Handbuch der speciellen Methodik.
Herausgegeben von Rob. Niedergesäß.
VII. Theil.

Methodik
des
Rechenunterrichts.

Von

Jos. Hofer,
kais. Rath, p. Professor der Mathematik und Physik an der k. k. Lehrerbildungsanstalt, em. Director an der öffentlichen Lehrerinnenbildungsanstalt zu St. Ursula in Wien ꝛc. ꝛc.

Zweite Auflage.

Wien, 1890.
Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn,
Buchhandlung für pädagogische Literatur und Lehrmittel-Anstalt.
V. Margaretenplatz 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen im Zahlenkreise von 1 bis 100.

§. 1.

Mündlich

Beim Rechnen im Zahlenkreise von 20—100 ist es nicht mehr nöthig, so wie im früheren Zahlraume (v. 1—20) beim Fortschreiten von Zahl zu Zahl bei jeder Zahl durch Zerlegung derselben die Resultate der verschiedenen Rechnungsoperationen aufzufinden und einzeln zu üben, denn es wäre zu umständlich und die hiebei stattfindende Anstrengung mit dem hierdurch erzielten Nutzen nicht im richtigen Verhältnisse, abgesehen von dem Umstande, dass mit der Größe der Zahl auch die Zahl der durch Zerlegung erhaltenen Bestandtheile wächst, und daher auch die gewonnenen Resultate sich nicht mehr dem Gedächtnisse einprägen lassen. Nach Wiederholung des Lehrstoffes vom ersten Schuljahre leiten wir die Schüler auf den Begriff des Zehners, indem wir sie am russischen Rechenapparate die 10 Kugeln am ersten Stabe, dann 10 Punkte oder Striche an der Tafel, 10 Stäbchen ꝛc. abzählen lassen und dann sagen: 10 Kugeln, Punkte, Stäbchen, Bäume, Gulden ꝛc.

10 Einer sind ein Zehner.

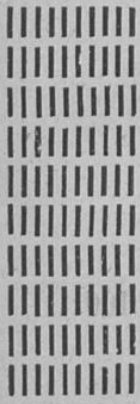
Nun lassen wir in der eben angeführten Weise den zweiten Zehner entstehen und fragen: Wieviel Zehner sind jetzt vorhanden?

2 Zehner sind 20 Einer.

So fährt man fort bis 10 Zehner oder 100 Einer oder ein Hundert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schüler zählen nun ein Zehner oder zehn, zwei Zehner oder zwanzig, drei Zehner oder dreißig u. s. w.



Dieses Zählen wird vor- und rückwärts geübt. Hierauf werden die Zehner in Einer aufgelöst, indem der Lehrer fragt: Wieviel Einer sind zwei Zehner? — drei Zehner u. s. w. Ebenso werden die Zahlen 20, 30 u. s. w. in Zehnern ausgedrückt. — Wieviel Zehner sind 20, 30 Einer? u. s. w. Diese Übungen werden sowohl mit Punkten, (Strichen) als auch am russischen Rechenapparate, sodann mit Münzen, Maßen und Gewichten durchgeführt. —

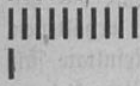
Wieviel Kreuzer hat ein Zehner? Wieviel Kreuzer sind 2, 3 . . . Zehner?

10 Zehner sind 100 Kreuzer oder 1 Gulden.

Wieviel Zehner sind 20 Kr., 30 Kr.? u. s. w. Wieviel Decimeter hat 1 Meter? Wieviel Decimeter sind 2 Meter? 3 Meter? u. s. w. Wieviel Meter sind 20, 30 Decimeter? u. s. w.

Ebenso verfahre man mit Deciliter, Decigramm.

Um die Schüler von zwanzig bis dreißig zählen zu lehren benütze der Lehrer wieder Punkte, Striche, Kugeln, Münzen 2c. zur Veranschaulichung. Er mache z. B. zwei Reihen Striche, jede zu 10 an die Tafel und frage: Wieviel Striche stehen in der ersten Reihe?



Wieviel in der zweiten Reihe? Wieviele Zehner sind das? Wieviel Einer sind 2 Zehner? — Ich mache nun unter die beiden Reihen noch einen Strich. Nun habe ich 20 Striche und 1 Strich.

20 Striche und 1 Strich sind 21 Striche.

20 Kugeln und 1 Kugel sind 21 Kugeln. Wieviel sind 20 Kreuzer und 1 Kreuzer? 20 Schüler und 1 Schüler? 20 Meter und 1 Meter? u. s. w.

20 und 1 ist 21.

Wieviel ist 1 und 20?

Der Lehrer löscht von den 21 Strichen einen weg. — Wieviel Striche waren früher da? Wieviel habe ich weggelöscht? Wieviel bleiben noch? (Ebenso mit Kugeln, 2c.) Um wieviel

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

ist 21 mehr als 20? Um wieviel ist 20 weniger als 21? Welches ist der Unterschied zwischen 20 und 21?

Nun mache der Lehrer in die dritte Reihe zu den 21 Strichen noch einen Strich, frage, wieviel Zehner und Einer nun an der Tafel stehen und sage dann: 20 Striche und 2 Striche sind 22 Striche u. s. f. wie früher bei der Zahl 21.

Ebenso verfahre er auch mit den Zahlen von 30 bis 40 u. s. f. Nach jedem Zehner werden die vorhergehenden Zahlen wiederholt. Die Schüler merken sehr bald, dass das Zählen von einem Zehner zum nächsten eben so vor sich geht, wie das von 10 bis 20.

Der Lehrer lasse die durch Striche ausgedrückten Zahlen zuerst in der Reihenfolge, dann außer der Reihe nennen, lasse genannte Zahlen von den Schülern zeigen, übe sie im Vor- und Rückwärtszählen, zuerst mit Beibehaltung der Striche und dann ohne dieselben. Nun übe er auch das Zählen mit Überspringen einer Zahl, z. B. 1, 3, 5. . .; 2, 4, 6. . .; 30, 28, 26, . . .; 29, 27, 25, . . und stelle die Fragen: Welche Zahl kommt nach 21, 27, 35? 2c.

Welche Zahl kommt vor 21, 27, 35?

Zwischen welchen Zahlen liegt 23, 25, 37?

Wie heißt die Zahl, welche aus 2 Zehnern und 5 Einern besteht? Welche Zahl enthält 3 Zehner und 8 Einer? Wie viele Zehner und Einer kommen in 23, 25, 38, 87 u. s. w. vor? Ich denke mir die Zahl 15 aus zwei Theilen zusammengesetzt, von denen der eine 10 ist; wie heißt der andere Theil? Der Vorgang mit Hilfe des Rechenapparates ist wohl einleuchtend. Man schiebt, um z. B. die Zahl 21 darzustellen, am 1. Stabe 10 Kugeln und auch am 2. Stabe 10 Kugeln vor, und am 3. Stabe noch 1 Kugel und verfährt dann wie bei den Strichen.

Auch mit Münzen ist das Verfahren nicht schwer. Man legt links 2 Zehner und daneben rechts 1 Kr. und fragt: Wieviel Kreuzer sind es zusammen? Wieviel, wenn ich noch einen Kreuzer dazulege? u. s. f.

§. 2.

Schriftlich.

Wenn die Schüler von allen Zahlen des Zahlenraumes 20 bis 100 eine deutliche Vorstellung und in der Zerlegung dieser Zahlen in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zehner und Einer die erforderliche Sicherheit erlangt haben, so beginnt man mit der schriftlichen Darstellung dieser Zahlen. Bis dahin sind daher die schriftlichen Übungen nur in dem Zahlenkreise von 1 bis 10 vorzunehmen. Man vollbringt diese Darstellung entweder ohne Apparat oder mit Hilfe des russischen, häufig aber auch des Prausek'schen Numerier-Apparates.

a) Ohne Apparat.

Der Lehrer fragt: Aus wieviel Zehnern und Einern besteht die Zahl 11? und schreibt nach richtiger Beantwortung der Frage an die Tafel:

1 Zehner 1 Einer

und fragt: An der wievielten Stelle stehen die Einer, wenn man von der Rechten gegen die Linke zählt? und an der wievielten Stelle steht der Zehner?

Ebenso verfahre man mit den Zahlen 12, 13, 14 u. s. f.

1 Zehner 2 Einer
1 „ 3 „
1 „ 4 „

An der wievielten Stelle stehen hier jedesmal die Einer? An der wievielten Stelle stehen immer die Zehner?

Wenn wir nun übereinkommen, die Einer immer an die 1. und die Zehner immer an die 2. Stelle zu schreiben, ist es dann wohl noch nothwendig, die Namen Einer und Zehner zu den Ziffern zu schreiben? Die Wörter Einer und Zehner werden ausgelöscht und das Übriggebliebene von den Schülern gelesen und zwar:

1 Zehner und 1 Einer oder eilf.

1 Zehner und 2 Einer oder zwölf u. s. f.

Wie kann man daher die Zahlen fünfzehn, sechzehn u. s. w. kurz schreiben?

Schreibt alle Zahlen von 11 bis 19 an!

Aus viel Zehnern und Einern besteht die Zahl zehn? An die wievielte Stelle schreiben wir die Zehner? Kommen in der Zahl zehn außer dem Zehner auch noch Einer vor? Dürften wir daher an die 1. Stelle wohl 1, 2, 5 ꝛc. schreiben? Warum nicht? Wir müssen daher an die erste Stelle ein Zeichen setzen, welches so viel als keine Einer bedeutet, und dieses Zeichen ist 0 (Null). Schreibt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nun die Zahl 10 an! Aus wieviel Zehnern besteht die Zahl 20? An die wievielte Stelle schreiben wir die 2 Zehner? Wieviel Einer kommen in der Zahl 20 nebst den 2 Zehnern noch vor? Welche Ziffer werden wir daher, um die Zahl 20 anzuschreiben, an die 2. und welche an die 1. Stelle schreiben? Wie man beim Anschreiben der folgenden Zahlen bis 99 zu verfahren habe, ist nun wohl einleuchtend.

Bezüglich der Zahl 100 erinnere der Lehrer, dass sie aus 10 Zehnern besteht, und dass man daher schreiben müsste:

10 Zehner und keine Einer, oder
10 „ „ 0 „ oder 100.

b) Mit Prausek's Numerier-Apparat. (Siehe spc. Meth. der Element.-Cl. Seite 92).

Man lasse den 1. Stab rechts als Einerstelle und den 2. Stab als Zehnerstelle gelten, schiebe auf den 1. Stab eine Kugel nach der anderen und lasse die Anzahl der aufgeschobenen Kugeln durch die entsprechende Ziffer ausdrücken, welche man an den als Einerstelle bezeichneten Platz schreibt. Hat man 9 Kugeln auf den Stab geschoben und gezeigt, dass für die 10. Kugel kein Platz mehr ist; so nimmt man alle Kugeln wieder ab und schiebt eine Kugel auf den zweiten, den Zehnerstab, welche (die Kugel) dann immer einen Zehner zu bedeuten hat, schreibt an die Tafel an die 2. Stelle die Ziffer 1 und an die 1. Stelle, da der Einerstab leer ist, 0.

Eine Kugel am Zehnerstabe und 1, 2, 3 u. s. w. am Einerstabe stellen die Zahlen (respective) 11, 12, 13 u. s. w. vor.

Hat man nun wieder 9 Kugeln am Einerstabe, also die Zahl 19 dargestellt, so nimmt man wieder alle Kugeln von diesem Stabe ab und schiebt dafür, da am Einerstabe kein Platz mehr ist, eine zweite Kugel an den Zehnerstab, welche nun wieder einen Zehner bedeutet und schreibt an die Tafel an die Zehnerstelle 2 und an die Einerstelle 0 u. s. f. Es darf wohl kaum erwähnt werden, dass der ganze Vorgang von den dazugehörigen Fragen und Antworten begleitet wird.

Der Lehrer lasse nun alle Zahlen von 1 bis 100 anschreiben, dictiere hierauf bald diese bald jene Zahl, lasse die angeschriebenen Zahlen lesen und in Zehner und Einer auflösen, die eine oder die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

andere Zahl durch Striche oder Kugeln (am Rechenapparate) darstellen und dictiere häufig Zahlenpaare, welche mit denselben Ziffern geschrieben werden müssen, wie 12 und 21, 35 und 53 u. s. w., wodurch die Schüler noch gründlicher zur Einsicht gelangen, dass jede Ziffer einen zweifachen Wert hat; den Wert der Figur und den der Stelle (Localwert).

Übungen sind im 2. Rechenbuche Močnik Seite 4 und 5.*)

§. 3.

Münzen, Maße und Gewichte.

Die bereits erlangte Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte wird für diesen Zahlraum vervollständigt.

a) Münzen. 1 Gulden hat 100 Kreuzer. Wir haben auch Papiergeld und zwar: Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden und Banknoten zu 10 und 100 Gulden.

b) Längenmaße. Der Lehrer zeichnet an die Schultafel 1 Meter und theilt dieses vor den Augen der Schüler in Decimeter und Centimeter ein. Er lasse verschiedene Längen z. B. die des Lehrtisches, der Schultafel 2c. von den Schülern abmessen, leite sie an, sich selbst aus einer Schnur ein Metermaß zu machen, auf das Lineal ein Decimeter zu zeichnen 2c. Sehr zu empfehlen, sowohl für die gegenwärtigen als für spätere Übungen ist, an den Rand der Schultafel mit Ölfarbe ein in Decimeter und Centimeter getheiltes Meter zu verzeichnen.

Es kann hier auch vorläufig den Schülern mitgetheilt werden, dass man eine Strecke Weges, welche man beim Gehen in einer Viertelstunde bequem zurücklegen kann, ein Kilometer nennt.

c) Hohlmaße. 1 Hektoliter = 100 Liter. 1 Liter = 10 Deciliter, 1 Deciliter = 10 Centiliter, daher 1 Liter = 100 Centiliter.

d) Gewichte. 1 Kilogramm = 100 Dekagramm.

---

*) Um Raum zu ersparen, haben wir unseren Darstellungen nur die nöthigsten Aufgaben beigegeben, und weisen jedesmal durch den Buchstaben M. auf die vorzüglichen Rechenbücher Mocniks und durch A. K. auf die sehr brauchbaren Rechenbücher von Ambros und Kopetzky hin.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

e) Papiermaße. Ein Buch Papier = 10 Lagen, 1 Lage = 10 Bogen.

f) Zeitmaße. 1 Jahr = 12 Monate = 52 Wochen. Die Monate Jänner, März, Mai, Juli, August, October, December 31 Tage; Februar 28 oder 29 Tage; April, Juni, September und November 30 Tage.

1 Tag = 24 Stunden, 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Secunden.

§. 4.

Zuzählen, Abziehen, Vervielfältigen.

Der Lehrer lasse zu verschiedenen Zahlen eine Zahl aus der Zahlenreihe von 1 bis 10 zählen, wobei auch häufig von einer Zehnerreihe auf die nächstfolgende übergegangen werden muss. Vorher müssen die Schüler jedoch in der Ergänzung einer gegebenen Zahl zu dem nächsten Zehner die gehörige Fertigkeit erlangt haben z. B.

$9 + 1 = ?$ $19 + 1 = ?$
$8 + 2 = ?$ $18 + 2 = ?$
$7 + 3 = ?$ $17 + 3 = ?$ u. s. w.

Diese Übungen können zugleich für das Schnellrechnen benützt werden.

Er frage nun z. B.: Wieviel ist 25 und 7?

Der Lehrer schiebt am 1. und am 2. Stabe des Rechenapparates die 10 Kugeln und 3. Stabe 5 Kugeln nach links, wodurch die Zahl 25 dargestellt ist. Hierauf schiebt er am 3. Stabe die noch übrigen 5 Kugeln nach links und fragt: Wieviel ist 25 und 5? Wir haben aber 7 zu 25 zu zählen, wieviele Kugeln müssen wir noch hinzugeben? (Er thut dies). Wieviel ist also 30 und 2? Um dasselbe mit Münzen durchzuführen legt er 2 Zehnerstücke und 5 Kreuzer vor. Wieviel Kreuzer sind dies? Er legt nun 5 Kreuzer dazu. Wieviel Zehner sind es jetzt? Wieviel Kreuzer habe ich von den 7 Kreuzern noch hinzuzugeben? Wieviel Zehner und wieviel Kreuzer habe ich nun erhalten? Wieviel sind 3 Zehner und 2 Kreuzer?

Beim Zuzählen der Einer zu Zehnern mit Einern werden die hinzuzählenden Einer so zerlegt, dass

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

durch den einen Theil der nächste Zehner ergänzt wird, und dann werden die noch übrigen Einer hinzu gezählt. Also: 25 + 5 = 30, 30 + 2 = 32.

Wieviel ist 14 und 13? — Wieviel 14 und 10? Wieviel haben wir noch hinzuzuzählen? Wieviel ist 24 und 3?

Um diese Aufgabe am Rechenapparate zu lösen, stellt man die Zahl 14 dar. Wenn zweistellige Zahlen mit zweistelligen in Beziehung gebracht werden, so stellt man die erstere so dar, dass die Einer am ersten Stabe oben links und unten die Zehner erscheinen; daher schiebt man zur Darstellung der Zahl 14 am ersten Stabe 4 und am zweiten Stabe 10 Kugeln nach links. Dann werden alle 10 Kugeln des dritten Stabes und noch 3 Kugeln des ersten Stabes nach links geschoben.

Beim Zuzählen der Zehner mit Einern zu Zehnern mit Einern zählt man zur ersten Zahl die Zehner und dann die Einer der letzten Zahl. Also: 14 + 10 = 24, 24 + 3 = 27.

Das Wegzählen wird damit begonnen, dass der Lehrer von den Zahlen 20, 30, u. s. w. die ersten zehn Zahlen abziehen lässt, z. B. 1 von 20 bleibt 19; 2 von 20 bleibt 18 u. s. f. bis 100. Ferner lasse er dieselbe Zahl vom Reste wegnehmen, z. B. 2 von 100 bleibt 98; 2 von 98 bleibt 96 u. s. f.

Um den Schülern das Abziehen beim Übergange von einer Zehnerreihe zur andern zu erleichtern, benütze er den Rechenapparat, Striche an der Tafel und Münzen z. B.:

Wieviel ist 25 — 9? Es wird zuerst die Zahl 25 am Apparate dargestellt, indem man am 1. und 2. Stabe alle 10 und am 3. Stabe 5 Kugeln nach links schiebt. Hierauf schiebt man die 5 Kugeln des 3. und noch 4 Kugeln des 2. Stabes nach rechts und fragt: Wieviel Kugeln sind auf der linken Seite? Wieviele Kugeln habe ich weggenommen? Wieviel bleiben noch auf der linken Seite? Wieviel Kugeln müssen noch weggenommen werden? Wieviel bleiben jetzt noch?

Um diese Aufgabe mit Münzen durchzuführen, lege man 2 Zehner und 5 Kreuzer vor. Nimmt man zuerst 5 Kreuzer weg, so bleiben 2 Zehner oder 1 Zehner und 10 Kreuzer; nun zählt man von den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

10 Kreuzern 4 Kreuzer weg, so bleiben 1 Zehner und 6 Kreuzer oder 16 Kreuzer.

Man zählt also zuerst so viele Einer weg, dass nur Zehner übrig bleiben, und von diesen werden die noch übrigen Einer weggezählt. Also: 25 — 5 = 20, 20 — 4 = 16.

