibe (ein Theil ist dann gleich 5 Grade), welche zwei gleiche im Mittelpunkte angebrachte Zeiger hat, um den Schülern die Winkel, deren Addition, Subtraction und Theilung zeigen zu können.

5. Zwei Holzebenen, welche an der Berührungslinie durch Charniere verbunden sind, so dass man die eine oder beide drehen kann. Sie sollen dazu dienen, den Schülern den Neigungswinkel zweier Ebenen, den Begriff von einem Perpendikel auf eine Ebene gefällt und die Projection eines Punktes und einer Linie auf zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auf einander senkrecht stehende Ebenen zu versinnlichen. (Siehe die beigegebenen Figuren.)





6. Die Längeneinheit (das Meter), die Flächeneinheit (das Quadratmeter) und die Körpereinheit (das Kubikmeter). Nie wird sich der Schüler beispielsweise eine deutliche Vorstellung von einem Quadrat- und Kubikmeter machen können, wenn er sie in Wirklichkeit nicht gesehen hat.

7. Die verschiedenen Körperecken aus Pappe oder Holz.

8. Die fünf regelmäßigen Körper aus Holz oder Pappe (das Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder, Hexaëder und Dodekaëder.)

9. Soll jeder Lehrer der Geometrie einen Kreis- und elliptischen Cylinder und Kegel, die verschiedensten Parallelepipeda, Prismen und Pyramiden, und endlich die Kugel aus Holz besitzen. Der Kreiskegel soll solche Schnitte aufweisen, dass man den Kreis, die Ellipse, die Parabel und Hyperbel zeigen kann. Die Kugel soll so geschnitten sein, dass man einen Kugelabschnitt, einen Kugelausschnitt und eine Kugelzone zur Anschauung bringen kann. Sphärische Zwei- und Dreiecke sollen durch farbige Linien auf der Kugeloberfläche gezeichnet sein.

10. Die Körpernetze aus Pappe.

11. Messband, Messkette, Pflöcke, Messlatte und Winkelkreuz, zum Zwecke der Aufnahme einer Figur auf freiem Felde.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

12. Die Nivellierlatte und Canalwage dienen dazu, zu bestimmen, wie tief ein Punkt unter der angenommenen Horizontebene liegt.

VIII. Abriss der Entwicklungsgeschichte der geometrischen Wissenschaft.

„Geometrie“ heißt Erdmesskunst. Bei den Ägyptern stand sie in Übung. Von den Ägyptern lernten die Griechen das Vermessen der Felder, welche Kunst sich später zu dem entwickelte, was wir heute „praktische Geometrie“ nennen.

Die Überschwemmungen des Nil verwischten nämlich alljährlich die Grenzen der Felder, oder rissen Theile des Erdreichs weg, so dass eine neue Vertheilung, beziehungsweise eine neue Vermessung des Grundbesitzes nothwendig wurde. Die erste ordentliche Vermessung und quadratische Vertheilung der Grundstücke in der Umgebung des Nil wurde — nach Herodot — unter dem König Sesostris vorgenommen. Zu des Sesostris Zeit konnte man nur quadratische und rechteckige Flächen vermessen und berechnen; das Bestreben und die Noth lehrte aber bald auch dreiseitige, fünfseitige und mehrseitige unregelmäßige Grundstücke ausmessen und berechnen. Sicher ist, dass schon Archimedes und Appollonius alle gerad- und krummlinigen planimetrischen Figuren berechnen konnten.

Wie überhaupt die meisten Wissenschaften ihren Ursprung zu jenen dunklen Tempeln der ägyptischen Priester zurückleiten, welche zu Saïs, Memphis und Heliopolis standen, in deren geheimnisvollem Innern „Gott“ und der „Wahrheit“ von den „Eingeweihten“ gehuldigt wurde, so ist wohl auch hier die erste Pflege der Geometrie zu suchen. Das zweite Volk des Alterthums, welches „Feldmesser“ und „tüchtige Werkmeister“ aufweist, ist das phönicische, am östlichen Gestade des Mittelmeers. Zu den Phöniciern scheinen die nachbarlichen jonischen Griechen in die Schule gegangen zu sein, denn der erste bedeutende Geometer, welcher in das Licht der Geschichte tritt, ist der weise Thales von Milet. Thales wurde ungefähr um die Mitte des 7. Jahrhunderts v. Ch. geboren. Er war der erste, welcher als Maß für den Winkel den Kreisbogen hinstellte; er kannte schon die Ähnlichkeitssätze der Dreiecke, denn er

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

berechnete die Höhe der ägyptischen Pyramiden aus dem Schatten, den sie warfen; er entdeckte ferner den Satz, dass jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel ist. Er soll auch zum erstenmale eine Sonnenfinsternis vorherberechnet haben, welche die beiden Heere des Meders Cyaxares und des Lydiers Alyattes während einer Schlacht von einander trennte. (28. Mai 584 v. Ch. G.) Der Satz, dass ein jeder Winkel im Halbkreise ein Rechter sein muss, gab wahrscheinlich Veranlassung zur Auffindung der beiden Sätze:

1. dass Peripheriewinkel, welche über derselben Sehne stehen, einander gleich sind und dass

2. in jedem rechtwinkeligen Dreieck das Perpendikel die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusensegmenten ist. Wie dieser Satz zum graphischen Wurzelausziehen führte, haben wir schon gesehen.

Zur Zeit, als Thales schon im Zenithe seines Lebens stand, wurde auf der Insel Samos im Jahre 580 v. Ch. G. ein Mann geboren, welcher einen Lehrsatz erwies, der für die rechnende Geometrie von der größten Bedeutung wurde. Wie Thales, holte sich auch Pythagoras die Anfangsgründe seines Wissens in Ägypten (auch Moses, Solon und Plato) und gründete am Abende seines Lebens zu Kroton in Unteritalien eine Philosophenschule. Den nach ihm benannten Satz scheint er nicht allgemein bewiesen zu haben, sondern nur durch Anschauung für die sogenannten pythagoräischen Zahlen. (3, 4, 5, 6, 8, 10 u. s. f.) In Indien lernte er auch unsere neun Ziffer kennen und verwertete sie bei seinen Rechnungen. Von ihm stammt auch die bekannte quadratförmige Anordnung des Ein=mal=Eins. Er war es ferner, der zuerst zeigte, dass die Kugel unter allen Körpern, mit denen sie gleiche Oberfläche hat, den größten Kubikinhalt besitzt. Die Jünger des Pythagoras wurden, da sie auch Vertreter der socialen Ansichten des Meisters waren, in dem politisch zerrissenen Kroton zu sehr in Streitigkeiten verwickelt, als dass sie hätten die geometrische Wissenschaft weiter ausbilden können. Erst die platonische Schule (gegründet von dem um 430 v. Ch. G. geborenen Plato) bereicherte die geometrische Wissenschaft durch die Entdeckung der Kegelschnitte.

Der Geometer Euclid, geboren am Anfange des 3. Jahrhunderts v. Ch, ist der wissenschaftliche Begründer der sogenannten alexandri-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nischen Schule, welche sich der großen Gunst der Ptolemäer erfreute, einer Schule, aus welcher die herrlichsten geometrischen Errungenschaften hervorgiengen. Euclid schrieb in griechischer Sprache 13 Bücher über Geometrie. Hauptsächlich beschäftigte er sich mit der Theorie der von den Platonikern entdeckten Kegelschnittslinien. Euclid und dessen Epigone Archimedes brauchten jedoch drei Kegel, um die verschiedenen Kegelschnittslinien zu erzeugen, einen rechtwinkeligen, einen stumpfwinkeligen und einen spitzwinkeligen; sie schnitten den Kegel immer senkrecht auf eine Seite desselben.

Die bedeutendsten Vertreter der alexandrinischen Schule sind: Archimedes, Appollonius, Papus und Ptolemäus.

Archimedes und Appollonius beschäftigten sich hauptsächlich damit, den Flächeninhalt aller planimetrischen und den Körperinhalt aller stereometrischen Gestalten zu finden und die Gesetze für die Kegelschnittslinien aufzustellen. Archimedes definierte die gerade Linie, als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Er ist der Entdecker des π, kannte es jedoch nur auf zwei Decimalziffern genau. Er bewies, dass sich der Körperinhalt eines gleichseitigen Kegels zu dem eines gleichseitigen Cylinders von derselben Höhe, wie 1 : 2 und zu dem einer Kugel, deren Durchmesser gleich ist der Kegelseite, wie 1 : 3 verhält. Als des (im Jahre 212 v. Ch. bei der Erstürmung von Syrakus gemordeten) Archimedes Leiche begraben war, legte man auf den Grabstein einen Kegel, einen Cylinder und eine Kugel.

Ptolemäus schrieb um 150 n. Ch. ein für seine Zeit höchst verdienstvolles Buch, Almagest genannt. Der Lehrsatz, nach welchem in jedem Sehnenviereck das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten, wurde von ihm zuerst aufgestellt und bewiesen. Der Lehrsatz des Ptolemäus ist eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen, denn lässt man ein schiefwinkeliges Sehnenviereck in ein Sehnenrechteck übergehen, so erhält man den pythagoräischen Satz. Ptolemäus erfand trigonometrische Functionen, welche jedoch anderer Art waren, wie unsere heutigen. Er nahm nämlich die einem bestimmten Centriwinkel zugehörige Sehne als Einheit an und berechnete danach die Sehnen aller andern Winkel. Seine Sehnentafel geht von 0 bis 180° in Intervallen von einem halben Grad.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Astronom und Mathematiker Ptolemäus war das letzte aufleuchtende Gestirn am Himmel der alexandrinischen Schule. Nach der Besitzergreifung Ägyptens durch die Araber versank das Pharaonenland in die Nacht der Barbarei. Und doch waren es die Araber, welche, nachdem sie ihre Eroberungslust befriedigt hatten, wieder die Wissenschaft, in erster Reihe die Algebra, in zweiter Reihe die Geometrie hegten und pflegten. Der Kalif Almansor ließ im Jahre 772 das alte indische Werk Surya-Siddhanta, welches schon vom „sinus", dessen Berechnung und der Methode Sinustabellen zu machen, spricht, von dem Mathematiker Alphazari ins Arabische übersetzen. Diese Übersetzung führt den Namen Sendhend und wurde später vom Araber Alkorezmi umgearbeitet und verbessert. In diesem Werke figuriert der „sinus" unter dem Namen „el geib". Um 900 n. Ch. wurde die Trigonometrie durch den arabischen Astronomen Albategnius bedeutend vervollkommnet.

In der Periode von 900 bis ungefähr 1500 ist kein bedeutender Fortschritt in der Geometrie zu verzeichnen. Erst der große Schwabe Johannes Kepler (geb. zu Weilerstadt im Jahre 1571) brachte die geometrische Wissenschaft wieder um vieles vorwärts. Zur Zeit, als er am Gymnasium in Linz Lehrer der Mathematik war, ließ er (1612) die berühmte „Stereometria doliorum" erscheinen, in welchem Werke er den Gebrauch „des Unendlichen" zeigte und dadurch den stereometrischen Rechnungen eine größere Allgemeinheit gab. Der Mathematiker Viéta (1540—1608) war der erste, welcher die quadratischen und kubischen Gleichungen zu construieren suchte. Er erweiterte auch das Gebiet der Geometrie der Kugel. (Sphärische Trigonometrie.)

Der Philosoph Cavalleri (1598—1647) schrieb 1635 eine „Geometrie des Untheilbaren", in welcher er die Oberfläche, das Volumen und den Schwerpunkt sämmtlicher Körper zu bestimmen sucht. Fermat (1590—1663) zeigte, wie man den Kubikinhalt der parabolischen Körper findet. Der bedeutende Denker Descartes oder Cartesius ist der Erfinder der analytischen Geometrie der Ebene, welche die Rechnung mit der Construction verbindend zeigt, wie man die Form und den Verlauf einer gesetzmäßigen Curve durch eine Gleichung zum Ausdruck bringen kann. Jede Gerade, jeder Kreis, jede Ellipse, jede Parabel nnd Hyperbel läßt sich nämlich in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihrer Lage und Gestalt durch eine Gleichung in das Gebiet der Algebra übertragen. Das Buch, welches Cartesius über diesen Gegenstand schrieb, erschien im Jahre 1637 zu Leyden. Descartes bewies, dass einer jeden Kegelschnittslinie eine Gleichung des zweiten Grades (quadratische) entspricht, weswegen man auch diese Linien, Linien der zweiten Ordnung nennt. Der deutsche Mathematiker Euler (1707—1783), welcher sich auch um die Entwickelung der Stereometrie sehr verdient gemacht hatte, knüpfte an die Untersuchungen des Descartes an und zeigte, dass sämmtliche Kegelschnittslinien sich durch eine einzige Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen (x und y) zum Ausdrucke bringen lassen. Auch Leibnitz, welcher den Calcul des Unendlich-Kleinen aufstellte und der Engländer Taylor bereicherten die Theorie der Kegelschnittslinien, indem sie die Art ihrer Krümmung bestimmten.

Die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes ist das Feld, auf dem sich die bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit mit großer Vorliebe versuchten. Es ist dies sehr begreiflich, da kein anderer Theil der Geometrie den philosophischen Geist so sehr befriedigt und anregt.

Als große Anhänger und Pfleger der analytischen Geometrie sind ferner zu nennen: Huygens (1629—1695) und De la Hire (1640—1718). Letzterer beschäftigte sich auch in hervorragender Weise mit der Geometrie der Alten und zeigte, wie weit es diese schon gebracht hatten.

Fünfzig Jahre nach Descartes erfanden Newton und Leibnitz die Infinitesimalrechnung (Rechnung mit dem Unendlich-Kleinen und dem Unendlich-Großen) und schufen damit eine neue Epoche in der Geometrie insofern, als jetzt die geometrischen Untersuchungen mit der größten Allgemeinheit betrieben werden konnten.

Der Mathematiker und Nautiker John Napier (1550—1614) unterscheidet sich von Cartesius und den Vertretern der cartesianischen Richtung durch die weniger philosophische und mehr praktische Tendenz seiner Bestrebungen. Er ist der Erfinder der Logarithmen und der sogenannten Napier'schen Gleichungen, mit deren Hilfe man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die andern Stücke eines sphärischen Dreieckes finden kann. Die Napier'schen Logarithmen eigneten sich jedoch noch nicht vollkommen zum Gebrauche; erst

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Heinrich Briggs entwarf im Jahre 1618 vollkommen entsprechende fünfstellige logarithmische Tafeln für die Basis 10. Vega und später Dr. Bremiker benützten dieselben und arbeiteten siebenstellige für die Basis 10 aus, welche noch heute zu den subtilsten Rechnungen verwendet werden.

Die bedeutendsten Geometer der zweiten Hälfte des vorigen und unseres Jahrhunderts sind:

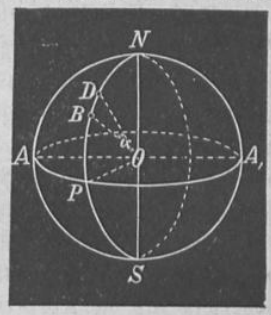
Dr. Friedrich Karl Gauß (1777—1855), die Franzosen Delambre und Carnot, Mollweide, Steiner, Schulz v. Straßnitzky, Theodor Wittstein, Hechel in Dorpat, Bretschneider in Gotha, Grunert (Herausgeber des Archivs für Mathematik) in Greifswalde und Karl Koppe. Friedrich Karl Gauß wurde am 30. April 1777 zu Braunschweig geboren, studierte von 1795—1798 an der Universität in Göttingen, wo er als Jüngling von achtzehn Jahren schon seine Methode der kleinsten Quadrate aufstellte, durch welche Arbeit er die Aufmerksamkeit aller Mathematiker seiner Zeit auf sich lenkte. Im Jahre 1807 ernannte ihn der Herzog Karl Wilhelm Ferdinand zum ordentlichen Professor der Mathematik und zum Director der Sternwarte in Göttingen. Im Jahre 1799 bewies er in einer kleinen Schrift, dass jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln, jede kubische drei und jede Gleichung des n^{ten} Grades n Wurzeln haben müsse. 1801 erschienen seine „arithmetischen Untersuchungen" (Disquisitiones arithmeticae), welchem Werke er seine Professur verdankte. In dem Werke: Theoria motus corporum coelestium (Theorie der Bewegung der Himmelskörper) veröffentlichte er die sogenannten Gauß'schen Analogien, mit deren Hilfe man ebenfalls — wie dies von den früher erwähnten Napierschen Gleichungen gilt — aus den zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die andern Stücke eines sphärischen Dreieckes finden kann.

Gauß starb am 23. Februar 1855 in Göttingen; sein Gehirn war, wenn auch nicht das größte, so doch das schwerste unter allen gewogenen menschlichen Denkorganen.

Delambre wurde 1749 in Amiens geboren, er ist derjenige der Geometer, welcher die Gauß'schen Formeln zuerst angewendet hat und derselbe, welcher im Auftrage der französischen Republik die berühmte Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcelona vornahm. Aus der Bogenweite Dünkirchen — Barcelona wurde der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erdmeridianquadrant gerechnet, dessen zehnmilliontelster Theil „ein Meter“ genannt wurde, die Maßeinheit unseres jetzigen „natürlichen Maßes“. (Siehe untenstehende Fig.)



arc BD und $\sphericalangle \alpha$ sind gegebene Größen.

Es verhält sich nun:

$$\text{arc } \widehat{BD} : \text{arc } \widehat{PN} = \alpha^0 : 90^0$$

$$\text{Daraus: arc PN} = \frac{\text{arc. } \widehat{BD} \times 90^0}{\alpha^0}$$

$$\text{und 1 Mtr.} = \frac{\text{arc } \widehat{BD} \times 90^0}{10{,}000.000 \times \alpha^0}$$

Der Geometer Carnot, welcher zu Anfang unseres Jahrhunderts lebte, ist der Erfinder des Carnotschen Lehrsatzes, der für die Trigonometrie der Ebene eine ähnliche Bedeutung hat, wie der „pythagoräische“ für die Planimetrie. Er dient bekanntlich dazu, nachdem man ihn zur logarithmischen Rechnung geeignet umgestaltet hat, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreieckes die dritte Seite zu finden.

Gleichwie das rechtwinkelige Dreieck eine Specialität des schiefwinkeligen ist, so ist der pythagoräische Satz eine Specialität des Carnotschen.

Setzen wir in der Formel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\cos A$ den $\sphericalangle A = 90^0$, so wird aus dem schiefwinkeligen Dreieck ein rechtwinkeliges und da $\cos. 90^0 = 0$ ist, verwandelt sich die Formel in: $a^2 = b^2 + c^2$.

So schreitet die Wissenschaft vorwärts vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Speciellen zum Allgemeinen. Je allgemeiner die Gesetze und Formeln einer Wissenschaft sind, auf einem desto höheren Standpunkte steht dieselbe.

Der fünfte in der Reihe der früher angegebenen großen Geometer unserer Tage, Professor Steiner aus Berlin, ist der Erfinder des Prismatoids, eines Körpers, welcher in der Stereometrie das bedeutet, was das Trapez in der Planimetrie ist. In einer am 14. Februar 1842 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung zeigte er in elementarer Weise, dass dieser Körper, dessen Charakteristik wir später bringen werden, aus seinen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beiden Grundflächen, der mittleren Durchschnittsfläche und der Höhe berechnet werden kann.

Seine Erfindung und sein Vortrag geriethen aber in Vergessenheit, bis Theodor Wittstein aus Hannover, ohne von dem Steiner'schen Vortrag etwas zu wissen, mit einer Arbeit, betitelt: „das Prismatoid" die deutschen Geometer überraschte; kurze Zeit danach veröffentlichte Professor Bretschneider aus Gotha eine Schrift, in welcher er eine einfachere und gründlichere Ableitung für die Körperinhaltsformel des Prismatoids mittheilte.

Das Prismatoid ist der allgemeinste geometrische Körper, den man sich denken kann und in seiner Körperinhaltsformel sind die Formeln für die Körperinhalte aller andern Körper enthalten.

Die Grundflächen des Prismatoids sind zu einander parallel und können drei-, vier-, fünf- u. s. w. eckig sein; die Umgrenzungsflächen sind meist Dreiecke. Die Formel für das Prismatoid ist: $K = \frac{1}{3} . h \left(\frac{G + g}{2} + 2\ m \right)$, in welcher Formel h die Höhe, G die größere, g die kleinere Grundfläche und m die mittlere Durchschnittsfläche repräsentiert.