Sind von Zehnern und Einern Zehner und Einer wegzuzählen, z. B. 42 — 28 = ? so stellt man am Apparate zuerst die Zahl 42 so dar, dass die 2 Einer oben am 1. Stabe und die 4 Zehner unten stehen. Nun schiebt man die 10 Kugeln des 4. und 5. Stabes weg, und hierauf die 2 Kugeln des 1. und noch 6 Kugeln des 2. Stabes weg; es bleiben dann noch 14 Kugeln.

Beim Wegzählen der Zehner mit Zehnern von Zehnern mit Einern zählt man zuerst von der größeren Zahl die Zehner und dann die Einer der kleineren Zahl weg. Also: 42 — 20 = 22, 22 — 8 = 14.

Der Lehrer stelle Fragen in verschiedener Ausdrucksweise, als: Um wieviel ist 11 mehr als 2? 21 mehr als 2? Um wieviel ist 5 weniger als 43? Wieviel bleibt, wenn man 62 um 5 vermindert? Wieviel muss man von 38 wegnehmen, um 23 zu erhalten? Jemand nimmt 56 Kreuzer ein und gibt 27 Kreuzer aus; wieviele Kreuzer bleiben ihm noch? Auch verbinde der Lehrer das Subtrahieren mit dem Addieren, z. B. Der Vater hat zuerst 15 und dann 38 Gulden eingenommen und hierauf 26 fl. ausgegeben, wieviel ist ihm geblieben? Um wieviel ist dies mehr als 13 Gulden? Karl hat 17 Kreuzer; wieviel fehlen ihm noch auf 25 Kreuzer? 15 und wieviel ist 21? 25 + · = 38.

Aufgaben in M. II. R.

Haben die Schüler im Zu- und Wegzählen die gehörige Fertigkeit erlangt, so muss das, was sie bereits im 1. Schuljahre vom Vervielfältigen, Enthaltensein und Theilen gelernt haben, wiederholt und vervollständigt werden, so wie dieses ja auch beim Zuzählen und Abziehen geschehen ist.

Wir beginnen daher der leichteren Übersicht wegen betreffs des Vervielfachens, Messens und Theilens beim ersten Zahlenraume.

So wie das Eins und eins beim Zu- und Wegzählen, muss das Einmaleins für das Vervielfältigen, Messen und Theilen bis

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zur größten Geläufigkeit eingeübt werden. Es ist daher hiebei anzurathen, das Fortschreiten von Zehner zu Zehner festzuhalten und in jedem Zehner nur die in demselben eingeschlossenen Vielfachen einzuüben. Z. B. Im Zahlraume bis 30 das Vervielfachen von 3 und mit 3, im Zahlraume bis 40 das Vervielfachen von 4 und mit 4 u. s. w.

Rechnungsfälle, welche in höhere Vielfache übergreifen, bleiben daher noch unberücksichtigt; z. B. im 3. Zehner $4 \times 7 = 28$, was in den 4. Zehner gehört, wo die 4-fachen der Zahlen vorkommen.

Damit die Schüler das Einmaleins sich gut und mit dem gehörigen Verständnisse einprägen, stelle der Lehrer das Vervielfachen als ein verkürztes Zuzählen hin, benütze hiebei Striche, Punkte 2c., sowie den russischen Rechenapparat.

Nebst dem schon in der I. Stufe gezeigten Verfahren wollen wir hier noch das folgende angeben:

Der Lehrer mache an die Tafel einen Strich (schiebe eine Kugel vor) und frage: Wieviel Striche stehen hier? Wieviel mal 1 Strich steht hier? Wieviel Striche sind einmal ein Strich? Wieviel Kugeln sind einmal eine Kugel? Wieviel Finger sind einmal ein Finger? (Einmal ein Gulden? 2c.)

Wieviel ist einmal eins?

Man mache zu dem einen Striche noch einen Strich (schiebe zu der einen Kugel noch eine Kugel) und frage: Wieviel Striche stehen hier? Wieviel mal zwei Striche stehen hier? Wieviel Striche sind einmal zwei Striche? Wie viele Kugeln sind einmal zwei Kugeln (Finger, Bücher, Gulden 2c.)?

Wieviel ist einmal zwei?

Wievielmal 1 Strich steht hier? Wieviel Striche sind zweimal ein Strich? (zweimal eine Kugel, ein Buch, ein Finger 2c.)

Wieviel ist 2mal eins?

So verfahre man bis 10mal 1.

Die Schüler kommen nun leicht selbst darauf, dass jede Zahl mit 1 multipliciert, sich selbst zum Producte gibt und werden daher auch leicht die Fragen beantworten. Wieviel ist einmal 11, einmal 12 u. s. f.

Ebenso verfahre man bei der Bildung der übrigen Productenreihen und sorge, dass durch Mannigfaltigkeit in der Frage und durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

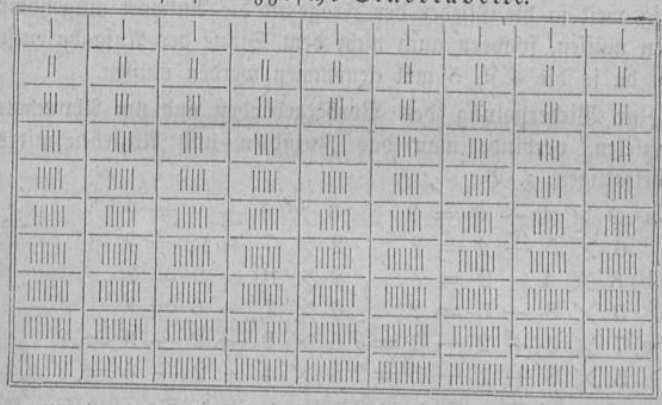
Lösung hinreichend vieler Aufgaben jede Productenreihe dem Gedächtnisse der Schüler fest eingeprägt werde. Man sehe auch darauf, dass die Schüler die Producte zweier Factoren in jeder Aufeinanderfolge schnell angeben können, z. B. $3 \times 4 = 12$ und $4 \times 3 = 12$.

Dies wird erzielt, wenn in folgender Ordnung vorgegangen wird:

$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$
— — — —	— — — —	— — — —
$2 \times 10 = 20$	$3 \times 10 = 30$	$4 \times 10 = 40$

Die erweiterte Pestalozzische Einertabelle, sowie die Pythagoräische Tafel sind sehr zweckmäßige Hilfsmittel zur Einübung des Einmaleins:

Pestalozzische Einertabelle.



Pythagoräische Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Gebrauch dieser Tafel ist einfach. Will man z. B. wissen, wieviel 4 mal 8 ist, so suche man die Ziffer 4 in der ersten senkrechten und die 8 in der ersten horizontalen Reihe. Sodann bewege man den auf der Ziffer 4 stehenden Finger der einen Hand in dieser Reihe nach rechts fort, den auf der Ziffer 8 stehenden Finger der andern Hand in der Reihe nach abwärts. Wo beide Finger zusammentreffen wird man das Product 32 treffen.

Aufgaben in M. II. R. S. 10—11, schriftlich 11, c.

Der Lehrer kann auch hier wieder das Enthaltensein mit dem Vervielfachen verbinden, wie dies schon auf der I. Stufe gezeigt wurde. Bei Lösung der hieher gehörigen angewandten Aufgaben achte der Lehrer darauf, dass die Schüler die Factoren nicht verwechseln. Würde z. B. in der Aufgabe: Was kosten 5 Meter Tuch, wenn 1 Meter 4 fl. kostet? auf die Frage: Warum? der Schüler antworten, weil 4 mal 5 20 ist; so wäre die Antwort nicht nur unvollständig, weil ja die Glieder der Frage in die Antwort aufgenommen werden müssen, sondern auch nicht dem Sinne der Aufgabe entsprechend, da ja die 4 fl. 5 mal genommen werden müssen.

Zur Wiederholung des Vorhergehenden und um Abwechslung zu erzielen, verbinde man das Zuzählen und Abziehen mit dem Vervielfältigen, z. B.

a) $2 \times 4 + 3 = ?$ $3 \times 8 + 9 = ?$
$6 \times 5 + 2 = ?$ $2 \times 7 + 12 = ?$
b) $3 \times 4 - 2 = ?$ $8 \times 10 - 9 = ?$
$5 \times 8 - 5 = ?$ $6 \times 7 - 6 = ?$
c) $7 \times 3 + 2 - 1 = ?$ $6 \times 9 - 2 + 3 = ?$
$5 \times 8 + 1 - 5 = ?$ $8 \times 4 - 2 + 5 = ?$

d) Wieviel Tage sind 6 Wochen und 4 Tage? Ein Kaufmann verkauft von 1 Stück Tuch, welches 36 Meter hatte, 4 Meter, das Meter zu 5 fl.; wieviel nahm er dafür ein? Wieviel Meter Tuch blieben ihm noch?

§. 5.

Messen und Theilen.

Will man das Enthaltensein für sich vornehmen, so lasse man bei den Übungen des Vervielfältigens als Vorbereitung die Producte häufig in Factoren zerlegen, indem man z. B. fragt: Wievielmal

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

3 ist 12? Wievielmal 4 ist 12? Wievielmal kann man 3 kr. von 12 hinwegnehmen? Wievielmal sind also 3 kr. in 12 kr. enthalten?

Bei diesen Übungen läſst der Lehrer angeben, wie oft jede Grundzahl in sich selbst in jedem aus dem Einmaleins bekannten Producte enthalten ist.

1 in 1 ist 1 mal enthalten; denn 1 mal 1 ist 1,
1 „ 2 „ 2 „ „ ; „ 2 „ 1 „ 2,
1 „ 3 „ 3 „ „ ; „ 3 „ 1 „ 3,
u. s. w.

2 in 2 ist 1 mal enthalten; denn 1 mal 2 ist 2,
2 „ 4 „ 2 „ „ ; „ 2 „ 2 „ 4,
2 „ 6 „ 3 „ „ ; „ 3 „ 2 „ 6,
u. s. w.

Wie oft ist die Zahl 2 in 3 enthalten?

Wieviel ist 1 mal 2? Vielleicht ist 2 in 3 schon 2 mal enthalten? Warum nicht? Auf diese Art werden die Schüler aufmerksam gemacht, daſs nicht immer eine Zahl in der andern genau 1 mal oder mehrmal enthalten ist, sondern, daſs oft noch etwas übrig bleibt, was man „Rest“ nennt. Nun läſst man die Schüler untersuchen, wie oft eine der Grundzahlen in jeder andern Zahl bis 100 enthalten ist.

Als:

1 in 1 ist 1 mal enthalten; denn 1 mal 1 ist 1
1 „ 2 „ 2 „ „ ; „ 2 „ 1 „ 2

Die Schüler ersehen: 1 ist in jeder Zahl ohne Rest enthalten.
2 in 1 ist 0 mal enthalten, bleibt 1 als Rest; denn 0 mal 2 ist 0 und 1 ist 1
2 „ 2 „ 1 „ „ „ 0 „ „ ; „ 1 „ 2 „ 2 „ 0 „ 2
2 in 3 „ 1 „ „ „ 1 „ „ ; „ 1 „ 2 „ 2 „ 1 „ 3
u. s. w.

Hierbei bemerken die Schüler, daſs bei der Division durch 2 nur der Rest 1, bei der durch 3 kein gröſserer Rest als 2 u. s. w. bleiben kann.

Auch sagt man bei dieser Gelegenheit den Schülern, daſs alle Zahlen, in welchen 2 ohne Rest enthalten ist, gerade Zahlen und alle andern ungerade Zahlen genannt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn das Enthaltensein (Messen) hinreichend geübt ist, so können dieselben Übungen auch in Beziehung auf das Theilen vorgenommen werden.

Der Lehrer gehe hiebei von praktischen Beispielen aus, als

Ich gebe dir 2 Bücher; vertheile sie unter 2 Nachbarn so, dass jeder gleich viel, jeder die Hälfte bekommt. Wieviele Bücher musst du jedem geben? Wieviel ist also die Hälfte von 2 Büchern? Wieviel ist die Hälfte von 2 Kugeln (von 2 Kreuzern, 2 Äpfeln 2c.)?

Wieviel ist die Hälfte von 2? u. s. f.

Oder: 6 Kreuzer sollen unter 3 Knaben vertheilt werden, wie viel erhält jeder? Wieviele Kreuzer braucht man, um jedem der 3 Knaben 1 Kreuzer zu geben? Wievielmal 1 Kreuzer kann man jedem der 3 Knaben geben, wenn 6 Kreuzer gleich zu vertheilen sind? Wievielmal 2 Kreuzer sind dies? Der wievielte Theil sind 2 Kreuzer von 6 Kreuzern? Warum?

Der Lehrer lasse sich nun angeben, der wievielte Theil jede der Grundzahlen von einem aus dem Einmaleins bekannten Producte ist, und zwar 1 ist die Hälfte von 2; denn 2 mal 1 ist 2.

1 „ der 3. Theil von 3; „ 3 „ 1 „ 3
1 „ „ 4. „ „ 4; „ 4 „ 1 „ 4
— — — — — — — — —
2 „ „ 5. „ „ 10; „ 5 „ 2 „ 10
— — — — — — — — —
6 „ die Hälfte von 12; „ 2 „ 6 „ 12.
u. s. f.

Von welcher Zahl ist 4 der 3. Theil? Der 4. Theil? u. s. f Von welcher Zahl ist 8 die Hälfte? das Drittel? u. s. w.

Die Hälfte von 2 ist 1; denn 2 mal 1 ist 2,
„ „ „ 4 „ 2; „ 2 „ 2 „ 4.
Der 3. Theil von 3 ist 1; denn 3 mal 1 ist 3,
„ 3. „ „ 6 „ 2; „ 3 „ 2 „ 6.

Welche Zahlen von 1 bis 20 können ohne Rest in Hälften, welche von 1 bis 30 ohne Rest in Drittel getheilt werden? In welchen Zahlen von 1 bis 40 ist die Zahl 5 ohne Rest enthalten? Wieviel Kreuzer hat ein halber Gulden? Was für ein Guldentheil

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind 10 Kreuzer? Was für ein Theil eines Meters sind 5 Decimeter?

Wir haben hier der leichteren Übersicht wegen das methodische Vorgehen beim Rechnen in dem Zahlenraume von 20 bis 100 im Zusammenhange dargestellt. Der Lehrer hat jedoch beim Unterrichte in den Zahlenräumen von Zehner zu Zehner vorzuschreiten, und mit jedem neuen Zahlenraume die bereits behandelten Zahlenräume zu verbinden. So wird z. B. beim Zahlenraume von 20 bis 30 auch der Zahlenraum von 1 bis 20 mit einbezogen und die Schüler im Vor- und Rückwärtszählen bis 30 geübt; es werden die geraden und ungeraden Zahlen bis dahin angegeben, angeschrieben und gelesen. Das Zu- und Wegzählen auf alle in diesem Zahlenraume auftretenden Fälle ausgedehnt. Das Zuzählen der Einer wird zuerst innerhalb desselben Zehners und dann mit Überschreitung des Zehners geübt, ebenso beim Wegzählen. Hierauf folgt das Zuzählen der Zehner zu Zehnern; zu Zehnern mit Einern, dann das Zuzählen der Zehner mit Einern zu Zehnern mit Einern. Hierauf das Wegzählen der Zehner von Zehnern, von Zehnern mit Einern und dann der Zehner mit Einern von Zehnern mit Einern. Dann läſst man die Zahlen in zwei Bestandtheile zerlegen. In dem Zahlenraume bis 30 wird das Vervielfältigen von 3 und mit 3, im Zahlenraume bis 40, von 4 und mit 4 u. ſ. w. vorgenommen; ebenso wird auch das Messen und Theilen im Zahlenraume bis 30 durch 3, im Zahlenraume bis 40 durch 4 u. ſ. w. vorgenommen. Alle erwähnten Operationen werden auch schriftlich dargestellt; ebenso werden Übungen im Schnellrechnen vorgenommen. Daſs jede Stufe auch in angewandten Aufgaben geübt werden muſs, ist wohl selbstverständlich.

Die Ausführung des Gesagten findet man in Močniks II. Rechenbuche.

Beim reinen Rechnen unterscheidet man Grundaufgaben und abgeleitete Aufgaben. Bei ersteren wird die Operation unmittelbar durch den Wortlaut der Aufgabe angegeben, z. B. Wieviel ist 18 und 5?

Bei den abgeleiteten Aufgaben bedarf es schon einer Überlegung, um aus dem Wortlaute der Aufgabe die anzuwendende Operation

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

herauszufinden, z. B. Wieviel erhält man, wenn man 18 um 5 vergrößert?

Die Grundaufgaben bezwecken hauptsächlich die Fertigkeit im Rechnen, fördern also den materialen Zweck des Rechenunterrichtes; die abgeleiteten Aufgaben hingegen dienen zur Übung und Bildung der Denkkraft und der Sprechfertigkeit, also zur Förderung des formalen Zweckes. Es ist wohl selbstverständlich, dass die abgeleiteten Aufgaben erst dann gebraucht werden, wenn die Schüler durch Lösung der Grundaufgaben Fertigkeit und Sicherheit in der betreffenden Rechnungsoperation erlangt haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Abschnitt.

Elemente des Bruchrechnens.

§. 6.

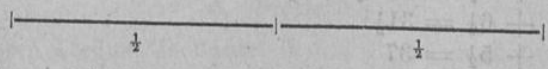
1. Halbe.

a) Auffassung. Der Lehrer zeige einen Papierbogen vor und lasse die Schüler bemerken, dass an demselben nichts fehlt, dass er also ein ganzer Bogen ist. Er zerschneide den Bogen in zwei und dann in mehrere Stücke und sage, diese Stücke heißen auch Theile des Bogens; daher kann man auch sagen: Ich theile den Bogen, anstatt ich zerschneide denselben.

Man schneide nun einen Bogen durch die Mitte und lasse die Schüler bemerken, dass nun ein Theil eben so groß ist, wie der andere, — dass der Bogen in zwei gleiche Theile getheilt wurde und sage: Jeder solcher Theil heißt ein halber Bogen oder die Hälfte des Bogens.

Ebenso mache man es mit einem Stücke Band ꝛc.

Der Lehrer ziehe nun an der Schultafel eine gerade Linie, lasse dieselbe von einem Schüler in zwei ungleiche Theile und dann eine zweite Linie in zwei gleiche Theile theilen und frage hiebei:



Wo muss man die Linie theilen, damit die Theile gleich groß werden? Was ist dann ein solcher Theil von der Linie, wenn man dieselbe in zwei gleiche Theile theilt?

Theilt man ein Ganzes in zwei gleiche Theile, so nennt man jeden der erhaltenen gleichen Theile ein Halbes oder die Hälfte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Was erhält man, wenn man ein Ganzes in 2 gleiche Theile theilt und 1 solchen Theil nimmt? Wie viele Halbe hat ein Ganzes? Was geben zwei Halbe zusammen?

Ein Halbes bezeichnet man durch $\frac{1}{2}$ und 2 Halbe durch $\frac{2}{2}$ u. s. w.

b) Verwandeln der Ganzen in Halbe und umgekehrt. Wieviel Halbe sind 2 Ganze? 1 Ganzes hat 2 Halbe; 2 Ganze haben 2 mal 2 Halbe, d. i. 4 Halbe.

Schriftlich $2 = \frac{4}{2}$ u. s. f.

Wieviel Ganze sind 8 Halbe? 2 Halbe sind 1 Ganzes. Nimmt man daher $\frac{2}{2}$ von $\frac{8}{2}$ weg, so bleiben $\frac{6}{2}$, von $\frac{6}{2}$ wieder $\frac{2}{2}$ weggenommen bleiben $\frac{4}{2}$ u. s. f.

$\frac{8}{2}$ sind daher sovielmal 1 Ganzes als man $\frac{2}{2}$ davon wegnehmen kann, oder so oft $\frac{2}{2}$ in $\frac{8}{2}$ enthalten sind. $\frac{2}{2}$ sind in $\frac{8}{2}$ so oft enthalten als 2 in 8, d. i. 4 mal; $\frac{8}{2}$ sind daher 4 mal ein Ganzes oder 4 Ganze.

Man betrachtet bei diesem Vorgange den Zähler als die eigentliche Zahl und den Nenner nur als den Namen und rechnet dann, wie mit benannten ganzen Zahlen, wodurch den Anfängern das Rechnen mit Brüchen sehr erleichtert wird.

Wieviel Ganze sind 6, 8, 12, 16, 3, 5, 17 Halbe?

Schriftlich. $\frac{12}{2} = ?$ Ganze.

Zuerst muss den Schülern gezeigt werden: $\frac{2}{2} = 1$ Ganzes $\frac{2}{2}$ in $\frac{12}{2} = 2$ in $12 = 6$ Ganze.

c) Zuzählen. Wieviel sind 3 Halbe und 1 Halbes? $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Ganze.

$3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = ?$ $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, und 2 ist 6.

$25 + 6\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}$

$31\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 37$

$37 + 5\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}$ u. s. f.

d) Wegzählen. Wieviel ist $\frac{7}{2}$ weniger $\frac{3}{2}$? $\frac{7}{2}$ weniger $\frac{3}{2}$ sind $\frac{4}{2}$ oder 2 Ganze. $\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Wie viel ist 3 weniger $\frac{1}{2}$?

Statt 3 kann man auch $2\frac{2}{2}$ setzen und man hat dann $2\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$25 - 3\frac{1}{2} = 24\frac{2}{2} - 3\frac{1}{2} = 21\frac{1}{2}$
$21\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 18$
$18 - 3\frac{1}{2} = 14\frac{1}{2}$
$14\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 11$, u. s. w.

e) Vervielfachen. Wieviel ist 5 mal $\frac{3}{2}$? 5 mal 3 Halbe sind 15 Halbe. $5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Wieviel ist 8 mal $9\frac{1}{2}$? 8 mal 9 ist 72; 8 mal $\frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$;
72 und 4 ist 76.

f) Messen. Wie oft ist $\frac{3}{2}$ in $\frac{18}{2}$ enthalten? 3 Halbe sind in 18 Halben so oft enthalten als 3 in 18, also 6 mal, daher $\frac{3}{2}$ in $\frac{18}{2} = 6$.

g) Theilen. Wieviel ist der 3. Theil von $\frac{21}{2}$? Der 3. Theil von 21 Halben sind 7 Halbe; daher $\frac{1}{3}$ von $\frac{21}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

h) Anwendungen. Wieviel Kreuzer hat $\frac{1}{2}$ Gulden? Ein Gulden hat 100 Kreuzer; ein $\frac{1}{2}$ Gulden ist die Hälfte von 100 Kreuzern, also 50 Kreuzer.

Wieviel Decimeter ist $\frac{1}{2}$ Meter? Wieviel Liter ist $\frac{1}{2}$ Hektoliter? Wie viele Minuten hat $\frac{1}{2}$ Stunde? Eine ganze Stunde hat 60 Minuten, eine halbe Stunde ist die Hälfte von 60 Minuten = 30 Minuten.

Angewandte Aufgaben II. Rechenbuch M. Seite 48 und 49.

2. Drittel.

Bei der Theilung in 3 gleiche Theile sind Vorgang und Übungen wie bei der Theilung in Halbe. Aufgaben Močnik II. Rechenbuch 49—51.

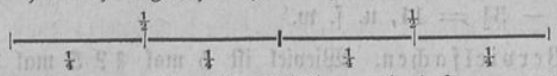
3. Viertel.

Bei der Theilung in Viertel ist das Verfahren ebenfalls gleich dem bei Halben, nur müssen die schon behandelten Halben mit den Vierteln in Verbindung gebracht werden.

Indem wir daher, um Wiederholungen zu vermeiden, die Entwicklung des Begriffes Viertel und die dazu gehörigen Übungen umgehen, wollen wir nur von der genannten Verbindung sprechen. Es ist angezeigt, sogleich bei der Theilung hierauf Rücksicht zu

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nehmen und zuerst die Ganzen in Halbe und diese erst in 2 gleiche Theile zu theilen, und die Schüler hiebei selbst bemerken zu lassen, dass man hiedurch 4 gleiche Theile erhält, welche Viertel heißen.



Bei diesem Vorgange sehen die Schüler auch, dass man aus Halben Viertel machen und durch Zusammensetzen von je 2 Vierteln wieder Halbe bilden kann.

1 Halbes $= \frac{2}{4}$, 1 Viertel $= \frac{1}{2}$ von 1 Halben.

Wieviel Viertel sind 3 Halbe? 1 Halbes hat 2 Viertel, 3 Halbe haben daher 3 mal 2 Viertel, also 6 Viertel.

Wieviel Halbe sind 12 Viertel? Ein Halbes hat 2 Viertel; daher sind 12 Viertel so viele Halbe als $\frac{2}{4}$ in $\frac{12}{4}$ oder 2 in 12 enthalten sind, also 6 Halbe.

Wieviel ist $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$?

Kann man wohl sagen 1 Zehner und 3 Kreuzer sind 4 Zehner oder 4 Kreuzer? Was muss man zuerst thun, wenn man Zehner und Kreuzer zusammenzählen will? Wieviele Kreuzer hat 1 Zehner? Wir haben also 10 Kreuzer und 3 Kreuzer; wieviel Kreuzer sind das?

So wie man die Zehner erst in Kreuzer verwandeln muss, um sie zu den Kreuzern zählen zu können, so muss man auch, um $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ zusammenzählen zu können, sie erst auf gemeinschaftliche Benennung bringen. Man verwandelt daher $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ und hat dann $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

Wieviel ist $52\frac{1}{2}$ weniger $14\frac{3}{4}$? Statt $52\frac{1}{2}$ setzen wir $52\frac{2}{4}$; da man aber $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{4}$ nicht wegzählen kann, so setzen wir $52 = 51\frac{4}{4}$; jetzt haben wir $51\frac{6}{4} - 14\frac{3}{4} = 37\frac{3}{4}$.

Wie oft ist $1\frac{1}{4}$ in $7\frac{1}{2}$ enthalten? Hiezu müssen wir die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ auf gleiche Benennung bringen. $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $7\frac{1}{2} = 7\frac{2}{4} = \frac{30}{4}$. $\frac{5}{4}$ in $\frac{30}{4} = 5$ in $30 = 6$.

Aufgaben in II. Rechenbuch M. S. 51 u. 52.

4. Fünftel.

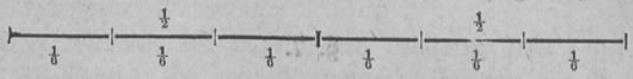
Bei der Theilung in Fünftel ist die Behandlung dieselbe wie bei den Halben und Dritteln.

Aufgaben II. Rechenbuch M. Seite 53—54.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

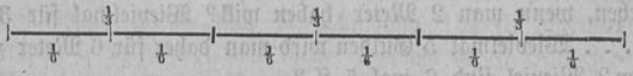
5. Sechstel.

Bei der Theilung in Sechstel müssen diese mit den Halben und Dritteln in Verbindung gebracht werden. Man theilt zuerst



das Ganze in Halbe, und jedes Halbe wieder in 3 gleiche Theile, wobei die Schüler bemerken, dass das Halbe 3 Sechstel hat, und daher sich Halbe in Sechstel verwandeln lassen, und dass das Sechstel ein Drittel von einem Halben ist.

1 Halbes = 3 Sechstel; 1 Sechstel = $\frac{1}{3}$ von 1 Halben.



Dann theilt man das Ganze zuerst in Drittel und hierauf jedes Drittel wieder in zwei gleiche Theile, wobei die Schüler bemerken, dass 1 Drittel 2 Sechstel hat, dass also 1 Sechstel 1 halbes Drittel ist, und dass sich Drittel in Sechstel verwandeln lassen.

1 Drittel = 2 Sechstel; 1 Sechstel = $\frac{1}{2}$ von 1 Drittel.

6. Achtel.

Die Theilung in Achtel und die Verbindung derselben mit Vierteln und Halben bleibt der vierten Stufe vorbehalten.

7. Zehntel.

Die Zehntel werden mit Halben und Fünftel verbunden.

Wegen des metrischen Maßes und der Münzen ist es angezeigt, auch auf dieser Stufe die Theilung in Hundertel vorzunehmen und mit den Zehnteln in Verbindung zu bringen. Als Versinnlichungsmittel ist hiebei der Meterstab angezeigt, an welchem die Decimeter die Zehntel und die Centimeter die Hundertel sind.

Aufgaben siehe II. R. M. von S. 56—59. A. K. S. 48 bis 55.

Ein zweckmäßiger Apparat zur Veranschaulichung der Brüche ist Hermann's Bruchapparat. Er ist bezüglich des Gestelles so eingerichtet wie der russische Apparat, nur sind statt der Kugeln

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stäbe angebracht, und zwar auf dem ersten Drahte ein Stab als Ganzes, auf dem zweiten Drahte ein Stab von derselben Länge in 2, auf dem dritten in drei u. s. f. und auf dem zehnten in zehn gleiche Theile getheilt.

§. 7.

Preisberechnungen.

a) Was kosten 6 Meter Tuch, wenn 1 Meter 5 fl. kostet?

Der Schüler wiederholt die Aufgabe, und hierauf fragt der Lehrer: Um was wird hier gefragt? Was ist bekannt? Wieviel Gulden muss man für 1 Meter zahlen? Wie oft mal muss man 5 fl. hingeben, wenn man 2 Meter haben will? Wievielmal für 3 Meter? . . . Wievielmal 5 Gulden wird man daher für 6 Meter zahlen müssen? Wieviel sind 6 mal 5 fl.?

Nun wird das Ganze wiederholt, der Schüler hat zu sagen: Wenn 1 Meter Tuch 5 fl. kostet, so kosten 6 Meter 30 fl.

b) 6 Kilogramm kosten 48 kr.; wieviel kostet 1 Kilogramm?

6 Kilogramm sind 6 mal 1 Kilogramm, daher ist 1 Kilogramm der 6. Theil. Deshalb muss man die 48 kr. in 6 gleiche Theile zerlegen; auf 1 Kilogramm kommt also der 6. Theil von 48 kr. oder 8 kr.

c) Anna soll für ihren Vater auf 6 Hemden Leinwand kaufen: Was soll sie hiebei als verständiges Mädchen wissen? Nun zu einem Männerhemde braucht man gewöhnlich 3 Meter. Wieviel Meter muss sie kaufen? Warum? 1 Meter dieser Leinwand kostet 75 kr. Wie oft muss sie 75 kr. ausgeben? Wieviel sind aber 18 mal 75 kr.? Wir wollen indessen 25 kr. weglassen und annehmen, 1 Meter koste 50 kr. Der wievielte Theil eines Guldens sind 50 kr.? Wieviel halbe Gulden muss sie für 18 Meter bezahlen? Wieviel ganze Gulden sind 18 Halbe? Warum? Wieviel Kreuzer haben wir aber zurückgelassen? Der wievielte Theil sind 25 kr. von 1 fl? Wieviele Viertelgulden hat also Anna noch zu bezahlen? Wie viel ganze Gulden sind 18 Viertelgulden? Wozu müssen wir die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4 fl. und 2 Viertelgulden noch rechnen? Wie viel macht dies zusammen? Wie können wir 2 Viertelgulden noch anders ausdrücken?

Was kosten also die 18 Meter Leinwand, wenn 1 Meter 75 kr. kostet?

Oder: Nehmen wir an, 1 Meter Leinwand koste 1 fl.; was kosten 18 Meter? Um wieviel Kreuzer haben wir das Meter zu theuer gerechnet? — Der wievielte Theil von 1 Gulden sind 25 kr.? Wieviele Viertelgulden haben wir daher bei 18 Meter zu viel gerechnet? Wieviel haben wir also von 18 fl. wegzurechnen?

Nun müssen die Hemden gemacht werden. Anna kann sie nicht machen, sondern muss für jedes Hemd $1\frac{1}{2}$ fl. Macherlohn bezahlen. Wieviel beträgt 6 mal 1 fl. Wieviel 6 mal $\frac{1}{2}$ fl? Wieviel beträgt dies zusammen? Wenn nun die Leinwand $13\frac{1}{2}$ fl. kostet und der Macherlohn 9 fl. beträgt, wie theuer kommen die 6 Hemden?

Aufgaben in M. II. R. S. 60—64.

II. Abtheilung

Erster Abschnitt.

Das Rechnen im Zahlenraume über hundert.

§. 8.

Mündlich.

Zuerst werden die Zahlen bis 100 wiederholend vorgeführt, nicht nur zur besseren Befestigung des in den zwei ersten Schuljahren Erlernten, sondern auch um die Schüler allmählich mit dem Wesen des dekadischen Zahlensystemes vertraut zu machen. Obgleich es dem denkenden Lehrer nicht schwer fallen dürfte, eine zweckmäßige Reihenfolge solcher Wiederholungsübungen aufzustellen und einige äußere Abwechslung anzubringen, so weisen wir doch hierbei auf Seite 3 des III. Rechenbuches von Močnik hin.

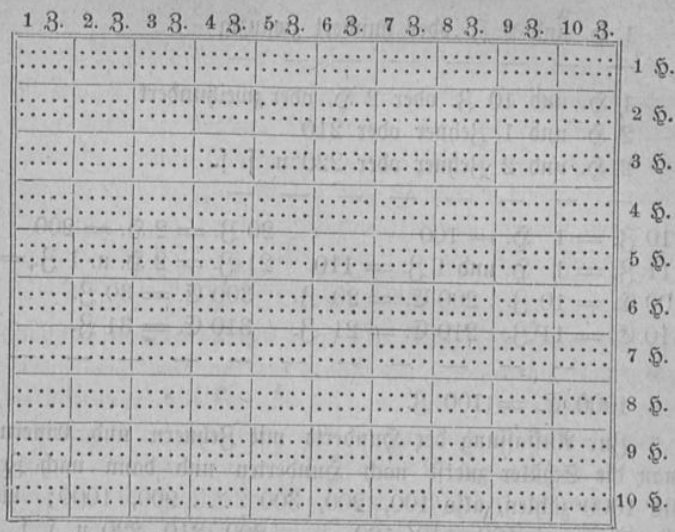
Als Veranschaulichung der Zahlen von hundert bis tausend dürften die Hunderttafel, Hunderterbünde, Hunderterplatten des Krämer'schen Rechenapparates und unsere Münzen am zweckmäßigsten sein.

Röll erweiterte den russischen Rechenapparat bis 1000. Auf jedem Stabe befinden sich 100 Scheiben, von denen 9 gelb und die 10. schwarz gefärbt ist.

Die Hunderttafel wird von dem Lehrer entweder auf die Schultafel oder auf einem großen Bogen Papier gezeichnet.

Zuerst kommt die Auffassung der Hunderte sodann der Hunderte mit Zehnern und endlich der Hunderte mit Zehnern und Einern.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



a) Die Schüler zählen die Punkte im ersten Felde und sehen, dass die gleiche Anzahl der Punkte in jedem der Felder enthalten ist. Sie sehen auch, dass jede Reihe 10 Felder enthält, und dass 10 solche Reihen untereinander stehen.

Nun werden die Zehner der ersten Reihe gezählt, und zwar: 1 Zehner, 2 Z. 3 Z. u. s. f. 10 Zehner. 10 Zehner sind 1 Hundert oder hundert. In zwei Reihen stehen 20 Zehner oder 2 Hunderte oder zweihundert u. s. w. In 10 Reihen sind 100 Zehner oder 10 Hunderter oder tausend enthalten.

b) Ist dieser Vorgang mehrmals wiederholt worden, so zeigt der Lehrer auf die Reihen in und außer der Ordnung und lässt die Schüler die Hunderte angeben; nennt dann selbst die Hunderte, lässt von einem Schüler die angegebene Reihe zeigen, und fragt dann: Wie viel Zehner sind 1 H., 2 H., 3 H.? Wieviel Hunderte sind 10 Zehner, 20 Z., 30 Z.? Wieviel Einer sind 1 Hundert, 2 H., 5 H.?

Zur Auffassung der Hunderte mit Zehnern füge der Lehrer zur ersten Reihe der Hunderttafel von der zweiten Reihe ein Feld nach dem andern hinzu, und die Schüler geben an: 1 H. und 1 Z. oder hundertzehn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1 H. und 2 Z. oder hundert zwanzig
— — — — — — — —
1 H. und 10 Z. oder 2 H. oder zweihundert
2 H. und 1 Zehner oder 210
2 H. und 2 Zehner oder 220 u. s. f.
— — — — — — — —

10 Z. = 1 H. = 100		20 Z. = 2 H. = 200
11 Z. = 1 H. und 1 Z. = 110		21 Z. = 2 H. u. 1 Z. = 210.
100 E. = 10 Z.	200 E. = 20 Z.	300 E. = 30 Z.
110 E. = 11 Z.	210 E. = 21 Z.	310 E. = 31 Z.

— — — — — — — — — — — —
1000 E. = 100 Z.

Zur Auffassung der Hunderte mit Zehnern und Einern lasse man die Schüler zuerst nach Hunderten und dann nach Zehnern bis 1000 zählen, also 100, 200, 300 .... 900, 1000; hierauf, 10, 20, ... 100, 110, 120, ... 200, 210, 220 u. s. f.

Hierauf zeigt der Lehrer auf die erste Reihe der Hunderttafel und auf den ersten Einer der zweiten Reihe und sagt: Wir haben jetzt 1 Hundert und 1 Einer oder hundert eins; zählen wir noch einen Einer dazu, so haben wir 1 H. und 2 E. oder hundert zwei u. s. f. Ebenso geht man bei der Bildung jeder folgenden Zahlenreihe vor.

Benützt man statt der Hunderttafel die Hundertbünde, so lege man auf den Tisch zur Rechten der Schüler einzelne Stäbchen, links von diesen die mittels Gummiringen zusammengehaltenen Bündchen von 10 Stäben und links von den Zehnerbündchen den einen aus 10 Zehnerbändchen bestehenden Bund, den Hundertbund. Nachdem man beachten ließ, dass in jedem Zehnerbündchen 10 Stäbe enthalten sind, lasse man von einem Schüler 10 Zehnerbündchen auf ein Häufchen legen, und frage: Wieviel Stäbe sind dies? Wievielmal 10 Stäbchen liegen beisammen? Wievielmal 10 Stäbchen sind 100 Stäbchen? Wieviel Zehner sind 100 Einer? Wir wollen diese 10 Zehnerbündchen zusammenbinden, und ein solches Bündel einen Hunderter nennen.