Specialisieren wir beispielsweise diese Formel für die Kugel, so haben wir: $G = g = 0$, $m = r^2 . \pi$ und $h = 2\,r$; die Formel verwandelt sich also in $K = \frac{1}{3} . 2\,r\ (0 + 2\,r^2 . \pi) = \frac{4}{3} . r^3 . \pi$.

Was Schulz v. Straßnitzky, als Professor und Pädagog für die Popularisierung der geometrischen Wissenschaft an der Wiener technischen Hochschule und in Vorträgen geleistet hat, ist zu sehr bekannt, als dass es nothwendig wäre, an dieser Stelle darüber zu reden. (Als Curiosität sei hier nur bemerkt, dass unter seiner Leitung der berühmte Kopfrechner Zacharias Dase, aus Hamburg, die Ludolfsche Zahl auf 200 Decimalziffern berechnete.)

Schließlich erübrigt, der sogenannten „neueren Geometrie" zu gedenken, welche in ihren Elementen schon von Pascal und De la Hire geschaffen wurde. Die neuere Geometrie schließt die Rechnung vollständig aus und beschäftigt sich mit den Verhältnissen geradliniger Entfernungen von einer bestimmten Art. In neuester Zeit haben für die Entwickelung dieses Zweiges der Geometrie sehr viel geleistet: Dr. Benjamin Witzschel, W. Fiedler in Leipzig und Prof. Schlesinger in Wien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IX. Die einschlägige Literatur.

Groß ist die Anzahl der Werke, welche über „Geometrie" geschrieben wurden. Fast jeder von den großen Geometern, die im vorigen Capitel als epochale Forscher genannt wurden, hat geschriebene oder gedruckte Werke hinterlassen; noch größer ist die Zahl der Werke jener, welche sich mit der Ordnung und Sichtung des vorhandenen Stoffes und mit der Auswahl desselben für bestimmte Schulkategorien beschäftigt haben. Relativ klein ist aber die Zahl jener Werke, welche für die Volks- und Bürgerschule Österreichs geschrieben wurden, was insoferne begreiflich ist, als die Geometrie in der alten Volksschule unseres Vaterlandes noch nicht Unterrichtsgegenstand war und man der Realien nur nebensächlich beim Sprachunterrichte gedachte.

In Deutschland war es der große Pädagoge A. Diesterweg und waren es dessen Epigonen, welche auf die gehörige Beachtung der Realien hinwiesen, und dem Streben A. Diesterwegs, das Wissenswerteste aus der Geometrie in die Volksschule einzuführen, verdanken wir die Bücher: „Die Raumlehre, oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Pädagogik", mit 9 Tafeln, in Webers Verlag in Bonn erschienen, (im Jahre 1832) und: „Elementare Geometrie für Lehrer." (In der zweiten Auflage erschienen 1864.)

Diese beiden Bücher Diesterwegs verdienen von jedem Schulmanne gelesen zu werden; sie sind insoferne epochemachend, als Diesterweg der Erste war, welcher eingehend zeigte, was von der Geometrie und wie die Geometrie in der Volksschule gelehrt werden solle.

Der zweite Pädagoge, welcher sich dieses Gegenstandes in hervorragender Weise annahm, ist C. Kehr, der im Jahre 1867 zu Gotha eine praktische Geometrie für Volksschulen sammt einer Aufgabensammlung herausgab. — Im Sinne des jetzigen Lehrplanes für die österreichischen Volks- und Bürgerschulen schrieben: R. v. Močnik, Karl Schubert, Villicus, Bürgerschuldirector Hein (ein Büchlein über „Formenlehre" für die V. Classe) und der Bürgerschullehrer Napravnik (Geometrie für Mädchenbürger- und vier- bis siebenclassige Volksschulen).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Im Geiste Diesterwegs und Kehrs sind folgende Werke und Werkchen in Deutschland geschrieben worden:

Adam, R., Die Raumlehre mit Übungen im Zeichnen und Rechnen. (Langensalza 1880.)

Adam, W., Elementarer Schulbedarf aus dem Gebiete der Geometrie. (Berlin 1879.)

Adam, W., Lehrbuch der Geometrie für Seminarien, Mittelschulen und Volksschulen. (Berlin 1880.)

Adam, W., Lehr- und Handbuch der Flächen und Körperberechnung sammt vielen geometr. Rechenaufgaben.

Bartholomäi, Fr. Dr., Geometrie für die einclassige Volksschule. (Langensalza 1876.)

Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie. (Cleve 1880.)

Buttel, Paul, Raumlehre für Volks-, Mittel- und Fortbildungsschulen. (Kiel 1877.)

Cassau, Karl, Formen- und Raumlehre für Mittelschulen und Lehrerfortbildungsanstalten.

Engler, W., Die Geometrie der Fortbildungsschule. (Leipzig 1879.)

Fiedler, Die Raumlehre in populärer Darstellung.

Fischer, Dr., Leitfaden zum Unterrichte in der Elementargeometrie. (Leipzig 1877.)

Forbeiger, B., Das Wichtigste aus der Geometrie. (Leipzig 1880.)

Franke, F., Die Elemente der ebenen Geometrie. (Hannover 1860.)

Fresenius, K., Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. (Frankf. a/M. 1875.)

Friedemann, A. J., Die Geometrie als Gymnastik des Geistes. (Insterburg 1851.)

Gasser, A., Leitfaden für den praktischen Unterricht in der Raumlehre.

Grohmann, A., Kleine Geometrie für Volks- und Bürgerschulen. (Berlin 1876.)

Horn, Dr., Geometrischer Anschauungscursus für Mittel-, Bürger- und Volksschulen. (Essen 1876.)

John, J., Allgemeine Größenlehre.

Kayser, Karl, Leitfaden der Raum- und Formenlehre. (Hannover 1879.)

Kehr, C., Geometrische Rechenaufgaben für Volks- und Fortbildungsschulen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Kehr, C., Praktische Geometrie für Volks- und Fortbildungsschulen. (Gotha 1880.)

Kretschmer, E. Dr., Geometrische Anschauungslehre mit 600 Fragen und Aufgaben.

Kuhn, E., Dr., Raumgrößenlehre. (Berlin 1880.)

Löhmann, J. H., Raumlehre für die Volksschule in drei Cursen. (Flensburg 1877.)

Lüdemann, H., Geometrie für Volks- u. Seminarlehrer. (Bremen 1863.)

Malliat, Dr., Raumlehre in der Volksschule. (Berlin 1880.)

Müller, H. Dr., Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie. (Braunschweig 1800.)

Pickel, A., Die Geometrie in der Volksschule. (Kassel 1879.)

Rauch, C., Planimetrie und Constructionslehre. (Hannover 1861.)

Roßmanith, Constantin, Geometrische Formenlehre. (Wien 1879.)

Rüegg, H. R., Die Raumlehre. Ein Leitfaden für den Unterricht in Volksschulen. (Bern, Huber und Comp.)

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. (Braunschweig 1880.)

Schneider, Martin, Elemente der Mathematik für Seminarien und Mittelschulen.

Schurig, Kurt Dr., Die Elemente der Geometrie mit einer Sammlung von Rechen- und Constructionsaufgaben.

Simon, Max Dr., Geometrie für Elementar- und Mittelschulen. (Leipzig 1876.)

Sonnenburg, Ferd., Geometrie f. Volks- u. Mittelschulen. (Berlin 1887.)

Tödter, H., Raumlehre für Volksschulen. (Hannover, Hellwing.)

Volkmann, H., Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. (Bunzlau 1879.)

Wienhold, E. F., Die Geometrie der Volksschule nebst vielen Aufgaben.

— — Commentar zur Geometrie der Volksschule. (Leipzig, 1876.)

(Der vorgenannte Verfasser redet durchwegs dem Princip der Anschauung das Wort und verwirft jede Art mathematischer Beweisführung, was ihn jedoch nicht hindert, eine unvollkommene Formel für die Körperinhaltsberechnung des Pyramidalstutzes, [die er natürlich nicht durch Anschauung erweisen kann] ganz unvermittelt zu bringen.)

Wolff, E., Vorschule der Geometrie. (Gütersloh 1879.)

Wunderlich, G., Wiederholungsbuch in der Raumlehre für die Oberclassen der Volksschulen.)

Würth, Ed., Geometrie f. Volks- u. Fortbildungsschulen. (Gießen 1877.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die meisten der angeführten, in Deutschland verlegten Werke, behandeln die Geometrie im Rahmen der achtclassigen Volksschule und des Lehrerseminars; viele derselben lehnen sich an Diesterweg und Kehr.

Von den Werken, welche über das Gebiet der Bürger- und Lehrerschule in Bezug auf Geometrie hinausgehen, und zum Weiterstudium empfehlenswert sind, wollen wir nennen:

Bauer, K., Anfangsgründe der praktischen Geometrie mit 5 Tafeln.
Bretschneider, Lehrgebäude der neueren Geometrie.
Fialkowsky, N., Kurz gefasste praktische Geometrie. (Pichler 1880.)
— — Construction des Kreises und der Ellipse.
— — Die geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Zeichnen für die oberen Classen der Volksschulen und höheren Töchterschulen. (Wien 1881.)
Fiedler, W., Die Elemente der neueren Geometrie und Algebra. (Leipzig 1862.)
Gruber, K., Der Unterricht in der Planimetrie, Stereometrie und ebenen Trigonometrie.
Hechel, C. Prof., Lehrbuch der Geometrie mit einer stereometrischen Aufgabensammlung. (Dorpat 1852.)
Schulz v. Straßnitzky, Handbuch der Geometrie. (Letzte Aufl. von 1880.)
Salomon, Lehrbuch der reinen Elementargeometrie.
— — Lehrbuch der niedern Geometrie.
— — Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Planimetrie.
Sonndorfer, Dr., Geometrie der Ebene und des Raumes. (Wien 1865.)
Witzschel, Dr., Grundlinien der neueren Geometrie.

Von neueren Werken, welche das Gebiet der höheren Analysis (Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes behandelt mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung) berühren, sind zu nennen:

Fort, O. u. Schlömilch O., Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.
Heger, Richard Dr., Elemente der analytischen Geometrie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Theil:

Das geometrische Zeichnen

in der VII. und VIII., resp. II. und III. Classe der Bürgerschule.

Bearbeitet von **A. Tschiedel.**

Lehrziel.

VII. Classe:

Constructionsaufgaben im Anschlusse an den geometrischen Unterricht. Einiges über Situationspläne. Nach Thunlichkeit Feldmessübungen mit Ketten und Stäben.

VIII. Classe.

Zeichnen einfacher Objecte des Bau- und Maschinenfaches mit den zum Verständnisse der Darstellung nothwendigen Erläuterungen.

Praktische Winke über den Unterricht im geometrischen Zeichnen.

Zum geometrischen Zeichnen braucht jeder Schüler ein Reißzeug, ein Reißbrett, eine Reißschiene, Zeichnungspapier, ein 45 oder 60 gradiges Dreieck, einen härteren Bleistift (Hardtmuth Nr. 3), ein Stück Gummi elasticum, einen guten Tusch, ein Federmesser, Reißnägel und eine Feder. Weiter noch Pinsel, Farben und die dazu gehörigen Farbenschalen.

In dem Reißzeuge müssen enthalten sein: mindestens ein Zirkel, ein Bleiknie und zwei Reißfedern.

Zur Ausführung von gleich großen Zeichnungen, was sehr zu empfehlen ist, muss entweder auf dem Dreiecke oder auf der Reißschiene ein Maßstab angebracht sein.

Es ist angezeigt, gleich bei Beginn des Unterrichtes in diesem Gegenstande, also in den ersten Stunden, die Schüler mit den Zeichnungsrequisiten und deren Gebrauch bekannt zu machen.

Vor allem muss darauf gesehen werden, dass die Schüler mit sauberen Händen in die Schule kommen und dieselben auch während

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des ganzen Unterrichtes sauber halten. Ebenso sollen die Kleidungsstücke rein sein und darf der Zeichnungstisch nicht beschmutzt werden. Nur auf diese Weise kann man auch reine Zeichnungen erhalten.

Der Bleistift soll fein gespitzt sein; — zum Ausziehen von Linien keilförmig, und zum Beschreiben kegelförmig. Hat der Schüler den Stift schon zuhause gespitzt, wird viel Zeit erspart.

Das Reißzeug muss sorgfältig gehalten werden. Die Schüler mögen darauf sehen, dass der Zirkel nicht herabfällt, weil dadurch die Spitzen verbogen werden oder abbrechen.

Die Spitzen der Zirkelfüße müssen scharf, gleich lang sein und geschlossen eine Spitze bilden. Der Zirkel muss mit der rechten Hand am Kopfe geführt werden. Die linke Hand fesselt den Fuß, in dem kein Bleiknie oder keine Feder ist. Dadurch verhütet man das Ausspringen des Zirkels. Die Reißfedern mögen nach jedem Gebrauche mit einem kleinen Lederlappen gereinigt werden. Gefüllt werden dieselben durch einen mit Tusch oder Farbe benetzten Papierstreifen. Der Tusch muss die richtige Dicke und Schwärze haben. Dicker Tusch gibt unterbrochene, dünner graue Linien.

Damit ein solcher Fehler verhütet werde, lasse man die Schüler auf dem Probierpapiere einen Strich machen und auswischen. Ist der Fleck dunkel, so ist der Tusch schwarz.

Das Reißbrett muss stets sauber sein. Am besten lässt es sich mit einem feuchten Badeschwamm reinigen. Die Oberfläche muss glatt sein. Das Beschneiden von Papier oder Heften auf dem Reißbrette ist zu untersagen.

Das Reißbrett soll aus trockenem Holze verfertigt sein, da es sich sonst leicht wirft.

Man verwende nur gutes Papier, d. i. solches, das glatt und gut geleimt ist. Gummi elasticum darf seine Oberfläche nicht rauh machen. Lineale und Dreiecke müssen gerade Linien geben. Das Beschneiden des Papieres mit Benützung derselben soll äußerst vorsichtig geschehen. Der Gummi elasticum soll weich und nicht schmutzig sein. Man wird gut thun, ihn vor der Verwendung auf besonderem Papiere zu probieren.

Die Reißnägel mögen mit dem Messer eingedrückt werden, weil man sich leicht die Finger beschädigen kann. Einklopfen macht Lärm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei der Besprechung über das Aufspannen mit Reißnägeln muss mitgetheilt werden, dass die längere Seite des aufgespannten Papieres mit der Kante der angelegten Reißschiene zusammenfällt.

Will man mit Gummi arabicum aufspannen, so breche man die vier Seiten des Papieres auf einen *cm* breit ein, befeuchte auf der rückwärtigen Seite mit einem reinen, nassen Schwamm das Papier und lasse dann langsam das Wasser ablaufen. Sodann lege man das Papier, wie es früher gesagt wurde, auf das Brett und spanne es nach allen Seiten.

Die eingebrochenen Ränder werden sodann mit Gummi arabicum bestrichen und an das Brett angedrückt. Zur besseren Befestigung streicht man sie noch mit dem Fingernagel. Trocknen darf das Papier nur an einem mäßig warmen Orte.

Für den Lehrer sei noch bemerkt, dass er, wenn Zeichnungen angelegt werden sollen, zuerst selbst den Farbenton mischt, mehrere Probierpapiere damit anlegt und diese unter die Schüler vertheilt. Ebenso kann es beim Ausziehen von Linien geschehen.

Um der Zeichnung ein schöneres Ansehen zu geben, rahmt man sie mit einem Rechtecke von vielleicht 4 *cm* Abstande vom Rande ein. Die Schüler mögen alle wo möglich gleich großes Papier verwenden und gleich große Zeichnungen nach Maßangabe machen. Die Zeichnungen müssen auf die Zeichenfläche symmetrisch vertheilt werden, deswegen theilt man dieselbe in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile.

Die ersten Stunden müssen ausschließlich dem Ausziehen voller, starker und schwacher, gestrichelter, punktierter oder gestrichelt-punktierter Linien verwendet werden. Darauf folgt die Theilung der Geraden. Die vier Rechnungsoperationen mit Geraden, die Errichtung von Senkrechten, die Construction paralleler Geraden, die Übertragung von Winkeln, die Theilung derselben. Die vier Rechnungsoperationen mit Winkeln. Die Construction von Winkeln von bestimmter Größe. Der Transporteur. (Es wird aber zu rathen sein, die Eintheilung bloß bis auf fünf Grad zu machen.)

Sollte das Zeichnen rascher vorschreiten, als der Unterricht in der Geometrie, was leicht eintreten kann, so wird der Lehrer gezwungen sein, diese Zwischenzeit mit der Behandlung anderer lehrreicher Stoffe auszufüllen. Zu diesem Behufe nehme er die Construction des Quadrates vor und führe in demselben einfache Band-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verschlingungen aus. Auch geradlinige Gitter sind angezeigt. (Der weitere Lehrstoff im geometrischen Zeichnen ist bereits früher angegeben worden.)

Am Beginne des Schuljahres ist in der VII. Classe der Lehrstoff der VI. Classe nach Bedarf zu wiederholen und zu erweitern durch Constructionen, die auf den Congruenz- oder Ähnlichkeitssätzen, auf der Flächenverwandlung und Berechnung beruhen. Die Ähnlichkeitssätze selbst sind auf constructivem Wege zu zeichnen. Die auf den Ähnlichkeitssätzen beruhende Theilung der Geraden, die Anfertigung von Transversalmaßstäben, die Methoden zur Vergrößerung oder Verkleinerung von Geraden mit dem Proportionswinkel, die Flächenverwandlungen sind aus den beigegebenen Zeichnungen und Aufgaben zu ersehen. Zur besseren Handhabung des Zirkels sind auch Kreisconstructionen beigefügt. Die Schüler mögen zur Ausführung kleiner Situationspläne die zugehörigen einleitenden Zeichnungen arbeiten. Der Lehrer wird diese Figuren auf der Tafel groß vorzeichnen und angeben, in welchem Maße sie auf dem Papiere auszuführen sind. Zum Entwurfe einfacher Situationspläne sind mehrere Methoden angeführt. Weiter ist mit den Schülern das Messen von Geraden auf dem Felde mit Hilfe von Kette und Stab und die Aufnahme von Flächen in der Natur zu üben.

Als Übergang zum Zeichnen einfacher Objecte des Bau- und Maschinenfaches, (was Aufgabe der VIII. Classe ist,) empfiehlt es sich, am Schlusse des siebten und am Anfange des achten Jahres das Wichtigste aus der Projectionslehre zu nehmen. Es wird dies zwar nicht direct im Lehrplane gefordert, kann aber aus demselben herausgelesen werden; denn wie wäre es möglich, den Grund und Aufriss eines Objectes anfertigen zu können, ohne Kenntnis der Art und Weise, wie Punkte, Linien und Körper auf der horizontalen und vertikalen Projectionsebene projiciert werden. Auch das Wichtigste aus der Schattenlehre ist zu behandeln. Von technischen Objecten können in der VIII. Classe behandelt werden: Mauerwerke, Holzverbindungen, als Anwendung Blockwände, Fußböden, Thüren und Fenster-, Dach- und Gewölbeformen, Fenster und Thüren im Aufrisse, im horizontalen und vertikalen Durchschnitte, die Schraube, Häng- und Sprengwerke, Schließen, ein einfacher Dachstuhl im Aufrisse, monumentale Fenster, Monumente u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Geschichte des geometrischen Zeichnens.

Das geometrische Zeichnen ist so alt, als die Geometrie.

In früherer Zeit stand dasselbe als constructiver Theil der Geometrie dieser zur Seite, während es heute die Grundlage alles technischen Zeichnens geworden ist.