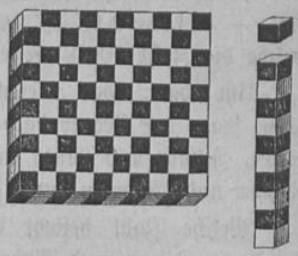
Man lasse nun das Hundertbündel zur Linken stellen und ein Stäbchen nach dem andern zulegen, während der Schüler laut zählt:

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

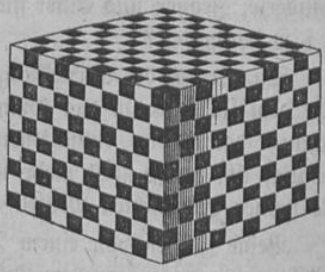
Einhundert + 1 = einhundert und eins = hundert eins. Einhundert eins + 1 = einhundert + zwei = einhundert zwei u. s. w.

Ist ein Zehner voll, so mache man wieder ein Zehnerbündchen und frage hierauf: Wieviel Hunderter und Zehner sind hundert zehn? Wieviel Zehner sind hundert zehn? Zählet von 100 bis 110. So wird bis 200 fortgefahren, der neue Hunderter wieder zusammengebunden und dann gefragt: Wieviel Zehner, wieviel Einer sind 200? Zählet von 120 auf 140! Von 175 auf 190! Welche Zahl kommt nach 152? Welche kommt vor 150?

Zwischen welchen Zahlen liegt 114, 127, 158, 169? In ähnlicher Weise läſst man vor den Augen der Schüler die Zahlen von 200 bis 300, von 300 bis 400 u. s. w. bis 1000 entstehen, vor- und rückwärtszählen, während man einen Schüler beim Zählen je 10 einzelne Stäbchen zu einem Zehner, 10 Zehner zu einem Hunderter, 10 Hunderter zu einem Tausender zusammenbinden und dabei sprechen läſst: 10 Einer geben einen Zehner, 10 Zehner einen Hunderter, 10 Hunderter einen Tausender.



Hierauf werden die Bändchen aufgelöst, und die Schüler angeleitet zu bemerken: 1 T. = 10 Hunderter, 1 H. = 10 Zehner, 1 Zehner = 10 Einer; 1 Hunderter = 10 Zehner = 9 Z. + 10 E. = 100 E.; 1 T. = 10 H. = 9 H. + 10 Z. = 9 H. + 9 Z. + 10. E. = 1000 E.



Der Krämer'sche Rechenapparat besteht aus 10 einzelnen Holzwürfeln, welche die Einer vorstellen, aus 9 Zehnerstäben, welche mit den 10 Einerwürfeln eine Hundertplatte bilden und 9 Hundertplatten, welche mit der durch die Einerwürfel und Zehnerstäbe gebildeten Hundertplatte den Tausender darstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man verwendet diesen Apparat wie den russischen Rechenapparat und die Stabbündel. Die zwischen 100 und 1000 liegenden Zahlen werden aus der Vereinigung einer Anzahl von Hundertplatten mit den Zehnerstäben und einzelnen Würfeln gebildet. Z. B. 231 aus 2 Hundertplatten, 3 Zehnerstäben und 1 Einerwürfel.

Um diesen Zahlenkreis mit Münzen zu versinnlichen, sind 10 Guldenstücke, 10 Zehnkreuzerstücke und 10 Kreuzerstücke, welche die Hunderter, Zehner und Einer vorstellen, zu verwenden. Wird zu einem dieser Guldenstück ein Kreuzer gelegt, so hat man hundert und einen Kreuzer, also die Zahl 101 und so erhält man nach und nach die Zahlen 102, 103 u. s. w. indem man immer einen Kreuzer zulegt.

Bei der Zahl 110 kann man die zehn Kreuzer durch ein Zehnkreuzerstück ersetzen, wodurch recht anschaulich wird: 110 = 1 H. + 1 Z.; die Zahl 111 wird durch 1 Gulden, 1 Zehnkreuzerstück und 1 Kreuzer gestellt, die Zahl 200 durch 2 Gulden, die Zahl 999 durch 9 Gulden, 9 Zehner und 9 Kreuzer. Legt man noch einen Kreuzer hiezu, so hat man 9 Gulden, 9 Zehner und 10 Kreuzer; wofür man, da 10 Kreuzer wieder ein Zehner sind 9 G. + 9 Z. + 1 Z. = 9 G. + 10 Z. = 9 G. + 1 G. = 10 Gulden, welche die Zahl 1000 vorstellen.

Um das über diesen Zahlenkreis Gelehrte recht einzuüben, frage der Lehrer bald nach der Zahl, welche gegebene Hunderter, Zehner und Einer enthält, und umgekehrt, welche Hunderter, Zehner und Einer in einer gegebenen Zahl enthalten sind, als:

Welche Zahl besteht aus 5 H., 4 Z. und 7 E.? Wieviele Hunderte, Zehner und Einer sind in der Zahl 834, 692, 580, 901 u. s. w. enthalten?

Da wir auf die Vorstellung der hohen Zahlen nur durch Schlüsse von dem Zahlenkreise aus kommen, innerhalb dessen die Veranschaulichung der darin enthaltenen Zahlen durch concrete Dinge leicht möglich ist; so ist nicht mehr nothwendig diese hohen Zahlen durch die früher gebrauchten Mittel (Striche, Stäbchen ꝛc.) zu versinnlichen.

Beim Zählen von einem Tausend zum andern wird in derselben Weise vorgegangen, wie im Zahlraume von 1 bis 1000; als: 1001, 1002 . . . . 1099, 1100, 1001 . . . . 1199, 1200 . . . 2001 u. s. w. bis 9999.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch hier sind wieder Übungen im Zusammenfassen und Zerlegen der Zahlen unerläßlich, z. B.

Welche Zahl besteht aus 7 T., 5 H., 3 Z., 4 E.?

Wieviel Tausender, Hunderter, Zehner und Einer enthält die Zahl 6984?

Zerlege die Zahl 9423 in die einzelnen Zahlworte, dann in Tausende und Einer! 9423 = 9 T., 4 H., 2 Z., 3 E. = 9 T., 423 Einer u. s. w.

In gleicher Weise wird der Zahlkreis der Zehntausende, Hunderttausende, Millionen und höhere Zahlen behandelt.

§. 9.

Schriftlich.

So wie beim Anschreiben der aus Einern und Zehnern bestehenden Zahlen verfahre man auch bei den Hunderten und allen folgenden Zahlen.

Hat man schon beim Anschreiben der Zahlen bis 100 gezeigt, daß die Ziffer 1 an der 3. Stelle 1 Hundert bedeutet, so werden die Schüler leicht einsehen, daß jede andere Ziffer an der dritten Stelle ebensoviele Hunderte bedeutet als sie an der ersten Stelle Einer darstellt, daß zweihundert, dreihundert u. s. w. durch 200, 300 u. s. w. ausgedrückt werden; die Zahl hundert zehn, welche aus 1 Hunderter und 1 Zehner besteht durch 110 und die Zahl hundert eilf, welche mit 111 dargestellt werden muß. Um das Erklärte noch mehr zu befestigen und Abwechslung zu erzielen, dictiere der Lehrer Zahlen auf verschiedene Art, z. B. Schreibt dreihundert acht und vierzig Einer! Sechshundert Einer und fünf Einer! Vier Hunderter, zwei Zehner und acht Einer! Drei und neunzig Zehner! Fünf und vierzig Zehner und sechs Einer u. s. w.

Er schreibe eine zweizifferige Zahl, z. B. 45 an die Tafel, lasse sie aussprechen und auflösen, hänge ihr dann zur Rechten eine Nulle an (450) und frage: An der wievielten Stelle steht jetzt die Ziffer 5, an der wievielten die Ziffer 4? Welchen Wert hat daher jetzt die Ziffer 5, welchen die Ziffer 4? Wievielmal so viel sind 5 Zehner als 5 Einer, 4 Hunderter als 4 Zehner?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wievielmal so groß ist der Wert jeder dieser Ziffern geworden? Die Zahl hieß früher 45 oder 45 Einer; in was sind die 45 Einer durch Anhängung der 0 verwandelt worden? An der wievielten Stelle stand die Ziffer 5 vor Anhängung der 0, und an welcher die Ziffer 4? An die wievielte Stelle kam die Ziffer 5, und an welche die Ziffer 4 durch die Anhängung der 0? Um wieviele Stellen wurde daher jede Ziffer weiter zur Rechten gerückt? Wie vielmal so groß sind 45 Zehner als 45 Einer? Das Wievielfache sind 45 Zehner von 45 Einern? Wievielmal 45 Einer sind 45 Zehner? Wievielmal so groß wird daher eine Zahl, wenn man jede Ziffer derselben um eine Stelle weiter zu Rechten rückt? Wodurch ist die Vorückung geschehen? Nun wollen wir der Zahl 45 eine 0 vorsetzen (045); wieviele Hunderter, Zehner und Einer sind jetzt vorhanden? Wieviele Hunderter Zehner und Einer enthält die Zahl 45? Ist der Wert der Zahl 45 auch durch Vorsetzung der 0 verändert worden?

Eben so verfahre man beim Anschreiben größerer Zahlen, d. h. man führe die Schüler auf die auf Seite 6 angegebene Weise darauf, dass die Tausender in die 4. Stelle*). die Zehntausender in die 5. Stelle u. s. w. zu schreiben sind, und übe sie bei jedem Fortschreiten von Stelle zu Stelle in der oben angegebenen Art, so lange bis sie die gehörige Fertigkeit sowohl im Anschreiben als auch im Lesen der Zahlen erlangt haben.

Ist der Lehrer bis zu den Millionen gekommen, so schreibe er eine siebenzifferige Zahl z. B. 3333333 an die Tafel und frage: Was bedeutet die Ziffer 3 an der ersten Stelle zur Rechten? Was an der zweiten Stelle? Wievielmal 3 Einer sind 3 Zehner? Was bedeutet die Ziffer 3 an der dritten Stelle? Wievielmal 3 Zehner sind 3 Hunderter? u. s. w. Die Schüler werden auf diese Art zur Einsicht geführt:

1. Zehn Einheiten einer Ordnung bilden immer eine Einheit der höheren Ordnung; 10 Einer, 1 Zehner, 10 Zehner, 1 Hunderter u. s. w.

2. Bei einer mehrzifferigen Zahl bedeutet jede Ziffer in der nächstfolgenden Stelle zur Linken zehn-

* Die Schüler werden im 3. Schuljahre nur bis zum Anschreiben und Lesen Zahlen bis 1000 geführt.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

mal so viel als in der nächstvorhergehenden, also in der ersten Stelle Einer, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende u. s. w.

Aus diesem Grunde nennt man die Zusammenstellung der Zahlen in dieser Ordnung die Zehnerordnung oder von dem griechischen Worte deka (zehn) das dekadische Zahlensystem.

Haben die Schüler das bereits Entwickelte gut aufgefasst, so kann der Bau des Zahlengebäudes weitergeführt und auf die Unendlichkeit der Zahl hingewiesen werden.

10 Millionen = 1 Zehnmillion = 10,000.000
10 Zehnmillionen = 1 Hundertmillion = 100,000.000
10 Hundertmillionen = 1 Tausendmillion = 1000,000.000
10 Tausendmillionen = 1 Zehntausendmillion = 10.000,000.000
10 Tausendmillionen = 1 Hunderttausendmillion = 100.000,000 000
10 Hunderttausendmillionen = 1 Billion = 1„000.000,000.000

Um den Schülern das Anschreiben der Zahlen möglichst zu erleichtern, mache man sie aufmerksam, dass sich bei den Zahlen über Tausend eben so wie bei denen unter Tausend die Benennungen Einer, Zehner, Hunderter wiederholen, dass also je drei auf einander folgende Stellen der Einer, Zehner, Hunderte eine eigene Classe von Einheiten bilden. Die drei niedrigsten Stellen werden geradezu Einer, Zehner, Hunderte; die drei nächstfolgenden Stellen Einer, Zehner, Hunderte, der Tausende, die weiter folgenden Einer-Zehner und Hunderte der Millionen genannt u. s. w. Ebenso bilden je 6 Ziffern eine weitere Classe.

Zur Erleichterung der Übersicht bilde der Lehrer an der Schultafel und der Schüler auf der Schiefertafel folgendes Schema:

Billionen						Millionen						Einer					
Tausender			Einer			Tausender			Einer			Tausender			Einer		
Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer

Um den Schülern das Lesen der angeschriebenen Zahlen noch leichter zu machen, lasse er die Zahlen von der Rechten angefangen in Classen zu drei Ziffern abtheilen, nach der ersten Classe

einen Punkt und nach der zweiten einen Beistrich setzen und sage ihnen, dass der Punkt statt des Wortes Tausend und der Beistrich statt des Wortes Millionen dasteht, und mache die Schüler aufmerksam, dass sie es immer nur mit der Benennung Einer, Zehner und Hunderter zu thun haben, kurz jede einzelne Classe so auszusprechen haben, als ob sie für sich allein stände, und dass sie bei dem Punkte nur das Wort Tausend und bei dem Striche das Wort Millionen hinzusetzen sollen.

Soll z. B. die Zahl 38,652.912 ausgesprochen werden, so lasse der Lehrer diese Zahl zuerst auf die angegebene Art in Classen eintheilen und frage dann: Welche Zahl steht in der Classe der Millionen? Leset sie? Was bedeutet der Beistrich? Was habt ihr also zur Zahl 38 noch hinzu zu sprechen? Wieviele Hunderter, Zehner und Einer befinden sich in der Classe der Tausende? Wie heißt diese Zahl? Was heißt der Punkt? Sprecht nun auch die niedrigste Classe aus?

Nun werden auch Zahlen mit Nullen angegeben, z. B. 19,507.068 Die Schüler werden anstandslos die Classe der Millionen und der Tausende lesen; bei der niedrigsten Classe frage man: Was steht an der Stelle der Hunderte? Weil keine Hunderte vorhanden sind, so spricht man nur die Zehner und Einer aus. Wie heißt dann diese Zahl? Nun wird die ganze Zahl gelesen: Neunzehn Millionen, fünfhundert sieben tausend, acht und sechzig.

Beim Anschreiben der ausgesprochenen Zahlen lasse der Lehrer die Schüler jedesmal zuerst jene ein-, zwei- oder dreizifferige Zahl anschreiben, nach welcher das erstemal der Beisatz Tausend oder Millionen gehört wird, und hierauf gegen die Rechte hin die übrigen Bestandtheile nach der Ordnung, wie man sie in Abtheilungen nach Hunderten, Zehnern und Einern ausspricht, ebenso auch schriftlich in Classen von je drei Ziffern darstellen. Zuerst dictiere er Zahlen, in welchen keine Stelle mit einer 0 zu besetzen ist, und dann solche, in welchen die Zehner oder Einer einer Classe fehlen u. s. w. und mache die Schüler aufmerksam, dass man achtgeben müsse, ob immer Hunderter, Zehner und Einer genannt werden.

Es soll z. B. die Zahl: vier Millionen, dreihundert zwei und fünfzig tausend, fünfhundert acht und zwanzig mit Ziffern angeschrieben werden. Wieviel Millionen werden hier angegeben? Welche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ziffer habt ihr daher zuerst anzuschreiben? Welches Zeichen hat man für das Wort Millionen? Was werdet ihr daher nach der Ziffer Vier machen? Wieviele Classen von Ziffern folgen jetzt noch? Also wie viele Ziffern? Ich gebe noch dreihundert acht und vierzig tausend an; diese Classe muss in die nächsten drei Stellen kommen: Was hört ihr in der Classe der Hunderter, Zehner, Einer? Was für ein Zeichen macht man statt des Wortes Tausend? u. s. w.

Es soll die Zahl fünf Millionen, acht und vierzigtausend, zweihundert und sechs mit Ziffern angeschrieben werden. Wieviele Millionen sind hier genannt? Was für ein Zeichen macht man nach der Ziffer fünf? Wieviele Classen von Ziffern müssen noch folgen? Also wieviele Ziffern? Was müsstet ihr in die folgenden Stellen noch schreiben, wenn außer den fünf Millionen weiter nichts angegeben wäre? Es sind aber noch acht und vierzig tausend angegeben; in welche Stelle muss diese Classe kommen? Hört ihr in dieser Classe auch Hunderte? Womit müsst ihr daher die Stelle der Hunderte besetzen? Ihr schreibt daher in die zweite Classe 048 und machet nach derselben einen Punkt. Wieviele Ziffern müssen noch folgen, damit diese Clase die Classe der Tausende werde? Was müsste man an die Stelle derselben setzen, wenn nichts weiter angegeben wäre? Es sind aber zu den 5 Millionen, 48 Tausenden noch zweihundert sechs angegeben. Hört ihr hier Hunderte, Zehner und Einer aussprechen? Welche Benennung hört ihr nicht? Was müsset ihr daher an die Stelle der Zehner setzen? Wir schreiben daher: 5,048.206.

Sehr hohe Zahlen kommen im praktischen Leben nur selten vor; es wäre daher Zeitverschwendung, sich viel mit denselben zu befassen.

§. 10.

Die römischen Ziffern und Geschichtliches.

Das Schreiben der Zahlen mit römischen Ziffern kommt nach unserem Lehrplane erst im 4. Schuljahre vor, es ist jedoch angezeigt, die Schüler der vorhergehenden Classen mit der Bedeutung dieser Zeichen für die Zahlen von 1 bis 12 bekannt zu machen, da dieselben auf Zifferblättern so vieler Uhren, bei Aufschriften, bei den Abschnitten der Bücher, als Jahreszahlen an Monumenten vorkommen und sie überdies die Zahl, welche sie bezeichnen, mehr veran-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schaulichen als die arabischen, ja da sie selbst als eine Übung im Zählen dienen können.

Spracharmut nöthigte die Menschen zur Darstellung der Zahlen ihre Zuflucht zu Zeichen zu nehmen, wozu die Finger das nächste und dienlichste waren. Eine so große Sammlung von Einheiten sie anzeigen wollten, so viele Finger zeigten sie vor. Auf diese Art bezeichneten sie auch die Einheit mit I, die Zahl zwei mit II, drei mit III, vier mit IIII oder IV, fünf mit V, sechs mit VI, sieben mit VII, acht mit VIII, neun mit VIIII oder IX und zehn mit X.

Die Zeichen für eins, zwei, drei, vier sind die Bilder der vier Finger, das Zeichen für fünf (V) ist das Bild der vier zusammengehaltenen Finger mit dem seitwärts gehaltenen Daumen, das Zeichen für zehn (X) ist das doppelte Zeichen für fünf. Die Zeichen für die Zahlen zwischen fünf und zehn sind Zusammensetzungen aus fünf mit eins, fünf mit zwei u. s. w. Für die folgenden Zahlen bedienten sie sich dann der Zusammensetzungen so vieler Zeichen von zehn, als wie oft diese zehn vorhanden waren, in Verbindung mit den neun ersteren Zahlzeichen. Die Unbequemlichkeit, eine Menge solcher Zeichen zu setzen, war die Veranlassung noch größere Zahlenausdrücke mit dem Anfangsbuchstaben des Wortes, mit welchem sie diese Zahl aussprachen, zu bezeichnen. Aus diesem Grunde drückten sie die Zahl hundert oder zehnmal zehn mit C aus, als dem Anfangsbuchstaben des Wortes centum, welches diese Zahl bezeichnet; die Zahl tausend oder zehnmal hundert bezeichneten sie mit M, als dem Anfangsbuchstaben des Wortes mille, welches diese Quantität ausdrückt. Da die Römer ihre Buchstaben anfänglich immer geradlinig machten, so hatte das C die Form E; die Hälfte hiervon oder L benützten sie zur Bezeichnung der Hälfte dieser Zahl, also für fünfzig, diesem zufolge bezeichneten sie auch sechzig mit LX, siebenzig mit LXX, achtzig mit LXXX. Der Buchstabe M, wurde auch mit CIC bezeichnet und die Hälfte hiervon gibt beiläufig den Buchstaben D, welchen sie auch zur Bezeichnung der Hälfte von tausend also für fünfhundert wählten. Das Anhäufen der gleichartigen Zeichen suchten sie auch dadurch zu vermeiden, dass sie Zahlen mit dem Zeichen der folgenden höheren Zahlen bezeichneten, und den Unterschied zwischen der zu bezeichnenden und der höheren Zahl vor das Zeichen der höheren Zahl setzten; so schrieben sie statt IIII

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das Zeichen IV, statt VIIII das Zeichen IX, statt XIIII, das Zeichen XIV, statt XVIIII das Zeichen XIX u. s. w., statt XXXX das Zeichen XL, statt LXXXX das Zeichen XC, statt CCCC das Zeichen CD, statt DCCCC das Zeichen CM.

Nach dem Gesagten wird die Jahreszahl 1882 geschrieben MDCCCLXXXII.

Im wirklichen Rechnen wurde das Zehnersystem befolgt; die Römer und die Griechen hatten Rechenbretter, welche durch parallele Linien oder Streifen abgetheilt waren, ein Steinchen (calculus, daher calculare, Rechnen) bedeutete im ersten Streifen rechts Einer, im zweiten Zehner, im dritten Hunderter u. s. w. Dieser Rechenbretter bediente man sich in Deutschland bis ins sechzehnte Jahrhundert, und noch heute kennen viele Bauern in Rußland kein anderes Rechnungsmittel. Die Jahreszahl 1882 sieht auf einem solchen Rechenbrette so aus:

T.	H.	Z.	E.
0	00	00	00
	00	00	
	00	00	
	00	00	

Unser Zahlensystem wäre gewiss viel früher entstanden, wenn man bei den Zahlzeichen die Eintheilung nach zehn so festgehalten hätte, wie in der Tonsprache; hätten die Römer keine eigenen Zeichen für fünf, fünfzig, fünfhundert gewählt, so wären sie gerade zu unserer Zahlenschrift gelangt, deren Ursprung in Indien zu suchen ist. Ohne die früher angegebenen Kürzungen müsste man die Zahl 1882 so schreiben MCCCCCCCCXXXXXXXXII. Diese Art Zahlenschrift wurde vielleicht durch Jahrhunderte fortgesetzt bis etwa Einer den glücklichen Einfall hatte, statt die Zahlzeichen immer selbst zu wiederholen, die Zahl oben zu bezeichnen, wie oft dieses Zahlzeichen wiederholt werden soll, z. B.:

I	IIIIIIIII	IIIIIIIII	II
M	C	X	I.

Setzt man für die oberen Zahlen die arabischen Ziffern, so erhält man

1	8	8	2
M	C	X	I.

Diese verbesserte Art zu schreiben wurde wieder lange Zeit angewandt bis man fand, es sei doch überflüssig immer die Zeichen I, X, C, M unten anzuschreiben, da ja doch die letzte Ziffer Einer, die vorletzte Zehner, die vorvorletzte Hunderter u. s. w. bedeute; nur eine Schwierigkeit zeigte sich, wenn eines dieser Zahlzeichen nicht vorkam, z. B.:

$$\begin{matrix}5 & 2 & 8\\ M & C & I\end{matrix} = 5208,\quad \begin{matrix}6 & 4 & 7\\ M & X & I\end{matrix} = 6047,\quad \begin{matrix}8 & 3\\ M & X\end{matrix} = 8030.$$

Würde hier das untere Zeichen weggelassen, so würde man 5208 mit 528, 6047 mit 647, 8030 mit 83 verwechseln. Dieser Fortschritt machte ein neues Zeichen nothwendig, um einen leeren Platz anzudeuten; hiezu wählte man einen unausgefüllten Kreis (arabisch sifron, siron) d. i. die Nulle; hiedurch war

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also auch diese Schwierigkeit gehoben, und obige Zahlen zu schreiben $\frac{5\ 2\ 0\ 8}{M\ C\ X\ I}$, $\frac{6\ 0\ 4\ 7\ 8\ 0\ 3\ 0}{M\ C\ X\ I,\ M\ C\ X\ I,}$ konnte man die unteren Zeichen, ohne ein Missverständnis zu befürchten, weglassen.

Von den Indiern bekamen die Araber diese Zahlenschrift, daher wir unsere Zahlzeichen arabische Ziffern nennen, von den Arabern kamen sie durch Nordafrika zu den Mauren nach Spanien, wo sie Gebert, der nachmalige Papst Sylvester II. im Jahre 999 kennen lernte und ihre Kenntnis in das Abendland brachte. Jahrhunderte vergiengen wieder, bis sie Gemeingut der minder Gebildeten wurde. Zu Ende des sechzehnten Jahrhundertes wurde endlich der letzte Schritt der Vervollkommnung durch Stifel in Deutschland, Stevin in den Niederlanden, Bombelli in Italien gethan; es war die Einführung der Decimalen.

Zur Zeit der Reformation gebrauchte man im täglichen Leben noch die römischen Zahlzeichen und erst Adam Riese und andern Verfassern von Rechenbüchern gelang es, den arabischen Ziffern und dem Rechnen mit denselben auch im bürgerlichen Leben Eingang zu verschaffen.

Für die höheren Zahlen wurden erst nach und nach, wie es das Bedürfnis verlangte, Zahlwörter gebildet. So kommt z. B. das Wort Million in dem Rechenbuche von Adam Riese (1535) nicht vor, er sagt dafür 1000 mal 1000.

Das Wort Million findet sich zuerst 1494 in einem italienischen Rechenbuche. Billion (millionenmal Million), Trillion, Quadrillion 2c. kamen erst im vorigen Jahrhunderte vor. Das Wort Milliarde bedeutet 1000 Millionen, und unter Myriade versteht man entweder eine unbestimmte, große Menge oder auch 10.000.

Wir haben im Vorhergehenden der leichteren Übersicht wegen das ganze dekadische System mit Ausschluss der Decimalen behandelt, und erinnern hier nur, dass man im 3. Schuljahre den Zahlraum nur bis 1000 zu erweitern hat. Es dürfte dem Lehrer nicht schwer werden, aus dem Ganzen das für den genannten Zahlraum Erforderliche zu entnehmen. Hierauf gestützt, werden wir auch beim schriftlichen Rechnen selbst das Ganze im Zusammenhange vornehmen. Sogleich nach der schriftlichen Darstellung der Zahlen bis 1000 muss auch die Kenntnis der Maße und Gewichte entsprechend vervollständigt werden.

Bei der Zeiteintheilung wird angegeben, dass ein gemeines Jahr 365, das Schaltjahr 366 Tage hat u. s. w.

Bei der Eintheilung der Gewichte: 1 Kilogramm = 1000 Gramm; 1 Tonne = 1000 Kilogramm; 1 Gramm = 10 Deci-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gramm; 1 Decigramm = 100 Centigramm; 1 Centigramm = 10 Milligramm, daher 1 Gramm = 1000 Milligramm.

Beim Längenmaße: 1 Kilometer = 1000 Meter, 10 Kilometer = 1 Myriameter, 1 Centimeter = 10 Millimeter, daher 1 Meter = 1000 Millimeter.

Die methodische Durchführung der Flächen- und Körpermaße behalten wir uns für die geometrische Formenlehre, und weisen vorderhand nur auf das hin, was bei Behandlung des Krämer'schen Rechenapparates gesagt wurde.

§. 11.

Zusammenzählen oder Addieren.

a) Das Zuzählen im Kopfe.

Es ist unerläßlich, daß im 3. Schuljahre das in den beiden ersten Schuljahren Vorgekommene der Hauptsache nach wiederholt werde; wir weisen hierbei auf das III. Rechenbuch von Močnik hin.

An die Wiederholungen des im ersten und zweiten Schuljahre Erlernten schließt sich das Zuzählen von 2 in den höheren Hunderten an, wobei die Schüler gar bald bemerken, daß man die 2 immer nur zu den Einern, also Einer zu Einern zu zählen braucht, die Hunderter aber unverändert bleiben. Z. B. 101 + 2 = 103, 103 + 2 = 105 u. s. f.

Hierauf folgen die Übungen außer der Reihe: Wieviel ist 117 und 2? 238 und 2?

Auf dieselbe Art geschieht das Zuzählen von 3, 4. . . 9.

Sind Zehner zu Zehnern zu zählen, so benütze man anfangs die Zahlwerte, z. B. Wieviel ist 40 und 30? Wieviel Zehner hat die Zahl 40, wieviel die Zahl 30? Wieviel sind 4 Zehner und 3 Zehner? Wieviel Einer sind 7 Zehner? Wieviel ist also 40 und 30?

Ebenso verfahre man, wenn Hunderter zu Hundertern zu zählen sind.

Bestehen die Zahlen aus Zehnern und Einern, so leite man die Schüler an, daß sie zuerst die Zehner und dann die Einer zusammenzählen. Z. B. Wieviel ist 35 und 42? Aus wieviel Zeh-

neren und Einern besteht die Zahl 35? die Zahl 42? Wieviel Zehner sind 3 Zehner und 4 Zehner? Wieviel Einer sind 7 Zehner? Wieviel sind 5 Einer und 2 Einer? Wieviel sind 70 Einer und 7 Einer?

Auf dieser Stufe wird es den Schülern nicht schwer fallen, die Zehner einer Zahl zu der anderen Zahl zu addieren und hierauf die zurückgelassenen Einer hinzuzuzählen.

Z. B.: Wieviel sind 43 und 24? 43 + 20 = 63, 63 + 4 = 67. Obgleich die zweite Art des Zuzählens kürzer ist, so ist doch zu empfehlen, die erstere recht fleißig zu üben, da sie auf das Zifferrechnen vorbereitet.

Enthält die hinzuzuzählende Zahl nebst Einern und Zehnern auch noch Hunderte, so zählt man zur ersten unzerlegten Zahl zuerst die Hunderte, dann die Zehner und Einer der zweiten Zahl hinzu. Z. B.: Wieviel ist 762 und 234? 762 + 200 = 962, 962 + 30 = 992, 992 + 4 = 996.

Da das Merken dreistelliger Zahlen für die Schüler schwierig ist, so braucht man bei dieser Stufe nicht lange zu verweilen. Auch mit gewissen Vortheilen können die Schüler hier bekannt gemacht werden. Z. B.

26 + 19 = 25 + 20 = 45 oder 30 + 15 = 45.
345 + 297 = 342 + 300 = 642.

b) Schriftliches Addieren.

Die Schüler haben bisher das schriftliche Addieren einziffer iger Zahlen gelernt, wobei sie die Posten neben einander schrieben und zwischen dieselben das Additionszeichen setzten. Der Lehrer lasse nun ein Beispiel auf die Art ausarbeiten und benütze dasselbe um die Schüler mit den Ausdrücken: Addieren, Posten und Summe bekannt zu machen. Man lasse z. B. die Zahlen 2, 3, 6 und 7 wie bisher addieren, also: 2 + 3 + 6 + 7 = 18. Was haben wir mit den Zahlen 2, 3, 6 und 7 gemacht? Welche neue Zahl haben wir durch das Zusammenzählen dieser Zahlen erhalten? Welchen Zahlen zusammengenommen ist also die Zahl 18 gleich? (Noch mehrere solche Beispiele.) Wieviele Zahlen haben wir nun jedesmal statt mehrerer Zahlen erhalten? Suchet nun, welcher Zahl die Zahlen 5, 2 zusammengenommen gleich sind? Ebenso 3, 6, 8, 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine Zahl suchen, welche mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist, heißt **addieren**.

Wie heißt man das, eine Zahl suchen ꝛc? Was heißt addieren?

Addiert nun die Zahlen: 6, 8, 4, 3. Welche Zahlen habt ihr hier addiert?

Die Zahlen, welche addiert werden, heißen Posten, oder Summanden.

Wieviel Posten hat unsere Rechnung? Gebt alle Posten an. Gebt selbst mehrere Posten an und addiert sie. Welche Zahl haben wir durch das Addieren dieser Zahlen erhalten?

Die Zahl, welche man durch das Addieren erhält nennt man Summe.

Wie heißt in unserer Rechnung die Summe? Was ist größer, die Summe oder die Posten zusammengenommen? Gebt zwei Zahlen an, deren Summe 12 ist. Nennt drei Zahlen für die Summe 36. Die erste von drei Posten ist 5, die zweite 8 und die dritte 7; wie heißt ihre Summe? Wie heißt die Summe, wenn die erste Post 8, die zweite 7 und die dritte 5 ist?

Nun mache man die Schüler aufmerksam, dass man die Posten auch unter einander schreiben und die Summe von denselben durch einen Querstrich zu trennen pflegt, und dringe hiebei darauf, dass die Posten genau in senkrechter Richtung unter einander und die Einer der Summe mit den Einern der Posten in eine gerade Linie zu stehen komme. Z. B.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 6 \\ \hline 29 \end{array}$$

Beim Kopfrechnen kamen die Schüler zur Einsicht, dass man nur Gleichartiges addieren kann; zur noch größeren Klarheit führe man noch auffallendere Beispiele an, z. B. frage man ob 3 Knaben und 4 Bäume 7 Knaben oder 7 Bäume seien ꝛc. Der Lehrer lasse einer Addition zweizifferiger Zahlen im Kopfe machen, schreibe nun dieselben Posten an die Tafel und frage, wie man anzuzeigen pflegt, dass diese Zahlen addiert werden sollen, wohin man die Summe zu schreiben und welches Zeichen man zwischen die Posten zu setzen habe. Z. B. 21 + 12 + 36 = 69. Hierauf lasse man die Posten auflösen, also:

a) 21 = 2 Z. + 1 E.
12 = 1 Z. + 2 E.
36 = 3 Z. + 6 E.
69 = 6 Z. + 9 E.

Die Schüler haben nun wieder nur einzifferige Zahlen zu addieren, was sie ja schon gelernt haben. Beim Kopfrechnen wurden sie gewöhnt, zuerst die Zehner und dann Einer zu addieren und dann die beiden Summen wieder auf eine Summe zu bringen. Dieses Verfahren behalte man auch anfangs beim schriftlichen Rechnen bei, und lasse sie dann bemerken, dass man die Summe 6 Z. + 9 E. = 69 sofort erhält, wenn die Posten, wie bei a) untereinander, und die Summe der Zehner unter die Zehner und die Summe der Einer unter die Einer schreibt.

Zu den ersten Aufgaben wähle man die Posten so, dass weder die Summe der Einer noch jene der Zehner mehr als 9 beträgt. Hierauf kommen Beispiele, in welchen die Summe der Einer 10 oder größer als 10 ist, und lasse anfangs die Zahlen, wie bei der vorigen Stufe auflösen, und bei den Zehnern beginnen; schreibe aber die Summe der Zehner z. B. 8 Z. oder 80 E. seitwärts und darunter die Summe der Einer, also 16 Einer. Werden diese beiden Summen addiert, so geben sie 96 Einer. Man lasse die Schüler hierbei bemerken, dass die 6 Einer der Summen 16 wieder als Einer der ganzen Summe erscheinen, der Zehner der Summe 16 aber zu den 8 Zehnern d. i. zur Summe der Zehner, gezählt wurde.

a) 35 = 3 Z. + 5 E.
14 = 1 Z. + 4 E.
47 = 4 Z. + 7 E.

b) 80 E.
16 E.
96 E.

Um die Schüler zur Einsicht zu bringen, dass es kürzer sei, die Addition bei den Einern zu beginnen, lasse man, wie bisher bei den Zehnern anfangen und die Summe derselben also 8 Z. bei a) unter die Zehner schreiben. Addiert man die Einer, so erhält man 16 Einer oder 1 Z. und 6 E. Diese 6 E. setzt man an die Einerstelle, 1 Z. kann man aber nicht an die Zehnerstelle setzen, da ja dort schon 8 Zehner stehen; daher wird man diesen Zehner zu den 8 Zehnern zählen, die Ziffer 8 weglöschen und dafür 9 schreiben Addiert man zuerst die Einer und dann die Zehner, so entfällt die Ausbesserung.

Die Schüler sehen hieraus, dass die Addition abgekürzt wird, wenn man bei den Einern beginnt, die Einer der erhaltenen Summe

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

unter die Einer schreibt, die Zehner im Gedächtnis behält, bis man die Summe der Zehner gefunden hat und sie zu dieser hinzuzählt. Schließlich mache man die Schüler aufmerksam, dass man die Zehner der ersten Summe, um sie nicht zu vergessen, sogleich zu den Zehnerposten zählt, so als ob sie unten noch dazu geschrieben wären. Man sagt also: 1 und 4 ist 5 u. s. w.

In derselben Weisegeht man bei der Addition größerer Zahlen vor.

Die Probe über die Addition wird am besten dadurch gemacht, dass man sie nochmals und zwar von oben nach unten, vornimmt, wenn man sie zuerst von unten nach oben gemacht hat.

Aufgaben M. III. R. S. 11 und 12. A. K. III. S. 10 bis 13.

§. 12.

Wegzählen oder Subtrahieren.

a) Wegzählen im Kopfe.

Nach dem Wegzählen von 1, welches nur das Rückwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe ist, beginnt das Wegzählen von 2, 3, u. s. w. z. B.

100 — 2 = 98, 98 — 2 = 96 . . . . . bis 0
99 — 2 = 97, 97 — 2 = 95 . . . . . bis 1
200 — 2 = 198, 198 — 2 = 196 . . . . . bis 100.
500 — 2 = 498, 498 — 2 = 496 . . . . . bis 401.
3 — 2 = 1, 15 — 2 = 13, u. s. w.

Ähnlich wird beim Wegzählen von 3, 4, 5 . . . 9 verfahren. Aufgaben im Močnik III. Rechenbuche Seite 13.

Sind Zehner von Zehnern wegzuzählen, so benütze man anfänglich die Zahlwerte, z. B. 70 — 30 =?

Wieviel Zehner sind 70 Einer? Wieviel Zehner sind 30 Einer? Wieviel sind 7 Z. weniger 3 Z.? Wieviel Einer sind 4 Zehner? Wieviel ist also 70 weniger 30?

Ebenso verfahre man, wenn Hunderter von Hundertern wegzuzählen sind.

Sind Zehner oder Zehner und Einer von Zehnern und Einern wegzuzählen, so lasse man anfangs die Zahl unzerlegt und zähle von ihr zuerst die Zehner und dann die Einer weg. Z. B. 78 — 52 =? 78 — 50 = 28, 28 — 2 = 26.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um aber die Schüler für das Zifferrechnen vorzubereiten, zerlege man die Zahlen in Zehner und Einer und lasse zuerst die Zehner von den Zehnern und dann die Einer von den Einern wegzählen. Z. B. 78 — 52 =? 78 = 7 Z. + 8 E.; 52 = 5 Z. + 2 E.; 7 Z. — 5 Z. = 2 Z.; 8 E. — 2 E. = 6 E.; 2 Z. + 6 E. = 26. In gleicher Weise verfährt man beim Wegzählen dreizifferiger Zahlen; man zieht von der ersten unzerlegten Zahl zuerst die Hunderter, dann die Zehner und hierauf die Einer ab Z. B. 638 — 325 =? 638 — 300 = 338; 338 — 20 = 318 318 — 5 = 313.