Archimedes, welcher sich unter anderm damit beschäftigte, beim Kreise das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser festzustellen, die Schnecken- und Spirallinien seiner wissenschaftlichen Betrachtung zu unterziehen, konnte diese seine verwickelten Probleme ganz gewiss nur mit Hilfe des Zirkels lösen.*)

Es ist ferner undenkbar, dass die Kegelschnittslinien einer wissenschaftlichen Untersuchung hätten unterzogen werden können, wenn sie nicht vorher auf constructivem Wege genau dargestellt worden wären. Gewiss haben die Ägypter den Zirkel schon gekannt und wahrscheinlich ist derselbe von den Römern und Griechen in seiner ursprünglich primitiven Form verbessert worden. Das Reißzeug tritt erst in der Bauhütte der gothischen Monumentalbauten, der Dome auf. Die reine vollendete Bogenornamentik, die in diesen Bauwerken uns entgegen tritt, bedurfte wegen ihrer complicierten Zirkelgesetze oder Constructionsmethoden genauerer Zeichnungsapparate. (Der romanische Stil, der mit Beginn des 12. Jahrhunderts abschließt, hat nur den Rundbogen zur Grundlage.)

Die Griechen lösten wohl die Aufgaben an und im Kreise, die Constructionen der weiteren Kegelschnittslinien, die Verwandlungen von Figuren in solche von gleich großem Inhalte; leider aber wandten sie ihre geometrischen Kenntnisse in der Baukunst wenig an.

Bei ihnen findet man kein Kreis- und kein elliptisches Gewölbe.

---

*) In seinem Forscherdrange rief er bekannterweise jenem eindringenden plünderungssüchtigen Soldaten des Marcellus kaltblütig die Worte zu: „Noli turbare circulos meos!“ („Verdirb mir meine Kreise nicht!“). Der rohe römische Soldat tödtete den Greis.

Sein berühmter Zeitgenosse Apollonius, welcher sich eingehend mit der Theorie der Kegelschnittslinien beschäftigte, löste viele verwickelte Aufgaben, die nach ihm den Namen apollonische Aufgaben führen.

Die hervorragendsten sind: An drei Kreise oder drei nicht parallele Gerade einen tangierenden Kreis zu legen. Einfache Aufgaben dieser Art sind in dem Lehrstoffe der VII. Classe Fig. 37, Fig. 38, Fig. 39, Fig. 40, Fig. 41, Fig. 42 angeführt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erst den Römern war es vorbehalten, den Nachkommen zu lehren, Räume auch bogenförmig zu überbrücken.

Die darstellende Geometrie, die praktische Geometrie oder Feldmesskunst, die Mechanik — lauter Wissenschaften, die ihre Vervollkommnung der neueren Zeit verdanken — können das Reißzeug nicht entbehren.

Alle Schulen, die eine praktische Richtung vertreten, sollten daher dem Zirkelzeichnen große Aufmerksamkeit zuwenden.

Besonders sollte auf Kenntnis der Projectionslehre hingearbeitet werden, da auf ihr das Verständnis eines Grund- und Aufrisses beruht, ohne die man technische Objecte im Bau- und Maschinenfache nicht verständlich darstellen kann.

Die Erfindung des Zirkels, so nahe sie gelegen sein mag, ist eine große, welthistorische That von eminent cultureller Bedeutung. Dem Zirkel verdanken wir unsere großen monumentalen Gebäude, unsere Eisenbahnen und Tunnel, unsere Kunststraßen über die Gebirge, unsere Maschinen, kurz einen großen Theil unserer modernen Cultur, und mit Recht gibt man der Statue eines Technikers den Zirkel in die steinerne oder erzene Hand.

Der Lehrstoff.

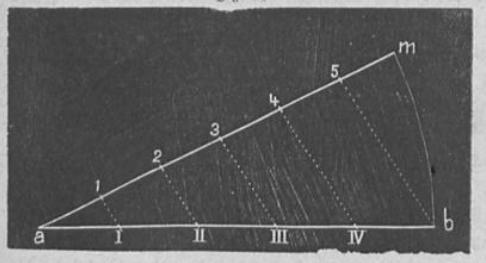
Die Theilung der Geraden auf Grundlage der Ähnlichkeit der Dreiecke.

Aufgabe: Es ist eine Gerade ab in fünf gleiche Theile zu theilen.

1. Lösung.

Fig. 1. Vom Punkte a die Schiefe am gezogen, darauf die gleichen Stücke a 1, 12, 23, 34, 45 aufgetragen. Hierauf den Punkt 5 mit Punkt b durch die Gerade 5b verbunden. Zu dieser Geraden die Parallelen 4 IV, 3 III, 2 II, 1 I gezogen, so bezeichnen die Punkte I II III IV die Theilungspunkte. Jeder dieser Theile ist $^1/_5$ ab. Warum?

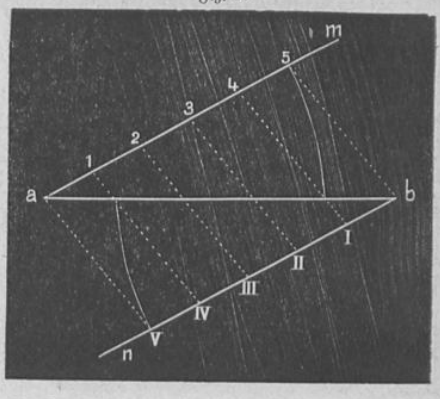
Fig. 1.



Es dürfte sich empfehlen, auch die Theilung in sieben oder neun Theile durchzuführen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 2.



2. Lösung.

Fig. 2. Man zieht von den Endpunkten a und b die Parallelen. am und bn und trägt abermals die fünf gleichen Theile von a und b aus auf. Verbindet Punkt 5 mit Punkt b; ebenso 4 mit I, 3 mit II u. s. w., die Linien 5 b und a V können auch wegfallen.

Aufgabe.

Fig. 3. Es sollen mehrere Gerade z. B. a b, c d, e f in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile z. B. sieben Theile getheilt werden.

Fig. 3.

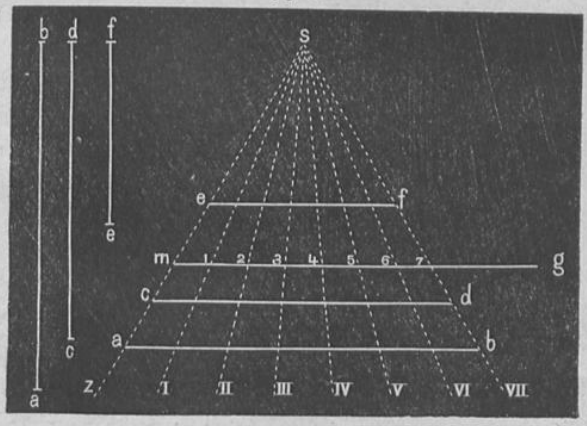


Fig. 3. Man zeichnet sich eine Gerade gm, trägt darauf sieben gleiche Theile auf, zeichnet sich das gleichseitige Dreieck m s 7 und zieht von s aus die Strahlen sz, sI, sII, sIII u. s. w. bis sVII. Hierauf trägt man die Gerade ab von s aus auf sz und sVII bis a und b auf, verbindet diese Punkte, so erhält man die in sieben gleiche Theile getheilte Gerade ab. Ebenso geschieht es mit dc und ef.

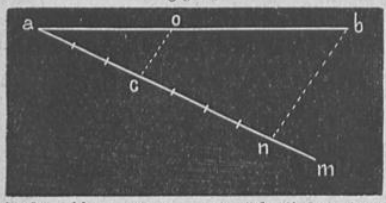
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Es ist eine Gerade ab nach einem bestimmten Verhältnisse z. B. wie 3 : 4 zu theilen.

1. Lösung.

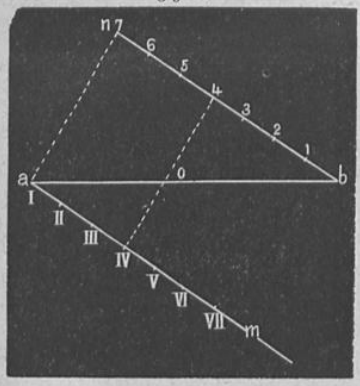
Fig. 4. Man ziehe von einem Endpunkte z. B. a wie in Fig. 1 eine Schiefe am, trage auf ihr 3 + 4 = 7 Theile auf, verbinde den letzten Theilungspunkt n mit dem Endpunkte b und ziehe aus dem dritten Theilungspunkte c zu bn die Parallele co, so verhält sich ao : ob = 3 : 4. Weshalb?

Fig. 4.



Es muss bemerkt werden, dass hier ganz gut ähnliche Aufgaben, wo die Theilungs- oder Verhältniszahlen ganze Zahlen sind angeschlossen werden können.

Fig. 5.



2. Lösung.

Fig. 5. Man wird sich wie in Fig. 2 an den Enden der Geraden ab die schiefen parallelen Linien am und bn zeichnen, sieben gleiche Theile von a und b aus auftragen und die Punkte III und IV verbinden, so besteht die Proportion: ao : ob = 3 : 4.

Aufgabe. Fig. 6. Es ist eine Linie in mehr als zwei Theile, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen zu theilen. Es sei z. B. die Linie ab in Fig. 6 nach dem Verhältnisse 2 : 3 : 4 zu theilen. Es wird die Lösung nach Fig. 1 gewählt.

Fig. 6.

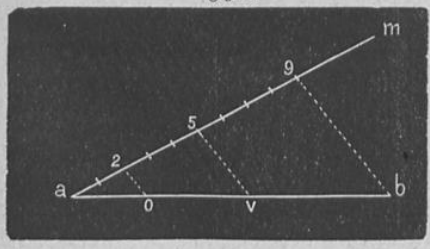


Fig. 6. Ich trage auf der Schiefen 2 + 3 + 4 = 9 Theile auf und benütze die Punkte 2 und 5.

ao : ov : vb = 2 : 3 : 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wollte man Brüche oder gemischte Zahlen als Verhältniszahlen verwenden, so müssten diese in ganze Zahlen umgeformt werden. z. B.

Verhältnis	$1/2 : 2$	Theilung	$1 : 4$
" "	$3 : 2/3$	"	$9 : 2$
" "	$1 1/3 : 2$	"	$4 : 6$
" "	$3 : 2 1/2$	"	$6 : 5$

Maßstäbe.

Aufgabe. Fig. 7. Es ist ein Maßstab zu zeichnen, auf dem *cm* und *mm* abgenommen werden können.

Aufgabe. Fig. 8. Eine Wiesenfläche hat die Form eines Rechteckes von 80 *m* Länge und 60 *m* Breite. Die Zeichnung derselben kann oder darf nur 8 *cm* lang sein. Es ist die Breite im verjüngten Maße darzustellen. 80 *m* in der Natur = 8 *cm* in der Zeichnung

80 *m* = 8000 *cm*

800 : 8 = 1000

1 *cm* am Papier = 1000 *cm* in der Natur.

Verjüngung 1 : 1000.

1 *cm* = 10 *m*, somit die Breite 6 *cm*.

Fig. 8.

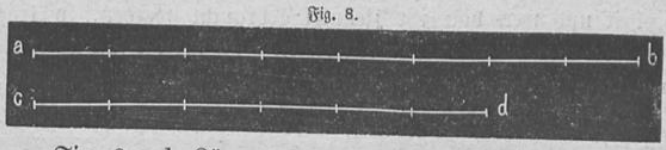


Fig. 8. a b Länge.
c d Breite.

Das Rechteck ist zu zeichnen.

Aufgabe. Fig. 9. Eine Fläche in der Natur hat die Form eines gleichschenkeligen Dreieckes. Die Basis = 45 *m*, die Höhe 35 *m*.

Die Basis der Zeichnung mit 9 *cm* angenommen.

45 *m* in der Natur = 9 *cm* am Papier.

5 *m* " " " 1 *cm*

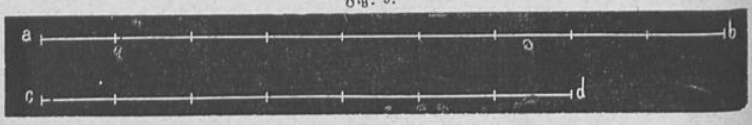
Verjüngung 1 : 500.

Somit beträgt die Höhe 7 *cm*.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 9. a b Basis. c d Höhe.
Es ist die Zeichnung dazu zu geben.

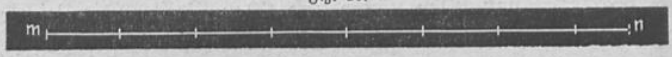
Fig. 9.



Aufgabe. Fig. 10. Eine Linie von 154 *m* Länge ist verjüngt zu zeichnen.

1 *cm* auf dem Papier gleich 20 *m* in der Natur.
120 *m* i. d. N = 6 *cm* a. P.
14 *m* „ „ „ = 7 *mm*

Fig. 10.



Somit ist die Linie 7·7 *cm* lang. Am Maßstabe abgemessen m n ist die verjüngte Gerade.

2. Lösung. Fig. 11. Da das Abmessen auf dem Fig. 7 gezeichneten Maßstabe nicht mit der nöthigen Genauigkeit vorgenommen werden kann, so verfertigt man sich zur Darstellung von Zeichnungen im verjüngten Maße ganz besondere Maßstäbe.

Der *cm* war in den angeführten Aufgaben die verjüngte Maßeinheit und weil von ihr Zehntel gebraucht werden, so trägt man auf der in 0 errichteten Senkrechten zehn gleiche Theile auf. Alles andere zeigt die Zeichnung.

Fig. 11.

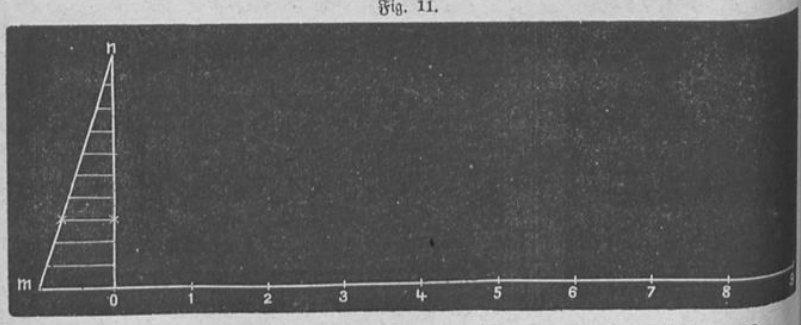


Fig. 11. Die mit Sternchen bezeichnete Gerade ist die Verjüngung von 14 *m*.

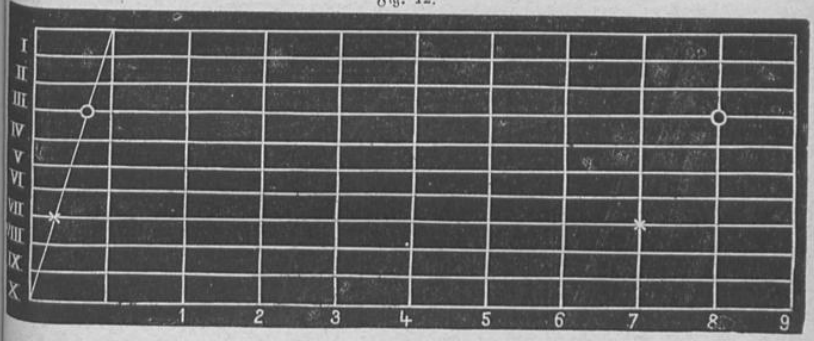
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gerade m n heißt eine Transversale, und Maßstäbe, an denen das Ablesen an so einer Hypothenuse geschieht, heißen Transversal-Maßstäbe.

Fig. 12 zeigt den vervollkommneten Transversalmaßstab für Zehntel der Einheit, für Aufgaben wie in Fig. 10.

Fig. 12. Um die in Rede stehende Linie von 7 *cm* + 7 *mm* abzustechen, muss ich auf der Lothrechten 7 so weit hinauf gehen bis sie die Horizontale VII schneidet. Die mit Ringen bezeichnete Strecke würde 8 *cm* + 3 *mm* lang sein.

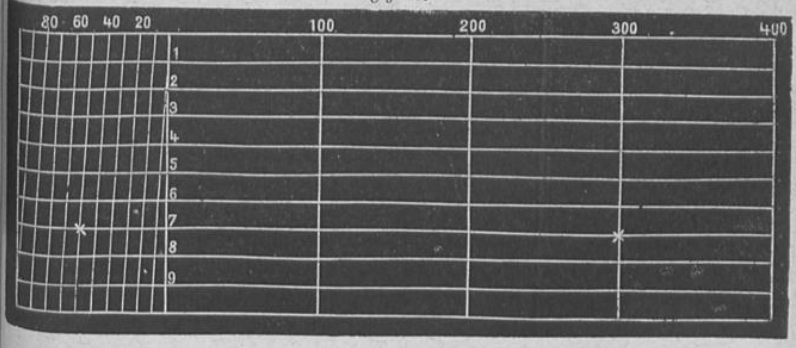
Fig. 12.



Wäre die Aufgabe so gestellt, dass 1 *dm* auf dem Papier = 100 *m* in der Natur seien oder das Verhältnis 1 : 1000 besteht, und ich will in der Natur noch *dm* abmessen, so muss der *dm* am verjüngten Maßstabe in 1000 Theile getheilt erscheinen.

Die Zeichnung in Fig. 13 ist der Deutlichkeit wegen im doppelten Maßstabe gezeichnet.

Fig. 13.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 13. Der Decimeter erscheint von rechts nach links in zehn gleiche Theile getheilt.

Bei dem Punkte 1 erscheint $^1/_{1000}\ dm = 1\,dm$ i. d. N.

" " " 2 " $^2/_{1000}\ dm = 2\,dm$ i. d. N u. s. w.

Am oberen Rande erscheint die Eintheilung nach 10 und 100 verjüngten Einheiten.

Die mit Kreuzchen bezeichnete Linie enthält 357 verjüngte Einheiten, stellt somit $357\,dm = 35\,m + 7\,dm$ in der Natur vor.

Methoden zur Vergrößerung und Verkleinerung von Geraden.

1. Methode.

Mit dem Proportional- und Reductionswinkel.

In Fig. 14 wurden die Linien a b und a c wie 3:4 vergrößert, in Fig. 15 wie 4:3 verkleinert.

Fig. 14. Mit 3 Theilen den Bogen v w gezeichnet und mit vier Theilen von v in w durchschnitten. Auf die Gerade a m die Geraden a b und a c von a bis m und b und n und c aufgetragen, so erhält man die gewünschten Geraden m b und n c durch Verbindung der Punkte m und b sowie n und c.

Fig. 14.

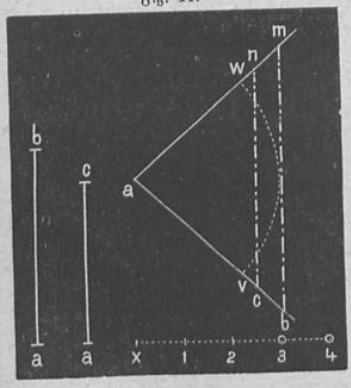


Fig. 15.

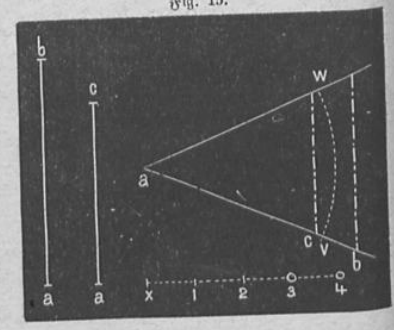
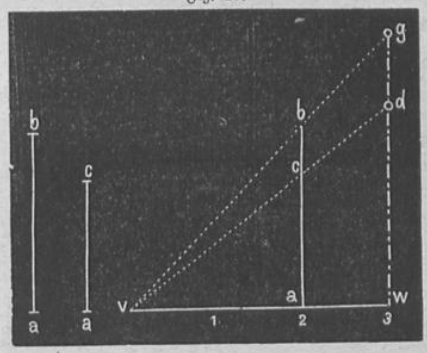


Fig. 15. Die Zeichnung ist ähnlich wie in Fig. 14, nur wird Bogen v w mit vier Theilen beschrieben und mit drei Theilen durchschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 16.



2. Methode.

Fig. 16. Die Vergrößerung sei 2:3. Von v bis w drei gleiche Theile aufgetragen. Auf die Senkrechte in 2 a b und a c aufgetragen gibt durch gehörige Verbindung und Verlängerung auf der Senkrechten in w die gesuchten Linien w d und w g.

Fig. 17.

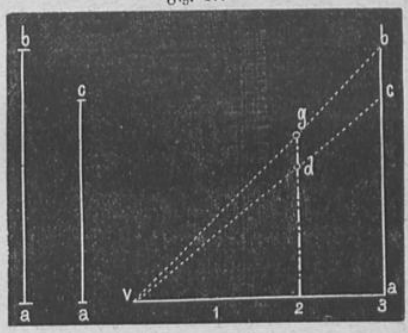


Fig. 17. Die Verkleinerung sei wie 3:2. In diesem Falle werden die gegebenen Geraden auf die Senkrechte in 3 aufgetragen und die Verkürzten erscheinen auf der Senkrechten in 2.

Es empfiehlt sich eine kleine einfache Zeichnung zu vergrößern.

Verwandlung der Figuren.

Aufgaben.

Fig. 18.

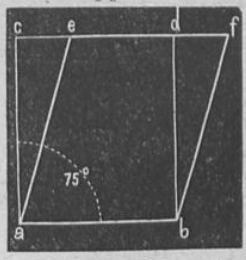


Fig. 18. Verwandelt das rechtwinkelige Parallelogramm a b c d in ein gleich großes vom ∢ von 75°.

Fig. 18. Die verwandelte Figur ist stark auszuziehen, anzulegen oder zu schraffieren. Die Aufgabe kann auch umgekehrt gestellt werden.

Fig. 19. Es ist ein Parallelogramm m n o p in ein gleich großes Dreieck von gleicher Grundlinie zu verwandeln.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 19

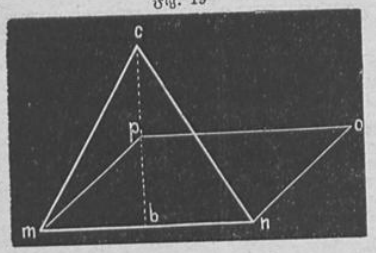


Fig. 19. c b = 2 b p.

Fig. 20. Dieselbe Aufgabe wie in Fig. 19, nur soll die Höhe gleich bleiben.

Fig. 20. Die Basis m s = = 2 m n.

Fig. 20.

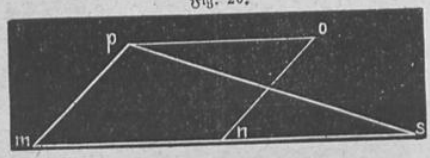


Fig. 21. Es ist ein Dreieck a b c in ein gleich großes Parallelogramm zu verwandeln. Die Höhen sind dieselben.

Fig. 21. Die Basis m b = = $^1/_2$ a b.

Fig. 21.

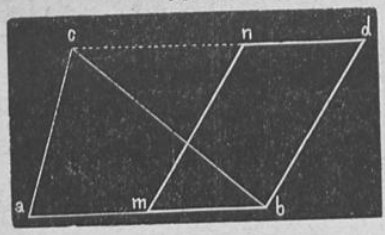


Fig. 22.

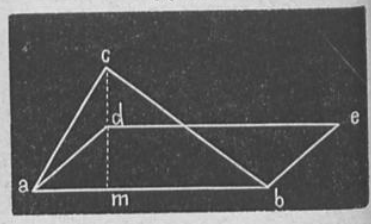


Fig. 23.

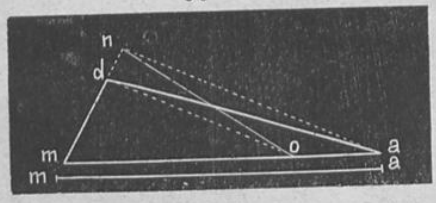


Fig. 22. Die Aufgabe wie in Fig. 21, aber die Grundlinien gleich.

Fig. 22. Höhe d m = = $^1/_2$ c m.

Fig. 23. Es ist das □ m o n in ein gleich großes von der Basis m a zu verwandeln.

Fig. 23. Man verbindet den Endpunkt a mit der Spitze n zieht aus dem Punkte o die Parallele o d, so ist △ m a d = △ m o n. Ähnlich löst man die Aufgabe, wenn m a kleiner als m o ist; und ebenso, wenn die Höhe des umgeformten Dreieckes gegeben ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 24. Es ist das Trapez a b c d in ein gleich großes Dreieck zu verwandeln.

Fig. 24. a b verlängert, zur Diagonale a c aus d die Parallele d f gezogen, erhält man den Punkt f.

Beim Trapezoide ist es dasselbe.

Fig. 25. Es ist das Trapez a b c d in ein gleich großes Parallelogramm zu verwandeln.

Fig. 25. b o = o c; m n ‖ a d. Ähnlich konnte ich ein Rechteck bilden, wenn ich durch o und z Senkrechte gezogen hätte.

Fig. 24.

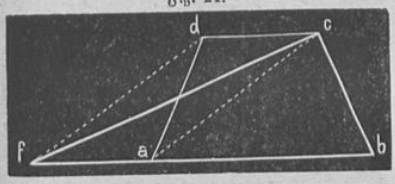


Fig. 25.

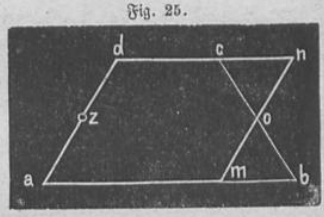


Fig. 26. Es ist ein Trapezoid m o n s in ein gleich großes Rechteck zu verwandeln.

Fig. 26. Die Höhen n u und d s in v und w halbiert.

Fig. 27. Es ist das unregelmäßige Fünfeck 1, 2, 3, 4, 5 in ein gleich großes Dreieck zu verwandeln.

Fig. 27. Die Basis 1, 5 beiderseits verlängert und aus 4 und 2 Parallele zu 3, 5 und 3, 1 gezogen, so erhält man die Punkte 7 und 6.

Fig. 26.

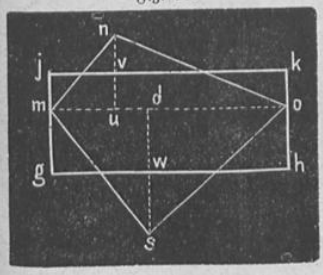


Fig. 27.

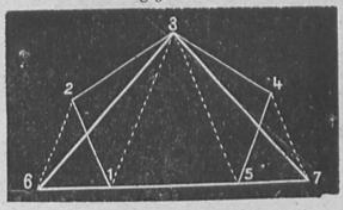


Fig. 28. Es ist ein regelmäßiges Sechseck in ein Dreieck und Fig. 29 in ein Rechteck von gleicher Größe zu verwandeln.

Fig. 28. a m = 6 . a b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 28.

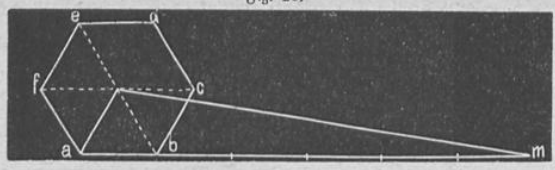


Fig. 29. o s = 3 . a b.

Fig. 30. Der Kreis in ein gleich großes Dreieck verwandeln.

Fig. 29.

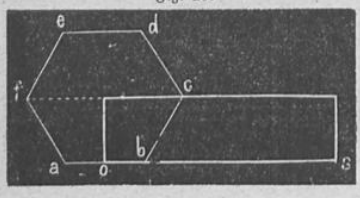


Fig. 30.

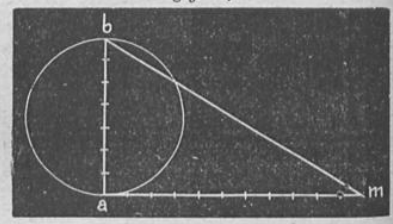


Fig. 30. a b in sieben gleiche Theile getheilt und von a bis m eilf Theile aufgetragen.

Kreisconstructionen.

Fig. 31.

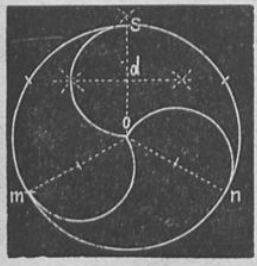


Fig. 31. Der Halbmesser von s aus auf der Peripherie aufgetragen. Von den Punkten s, m und n die Radien gezogen und aus ihren Mitten die Halbkreise beschrieben.

Fig. 32.

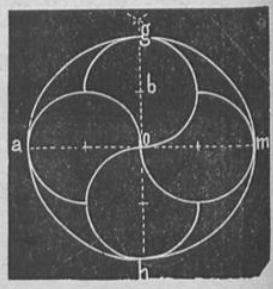


Fig. 32. Die senkrechten Durchmesser a m, g h gezogen und aus den Mitten der Radien die Kreisbögen gezeichnet.

Fig. 33. Vom Punkte b den Halbmesser auf dem Umfange auftragen, sodann die zugehörigen Durchmesser b s, m d u. s. w. gezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alsdann construiert man über dem Halbmesser b o das zugehörige Quadrat und wiederholt dieses bei allen folgenden Halbmessern. Zur Erleichterung sei bemerkt, dass die Sehne m s auf o n senkrecht steht.

Fig. 34. In einen Kreis sind drei sich berührende Kreise einzuschreiben.

Fig. 34. Die Peripherie in sechs gleiche Theile getheilt, 6, 3 verlängert, m 6 = 6 o gemacht, 5, 2 verlängert m 1 s gezeichnet, ∢ m s 5 halbiert, gibt den Mittelpunkt d.

Fig. 33.

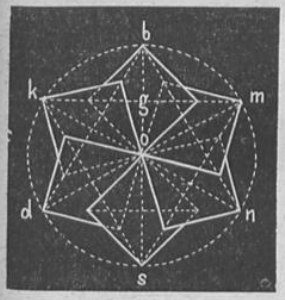


Fig. 34.

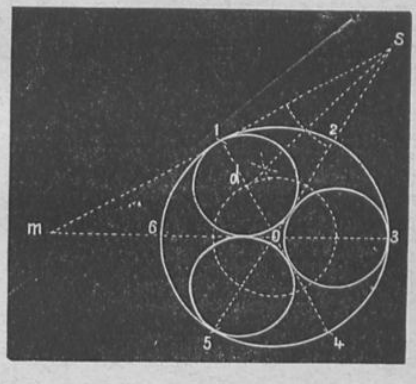


Fig. 35. Es sind in einen Kreis vier sich berührende Kreise einzuschreiben.

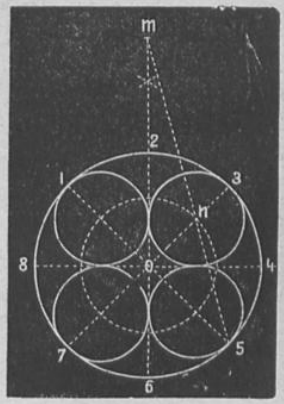
Fig. 35. Den Kreis in acht Theile getheilt, m 2 = o 2 gemacht, m 5 gezogen, gibt den Mittelpunkt n.

Fig. 36. Es sind einem Kreise fünf sich berührende Kreise einzuschreiben.

Fig. 36. 6 m ⊥ 6 o; o 5 verlängert, ∢ o m 6 halbiert, erhält man den Mittelpunkt v.

Fig. 37. Es sind zwei Kreise gegeben, es soll ein dritter von gegebenem Halbmesser r gezeichnet werden, der beide von außen berührt.

Fig. 35.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 37. Mit m b + r aus m und mit n d + r aus n die Bögen beschrieben, gibt den Mittelpunkt s.

Fig. 36.

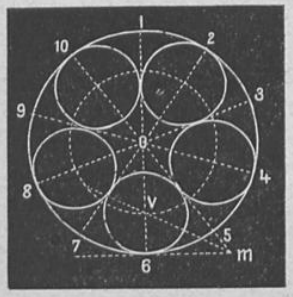


Fig. 37.

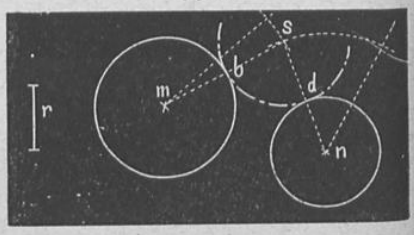


Fig. 38.

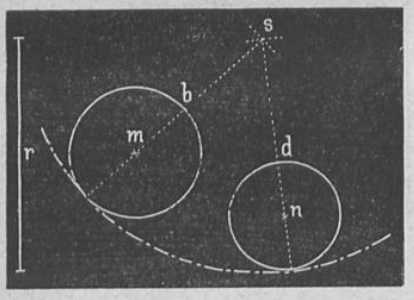


Fig. 38. Die Aufgabe, wie Fig. 37, nur soll der dritte Kreis die Kreise von innen berühren.

Fig. 38. Aus m mit r — m b den Bogen beschrieben, eben so aus n mit r — d n, gibt den Mittelpunkt s.

Fig. 39.

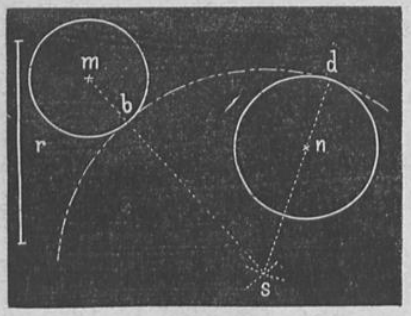


Fig. 39. Der dritte Kreis soll den einen Kreis von außen, den andern von innen berühren.

Fig. 39. Aus m mit r + m b den Bogen gemacht und aus n mit r — n d durchschnitten, gibt den Punkt s.

Fig. 40. Ein Kreis mit gegebenem Halbmesser soll einen gegebenen Kreis und eine Gerade berühren.

Fig. 40. Die Gerade v w mit dem Abstande r ‖ a b und aus m mit r + d m den Bogen beschrieben, gibt den Punkt s.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 41. Es sind zwei Kreise, in dem einen ein Punkt f gegeben; es soll ein Kreis gelegt werden, der den einen in dem gegebenen Punkt und zugleich von außen den zweiten tangiert.

Fig. 41. Zu m f wird n w || gezogen, m f verlängert, w mit f verbunden und n v verlängert, so ist s das Centrum.

Fig. 40.

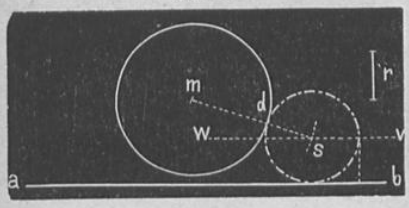


Fig. 41.

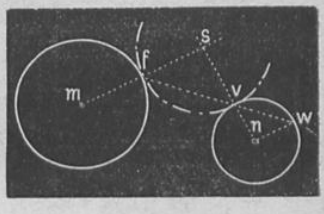


Fig. 42. Der dritte Kreis soll die gegebenen ungleichartig berühren.

Fig. 42.

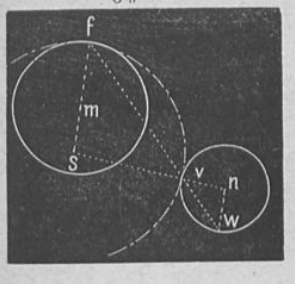


Fig. 43.

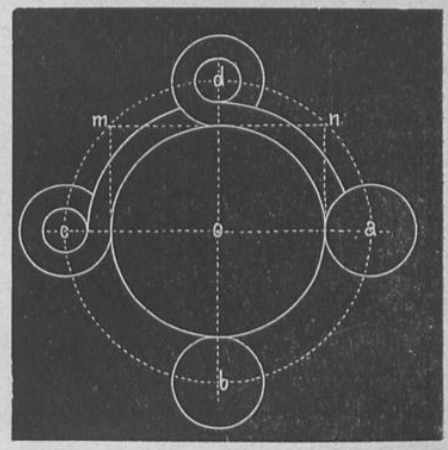


Fig. 42. Wie in Fig. 41, nur n w abwärts gezogen.

Fig. 43. Die Eckpunkte m und n sind die Mittelpunkte der äußeren Kreise.

Fig. 44. Der Quadrant wird in vier gleiche Theile getheilt. Ebenso die Sehne a b. Damit erhält man die Halbmesser.

Fig. 45. Der Quadrant wird in zwei gleiche Theile getheilt und die Sehne b m in vier Theile.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 44.

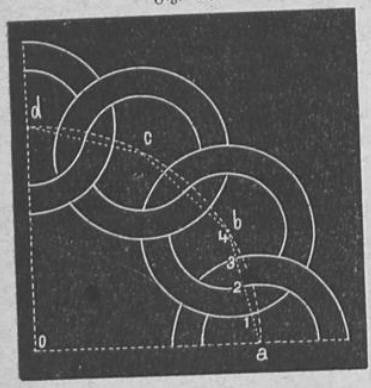


Fig. 45.

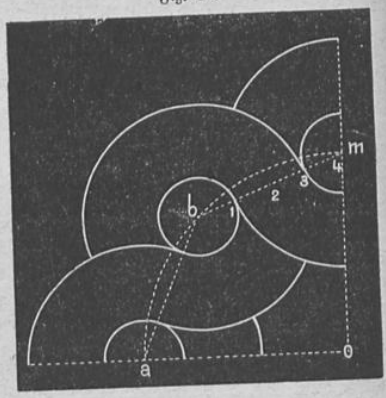


Fig. 46.

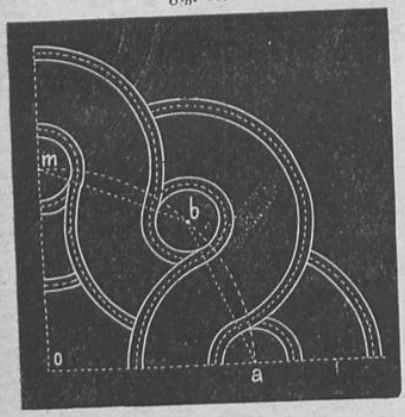


Fig. 46. Der äußere Saum wird schmäler als $^1/_{16}$ b m genommen.

Fig. 47. 1, 3, 5 Mittelpunkte.

Fig. 48. Die Bandbreite $= {}^1/_8$ 4, 3.

Fig. 47.

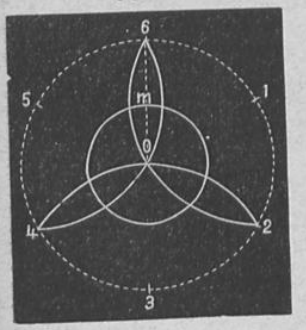
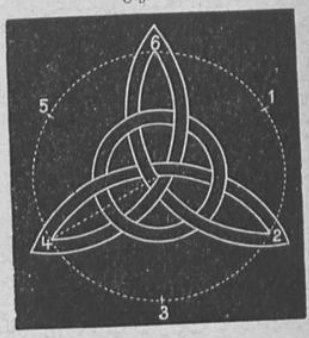


Fig. 48.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Situationszeichnen.

Fig. 49. Hutweide.

Fig. 50. Wiese.

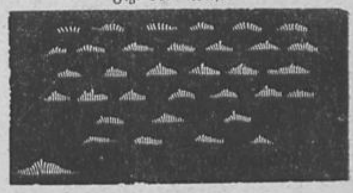


Fig. 51. Obstbäume.

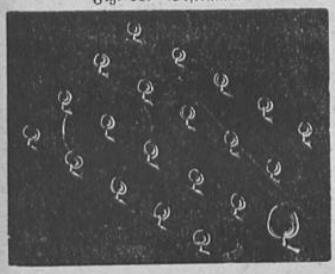


Fig. 52. Pappeln.

Fig. 53. Laubwald.

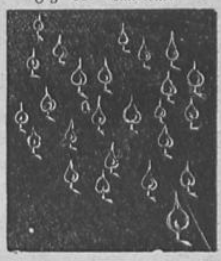


Fig. 54. Weingarten.

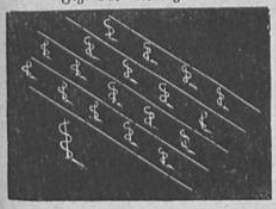


Fig. 55. Hopfengarten.

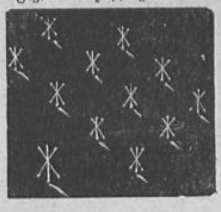


Fig. 56. Straße.

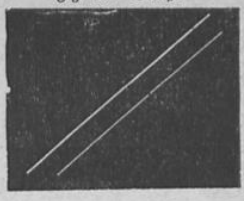


Fig. 57. Weg.

Fig. 58. Feld.

Fig. 59. Fluß.