Wegen der Schwierigkeit dieser Übungen sind dieselben zu beschränken.

Schriftliche Aufgaben siehe Močnik III. Rechenbuch Seite 14, d.

Vortheile. Vor allem macht man den Schülern den Satz klar: Der Unterschied bleibt gleich, wenn man die gegebenen und die wegzunehmende Zahl um gleichviel vergrößert oder verkleinert. Am besten geschieht dieses, wenn man zu beiden Zahlen zuerst 1, dann 2 u. s. w. addiert und dann davon subtrahiert.

Z. B. 5 — 2 = 3, 6 — 3 = 3, 12 — 7 = 5, 11 — 6 = 5, 10 — 5 = 5.

24 — 18 = 26 — 20 = 6, 34 — 22 = 32 — 20 = 12, 72 — 47 = 75 — 50 = 25, 57 — 33 = 54 — 30 = 24 212 — 25 = 217 — 30 = 187, 216 — 45 = 211 — 40 = 171

Man sieht hieraus, dass man durch Anwendung dieses Satzes die Zahlen so verwandeln kann, dass man immer nur reine Zehner wegzuzählen hat. — Abgeleitete und angewandte Aufgaben in Močniks III. Rechenbuche M. S. 14, e und M. S. 15.

b) Schriftliches Subtrahieren.

Abziehen oder Subtrahieren heißt eine Zahl (Subtrahend) von einer andern (Minuend) wegnehmen. Gibt man zur übrig gebliebenen Zahl (Rest) die weggenommene wieder hinzu, so erhält Minuend. Dieser ist daher die Summe aus dem Subtrahende und man den dem Reste; daher heißt subtrahieren auch, aus der Summe zweier Zahlen und einer derselben die andere finden. Der Rest zeigt an,

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

um welche Zahl der Minuend größer ist als der Subtrahend, oder welche Zahl man zum Subtrahende hinzugeben muss, um den Minuend zu erhalten.

Hieraus ergeben sich zwei Verfahrungsarten beim Subtrahieren, nämlich: das Wegzählen oder bestimmen, wie viel übrig bleibt, wenn man eine Zahl von der andern hinwegnimmt, oder Suchen, wieviel man zum Subtrahende hinzugeben muss, um den Minuend zu erhalten, also das Ergänzen.

Das Ergänzen führt schneller und sicherer zum Ziele als das Hinwegzählen; das Vortheilhafte desselben zeigt sich ganz besonders, wenn von einer Zahl mehrere Zahlen zugleich zu subtrahieren sind, und beim Dividieren. So vortheilhaft aber diese Methode für im Rechnen weiter fortgeschrittene Schüler ist, so ist dennoch anzurathen, mit der Methode des Hinwegzählens zu beginnen, da diese leichter ist und den Begriff der Subtraction als Verminderungsrechnung mehr zur unmittelbaren Anwendung bringt.

Die Schüler haben im ersten Schuljahre das schriftliche Subtrahieren einzifferiger Zahlen gelernt, wobei sie den Minuend und Subtrahend neben einander und dazwischen das Subtractionszeichen setzten. Der Lehrer lasse nun ein solches Beispiel auf diese Art ausarbeiten und benütze dasselbe, um die Schüler mit den Ausdrücken Subtrahieren, Minuend, Subtrahend und Differenz bekannt zu machen.

Man lasse z. B. von der Zahl 9 die Zahl 5 wegzählen, frage was sie gethan haben und knüpfe nach der Lösung mehrerer solcher Beispiele an die Antwort die Erklärung:

Eine Zahl von der andern wegnehmen, heißt auch subtrahieren.

Von welcher Zahl wurde in der ersten Aufgabe eine andere weggezählt? Von welcher im zweiten u. s. f.

Die Zahl, von welcher eine andere weggezählt wird heißt **Minuend**.

Wie heißt der Minuend in der ersten Aufgabe? Wie in der zweiten u. s. w.

Welche Zahl wurde vom Minuend 9 hinweggezählt? u. s. w.

Die Zahl, welche vom Minuend weggezählt wird, heißt **Subtrahend**.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wie heißt der Subtrahend in der ersten Aufgabe? Wie in der zweiten? u. s. w.

Welche Zahl bleibt übrig, wenn man von der Zahl 9 die Zahl 7 wegnimmt? u. s. w.

Die Zahl, welche beim Subtrahieren übrig bleibt, heißt **Rest** oder **Differenz**.

Wie heißt der Rest in der ersten Aufgabe? u. s. w.

Um wieviel unterscheidet sich der Minuend 9 vom Subtrahend 7? Wer zeigt dieses an?

Da der Rest anzeigt, um wieviel sich der Minuend vom Subtrahend unterscheidet, so heißt er auch **Unterschied**.

Nun sage man den Schülern, dass man auch den Subtrahend unter den Minuend zu setzen, darunter einen Querstrich zu machen und unter diesen den Rest zu setzen pflegt; also

$$\begin{array}{r} 9 \\ 7 \\ \hline 2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 9 \\ -\,7 \\ \hline 2 \end{array}$$

Auf diese Art lasse man mehrere Beispiele ausarbeiten und gehe dann zur Subtraction zweizifferiger Zahlen über. Diese Zahlen läßt man anfangs so zerlegen, dass die Schüler eigentlich nur zwei Subtractionen einzifferiger Zahlen vor sich haben als:

$$\begin{array}{l} 69 = 6\ \text{Z.} + 9\ \text{E.} \\ \underline{45 = 4\ \text{Z.} + 5\ \text{E.}} \\ 24 = 2\ \text{Z.} + 4\ \text{E.} \end{array}$$

Diese Aufgabe lasse man vorher im Kopfe ausarbeiten. Die Schüler werden hiebei, wie sie es gewohnt sind, zuerst die Zehner von den Zehnern und dann die Einer von den Einern wegzählen; man lasse dieses auch anfangs beim schriftlichen Subtrahieren so machen, und mache hiebei die Schüler aufmerksam, dass man den Unterschied auch ohne Zerlegung findet, wenn man, wie das links vom Gleichheitszeichen geschehen ist, den Subtrahend unter den Minuend ohne Zerlegung und Bezeichnung aber so schreibt, dass die Zehner unter die Zehner zu stehen kommen und die gefundenen Unterschiede ebenfalls ohne weitere Bezeichnung neben einander schreibt.

Nach Lösung mehrerer ähnlicher Aufgaben wird zum Subtrahieren mit Übergang in eine höhere Ordnung geschritten, d. i. zur

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung von Aufgaben, in welchen die Zahl der Einer des Subtrahendes größer ist als jene des Minuendes, z. B. 52 — 36.

Man versinnliche den Vorgang hiebei durch Münzen, stelle die Zahl 52 durch 5 Zehnerstücke und 2 Kreuzer dar. Die Schüler bemerken, dass sie wohl 3 Zehner von 5 Zehnern aber nicht 6 Kreuzer von 2 Kreuzern wegnehmen können.

Man leite sie durch Fragen darauf, dass sie einen Zehner in Kreuzer umwechseln, d. i. den Zehner in Einer auflösen müssen, und dass sie nun 4 Zehner und 12 Einer haben, was ebenso viel ist, als 5 Zehner und 2 Einer, und dass sie jetzt leicht 3 Zehner und 6 Einer wegnehmen können. Auch durch die Zehnerbünde (Seite 26 c) kann der Vorgang leicht klar gemacht werden. Hierauf schreite man zur Aufgabe: 52 — 53 = ?

52 = 5 Z. + 2 E.	52 = 4 Z. + 12 E.
36 = 3 Z. + 6 E.	36 = 3 Z. + 6 E.
	16 = 1 Z. + 6 E. = 16 Einer.

Nachdem mehrere Aufgaben auf diese Art gelöst sind, zeige man, dass man die Subtraction auch verrichten könne, ohne die Zahlen zu zerlegen, wie es eben geschehen ist, wenn man den Subtrahend unter den Minuend schreibt und die Zehner um 1 Zehner vermindert, die Einer aber um 10 Einer vermehrt denkt, bei den Einern zu subtrahieren anfängt und sagt: 6 von 12 bleibt 6 und 3 von 4 bleibt 1. Damit man aber nicht vergesse, dass die Zehner um 1 Zehner vermindert wurden, macht man über den Zehnern einen Punkt. Dieses nennt man das Borgen oder Entlehnen.

Es ist aber nicht nöthig, dass sich die Schüler dieser Ausdrücke bedienen.

Um die Schüler zur Einsicht zu bringen, dass es vortheilhafter ist, die Subtraction bei den Einern zu beginnen, gebe man eine Aufgabe, z. B. 82 — 27, und lasse sie zuerst die 2 Zehner von den 8 Zehnern wegnehmen; es bleiben 6 Zehner;

82
27
6

um aber die 7 Einer wegzunehmen, müssen sie einen Zehner die 8 Z. um 1 Z. vermindern, und die 2 E. um 10 E. vermehren und sie bekommen dann 7 Z. und 12 E. Da aber jetzt nur 7 Z. vorhanden sind, so bleiben bei Wegnahme von 2 Z. nur 5 Z.; daher müsste man im Reste die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

chon angeschriebenen 6 Z. weglöschen und an deren Stelle 5 Z. setzen. Nun gebe man Aufgaben, in welchen der Minuend nur aus Zehnern besteht, und verfahre etwa so:

$$\begin{array}{lll} 80 = 8\ \text{Z.} + 0\ \text{E.} & = 7\ \text{Z.} + 10\ \text{E.} \\ \underline{63} = 6\ \text{Z.} + 3\ \text{E.} & = \underline{6\ \text{Z.} + \ \ 3\ \text{E.}} \\ 17 & \quad\ \ 1\ \text{Z.} + \ \ 7\ \text{E.} \end{array}$$

Bei der Subtraction mehrzifferiger Zahlen wähle der Lehrer anfangs die Zahlen so, bei denen jede Ziffer des Minuendes größer ist als die ihr gleichnamige des Subtrahends, z. B. 978—726.

Hierauf folgen Beispiele, wo bloß die Zehner, dann solche, wo bloß die Hunderter u. s. w. des Subtrahends größer sind, als die Ziffern an den gleichnamigen Stellen des Minuends, endlich Beispiele, in welchen dieses bei mehreren Stellen der Fall ist, aber im Minuend keine 0 vorkommt. Z. B.

$$\begin{array}{r} 6758 \\ \underline{3685} \\ 3073 \end{array}$$

Man sagt hier anfangs: 5 E. von 8 E. bleiben 3 E.; 8 Z. kann man von 5 Z. nicht wegnehmen, daher vermindert man die 7 H. um 1 H. und vermehrt die 5 Z. um 10 Z; nun hat man 10 Z. und 5 Z., dieses sind 15 Z.; 8 Z. von 15 Z. bleiben 7 Z.; 6 H. von 6 H. bleibt kein oder 0 Hundert; 3 T. von 6 T. bleiben 3 T. Hat man sich überzeugt, dass die Schüler den ganzen Vorgang aufgefasst haben, o verkürz tman die Ausdrucksweise, indem man die Benennung der Stellenwerte wegläßt und sagt: 5 von 8 bleibt 3; 8 von 15 bleibt 7; 6 von 6 bleibt 0; 3 von 6 bleibt 3.

Bei der Methode des Wegzählens ist der Fall besonders zu berücksichtigen, wenn an den Stellen des Minuendes, von welchen entlehnt werden soll, Nullen vorkommen. Z. B. 805 — 327.

Der Lehrer lasse beide Zahlen zerlegen, als:

$$\begin{array}{lll} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ 805 = 8\ \text{H.} + 0\ \text{Z.} + 5\ \text{E.} & = 7\ \text{H.} + 10\ \text{Z.} + 5\ \text{E.} & = 7\ \text{H.} + 9\ \text{Z.} + 15\ \text{E.} \\ \underline{327} = 3\ \text{H.} + 2\ \text{Z.} + 7\ \text{E.} & = 3\ \text{H.} + \ \ 2\ \text{Z.} + 7\ \text{E.} & = \underline{3\ \text{H.} + 2\ \text{Z.} + \ \ 7\ \text{E.}} \\ 478 & & \quad\ \ 4\ \text{H.} + 7\ \text{Z.} + \ \ 8\ \text{E.} \end{array}$$

Man macht die Schüler nun aufmerksam, dass man die Subtraction auch ohne Auflösung ausführen könne, indem man den Subtrahend unter den Minuend schreibt und sogleich die 8 Hunderter um 1 H. vermindert, aber die 0 Z. um 10 Z. vermehrt, welche wieder um

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

1 Z. vermindert und die E. aber um 10 E. vermehrt werden müssen. Anstatt 8 H., 0 Z. und 5 E. erhält man hiedurch 7 H., 9 Z. und 15 E., und man sagt jetzt: 7 E. von 15 E. bleiben 8 E., 2 Z. von 9 Z. bleiben 7 Z., und 3 H. von 7 H. bleiben 4 H.

Die Übungen auf dieser Stufe erfordern großen Fleiß; nach entsprechender Sicherheit des Schülers gehe man erst auf solche Beispiele über, in welchen im Minuende 2 und mehrere Nullen nach einander folgen, bei denen entlehnt werden soll. Z. B. 8005 — 2678.

Eine Auflösung der Zahlen dürfte auch hier angezeigt sein, als:

$\overset{\cdots}{8005} = 8\,\text{T.} + 0\,\text{H.} + 0\,\text{Z.} + 5\,\text{E.} = 7\,\text{T.} + 10\,\text{H.} + 0\,\text{Z.} + 5\,\text{E.} = 7\,\text{T.} + 9\,\text{H.} + 10\,\text{Z.} + 5\,\text{E.}$
$2678 = 2\,\text{T.} + 6\,\text{H.} + 7\,\text{Z.} + 8\,\text{E.} = 2\,\text{T.} + 6\,\text{H.} + 7\,\text{Z.} + 8\,\text{E.} = 2\,\text{T.} + 6\,\text{H.} + 7\,\text{Z.} + 8\,\text{E.}$
$= 7\,\text{T.} + 9\,\text{H.} + 9\,\text{Z.} + 15\,\text{E.}$
$= 2\,\text{T.} + 6\,\text{H.} + 7\,\text{Z.} + 8\,\text{E.}$

Die Schüler sehen hieraus, dass man bis zu den Tausendern gehen muss. Von den 10 Hundertern, in welchen der weggenommene Tausender verwandelt wird, muss 1 H. in Zehner aufgelöst werden; von diesen 10 Z. muss wieder 1 Z. in Einer aufgelöst werden, und man hat im Minuend 7 T., 9 H., 9 Z. und 15 E. Hieraus sehen die Schüler auch zugleich, dass jede 0 des Minuends, über welcher ein Borgepunkt steht, 9 bedeutet. Auch bei dieser Stufe werden später die Stellenworte nicht benannt, man spricht:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\,9\,9\,9\,11} \\ 5000013 \\ 68152 \\ \hline 4931861 \end{array}$$

2 von 3 bleibt 1, 5 von 11 bleibt 6, 1 von 9 bleibt 8 u. s. w.

Übungsaufgaben in III. Rechenbuche M. Seite 16 und 17. A. K. S. 17 bis 20.

Da der Minuend die Summe aus dem Subtrahend und dem Reste ist, so wird die Probe über die Subtraction gemacht, indem man den Rest zum Subtrahende addiert; es muss, wenn die Rechnung richtig ist, der Minuend zum Vorschein kommen.

Es ist anzurathen, dieses Verfahren recht zu üben, da es eine ausgezeichnete Vorbereitung für das Subtrahieren mittels des Zuzählens darbietet.

Um die Schüler mit dem Subtrahieren mittels des Ergänzens vertraut zu machen, wähle man anfangs Beispiele, in welchen alle Ziffern des Minuends größer sind als die gleichstelligen des Subtrahends, als: 9768 — 4126, lasse den Subtrahend unter

9768 den Minuend setzen und frage: Wieviel E. muss
4126 man zu 6 E. hinzuzählen, um 8 E. zu erhalten?
5642 Wie groß ist also der Unterschied zwischen 8 E. und 6 E.? Wieviel Z. muss man zu 2 Z. zuzählen, um 6 Z. zu bekommen? Diese 4 Z. sind also der Unterschied zwischen 6 Z. und 2 Z. Wieviel H. müssen zu 1 H. zugezählt werden, um 7 H. zu erhalten? 6 H. sind also der Unterschied zwischen 7 H. und 1 H. Wieviel T. muss man zu 4 T. hinzuzählen, um 9 T. zu bekommen? 5 T. sind also der Unterschied zwischen 9 T. und 4 T. Der ganze Unterschied ist also 5642.

Der Lehrer dringe darauf, dass der Schüler die Unterschiede, sobald er sie ausspricht, auch gleich anschreibe. Man spricht jedoch später kürzer: 6 und **2***) ist 8; 2 und **4** ist 6; 1 und **6** ist 7; 4 und **5** ist 9.

Ist diese Übung gehörig gesichert, so geht man zu solchen Beispielen über, in welchen im Minuend Ziffern vorkommen, die kleiner sind, als die gleichstelligen im Subtrahend. Es sei z. B. 5837 — 3562 zu bestimmen.

58'37 Zu 2 E. muss man 5 E. zuzählen, um 7 E. zu
25,62 bekommen; der Unterschied 5 wird in den Rest gesetzt.
3275 Da 6 Z. größer sind als 3 Z., so kann man durch Hinzuzählen zu 6 Z. nicht 3 Z. erhalten; vermehrt man aber die 3 Z. um 10 Z., so erhält man 13 Z. und man muss zu 6 Z., um 13 Z. zu erhalten, 7 Z. hinzugeben. Es ist hier der Minuend um 10 Z. oder 1 H. vergrößert worden, daher muss man auch den Subtrahend, wenn der Unterschied gleich bleiben soll, um 1 H. vergrößern. 1 H. zu 5 H. sind 6 H. Subtrahiert man nun die Hunderter, so erhält 6 H. und 2 H. sind 8 H. u. s. w.

Man sagt hier: 2 und **5** ist 7
6 und **7** ist 13, bleibt 1
1 und 5 ist 6 und **2** ist 8
2 und **3** ist 5.

Kommen also im Minuend Ziffern vor, die kleiner sind, als die gleichstelligen Ziffern im Subtrahend, so

*) Die fettgedruckten Ziffern bedeuten die Zahlen, welche man hinzuzählen muss und in den Rest zu schreiben hat.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

vermehrt man die zu kleine Ziffer des Minuend um 10 Einheiten und zugleich auch die Ziffer an der nächst höheren Stelle im Subtrahend um 1 Einheit.

Hienach denkt man sich anstatt

$$5472 = 5\ \text{T.} + 4\ \text{H.} + 7\ \text{Z.} + 2\ \text{E.}$$
$$1538 = 1\ \text{T.} + 5\ \text{H.} + 3\ \text{Z.} + 8\ \text{E.}$$

die abgeänderten Zahlen gesetzt, als:

$$\begin{array}{rrrr} 5\ \text{T.} + & 14\ \text{H.} + & 7\ \text{Z.} + & 12\ \text{E.} \\ 2\ \text{T.} + & 5\ \text{H.} + & 4\ \text{Z.} + & 8\ \text{E.} \\ \hline 3\ \text{T.} + & 9\ \text{H.} + & 3\ \text{Z.} + & 4\ \text{E.} \end{array}$$

Aus dem Minuend 80000 und dem Subtrahend 15342 werden die Zahlen 8 Zt., 10 T., 10 H., 10 Z., 10 E. als Minuend und 2 Zt., 6 T., 4 H., 5 Z., 2 E. als Subtrahend, welche diese Differenz geben, wie die ersteren Zahlen.

Nun gebe man die Aufgabe, von einer Zahl die Summe mehrerer Zahlen zu subtrahieren, z. B.: Jemand hat 14230 fl. eingenommen und davon 2645 fl., 976 fl., 1256 fl. und 879 fl. ausgegeben; wieviel blieb ihm noch?

Der Lehrer lasse diese Aufgabe lösen, indem er zuerst die Zahl 2645 fl. von 14230 fl. abziehen, von Reste die Zahl 976 fl. von diesem Reste wieder 125 fl. subtrahieren läßt u. s. w., sodann leite er die Schüler darauf hin, dass sie die Summe der gegebenen Zahlen von der Zahl 14230 subtrahieren, und sodann zeige er, wie man leicht mit der Addition der Subtrahenden zugleich die Subtraction von dem gegebenen Minuend verbinden kann.

$$\begin{array}{rrrrr} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ - & 2 & 6 & 4 & 5 \\ & & 9 & 7 & 6 \\ & 1 & 2 & 5 & 6 \\ & & 8 & 7 & 9 \\ & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & \\ \hline & 8 & 4 & 7 & 4 \end{array}$$

Er lasse die Einer der Subtrahende addieren, ihre Summe beträgt 26; er frage, ob man die 26 E. von 0 E. subtrahieren könne. Wieviel Einer erhält man, wenn man zu 0 E. einen Zehner hinzugibt? Könnte man nun subtrahieren? Versuchen wir es mit 2 Z. Wieviele Zehner muss man zu 0 wenigstens hinzugeben, und die Summe 26 subtrahieren zu können? Wieviele Einer erhalten wir nun statt 0 E.? Wieviel müssen wir nun zu 26 zählen, um 30 zu erhalten? 26 und 4 ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

30, die **4** schreiben wir nun sogleich als Rest an. Da wir zum Minuende 3 Z. hinzugegeben haben, so müssen wir auch zum Subtrahende 3 Z. hinzuzählen und sagen dann sogleich 3 und 7 ist 10 u. s. w.

Nachdem der ganze Vorgang gehörig erläutert worden ist, spricht man kurz:

9 und 6 ist 15 und 6 ist 21 und 5 ist 26 und **4** ist 30, bleibt 3; 3 und 7 ist 10 und 5 ist 15 und 7 ist 22 und 4 ist 26 und **7** ist 33, bleibt 3; 3 und 8 ist 11 und 2 ist 13 und 9 ist 22 und 6 ist 28 und **4** ist 32, bleibt 3; 3 und 1 ist 4 und 2 ist 6 und **8** ist 14, bleibt 1; 1 und **0** ist 1.

Um die Schüler mit der Probe über die Addition mittels der Subtraction bekannt zu machen, lasse der Lehrer mehrere Posten addieren, und frage, um wieviel die Summe kleiner ausfallen müsste, wenn man eine der Posten wegließe und alle übrigen addieren würde; er lasse hierauf mit Hinweglassung, z. B. der obersten Post die Summe der übrigen Posten suchen und frage, wie man erfahren könne, ob die zweite Summe wirklich um die weggelassene Zahl kleiner sei als die frühere Summe.

Eine zweite Probe besteht darin, dass man von der erhaltenen Summe die erste Post, von dem erhaltenen Reste die zweite Post u. s. w. subtrahiert, wobei der letzte Rest 0 sein muss. Diese Probe ist sehr zu empfehlen, da sie zugleich eine zweckmäßige Übung für das wiederholte Subtrahieren bietet.

Aufgaben. M. IV. Rechenbuch S. 12 bis 14. A. K. IV. 8 und 9.

§. 13.

Vervielfachen oder Multiplicieren.

a) Vervielfachen im Kopfe.

Da das Vervielfachen erfordert, dass dem Schüler das Einmaleins vollkommen geläufig ist, so muss dieses im 3. Schuljahre zuerst wiederholt und fleißig geübt werden, umsomehr, da ja doch das Neue an Bekanntes anzuknüpfen ist. Diese Übungen sind theils in der Reihenfolge, theils außer derselben vorzunehmen und

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

müssen mit einfachen praktischen Aufgaben abwechseln. Z. B. 1 Bleistift kostet 3 kr.; 2 Bleistifte kosten $2 \times 3 = 6$ kr.
3 „ „ $3 \times 3 = 9$ „ u. s. w.

Beim Vervielfachen der reinen Zehner oder reinen Hunderter mit Einern, z. B. Wieviel ist 2 mal 40? frage man: Wieviele Zehner sind 40 Einer? Wieviele Zehner sind 2 mal 4 Zehner? Wieviele Einer sind 8 Zehner? Wieviel ist also 2×40? u. s. w. $2 \times 400 = 2 \times 4$ H. $= 8$ H. $= 800$.

Sowohl bei dieser als auch bei den folgenden hieher gehörigen Stufen ist sehr zu empfehlen, die Anwendungen in Reihen vorzunehmen. Z. B.

1 hl kostet 30 fl.; 2 hl kosten $2 \times 30 = 60$ fl.
3 „ „ $3 \times 30 = 90$ „ u. s. w.

(Schriftliche Aufgaben III. Rechenbuch M. S. 20, b.) Beim Vervielfachen von 2- und 3-stelligen Zahlen fange man bei der höchsten Stelle an, und lasse dann die erhaltenen Vielfachen addieren. Z. B. Wieviel ist 2 mal 24? — 2 mal 20 ist 40, 2 mal 4 ist 8, 40 und 8 ist 48.

Wieviel ist 2 mal 238? 2 mal 200 ist 400, 2 mal 30 ist 60, 400 und 60 ist 460, 2 mal 8 ist 16, 460 und 16 ist 476.

Das Vervielfachen mit reinen Zehnern beginnt man mit dem Vervielfachen mit 10 und mit 10.

$10 \times 10 = 10 \times 1$ Z. $= 10$ Z. $= 100$
$10 \times 20 = 10 \times 2$ Z. $= 20$ Z. $= 200$ u. s. w.

Kurz gesprochen: 10×10 ist 100, $10 \times 20 = 200$ u. s. w.

Wieviel ist 20 mal 3?

Hier führe man die Schüler zur Einsicht, da $20 = 2 \times 10$ ist, dass also eine Zahl 20 mal genommen 10 mal so viel ist, als wenn man sie 2 mal nimmt.

Eine Zahl wird daher 20 mal genommen, wenn man sie 2 mal und dann das Zweifache derselben 10 mal nimmt Z. B. Wieviel ist 20 mal 6? — 2 mal 6 ist 12; 20 mal 6 ist 10 mal so viel, daher 20 mal $6 = 120$.

In derselben Weise wird beim Vervielfältigen mit 30, 40 .... 90 vorgegangen, und dieselben Schlüsse kommen auch in Anwendung, wenn Einer mit reinen Hunderten (z. B. 200 mal 4) oder reine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zehner mit reinen Zehnern (z. B. 30 mal 20) oder Zehner und Einer mit reinen Zehner (z. B. 50 mal 12) zu vervielfachen sind. Z. B. Wieviel ist 40 mal 12? 4 mal 12 ist 48; 40 mal 12 ist 10 mal so viel; daher 10 mal 48 = 480.

Sind Einer mit Zehnern und Einern zu vervielfachen, so vervielfacht man sie zuerst mit den Zehnern, dann mit den Einern und addiert die beiden Vielfachen. Z. B. Wieviel ist 13 mal 6? 10 mal 6 ist 60, 3 mal 6 ist 18, 60 und 18 = 78.

Beim Vervielfachen einer zweisteiligen Zahl mit Zehnern und Einern läſst man die erste Zahl unzerlegt, vervielfacht sie zuerst mit den Zehnern, hierauf mit den Einern und addiert die erhaltenen Producte. Z. B. Wieviel ist 14 mal 26?

10 mal 26 ist 260, 4 mal 26 ist 104; 260 und 104 ist 364.

Ist die Zahl, welche vervielfacht werden soll, ein Vielfaches einer andern, so kann das Vervielfachen durch Zerlegung dieser Zahl (in Factoren) erleichtert werden. Z. B. Wieviel ist 15 mal 8? 15 ist 5 mal 3; nimmt man daher die Zahl 8 5mal und die hiedurch erhaltene Zahl 40 3 mal, so erhält man 15 mal 8, also 120.

Schriftliche Aufgaben in III. Rechenbuche M. S. 20, d), S. 21, e), abgeleitete und angewandte Aufgaben S. 21, f), S. 22 bis 25, g.) A. K. S. 20 bis 27.

b) Schriftliches Multiplicieren.

Die Schüler haben schon im ersten Schuljahre das schriftliche Multiplicieren „einzifferiger Zahlen mit einzifferigen" gelernt. Der Lehrer gebe nun solche Beispiele und verwende dieselben, um die Schüler mit den Ausdrücken Multiplicieren, Multiplicand, Multiplicator, Factoren und Product bekannt zu machen. Auch sage man den Schüler, daſs beim eigentlichen Ziffernrechnen das Zeichen × nicht das Wörtchen „mal" sondern „multipliciert mit" bedeutet. Man liest daher 6 × 2 nicht 6 mal 2, sondern 6 multipliciert mit 2, also 2 mal 6.

Wieviel ist 3 mal 8? 3 mal 8 = 8 + 8 + 8 = 24.

Wievielmal haben wir hier die Zahl 8 genommen? Welche Zahl zeigt an wie oft die Zahl 8 genommen werden soll?

Eine Zahl so oftmal nehmen, als eine andere Zahl es anzeigt, heißt **vervielfachen** oder **multiplicieren**.

Welche Zahl wurde hier mehrmal genommen?

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Die Zahl, welche mehrmals genommen wird, heißt **Multiplicand.**

Wie oftmal wurde die Zahl 8 genommen? Welche Zahl zeigt dieses an?

Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal eine andere genommen werden soll, heißt **Multiplicator.** Multiplicand und Multiplicator haben auch den gemeinschaftlichen Namen **Factoren.**

Welche Zahl erhält man, wenn man 8 mit 3 multipliciert?

Die Zahl, welche man durch das Multiplicieren erhält, heißt **Product.**

Die Schüler wissen, dass 1 mal 1 = 1, 1 mal 2 = 2. 1 mal 3 = 3 ist u. s. w.

Man sage ihnen, dass man dieses durch den allgemeinen Satz ausdrücken kann:

Jede Zahl mit 1 multipliciert gibt sich selbst zum Producte.

Man zeige hier auch durch Darstellung der Multiplication durch die Addition, dass:

Wenn ein Factor 0 ist, so ist auch das Product 0.

Denn: ist der Multiplicand 0, z. B. 0×3 so erhält man $0 \times 3 = 0 + 0 + 0 = 0$.

Ist der Multiplicator 0, z. B. 3×0, so heißt dieses die Zahl 3 0mal oder gar keinmal nehmen, was wieder 0 gibt.

Der letzte Theil des obigen Satzes wird auch dargethan, indem man vorher zeigt, dass Multiplicand und Multiplicator miteinander verwechselt werden können, dass also 4 mal 3 ebenso viel ist als 3 mal 4.

Es ist von großer Wichtigkeit und erleichtert das Lehrverfahren, die Multiplication als eine verkürzte Addition hinzustellen, denn der ursprüngliche Begriff des Multiplicierens war eine wiederholte Hinzugabe einer und derselben Zahl. Statt zu sagen: die Zahl 5 soll 3 mal zugezählt, addiert werden, sagt man auch 5 soll 3 mal (als Addend) gesetzt, 5 soll mit 3 multipliciert werden, daher.

$$5 + 5 + 5 = 5 \times 3$$

Um eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu multiplicieren, kann man a) die mehrzifferige Zahl in einzifferige Zahlen zerlegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und dann die Producte zusammenfassen, b) das Ganze als Addition hinstellen und hieran das Verfahren ableiten.

a) Wieviel ist 2mal 342? Man gehe hiebei so vor, wie beim Kopfrechnen. Die Schüler werden daher auch zuerst die Hunderter, dann die Zehner und zuletzt die Einer 2 mal nehmen also:

$$\begin{array}{r} 3\ \text{H.} \times 2 = 6\ \text{H.} = 600 \\ 4\ \text{Z.} \times 2 = 8\ \text{Z.} = 80 \\ 2\ \text{E.} \times 2 = 4\ \text{E.} = \underline{4} \\ 684 \end{array}$$

Hierauf zeige der Lehrer, wie man dieses Verfahren abkürzt, also: $342 \times 2 = 684$ oder

$$\begin{array}{r} 342 \times 2 \\ \hline 684 \end{array}$$

Anfangs werden Beispiele gewählt, in denen die einzelnen Producte einzifferig sind, und erst dann geht man zu Beispielen über, in denen die einzelnen Produkte zweizifferig werden; als:

$$\begin{array}{r} 648 \times 3 \\ \hline 1800 \\ 120 \\ 24 \\ \hline 1944 \end{array}$$

Der Lehrer fragt: Wieviel sind 3 mal 6 H.; Wie viel Einer sind 18 H.? Wieviel sind 3 mal 4 Z.? Wieviel Einer sind 12 Z.? Wieviel sind 3 mal 8 E.?

Wieviel sind 1800 E., 120 E. und 24 E. zusammen? Die Schüler werden nun hingewiesen, dass die Ziffer 4 vom Producte der Einer im ganzen Producte auch an der Stelle der Einer erscheint, die 2 Zehner des Productes 24 E. aber zum Producte der Zehner, also zu 12 Z. gezählt wurden, wodurch man 14 Z. erhielt. Von den 14 Zehner erscheint, die Ziffer 4 wieder im vollständigen Producte an der Stelle der Zehner, Ziffer 1 aber, welche 1 H. bedeutet, wurde zu den Hundertern gezählt. So wie bei der Addition, weist man die Schüler hin, dass es vortheilhafter ist, auch beim Multiplicieren bei der niedersten Benennung anzufangen, und dass man kurz sagt: 3 mal 8 ist 24, 4 angeschrieben bleibt 2; 3 mal 4 ist 12 und 2 ist 14, 4 angeschrieben bleibt 1, 3 mal 6 ist 18 und 1 ist 19. Später bleibt das Wort „angeschrieben" weg.

b) Auch hier werden zuerst Aufgaben gegeben, in welchen alle einzelnen Producte einzifferig sind. Z. B. Wieviel ist 3 mal 23?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

23
23
23

Die Zahl 23 wird 3 mal als Addend angeschrieben und sodann das Resultat durch Addition gesucht. Hierauf lassen wir bemerken, dass die 3 E. 3 mal vorkommen, und dass wir daher statt 3 E. und 3 E. sind 6 E. und 3 E. sind 9 E. kürzer sagen: 3 mal 3 E. sind 9 E., und ebenso 3 mal 2 Z. ist 6 Z.

Wir schreiben daher die Zahl 23, den Multiplicand, einmal an und setzen neben (oder unter) denselben den Multiplicator und zwischen die beiden Factoren das Multiplicationszeichen, nämlich: × oder ein Punkt.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \hline 69 \end{array} \times 3 \text{ oder } 23 \,.\, 3 = 69 \text{ oder } \begin{array}{r} 23 \\ 3 \\ \hline 69 \end{array}$$

Wird die Multiplication als verkürzte Addition behandelt, so sehen auch die Schüler den Grund des Hinüberzählens bei zweistelligen Producten zur nächsten Ordnung und den ganzen Vorgang, bei solchen Aufgaben leicht ein. Z. B. Wieviel ist 4 mal 238? Wir schreiben die Zahl 238 4 mal als Addend, lassen zuerst addieren.

238
238
238
238
952

Die Schüler wissen, dass man statt 8 und 8 u. s. w. sagen kann 4 mal 8 ist 32, 2 angeschrieben bleibt 3, 4 mal 3 ist 12 und 3 ist 15, 5 angeschrieben bleibt 1, 4 mal 2 ist 8 und 1 ist 9. Man zeigt hierauf, dass man wieder schreibt:

$$\begin{array}{r} 238 \\ \hline 952 \end{array} \times 4 \text{ oder } \begin{array}{r} 238 \\ 4 \\ \hline 952 \end{array}$$

Aufgaben im III. Rechenbuche M. S. 25 und 26.

Haben die Schüler die gehörige Fertigkeit im Multiplicieren einer mehrzifferigen Zahl mit einer einzifferigen erlangt, so wird ihnen auch die Multiplication zweier größerer Factoren keine besonderen Schwierigkeiten bieten. Man lasse nun zuerst eine mehrzifferige Zahl mit 10 multiplicieren. Z. B. 247 × 10

Man kann hierbei so vorgehen, als wäre 10 eine einzifferige Zahl, und die Schüler sagen: 10 mal 7 ist 70, 0 angeschrieben bleibt 7 u. s. w.; hierbei sehen die Schüler, dass im Producte alle

$$\begin{array}{r} 247 \\ \hline 2470 \end{array} \times 10$$

Ziffern des Multiplicand und zwar im unveränderter Aufeinanderfolge erscheinen, dass aber jede derselben um eine Stelle weiter zur Linken gerückt wurde und in der Einer Stelle 0 steht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder 10 mal 7 E. sind 70 E. oder 7 Z.; 10 mal 4 Z. sind 40 Z. oder 4 H., und 10mal 2 H. sind 20 H. oder 2 T.

Dieses Vorrücken geschieht dadurch, dass man der Zahl rechts eine 0 anhängt.

Eine ganze Zahl wird mit 10 multipliciert, wenn man ihr rechts eine Null anhängt.

Diese in den meisten Rechenbüchern aufgestellte Regel führt aber zu einer irrigen Vorstellung, denn dasjenige, dem man etwas anhängt, bleibt an seinem Platze stehen, während die Ziffern der mit 10 zu multiplicierenden Zahl nicht stehen bleiben dürfen, sondern jede derselben um eine Stelle gegen links verrücken, und die leer gewordene Einerstelle mit Null ausgefüllt werden muss.

Wieviel ist 20 mal 36?

Die Schüler wissen vom Kopfrechnen her, dass eine Zahl mit 20 multipliciert wird, wenn man sie 2 mal und dann das Zweifache derselben 10 mal nimmt; um daher 36 mit 20 zu multiplicieren, multipliciert man nur die Zahl 36 mit 2, rückt jede Ziffer des Productes 72 um eine Stelle weiter zur Linken und setzt an die Einerstelle 0:

$$\begin{array}{r} 36 \times 20 \\ \hline 720 \end{array}$$

Übungsaufgabe im III. R. M. S. 26. letzte Gruppe.

Nun geht man zu Aufgaben über, in welchen der Multiplicator aus Zehnern und Einern besteht.