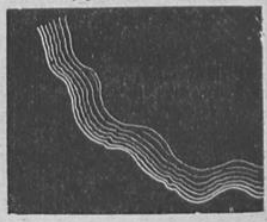
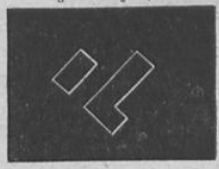


Fig. 60. Sumpf.

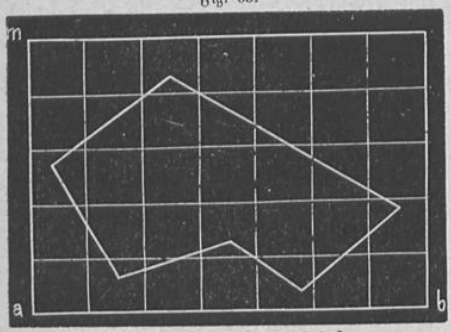
Fig. 61. Teich.

ig. 62. Häuser.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 63.



am = 2 dm; ab = 3·2 dm.

Fig. 66.

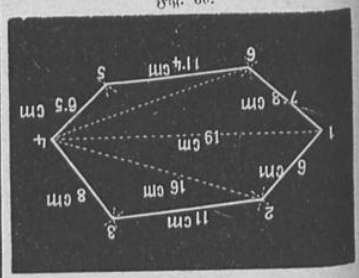
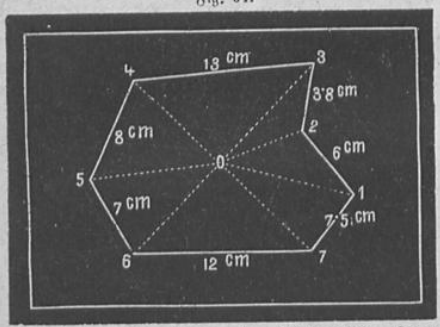


Fig. 64.



o1 = 10 cm; o2 = 6cm; o3 = 9·4cm; o4 = 9cm;
o5 = 9·7cm; o6 = 8·5cm; o7 = 92cm.

Fig. 67.

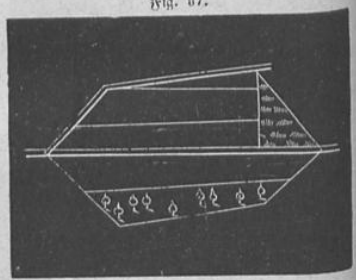
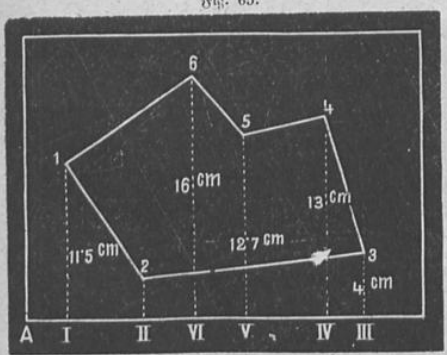
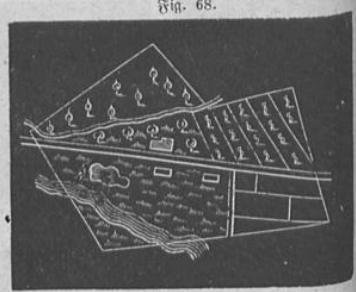


Fig. 65.



A I = 5 cm; A II = 10 cm; A VI = 15 cm;
A V = 18 cm; A IV = 23 cm; A III = 25 cm;
II 2 = 2 cm.

Fig. 68.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Figuren 63, 64, 65, 66 zeigen, auf welche Weise vorzugehen ist, damit die Schüler im verjüngten Maße die Tafelzeichnung genau abzeichnen können. Der Lehrer zeichnet das Polygon entweder in ein Netz, oder zerlegt es von einem Punkte innerhalb. Weiter kann er es mit Abscissen und Ordinaten abzeichnen lassen, oder er zerlegt es von einem Eckpunkte. Die Maße sind hier für ein Rechteck von bestimmter Größe angegeben. Empfehlenswert ist es, wenn der Lehrer seine Linien an der Tafel die Schüler im verjüngten Maße umrechnen läßt. Wäre z. B. die Linie an der Tafel, mit der begonnen wird, 1 *m* lang und soll diese auf dem Brette 2 *dm* lang sein, so sind alle Linien auf dem Brette der fünfte Theil von denen an der Tafel.

Was die weitere Ausführung mit Farben anbelangt, so ist Folgendes zu bemerken: Wiesen und Hutweiden werden grün angelegt und zwar Grünspan mit Gummigutti. Wiesen bekommen aber ein etwas lebhafteres Grün. Acker wird mit lichtem Tabaksaft angelegt; Weingarten mit einem Gemisch von Karmin und Gummigutti. Die Reben bekommen einen grünen Streifen; Wälder mit Tusch und blaugrüner Deckung. Wege mit Sepia, Bäume mit Grün; Flüsse und Teiche mit Pariser Blau. Der Sumpf bekommt blaue Flammen; das Gras wird grün angelegt. Holzhäuser werden Chromgelb, Steinhäuser Karminroth angelegt. Die Hopfenstangen werden grün überstrichen.

Feldmessübungen mit Ketten und Stäben.

1. Aufgabe: Eine Gerade auf dem Felde ist abzustecken. (Bekannt.) 2. Aufgabe: Eine Gerade zu verlängern. (Bekannt.) Bei diesen Aufgaben muss bemerkt werden, dass man sich beim Einvisieren mindestens drei Schritte hinter dem Stabe aufstellen muss, sonst begeht man bedeutende Fehler.

Fig. 69.

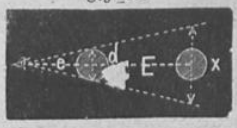


Fig. 69. x Fehlerraum. $x : d = E : e$

$$x = E \cdot \frac{d}{e}$$

e mindestens 3 Schritte.

3. Aufgabe: Eine Gerade ist über ein Hindernis zu verlängern.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 70. Mit Schnur oder Kette und Nagel die gleichen Bogenstücke m b und n b gemacht und aus n die Durchschnittspunkte v und w bestimmt.

4. Aufgabe: Eine Gerade abzustecken, wenn man von einem Endpunkte zum anderen nicht sehen kann.

Fig. 71. n_1 stellt sich in die Visierlinie $m_1 b$, sodann verläßt m_1 den Platz und stellt sich in die Visierlinie $n_1 a$; dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis man von m_3 über n_3 den Punkt b und von n_3 über m_3 den Punkt a sieht.

Fig. 70.

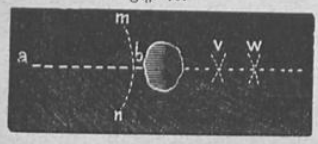
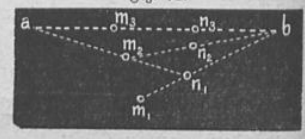


Fig. 71.



5. Aufgabe. Eine abgesteckte Gerade ist zu messen. Der Vordermann hat an einem Ringe oder an einer Schnur eiserne Nägel oder Holzpflöcke. Nachdem die Kette oder das Messband genau gelegt ist, schlägt er einen Nagel in den Boden und geht weiter. So geht es fort, wobei der Hintermann den zurückgelassenen Nagel immer mitnimmt. Seine Anzahl Nägel bezeichnet die Anzahl Kettenlängen. Ein Rest wird besonders gemessen.

6. Aufgabe. Einen Winkel zu halbiren.

Fig. 72. Entweder auf die bekannte Art oder man halbiert das schlaffe Kettenstück in m v n in v.

7. Aufgabe: Es ist ein Winkel zu übertragen.

Fig. 72.

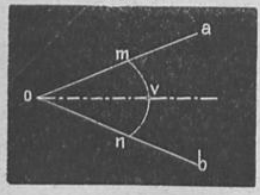


Fig. 73.

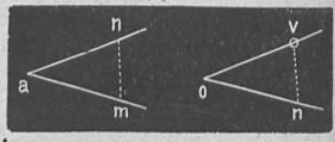


Fig. 73. am = an gemacht; ebenso am = on. Die Kette von a über n bis m gespannt, die Enden an o und n angelegt und den Punkt n nach v übertragen. Die gewöhnliche Construction kann auch verwendet werden.

8. Aufgabe: Auf eine Gerade ist eine Senkrechte zu errichten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 74. a o = o b gemacht. Die Kette a m b im Punkte m halbiert. Auch kann die gewöhnliche Construction verwendet werden.

9. Aufgabe: Es ist auf eine Gerade von einem Punkte außerhalb eine Senkrechte zu errichten.

Fig. 75. Von o die Bogen in m und n eingeschnitten und die Kette in v halbiert.

10. Aufgabe: Zu einer Geraden ist eine Parallele zu zeichnen.

Fig. 74.

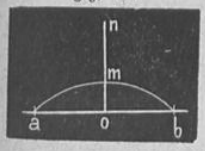


Fig. 75.

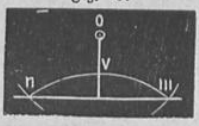


Fig. 76.

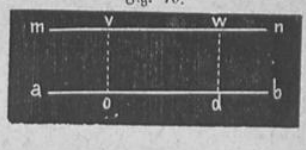


Fig. 76. Die Senkrechten o v und d w nach Aufgabe 8 errichtet und gleich lang gemacht.

11. Aufgabe: Die Parallele ist durch ein Hindernis geschieden.

Fig. 77.

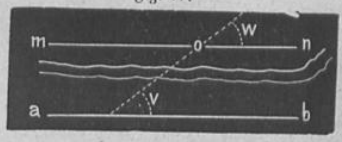


Fig. 77. Winkel v nach o übertragen.

12. Aufgabe: Es ist eine Gerade zu messen, wenn zwischen ihren Enden ein Hindernis das directe Messen unmöglich macht.

Fig. 78. 1. Art.

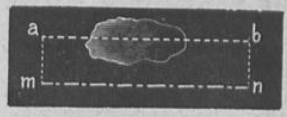


Fig. 78. m n = a b.

Fig. 79. 2. Art.

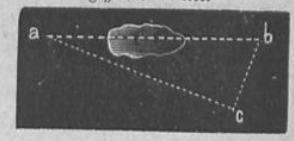


Fig. 79. $ab = \sqrt{ac^2 + bc^2}$.

Fig. 80. $ab = \sqrt{ac^2 - bc^2}$.

Fig. 80. 3. Art.

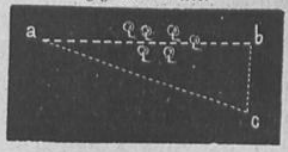


Fig. 81. $\triangle$ m o n $\cong$ $\triangle$ a o b m n = a b.

Fig. 82. $mo = {}^1/_n\, ao$; $mn = {}^1/_n\, ab$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 81. 4. Art.

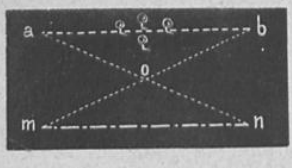
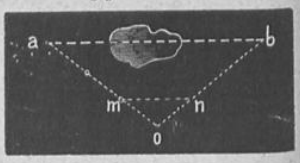


Fig. 82. 5. Art.



13. Aufgabe. Es ist die Entfernung der Punkte zu messen, von denen einer unzugänglich ist.

Fig. 83. $cn = \frac{1}{n} cb$; $mn = \frac{1}{n} ab$.

Fig. 84. $mn = ab$.

Fig. 83. 1. Art.

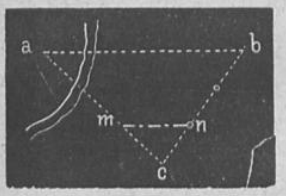


Fig. 84. 2. Art.

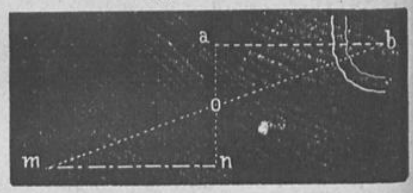


Fig. 85. $no = \frac{1}{n} an$; $mn = \frac{1}{n} ab$.

Fig. 86. $mb : bc = bc : ab$; $ab = \frac{bc^2}{mb}$.

Fig. 85. 3. Art.

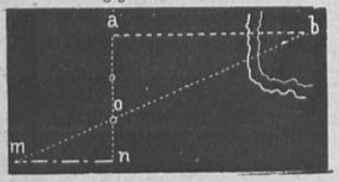


Fig. 86. 4. Art.

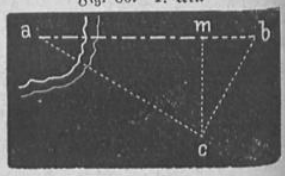


Fig. 87. 5. Art.

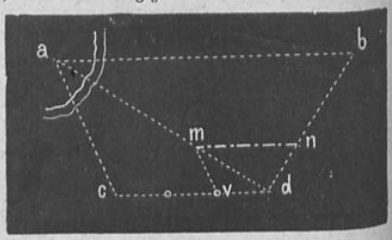


Fig. 87. $cd \parallel ab$; $dv = \frac{1}{n} cd$; $vm \parallel ca$; $mn \parallel cd$; $mn = \frac{1}{n} ab$.

14. Aufgabe. Es soll die Entfernung zweier Punkte gemessen werden, die unzugänglich sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 88. $vo = \frac{1}{n}\, wo$; $mn = \frac{1}{n}\, ab$.

Fig. 89. vd möglichst $\parallel$ ab; on $\parallel$ bd, mn $\parallel$ vd. $mn = \frac{1}{n}\, a\, b$, sobald $vo = \frac{1}{n}\, vd$ ist.

Fig. 88. 1. Art.

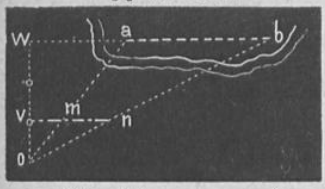


Fig. 89. 2. Art.

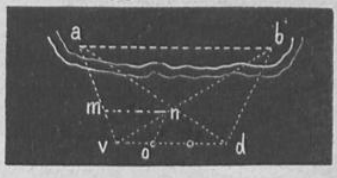


Fig. 90. mn gemessen, die Figur verjüngt gezeichnet und aus dem Verhältnisse mn : ab am Papiere die Linie ab in der Natur berechnet.

15. Aufgabe: Es ist eine Fläche in der Natur zu messen.

Das geschieht am zweckmäßigsten mit den Schülern mit der bekannten Abscissen- und Ordinatenmethode. Fig. 91.

Fig. 90. 3. Art.

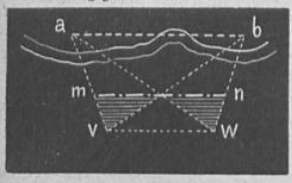


Fig. 91.

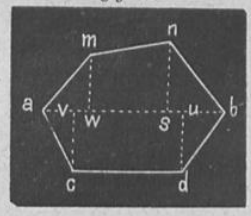
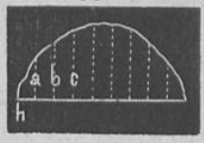


Fig. 92.



Sind die Abstände h gleich, so hätte man bei drei Ordinaten

Fig. 92. $F = a \cdot \frac{h}{2} + (a + b)\frac{h}{2} + (b + c)\frac{h}{2} + c\frac{h}{2}$

$$F = \frac{h}{2} \cdot 2\,(a + b + c) = h \cdot (a + b + c).$$

Projectionslehre.

Die Projection des Punktes.

Fig. 93. MX horizontale Projectionsebene.

o horizontale Projection von a. ao projicierender Strahl.

(ao $\perp$ Mx. o Fußpunkt.)

Fig. 94. XN verticale Projectionsebene.

Fig. 94. am $\perp$ XN. m Fußpunkt. m verticale Projection von a. am projicierender Strahl.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 93.

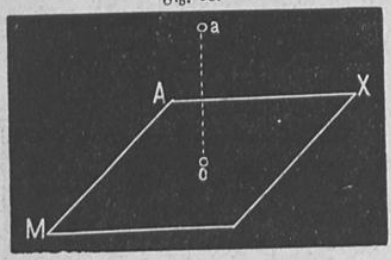


Fig. 94.

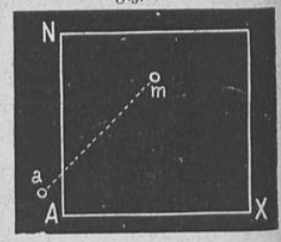


Fig. 95. v verticale, n horizontale Projection von a. In Fig. 96 ist die horizontale Projectionsebene in die verticale herabgedreht. In Fig. 97 sind die Begrenzungen ausgelassen. vz Abstand von der horizontalen hz von der verticalen Projectionsebene.

Fig. 95.

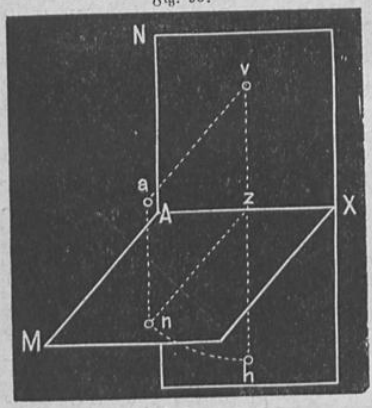


Fig. 98. Der Punkt a liegt in der verticalen Projectionsebene.

Fig. 99. Der Punkt a liegt in der horizontalen Projectionsebene.

Fig. 100. Der Punkt a liegt in der Achse.

Fig. 98.

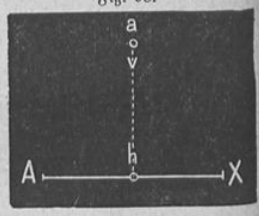


Fig. 96.

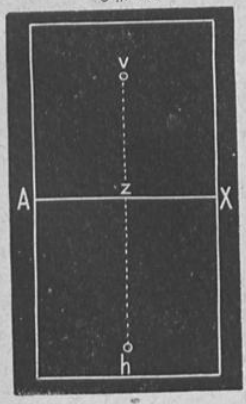


Fig. 97.

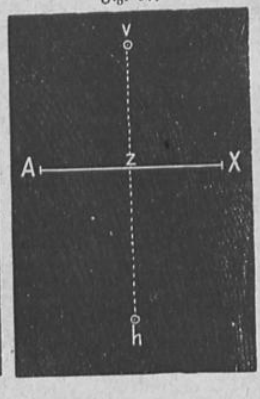


Fig. 99.

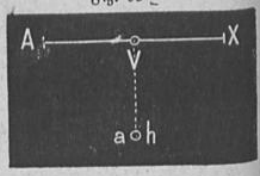
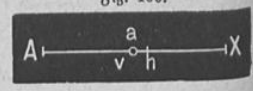


Fig. 100.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist angezeigt eine oder zwei Aufgaben arbeiten zu lassen, wo die Projectionen eines Punktes zu bestimmen sind, wenn die Entfernungen desselben vom Achsenpunkte A in horizontaler Richtung und von der verticalen und horizontalen Projectionsebene gegeben sind. Auch ist zu versinnlichen, dass die projicierende Ebene a z auf den Projectionsebenen senkrecht steht und dass die Durchschnitte v z und h z auf der Achse senkrecht stehen. Die Figuren 98, 99, 100 können auch blos besprochen werden, nur muss voraus erläutert werden, dass beim Entfernen oder Nähern des Punktes von oder gegen die verticale oder horizontale Projectionsebene, die Abstände h z und v z sich entweder vergrößern, oder verkleinern. Die Projectionen h z und v z nennt man auch Grund- und Aufriss. (Diese Arbeit dürfte ein oder zwei Blätter ausfüllen.) Selbstverständlich kann auch der Kreuzriss besprochen werden.

Die Projection der Linie.

Fig. 101. h d horizontale Projection von a b.
a h ⊥ M X; b d ⊥ M X.

Fig. 102. v d verticale Projection von a b.
a v ⊥ N X; b d ⊥ N X.

Fig. 101.

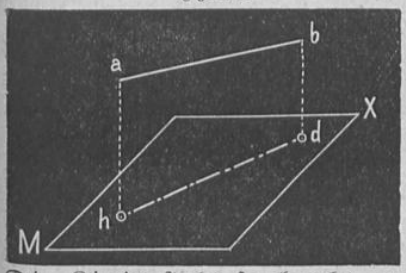
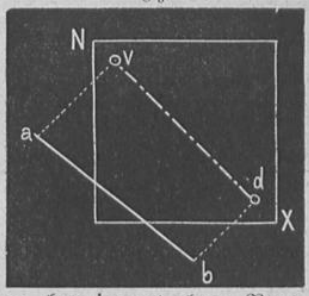


Fig. 102.



Die Linie steht senkrecht auf der horizontalen Projectionsebene.

Fig. 103. Punkt b ist die horizontale Projection von a b. v d ist ihre verticale Projection und steht auf der Achse senkrecht. a b = v d.

Die Linie steht senkrecht auf der verticalen Projectionsebene.

Fig. 105. Punkt a ist selbst verticale Projection von a b. Die horizontale Projection h d steht senkrecht auf der Achse und ist so groß wie a b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 103.

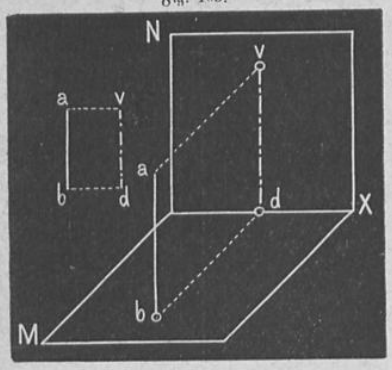


Fig. 104.

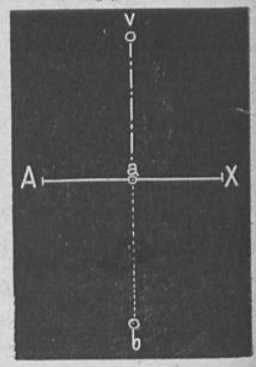


Fig. 105.

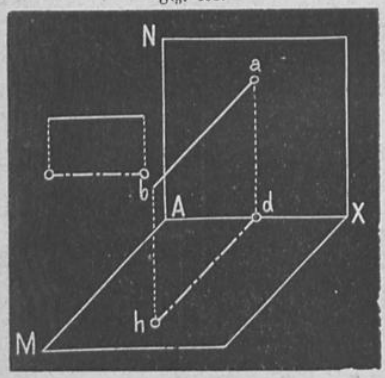
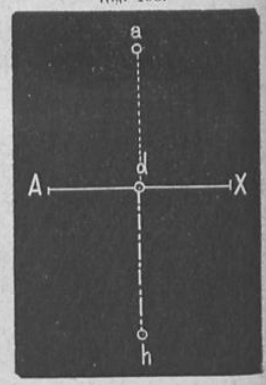


Fig. 106.



Die Linie ist parallel zur verticalen Projectionsebene, aber schief gegen die horizontale.

Fig. 107. Die horizontale Projection ah ist || zur Achse und kürzer als ab. Die verticale Projection dv ist gegen die Achse geneigt und mit ab gleich groß.

Die Linie ist parallel zur horizontalen Projectionsebene und schief gegen die verticale.

Fig. 109. Die verticale Projection bv || zur Achse; bv kürzer als ab. Die horizontale Projection dh gegen die Achse geneigt. dh = ab.

Die Linie ist gegen beide Projectionsebenen geneigt.

Fig. 111. Die verticale Projection vm und die horizontale ha sind gegen die Achse geneigt und kleiner als ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 107.

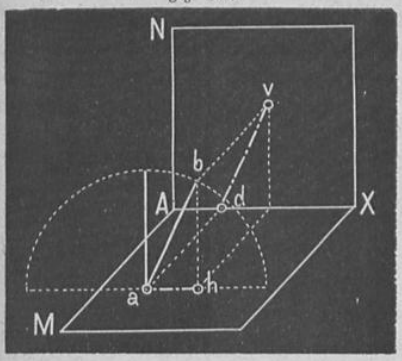


Fig. 108.

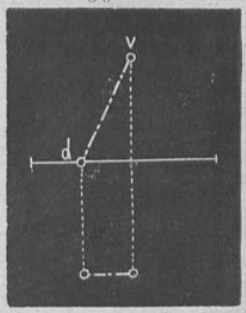


Fig. 109.

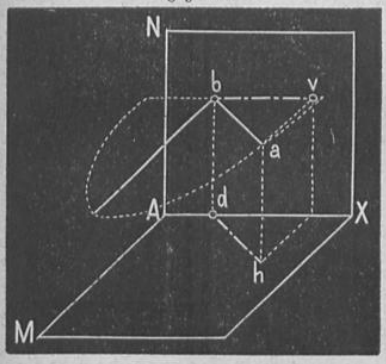


Fig. 110.

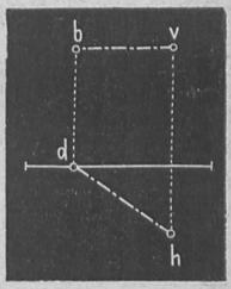


Fig. 111.

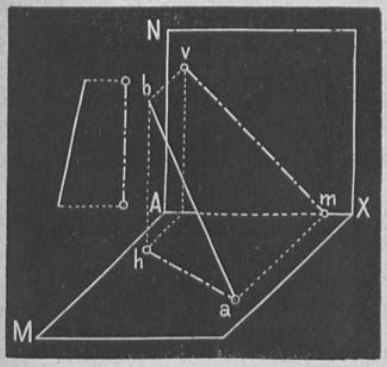
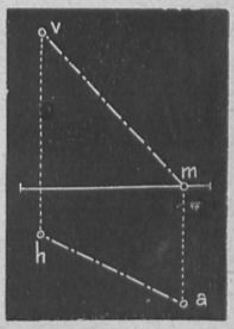


Fig. 112.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Praktisch ist es, sich zur Versinnlichung der gezeichneten Figuren zwei unter einem rechten Winkel geneigte Projectionstafeln anfertigen zu lassen. Anschaulich ist es im hohen Grade, wenn die Projectionstafeln aus weißem Pappendeckel sind, das Object im Raume aus farbigem Draht ist, die Projectionen farbige Linien sind und die projicierenden Strahlen durch Drahtfäden dargestellt sind. Es können auch hier ähnliche Aufgaben gegeben werden, wie beim Punkte.

Grund- und Aufriss von Flächen.

Fig. 113. Das gleichseitige Dreieck abc || zur verticalen Projectionsebene. Die horizontale Projection mon || zur Achse. Die verticale Projection dcf gleich groß mit abc.

Fig. 113.

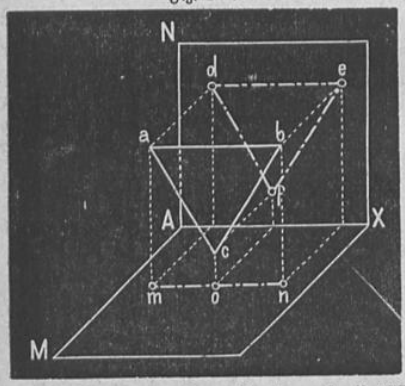


Fig. 114.

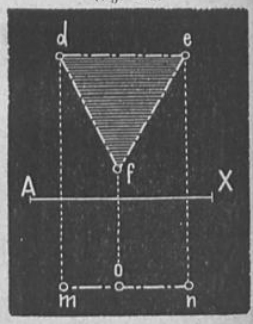


Fig. 115. Der Kreis azb || NX. Das übrige wie in der frühern Fig. 113.

Fig. 115.

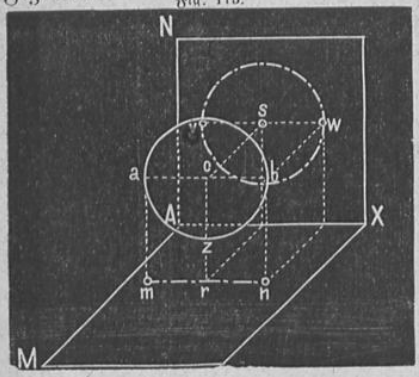
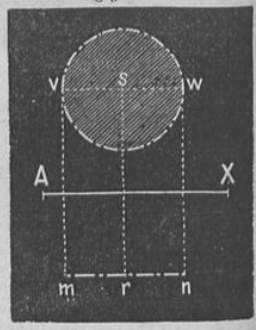


Fig. 116.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 117. Das Parallelogramm a b c d steht schief gegen die Projectionsebenen. Grund- und Aufriss erscheinen verkleinert.

Es wird gut sein, keine vielseitigen Polygone zu projicieren, da durch viele Linien die Deutlichkeit der Zeichnung verloren geht. Bei Fig. 113 möge aufmerksam gemacht werden, dass das projicierende gerade Prisma a b c d e f parallele Grundflächen hat und dass der Grundriss einer lothrechten Ebene eine Gerade ist. Warum ist m n || A X?

In Fig. 115 hat man es mit einem projicierenden Cylinder zu thun. In Fig. 117 sind zwei projicierende Prismen da. Die Projectionen sind die Grundflächen, die gegebene Figur a b c d ein schiefer Schnitt.

Nachträglich seien noch zwei Beispiele angeführt, in welchen der Grund- und Aufriss zweier Flächen dargestellt ist, welche parallel zur horizontalen Projectionsebene sind.

Fig. 117.

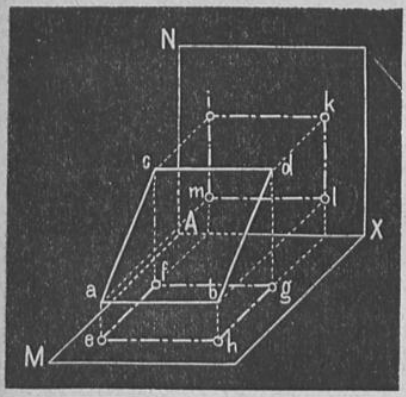


Fig. 118.

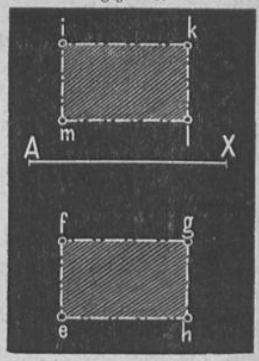


Fig. 119. Die verticale Projection v w ist horizontal und gleich den zu ihr parallelen Seiten b c, a d. Die Seiten a b und c d erscheinen als Punkte.

Die horizontale Projection ist gleich Figur a b c d.

Fig. 121. Im allgemeinen gilt hier das bei der vorigen Figur Gesagte, nur muss hingewiesen werden, dass die Seiten der Figur a b c d in der verticalen Projection verkürzt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 119.

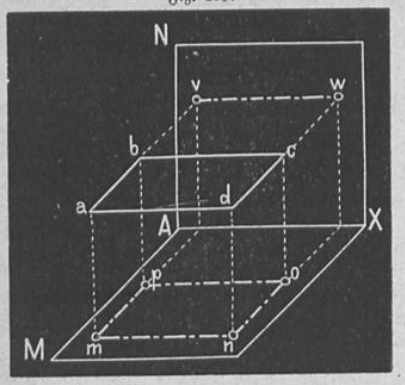


Fig. 120

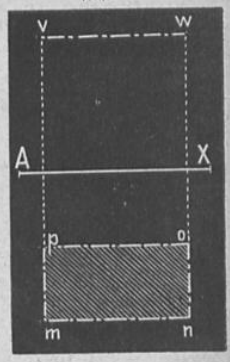


Fig. 121.

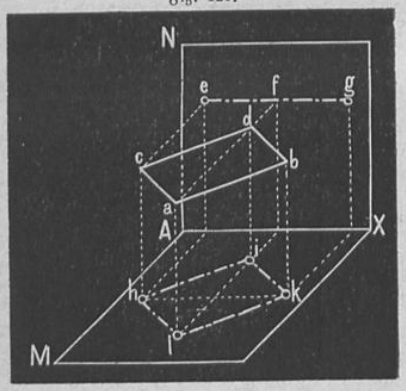
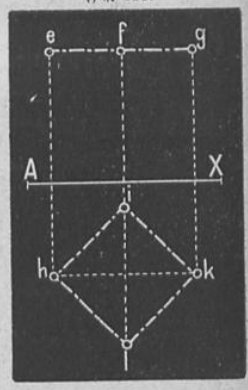


Fig. 122.



Die geometrischen Körper im Grund- und Aufrisse.

Fig. 123. Der Aufriss der drei Lothrechten ab, cd, ef sind die Geraden gh, ik, lm. Die Grundrisse die Punkte b, d, f. Es ist aufmerksam zu machen, dass ef = lm, cd = ik, ab = gh ist. Durch Verbindung der Endpunkte der Lothrechten entsteht das dreiseitige gerade Prisma Fig. 124. Die Basis bdf ist seine horizontale Projection oder Grundriss. Die Basis hat ihren Aufriss hm in der Achse, die Endfläche hat ihn in der Horizontalen gl. Es sind im Aufrisse alle lothrechten Kanten sichtbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig 123.

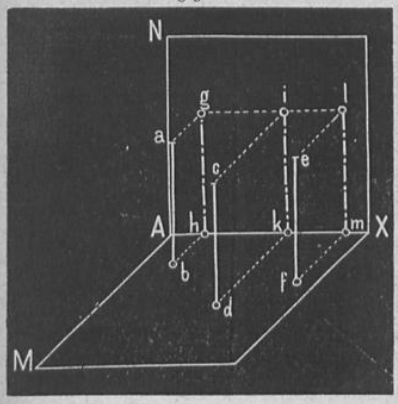


Fig. 124. Das Prisma.

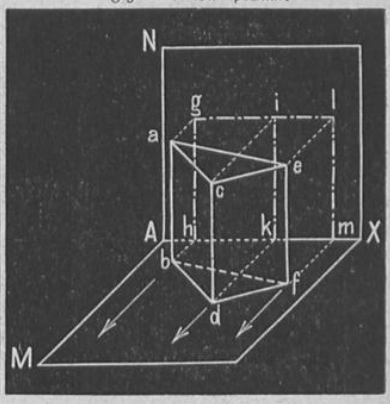


Fig. 125.

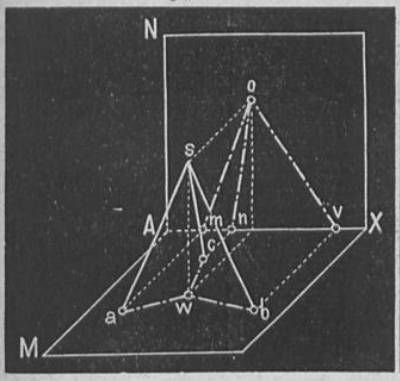


Fig. 126. Die Pyramide.

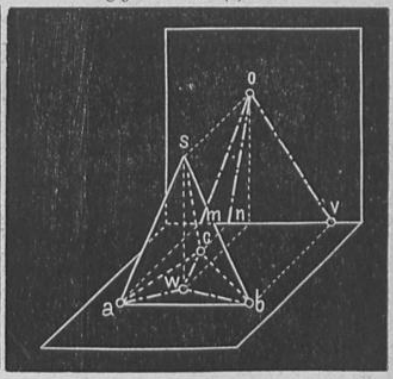


Fig. 127. Der Cylinder.

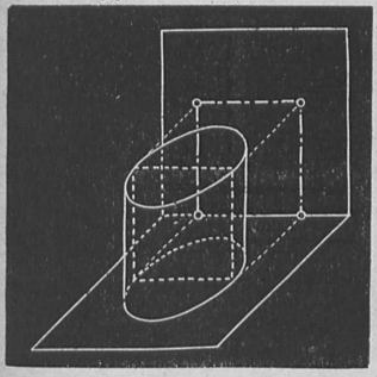
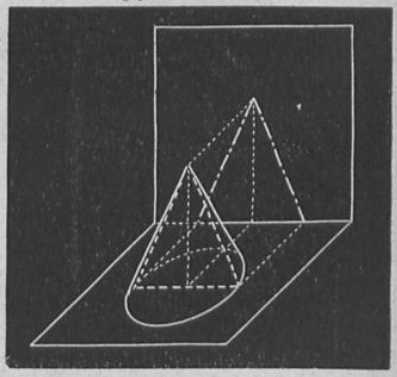


Fig. 128. Der Kegel.

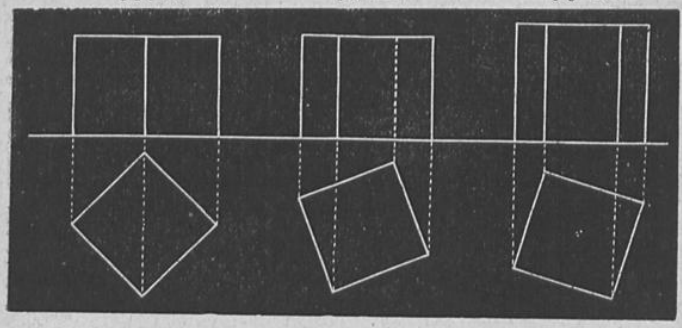


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Würfel.
Fig. 129.

Fig. 130.

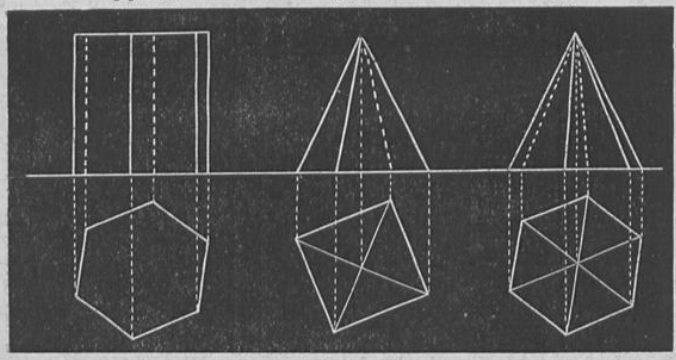
Das vierseitige Prisma.
Fig. 131.



Das sechsseitige Prisma.
Fig. 132.

Die vierseitige Pyramide.
Fig. 133.

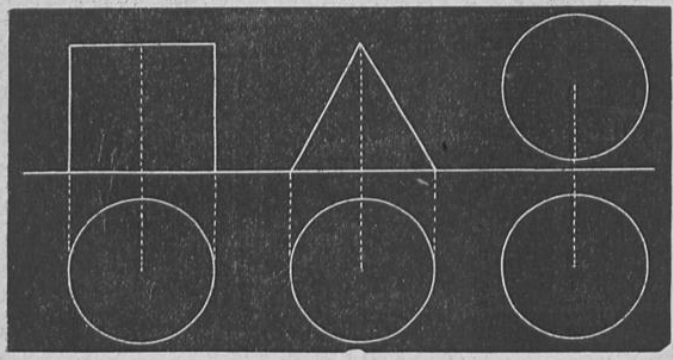
Die sechsseitige Pyramide.
Fig. 134.



Der Cylinder.
Fig. 135.

Der Kegel.
Fig. 136.

Die Kugel.
Fig. 137.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist der Schatten der Geraden a b auf der horizontalen Projectionsebene zu bestimmen.

Fig. 138. m c verticale, a d horizontale Projection des Lichtstrahles. Verlängert man die verticale Projection des Lichtstrahles

Fig. 138.

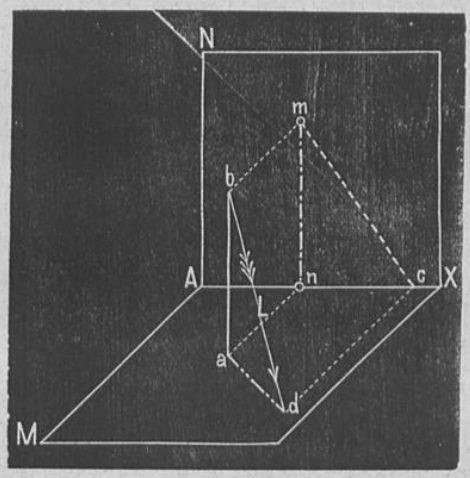
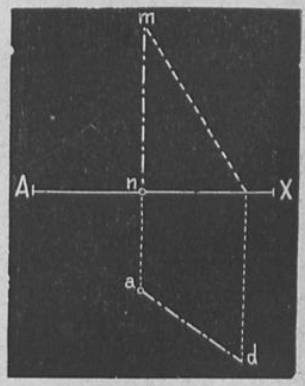


Fig. 139.



bis zur Achse, errichtet darauf eine Senkrechte, so ist ihr Schnittpunkt mit der horizontalen Projection d der Schatten von b, a d Schatten von a b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 140. Schatten vom vierseitigen Prisma.

Fig. 141. Schatten vom Cylinder.

Fig. 140.