Für das 3. Schuljahr müssen diese Aufgaben jedoch so gewählt werden, dass das Product 1000 nicht übersteigt.

Wieviel ist 24 mal 36?

$$\begin{array}{lr} & 36 \times 24 \\ \hline \text{das 4fache} & 144 \\ \text{das 20fache} & 720 \\ \hline \text{das 24fache} & 864 \end{array}$$

Man lasse zuerst mit den Einern multiplicieren und frage die Schüler, das wievielfache der Zahl 36 sie nun gefunden haben, das wievielfache aber gesucht werden soll, das wievielfache daher noch fehle und erinnere sie, dass sie das 20fache finden, indem sie die Zahl 36 mit 2 multiplicieren aber zugleich weil sie ja dieses Product 10fach zu nehmen haben, jede Ziffer derselben um eine Stelle weiter links schreiben müssen, so dass aus den Einern Zehnern und aus den Zehnern Hunderter werden.

Nun lassen wir die Schüler bemerken, dass sie jetzt wissen, wieviel 4 mal 36, und wieviel 20 mal 36 ist, und frage was sie nun thun müssen, um hieraus zu finden, wieviel 24 mal 36 ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man lasse nun einige Beispiele auf diese Art ausarbeiten, und frage dann, ob die an der Stelle der Einer stehende 0 des 2. Productes auf die Summe der beiden Producte einen Einfluss habe, und ob man sie nicht weglassen könne, also:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 24 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 864 \end{array}$$

Der Lehrer sage nun den Schülern, dass die Producte 144 E. und 72 Z., da sie nur Theile des zu suchenden Productes sind, Theilproducte oder Partialproducte heißen und die Summe der Theilproducte das Hauptproduct genannt wird.

Aufgaben im III. R. M. S. 27 (letzte Gruppe.) und 28. A. K. 27 bis 30.

Bei diesen Aufgaben bringen wir zur Erinnerung, dass der Multiplicator stets eine unbenannte Zahl ist. Es ist daher fehlerhaft zu sagen, wenn ich wissen will, was 3 Meter kosten, wenn 1 Meter 5 fl. kostet, so muss ich 5 fl. mit 3 M. multiplicieren; man muss ja, wenn man 3 Meter kauft, die 5 fl. nicht 3 metermal, sondern 3 mal hingeben. Dieser erinnert an jenen Lehrer, der in einer Rechenaufgabe seine Schüler „Wochen mit Ochsen multiplicieren ließ, und dann erklärte, das Resultat stelle gleichsam „Wochenochsen" dar. Indem man die Multiplication als Addition darstellt, sehen die Schüler auch leicht ein, dass das Product immer den Namen des Multiplicandes haben muss.

Im 4. Schuljahre wird das schriftliche Multiplicieren über 1000 fortgesetzt und wie alle übrigen Rechnungsarten im unbegrenzten Zahlraume betrieben. Das unterrichtliche Verfahren hierbei ist dasselbe, wie früher, und wir erinnern hier nur, dass die Bennenung der Stellenwerte nur so lange stattfindet, bis die gehörige Einsicht in das Vergehen erreicht ist.

In ähnlicher Weise, wie bei der Multiplication mit 10 zeige man, dass eine Zahl mit 100, 1000 u. s. w. multipliciert wird, wenn man ihr 2, 3, . . . Nullen anhängt, also jede Ziffer derselben um 2, 3 . . . Stellen weiter nach links schiebt. Die Schüler müssen hiebei unterwiesen werden, dass Einer, Zehner, Hunderter u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit Einern multipliciert wieder Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. geben; dass Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. mit Zehnern multipliciert, Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. zum Producte haben, u. s. w. Dieses sollen die Schüler nicht nur der Ordnung nach, sondern auch außer der Ordnung angeben können. Z. B. Was geben Hunderter mit Hunderten multipliciert zum Producte? Zehner mit Hunderten? u. s. w.

Hierauf zeige man die Multiplication mit einem dreizifferigen Multiplicator. Z. B. 528 × 367.

Der Multiplicator 367 = 300 + 60 + 7. Daher hat man das 300fache, das 60fache und das 7fache von 528 zu suchen und diese Producte zu addieren; also:

		528 × 7,	528 × 60,	528 × 300
Das	7fache	3696	31680	158400
„	60 „	31680	oder	528
„	300 „	158400		367
Das	367fache	193776		3696
				3168
				1584
				193776

Die Schüler sehen auch hier wieder gar bald ein, dass die Nullen überflüssig sind, und dass die niedrigste Ziffer des Theilproductes, wenn man mit Zehnern multipliciert, um eine Stelle wenn man mit Hundertern multipliciert um 2 Stellen nach links gerückt werden muss.

Lässt man den Multiplicator, unter den Multiplicand schreiben, so sieht man auch, dass die niedrigste Ziffer eines jeden Theilproductes unter die Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, mit der man eben multipliciert.

Es ist auch von Wichtigkeit für das richtige Verständnis des ganzen Vorganges, dass der Lehrer die Partialproducte ihrem Werte nach von den Schülern aussprechen lasse. Z. B. in der vorhergehenden Aufgabe lesen die Schüler: 3696 E. oder 3696; 3168 Z. oder 31680, 1584 H. oder 158400.

Die Multiplication mit vier oder mehrstelligen Multiplicatoren wird den Schülern nun nicht schwer fallen, wenn sie das bisher

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Gelehrte gehörig aufgefasst haben, und wir haben daher nunmehr einige Fälle zu betrachten.

Enthält der Multiplicator in einer oder mehreren Zwischenstellen Nullen z. B. 8972 × 603, so braucht man nur in Erinnerung zu bringen, dass das Product 0 wird, wenn ein Factor Null ist; daher erhält man auch, wenn man mit 0 Z. multipliciert, im Theilproducte lauter Nullen; man übergeht deshalb dieses Product ganz und multipliciert gleich mit 6 H., schreibt aber die erste Ziffer dieses Theilproductes gleich an die Stelle der Hunderter.

```
  8972
   603
 26916
53832
5410116
```

Kommen am Ende der Factoren Nullen vor, so sind die Schüler leicht darauf hinzuführen, dass sie dieselben anfangs weglassen, und nur die übrigbleibenden Zahlen zu multiplicieren und schließlich dem hierdurch erhaltenen Producte so viele Nullen anzuhängen (jede Ziffer des Productes so viele Stellen nach links zu schieben) haben, als sie in beiden Factoren Nullen weggelassen haben. Z. B. 5300 × 13.

```
5300 × 13
159
53
68900
```

5300 sind 53 H.; diese 13 mal genommen gibt 689 H. oder 68900 E.

oder

```
  537 × 120
 1074
 537
 64440
```

Die Zahl 537 mit 12 multipliciert gibt 6444; da aber die Zahl 537 nicht mit 12, sondern mit 120 d. i. 10 mal 12 zu multiplicieren ist, so muss man sie noch 10 mal nehmen und man erhält 10 mal 6444 d. i. 64440, man muss also dem Producte noch 0 anhängen.

```
  2870 × 6300
  861
 1722
28081000
```

Die 287 mit 63 multipliciert gibt das Product 18081, dieses Product muss aber 10 mal genommen werden, da 2870 10 mal 287 ist, wir erhalten daher 180810; nun ist aber 2870 nicht 63 mal, sondern 63 hundertmal zu nehmen, weshalb das Product 180810 noch mit 100 zu multiplicieren ist, und daher noch 2 Nullen anzuhängen sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schüler durch Ausführung der Multiplication mit den Nullen auf die so eben entwickelte Regel zu führen, wie das in dem nebenstehenden Beispiele geschieht, ist als Mechanismus zu vermeiden; kennen die Schüler den Stellenwert des Productes, und sind sie gewöhnt worden, das Product immer an die richtige Stelle zu schreiben, so wird es nur weniger Fingerzeige bedürfen, damit dieselben dergleichen Multiplicationen auch ohne besondere Regel ausführen.

$$\begin{array}{r} 2870 \times 6300 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 8610 \\ 17220 \\ \hline 18081000 \end{array}$$

Sowohl zur Einübung der Multiplication und Subtraction als auch zur Vorbereitung für eine spätere Stufe ist es anzurathen, die Multiplication mit einem einzifferigen Multiplicator und die Subtraction des Productes unter einem verrichten zu lassen. Z. B. die Zahl 3649 soll mit 4 multipliciert und das Product sogleich von der Zahl 25631 subtrahiert werden.

Man lasse die Aufgabe zuerst lösen, indem man das Product durch Addition sucht und die erhaltene Summe subtrahiert. Die Schüler wissen, dass es einerlei ist, ob sie sagen 9 und 9 ist 18, und 9 ist 27, und 9 ist 36 und 5 (5 als Unterschied anzuschreiben) ist 41, bleibt 4 u. s. w. oder 4 mal 9 ist 36 und 5 ist 41 u. s. w. Man kann daher die Rechnung kurz darstellen:

$$\begin{array}{r} 25631 \\ -\left\{\begin{array}{r} 3649 \\ 3649 \\ 3649 \\ 3649 \end{array}\right. \\ \hline 11035 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25631 - 3649 \times 4 \\ \hline 11035 \end{array}$$

Aufgaben im IV. Rechenb. M. Seite 16—19. A. K. 9 bis 11.

§. 14.

Das Dividieren (Messen und Theilen).

a) Das Messen im Kopfe.

Statt des Wortes „Enthaltensein" wird gewöhnlich das Wort „Messen" gebraucht. Beim Messen untersucht man also, wie oft eine Zahl von einer andern weggezählt oder weggenommen werden kann, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Beim Theilen zerlegt man eine Zahl in so viele unter sich gleiche Theile, als eine andere anzeigt oder Einheiten enthält.

Die Aufgaben des Messens und Theilens im Kopfe müssen auch auf dieser Stufe noch getrennt behandelt werden; der in den beiden ersten Schuljahren behandelte Lehrstoff wird im 3. Schuljahre wiederholt und erweitert.

Nach Lösung solcher Aufgaben des Messens bei denen das Resultat kleiner als 10 ist, schreitet man zum Messen durch Einer, wenn das Resultat 10 oder mehr ist als 10. Z. B.

Wie oft ist 2 in 20, 3 in 30, 4 in 40 . . . 9 in 90 enthalten?

Wie oft ist 2 in 200, 3 in 300 . . . 9 in 900 enthalten? Wie oft ist 3 in 60 enthalten? 3 ist in 6 E. 2 mal, in 6 Z. 10 mal so oft, also 20 mal enthalten.

Wie oft ist 8 in 320 enthalten? 8 ist in 32 E. 4 mal, in 32 Z. 10 mal so oft, also 40 mal enthalten.

Wie oft ist 2 in 800 enthalten? 2 ist in 8 E. 4 mal, in 8 H. 100 mal so oft, also 400 mal enthalten.

Wie oft ist 4 in 84 enthalten? Wir zerlegen 84 in 80 und 4; — 4 in 80 ist 20 mal, 4 in 4 1 mal, in 84 also 21mal enthalten.

Wie oft 5 in 248 enthalten? Wir zerlegen 248 in 200 und 48; 5 in 200 ist 40 mal, in 48 9 mal enthalten, bleibt 3 als Rest.

Schriftliche Übungsaufgaben Močnik im III. Rechenbuche S. 28 und 29, b.

Wie oft ist 10 in 20, in 30 . . . 90 enthalten? Wie oft 30 in 180 enthalten? 30 E. sind 3 Z., 180 E. sind 18 Z., 3 Z. sind in 18 Z. ebenso oft enthalten als 3 E. in 18 E., daher 6 mal.

Wieviel ist 2 mal, 3 mal . . . 9 mal 11? Wie oft ist daher 11 in 22, in 33 . . . 99 enthalten?

Wieviel ist 2mal, 3mal . . . 9mal 12?

Wie oft ist daher 12 in 24, 36, . . . 108 enthalten?

Anwendungen. Ein Hektoliter Weizen kostet 9 fl.; wieviel Hektoliter kann man für 99 fl. kaufen?

Für 1 Hektoliter muss man 9 fl. von 99 fl. wegnehmen; für noch 1 Hektoliter muss man vom Reste wieder 9 wegnehmen. So oft man also ein von 99 fl. 9 fl. wegnehmen kann, so viele Hektoliter erhält man; 9 fl. kann man so oft von 99 fl. wegnehmen, als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9 fl. in 99 fl. enthalten sind; also 11 mal, daher erhält man für 99 fl. 11 Hektoliter.

Das Messen durch Zehner und Einer setzt eine sichere Kenntnis der Vielfachen der höheren Zahlen voraus, aus welchem Grunde es auf dieser Stufe seine Beschränkung findet.

Schriftliche, abgeleitete und angewandte Aufgaben III. Rechenb. v. M. S. 29, c. S. 30 bis 33.

b) Das Theilen im Kopfe.

Nach Wiederholung des in den früheren Schuljahren über das Theilen Erlernten kommen Aufgaben, in welchen das Theilen auf einen Bruch führt. Z. B. Wieviel ist $\frac{1}{3}$ von 16? 16 ist 15 und 1; $\frac{1}{3}$ von 15 ist 5, $\frac{1}{3}$ von 1 ist $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ von 16 ist also $5\frac{1}{3}$. Wieviel ist $\frac{1}{4}$ von 39? 39 ist 36 und 3; $\frac{1}{4}$ von 36 ist 9, $\frac{1}{4}$ von 3 ist $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$ von 39 ist also $9\frac{3}{4}$.

Wieviel ist 2 mal der 3. Theil von 15, oder wieviel ist $\frac{2}{3}$ von 15? $\frac{1}{3}$ von 15 ist 5, $\frac{2}{3}$ von 15 ist daher 2 mal 5 also 10.

Wenn das Resultat beim Theilen durch Einer mehr als 10 beträgt, so beachte am folgenden Stufengang: Wieviel ist $\frac{1}{2}$ von 20, $\frac{1}{3}$ von 30, $\frac{1}{4}$ von 40... $\frac{1}{9}$ von 90?

Wieviel ist $\frac{1}{2}$ von 200, $\frac{1}{3}$ von 300 .... $\frac{1}{9}$ von 900.

Wieviel ist $\frac{1}{3}$ von 60? $\frac{1}{3}$ von 6 Z. sind 2 Z. oder 20.

Wieviel ist $\frac{1}{4}$ von 56? $\frac{1}{4}$ von 40 ist 10, $\frac{1}{4}$ von 16 ist 4, $\frac{1}{4}$ von 56 ist daher 14. u. s. w.

Schriftliche Aufgaben im III. R. v. M. S. 33 a. und b.

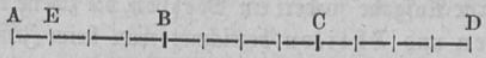
Das Theilen durch Zehner und durch Zehner und Einer im Kopfe ist nur dann leicht möglich, wenn als Divisor nur reine Zehner oder solche zweistellige Zahlen gegeben sind, welche im Einmaleins als Vielfache vorkommen. Soll z. B. der Schüler den 24. Theil von 120 suchen, so lasse der Lehrer die Zahl 24 in die Factoren 4 und 6 oder auch 3 und 8 zerlegen, bringe den Schüler zur Einsicht, dass der 24. Theil von 120 ebensoviel beträgt, als der 6. Theil vom 4. Theile von 120, lasse den 4. Theil von 120 suchen, und von dem gefundenen 4. Theile 30 den 6. Theil nehmen.

Um dem Schüler das Theilen durch Factoren recht verständlich zu machen, theile er irgend ein zweckmäßiges Ganzes, z. B. ein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stäbchen, einen langen Papierstreifen, eine Linie an der Tafel zuerst in 3 gleiche Theile (AB = BC = CD).

Frage, in wie viele gleiche Theile die Linie (das Ganze) getheilt wurde, der wievielte Theil einer dieser Theile von der ganzen



Linie ist, und wie man einen solchen Theil nennt. Hierauf theile er jedes Drittel in 4 gleiche Theile, lasse die Zahl der Theile bei jedem Drittel angeben und frage. der wievielte Theil ein solcher Theil (AE) vom 3. Theile (AB) der Linie ist, in wie viele gleiche Theile nun die ganze Linie getheilt ist, der wievielte Theil also ein solcher Theil (AE) von der ganzen Linie (AD) ist, und wie man den 12. Theil eines Ganzen nennt. Die Schüler sehen nun, dass der 4. Theil vom 3. Theile eines Ganzen ($\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3}$) der zwölfte Theil ($\frac{1}{12}$) ist.

Was für Theile erhält man, wenn man eine Linie zuerst in 6 gleiche Theile und dann jeden solchen Theil in 3 gleiche Theile theilt? Um $\frac{1}{18}$ zu erhalten, sucht man zuerst $\frac{1}{6}$ und dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{6}$.

Wieviel ist $\frac{1}{10}$ von 10, 20, 30, 70, 90, 100, 140?

Wieviel ist $\frac{1}{20}$ von 180? $\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$ von 180 ist 18, und $\frac{1}{2}$ von 18 ist 9.

Meistens werden Divisionsaufgaben durch Zerfällung des Dividendes am leichtesten gelöst. Z. B. Was kostet 1 Meter Leinwand, wenn 28 Meter 21 fl. kosten?

Man zerfällt den Preis 21 fl. in 14 fl. und 7 fl. 14 fl. sind 28 halbe Gulden und 7 fl. sind 28 Viertelgulden; 1 Meter kostet daher $\frac{1}{2}$ fl. und $\frac{1}{4}$ fl. also $\frac{3}{4}$ fl. Schriftliche, abgeleitete und angewandte Aufgaben im III. R. M. S. 33, c, d., und 34, e bis S. 40.

c) Schriftliches Dividieren.

Es sei folgende Aufgabe gegeben: Wieviele Meter Tuch erhält man für 20 fl., wenn 1 Meter 5 fl. kostet? Man wird offenbar so viele Meter bekommen, als man 5 fl. hat, also 5 fl. von 20 fl. wegnehmen kann, d. i. sovielmal 1 Meter als 5 fl. in 20 fl. enthalten sind. Man muss bei der Lösung dieser Aufgabe untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen erhalten ist.

Es sei hingegen die Aufgabe gegeben: Was kostet 1 Meter Tuch, wenn 5 Meter 20 fl. kosten? Da 1 Meter offenbar den 5. Theil von dem kostet, was 5 Meter kosten, so muss man von der Zahl 20 den 5. Theil suchen, also dieselbe in 5 gleiche Theile theilen.

Die erste Aufgabe fordert ein Messen, die zweite ein Theilen.

Messen und Theilen bezeichnet man beim Zifferrechnen mit dem gemeinschaftlichen Namen Dividieren.

Man muss also, um jede der beiden Aufgaben zu lösen, 20 durch 5 dividieren. Im ersten Falle muss man 20 in 5 + 5 + 5 + 5 also in 4 mal 5 zerlegen, hiedurch findet man, dass 5 in 20 4 mal enthalten ist. Anschaulich dargestellt:

●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●●

Bei der Lösung der zweiten Aufgabe muss von der Zahl 20 der 5. Theil gesucht werden, man muss daher 20 in 5 gleiche Theile zerlegen, also in: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 oder anschaulich dargestellt:

●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●●

5 ist in 20 4 mal enthalten und der 5. Theil von 20 ist 4. Das Resultat ist in beiden Fällen 4. Der 5. Theil von 20 ist also ebensoviel, als 5 in 20 enthalten