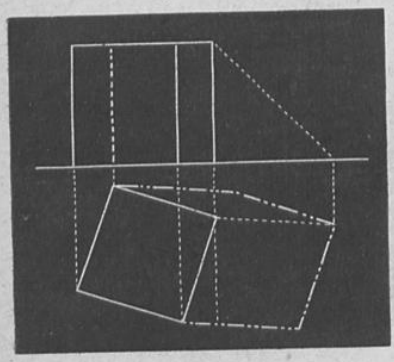


Fig. 141.

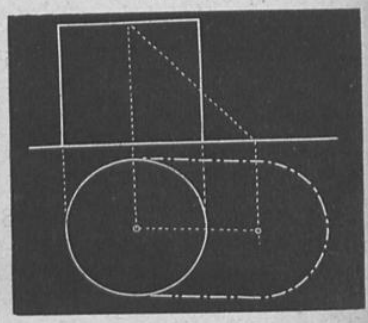


Fig. 142. Schatten von der vierseitigen Pyramide.

Fig. 143. Schatten vom Kegel.

Fig. 142.

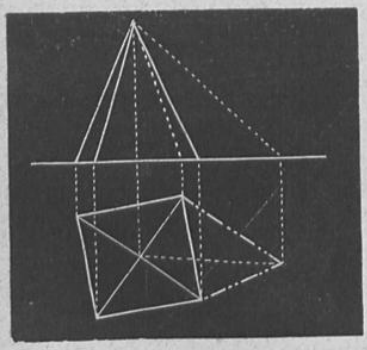
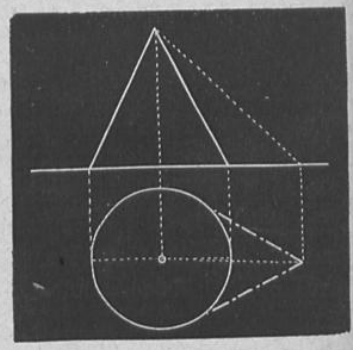


Fig. 143.

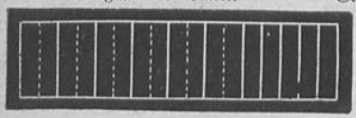


Alle Schatten fallen auf die horizontale Projectionsebene.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mauerwerk.

Fig. 144. Binder. Grundriss. Fig. 146. Laufer.



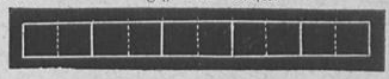
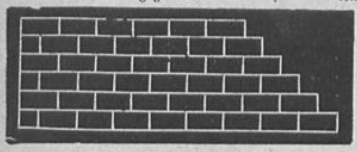


Fig. 145 Aufriss. Fig. 147.



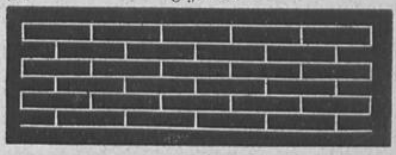
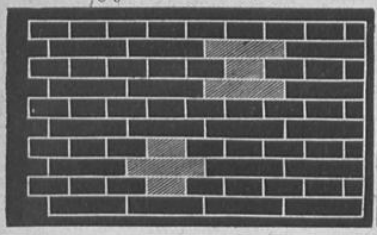


Fig. 148. Blockverband. Fig. 149. Kreuzverband.



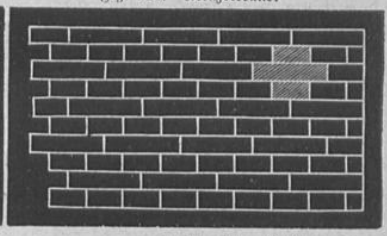
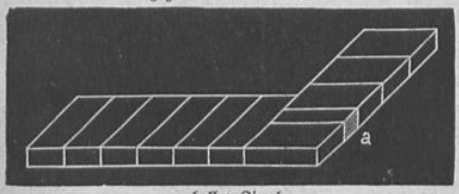


Fig. 150. Eckverband. Fig. 151. Pfeiler.



a halber Ziegel.

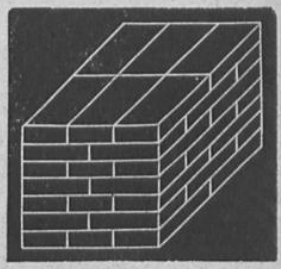
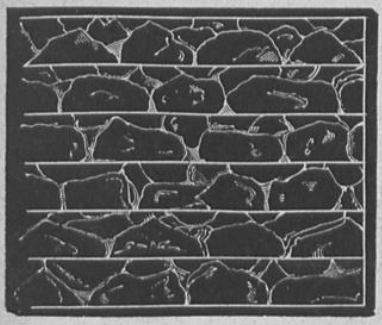
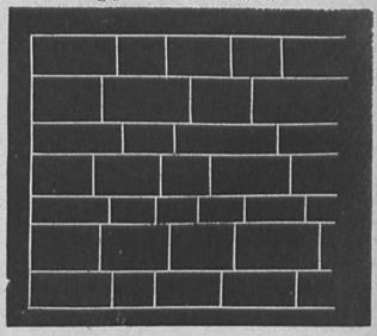


Fig. 152. Bruchsteinmauer. Fig. 153. Quadermauer.





Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Holzverbindungen.

Fig. 154.

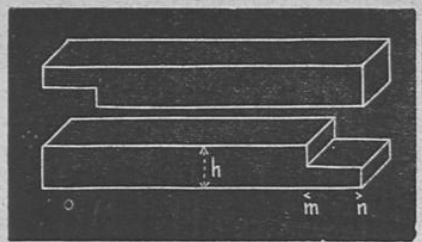


Fig. 155.

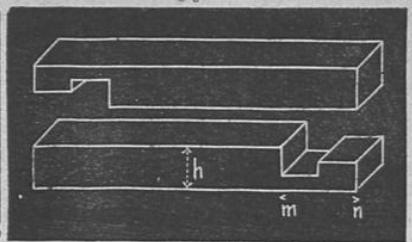
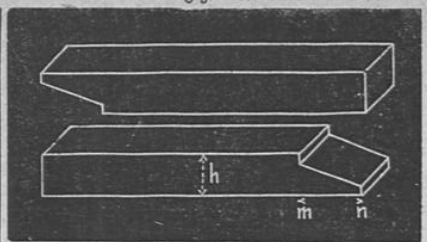


Fig. 156.



m n = 1 bis $1^1/_2$ h.

Fig. 154. Einfach gerade Überplattung, auch Überblattung genannt.

Fig. 155 Gerade verzahnte Überplattung.

Fig. 156. Einfach-schiefe Überplattung.

Fig. 157. Bündige Überplattung.

Fig. 158. Aufkämmung.

Fig. 159. Verzapfung.

Fig. 157.

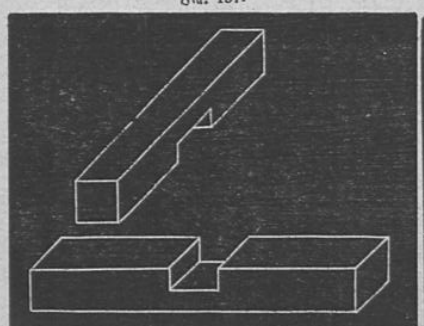


Fig. 158.

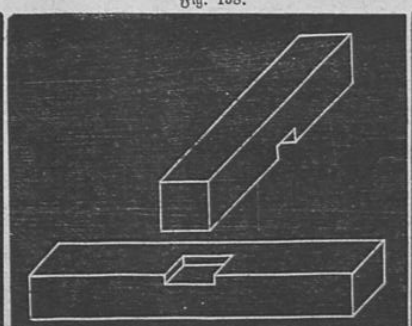
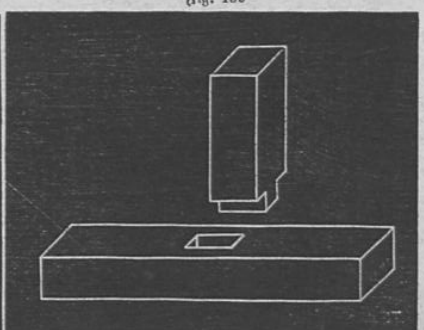


Fig. 159.



Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Fußböden.

Fig. 160.

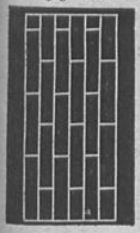


Fig. 161.

Fig. 162.

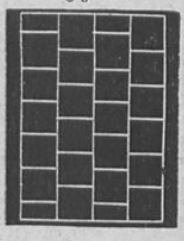


Fig. 163.

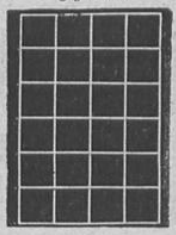


Fig. 164.

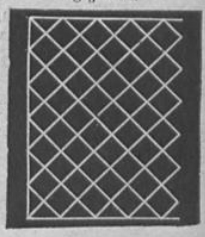


Fig. 165.

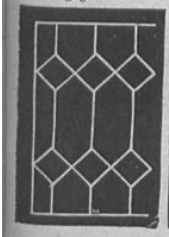


Fig. 166.

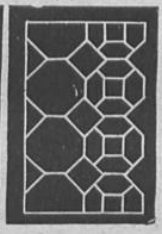


Fig. 167.

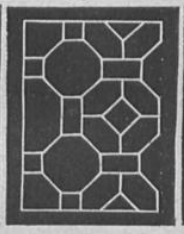
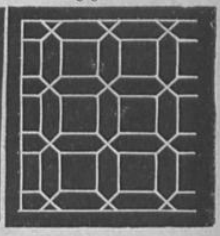


Fig. 168.

Fig. 169.



Thüren.

Fig. 170.

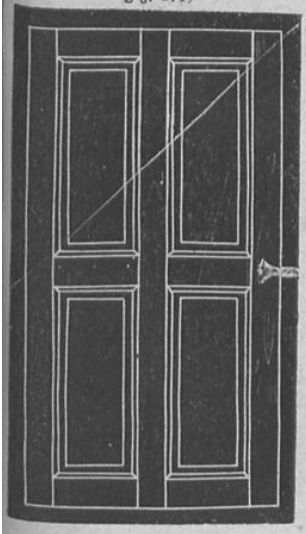
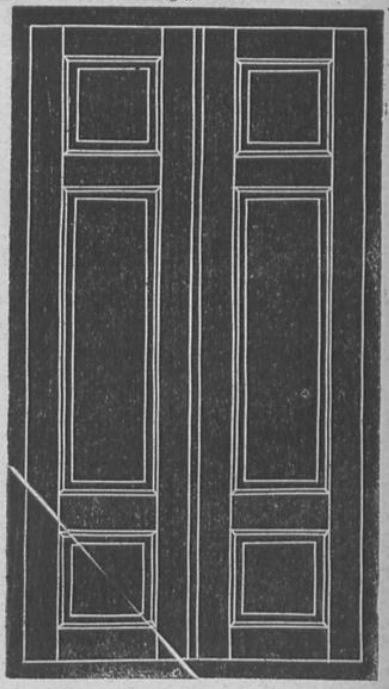


Fig. 171.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dachformen.

1. Giebeldach.

Fig. 172.

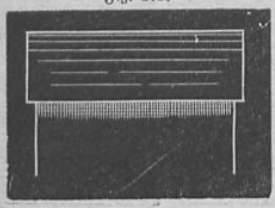
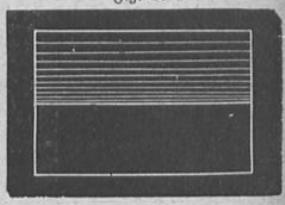


Fig. 173.

Fig. 174.



2. Walmdach.

Fig. 175.

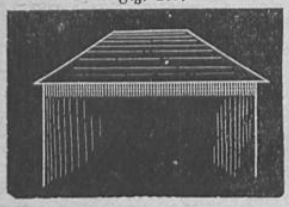
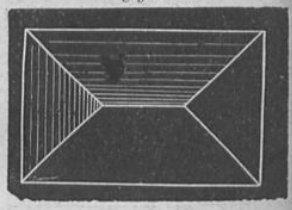


Fig. 176.

Fig. 177.

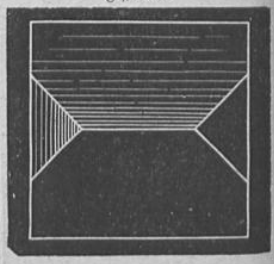


3. Halbes Walmdach.

Fig. 178.

Fig. 179.

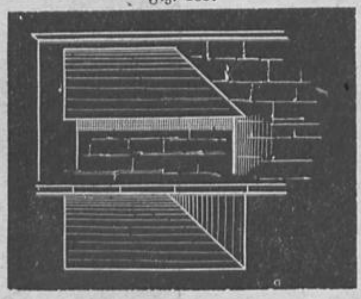
Fig. 180.



4. Pultdach.

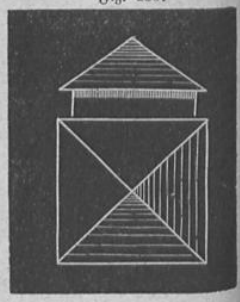
Fig. 181.

Fig. 182.



5. Zeltdach.

Fig. 183.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fenster.

Fig. 184.

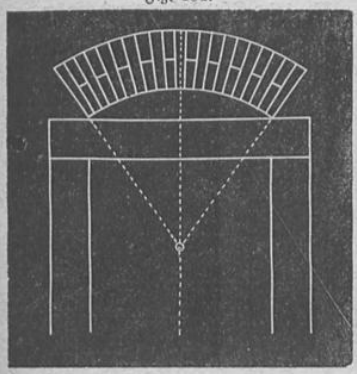


Fig. 185.

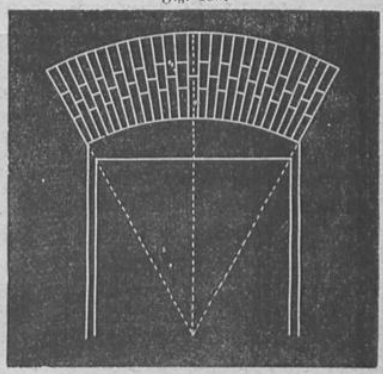


Fig. 186.

Fig. 187.

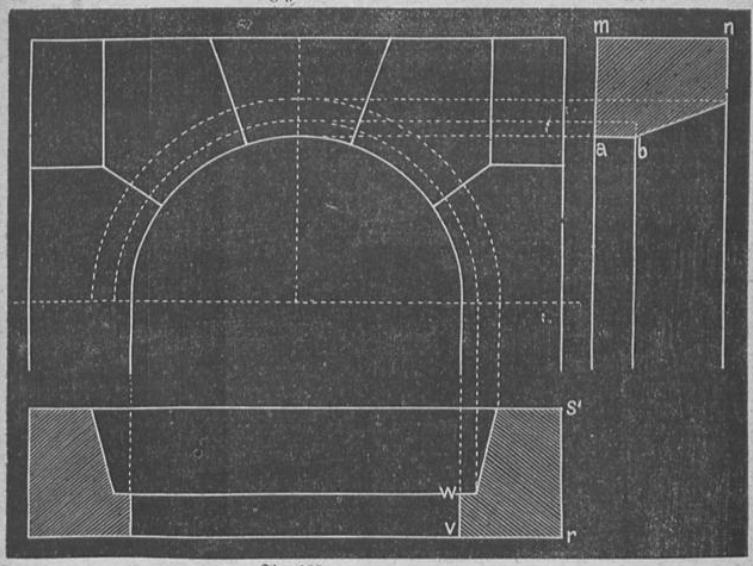


Fig. 188.

Fig. 184 und Fig. 185. Fensterſturz mit Entlaſtungsbogen von außen und von innen.

In Fig. 186, Fig. 187 und Fig. 188 iſt die Überdeckung der Fenſterniſche im Aufriſſe, horizontalen und verticalen Durchſchnitte dargeſtellt. m n = r s; w v = a b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schraube.

Fig. 189. Die Schraubenlinie.

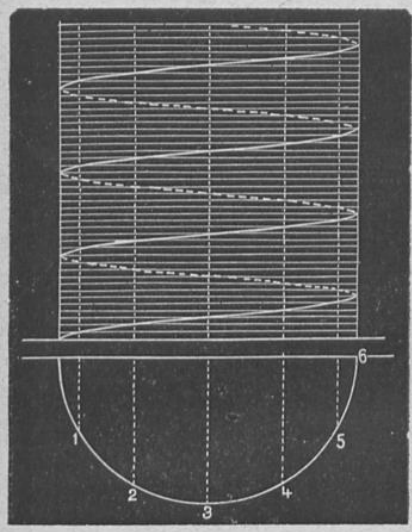


Fig. 190. Die flache Schraube.

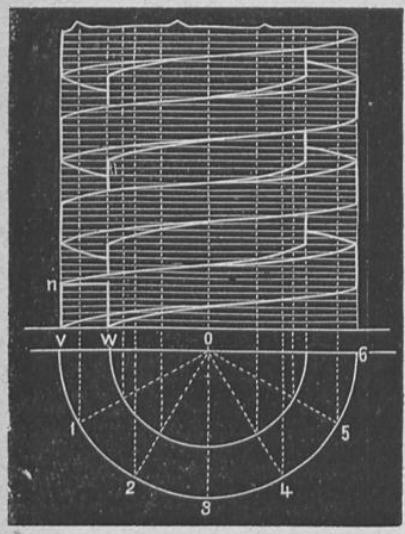


Fig. 191. Schraubenspindel und Mutter.

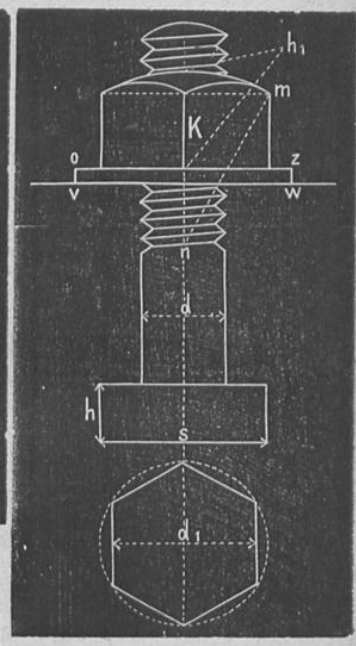


Fig. 190. $vw = \frac{1}{3} vo$; $vw = on$.

Fig. 191. $s = 1{\cdot}5\ d$ $h = 0{\cdot}7\ d$; d_1 Durchmesser der Schraubenmutter oder des Schraubenkopfes $= s$; $h_1 = d$; $mn = d_1$; $vw = \frac{4}{3} d_1$; $wz = \frac{1}{10} d_1$ vwoz Unterlagsscheibe.

Es wird für die Schüler leichter sein, die scharfe Schraube bloß durch Striche anzudeuten.

Gothische Fenster.

Fig. 192.

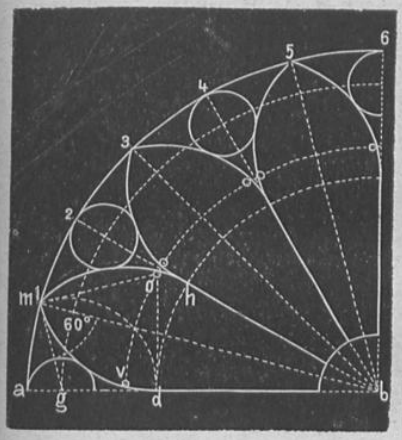


Fig. 193.

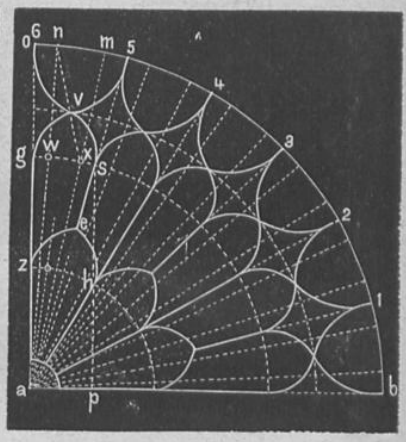


Fig. 192. Construction: Den Kreis in 24 gleiche Theile getheilt, die Rhadien gezogen. ∢ b m g = 60° gibt den Mittelpunkt g. Mit dem Halbmesser g b den Hilfskreis gezeichnet, erhält man die weiteren Mittelpunkte. g d = m g gemacht, in d auf a b eine Senkrechte errichtet; ebenso in m auf m g, so erhält man den Mittelpunkt o für den Bogen d m. Durch Übertragung bekommt man die Mittelpunkte für m h u. s. w.

Fig. 193. Construction: Den Kreis in 24 Theile getheilt, jeden Theil in vier Theile getheilt und aus n und m die Bogen 6 v und 5 v gezeichnet. Von diesen Mittelpunkten die zugehörigen Halbmesser gezeichnet. Die Gerade n v schneidet m a in x. x ist der Mittelpunkt des Bogens g v. Durch Übertragung die weiteren Mittelpunkte bestimmt und die Bögen gezeichnet. s p || zu o a gemacht, gibt auf a 4 den Punkt h. Das Bogenstück h z in vier Theile getheilt, gibt die Mittelpunkte für z e und e h. Dieses Verfahren fortgesetzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein monumentales Kreuz.

Fig. 194.

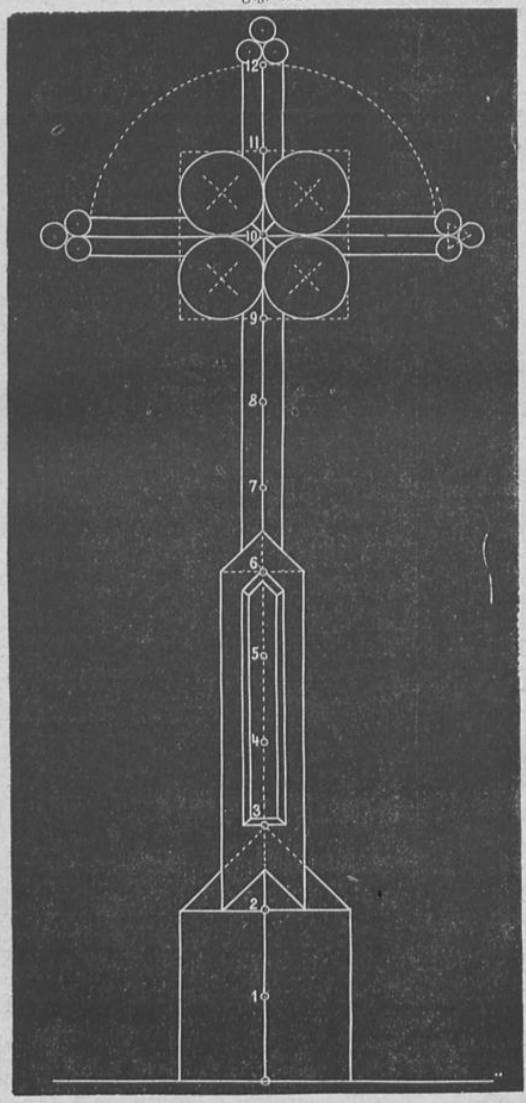


Fig. 194. Zur Construction: Die Höhe der Zeichnung in zwölf Theile getheilt. Den Fuß mit zwei Theilen angenommen. Alles weitere leicht ersichtlich. Die kleinen Kreise an den Enden ruhen im gleichseitigen Dreiecke.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Romanisches Fenster.

Fig. 195.

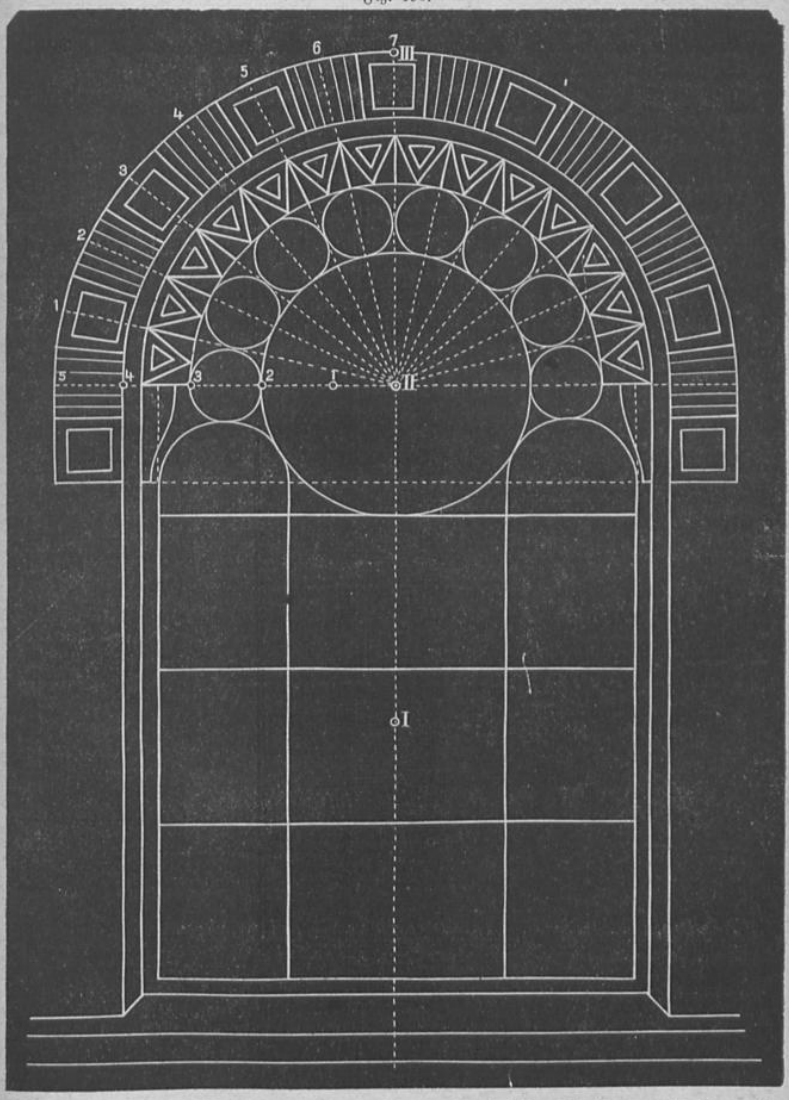


Fig. 195. Die ganze Höhe in drei gleiche Theile getheilt und mit II, III den Halbkreis gezeichnet und dessen Halbmesser II 5 in fünf gleiche Theile getheilt. Den inneren Bogen aus 2 beschreibe man erst, wenn die berührenden Kreise gezeichnet sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Literatur.

Battig G., Formenlehre und Zeichnen für ein- und zweiclassige Volksschulen. Breslau. E. Morgenstern, 1872.

Bär J., Colorierte Vorlagen für den Unterricht im Linearzeichnen. Nördlingen. C. H. Beck'sche Buchhandlung, 1876.

Behse W. H., Die darstellende Geometrie mit Rücksicht auf techn. Anwendung für Real-, Gewerbe-, Handwerker- und Baugewerkeschulen. Halle. G. Knapp, 1869.
Zu empfehlen.

Broichmann J., Sistematisch geordnete Vorlegeblätter. Köln a. R. J. Tanger, 1875.

Brude A., Das Zeichnen der Stereometrie als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen. Stuttgart. J. Maier.
(Wegen seiner Klarheit und wissenschaftlichen Darstellung empfehlenswert.)

Delabar G., Anleitung zum Linearzeichnen mit besonderer Berücksichtigung des gewöhnlichen und technischen Zeichnens. Freiburg in Br. Herder, 1867.

Delabar G., Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung als Lehrmittel für Lehrer und Schüler an Oberreal- und Gewerbeschulen. Freiburg i. Br. Herders Verlagshandlung, 1875.

Diefenbach L., Geometrische Ornamentik für Gewerbe und Industrieschulen. In Farben ausgeführt. K. Fleming in Glogau, 1875.
(Sehr empfehlenswert. Vollendete geom. Ornamentik.)

Dietzel C. F., Dr., Leitfaden für den Unterricht im techn. Zeichnen an Real-, Handwerker- und Baugewerkeschulen. Leipzig. E. A. Seemann, 1864. Vier Hefte.

Edelmann B., Leitfaden für den Linearzeichnungsunterricht. Drei Theile. München. R. Oldenburg, 1871.

Fialkowsky N., Die zeichnende Geometrie. Wien, Wallishauser, 1860.
(Ein besonders gründliches Werk mit genauer Ausführung.)

Fischer O., Mustersammlung für das Linearzeichnen. Stuttgart. J. F. Steinkopf, 1858.

Fischer O., Mustersammlung für das Linearzeichnen. Stuttgart. J. H. Steinkopf, 1870.

Flück J., Geometrischer Darstellungsunterricht. Meersburg. Selbstverlag, 1871.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fürstenberg S., Stoff und Lehrgang für den ersten Unterricht im Linearzeichnen. Trier, Fr. Lintz.

Graberg F., Vorlagen zum geom. Zeichnen. Zürich, Orell, Füßli und Co. 1870.

Gutbier. Übungsblätter für Planzeichnen. Merseburg. Stollberg. 1881.

Heißig F., Anleitung zum Zirkel- und Linearzeichnen. Wien, K. Gerold und Sohn, 1855.

Enthält eine reichhaltige Sammlung von Übungsstoff.

Hesky K., Einfache Objecte des Bau- und Maschinenfaches. Wien. C. Gräser, 1882.

Himpel Th., Leitfaden für den Unterricht im geom. Zeichnen. Berlin, Decker, 1855.

Hutter Alex., Der Zeichenunterricht für Volksschulen. S. Gallen und Bern. Huber und Co. 2. Abtheilung Linearzeichnen.

Knapek F., Formensammlung für das geom. Zeichnen an allgemeinen Volksschulen. Znaym. Selbstverlag, 1872.

Leybold Ludwig, 20 Vorlagen für den Unterricht im Linearzeichnen an technischen Schulen. Stuttgart. W. Nitzschke 1860.

Lindner, Dr., Anschauungslehre als Vorschule des Zeichnens und der geom. Formenlehre. Graz. Leikam-Josefsthal, 1871.

Lindner, Dr., Übungshefte zum früheren Werke. Ebendaselbst.

Müller G., Zeichnende Geometrie. Eßlingen. Selbstverlag. 1879.

Müller G., Linearzeichnen. Iserlohn. Bädecker Jul., 1858.

Eine umfassende Sammlung Constructionen zu techn. Zwecken.

Müller G., Übungsstoff für das geom. Zeichnen. Eßlingen. Selbstverlag, 1870.

(Dieses Werkchen empfiehlt sich durch seinen Reichthum an geschmackvollem und sauberem Übungsstoff.)

Paulus Christ., Zeichnende Geometrie zum Schulunterrichte und Privatstudium. Stuttgart, J. B. Metzler, 1866.

Rau C. G., Erster Unterricht im Zeichnen. Stuttgart, Chr. Belser 1851.

Schreiber G., Das Linearzeichnen. Drei Theile. Im dritten Theile das geom. Zeichnen. Leipzig. Spamer, 1871.

Schreiber G., Das technische Zeichnen. Für Architekten, Techniker, Mechaniker u. s. w. Leipzig. O. Spamer, 1865.

Enthält einen vorzüglichen Stoff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schulz Karl, der geometrische Zeichner. Dresden bei J. Naumann 1846.

Schwartze Th., Vorlagen zum geom. Musterzeichnen für Gewerbe- und Bürgerschulen, sowie für Gewerbetreibende. Leipzig A. H. Payne, 1878.

Stuhlmann, Dr., Zirkelzeichnen zum Gebrauche an Gewerbeschulen. Hamburg, Nestler und Melle, 1869.

Vogel, Dr., Die Elemente des geom. Zeichnens. Stuttgart. K. Grüninger.

Voltz Karl, Vorlagen für den ersten Linearzeichenunterricht. Nördlingen. C. H. Beck, 1867.

Weishaupt H., Elementar-Unterricht im Linearzeichnen. 2. Abtheilung. München. A. Fleischmann, 1860.

Weishaupt H., Elementar-Unterricht im Linearzeichnen. Zwei Abtheilungen. 1. Abth. München, Fleischmann 1856.
Empfehlenswert.

Wenk J., Die construierende Geometrie als Grundlage für das geom. Zeichnen. Leipzig, J. Klinkhardt, 1861.

Zähringer H., der Unterricht im geometrischen Zeichnen mit besonderer Berücksichtigung der aargauischen Bezirksschulen. Pädagogische Monatsschriften für die Schweiz 1856.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhalt.

	Seite
I. Theil: Die Geometrie in der Volks- und Bürgerschule	1
I. Allgemeine Betrachtungen	1
II. Zweck und Ziel des geometr. Unterrichtes in der Volksschule	4
III. Der geometrische Stoff in der V. Classe	5
IV. Der Lehrstoff der VI. Classe mit Berücksichtigung des Stoffes für das geometrische Zeichnen	6
V. Der Lehrstoff der VII. Classe	17
VI. Der Lehrstoff für die VIII. Classe	21
VII. Die nothwendigsten Hilfsmittel beim Unterrichte in der Geometrie	26
VIII. Abriss der Entwicklungsgeschichte der geometrischen Wissenschaft	29
IX. Die einschlägige Literatur	37
II. Theil: Das geometrische Zeichnen	41
Lehrziel	41
Zur Geschichte des geometrischen Zeichnens	45
Der Lehrstoff	46
Literatur	88

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn in Wien.

Handbuch
der
speciellen Methodik.

Auf Grundlage der Lehrpläne für Volks- und Bürgerschulen.

Herausgegeben von

Robert Niedergesäß,

k. k. Schulrath und Director der k. k. Lehrerbildungs-Anstalt in Wien.

I. Band, 38 Bogen, geh. fl. 3.50 = 7 M. — II. Band 38 Bogen, geh. fl. 3.50 = 7 M. — III. Band, 40 Bogen, geh. fl. 3 50 = 7 M. — Gebunden 50 kr. = 1 M. mehr pro Band.

Die einzelnen Abtheilungen enthalten:

1. **Specielle Methodik der Elementarclasse:** Schulrath Robert Niedergesäß. 6½ Bogen 70 kr. = M. 1.40.
2. **Deutsche Unterrichtssprache:** Übungsschullehrer Hans Sommert. 14 Bogen fl. 1.40 = M. 2.80.
3. **Geographie:** Prof. Gustav Rusch, k. k. Hauptlehrer. 2. Aufl. 9 Bogen 90 kr. = M. 1.80.
4. **Geschichte:** Prof. Gustav Rusch, k. k. Hauptlehrer, 2. Auflage. 6 Bogen 60 kr. = M. 1.20.
5. **Naturgeschichte:** Dr. Karl Rothe, k. k. Realschulprofessor. 8 Bogen 80 kr. = M. 1.60.
6. **Naturlehre:** Prof. Dr. Eug. Netoliczka. 7 Bog. 70 kr. = M. 1.40.
7. **Rechnen:** Prof. Jos. Hofer, k. k. Hauptl., 17 Bog. fl. 1.70 = M. 3.40.
8. **Geometrie und geometrisches Zeichnen:** Bürgerschullehrer Ed. Bauer und Alex. Tschiedel. 5¾ Bogen 60 kr. = M. 1.20.
9. **Freihandzeichnen:** Schulrath Prof. J. Grandauer. 2. Aufl. 7 Bogen 70 kr. = M. 1.40.
10. **Schreiben:** Oberlehrer Josef Ambros. 5 Bogen 50 kr. = 1 M.
11. **Gesang:** Übungsschullehrer Jos. Hiebsch. 3½ Bog. 40 kr. = 80 Pf.
12. **Turnen:** Prof. R. Kümmel, k. k. Hauptlehrer. 8 Bogen 80 kr. = M. 1.60.
13. **Weibliche Handarbeiten:** Industrie-Lehrerin Louise Prockesch. 2. Aufl. 9 Bog. mit Illustrationen auf 30 Tafeln. 2. Aufl. fl. 1.50 = 3 M.
14. **Schulgarten:** Oberlehrer Mich. Fischer. 8 Bogen 80 kr. = M. 1.60.

Gebunden 20 kr. = 40 Pf. mehr per Band.

Während der 1. Theil die specielle Methodik für den Unterricht in der Elementarclasse enthält, behandeln die weiteren Abtheilungen die Methodik der übrigen Lehrfächer vom 2. bis zum 8. Schuljahre mit thunlichster Berücksichtigung der einzelnen Kategorien der Volksschulen nach der Zahl der Schulclassen und verbreiten sich: 1. über den Lehrplan, resp. den in den Normal-Lehrplänen vorgeschriebenen Lehrstoff und dessen Gliederung, 2. über die Methode, 3. über den Lehrgang, 4. über die Lehrform; 5. über die Lehrmittel, 6. über Geschichte und Literatur des Gegenstandes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn,
Buchhandlung für pädagogische Literatur und Lehrmittel-Anstalt.
Wien, V. Margaretenplatz 2.

Methodische Werke.

Elementar-Unterricht.

Praktischer Wegweiser für den Unterricht in der Elementarclasse. Mit Zugrundelegung der analytisch-synthetischen Methode von **Ant. Frühwirth, Al. Fellner** und **Georg Ernst.** 3. Auflage. Mit 12 Tafeln. 16 Bog. geh. M. 3.40 = fl. 1.70.

Vertheilung des Lehrstoffes der Elementarclasse auf Wochen und Halbstunden. Herausgegeben von **Joh. List** und **H. Mühlfeith.** 7 Bog. geh. M. 1.60 = 80 kr.

Handbuch für den Anschauungs-Unterricht und für die erste Unterweisung in der Heimatskunde. Von **Robert Niedergesäß,** k. k. Schulrath. 23 Bog. In Leinenband M. 4.60. = fl. 2.30.

Deutscher Sprachunterricht.

Der Schönschreibunterricht im Dienste des deutschen Sprachunterrichtes. Eine beim Schönschreibunterrichte in der Volks- und Bürgerschule verwendbare Sammlung von Rechtschreibstoffen, Stab- und Stimmreimen, verschwisterten Wortpaaren, Sproßformen, sinnverwandten Wörtern, bildlichen und sprichwörtlichen Redensarten und Sprichwörtern. Von **Alfons Metzner,** Schuldir. in Teschen. 6 Bog., geh. M. 1.20 = 60 kr.

Ausgeführte Stielarbeiten auf Grundlage deutscher Musterstücke. Eine Ergänzung der Anleitung zur Behandlung der Lesebücher und eine Handreichung für Lehramtszöglinge, Lehrer und Lehrerinnen bei der stilistischen Verwertung des poetischen Lesestoffes. von **Karl Schubert.** I. Band. Unter- und Mittelstufe. 10 Bog. geh. M. 1.60 = 80 kr. — II. Band: Oberstufe, 2. Aufl. 27 Bog 4 M. = 2 fl.

Detail-Lehrplan für die deutsche Unterrichtssprache an dreiclassigen Bürgerschulen und auf der Oberstufe höher gegliederter Volksschulen. Zugleich ein Behelf bei Verwertung des Lesebuches für schriftliche Übungen. Von **Alfons Metzner.** 7 Bogen geh. M. 1.60 = 80 kr.

Stoffe zu deutschen Aufsätzen für die Oberclassen der Volks- und Bürgerschulen, von **Karl Schubert.** 3. Aufl. 14 Bog. geh. 2 M. = 1 fl.

Deutsche Beispiel-Grammatik. Geordnete Sammlung von Musterbeispielen aus dem deutschen Sprichwörterschatze und den Werken deutscher Dichter und Prosaiker. Ein Hilfsmitel bei Ertheilung des Unterrichtes in der Satzlehre für die Oberclassen der Volks- und Bürgerschulen. Von **Karl Schubert.** 20 Bog. geh. 4 M. = 2 fl.

Naturlehre.

Der Unterricht in der Naturlehre an allgemeinen Volksschulen. Dargestellt an einer Reihe methodisch behandelter physikalischer und chemischer Individuen. Von Prof. **A. Löffler.** 15 Bog. geh. 3 M. = fl. 1.50.

Die Physik in der Volks- und Bürgerschule. Anleitung zur Behandlung des ersten Unterrichtes in der Physik und Chemie für Lehrer und Lehramts-Candidaten, bearbeitet von Professor Dr. **Eugen Netoliczka.**

I. Band: Methodik des physikalischen Unterrichts an Volks- und Bürgerschulen. 10 Bogen geh. 2 M. = 1 fl.

II. Band: Experimentierkunde. Anleitung zu physikalischen und chemischen Versuchen in der Volks- und Bürgerschule. Mit 140 Abbildungen. 10 Bog. geh. 2 M. = 1 fl.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf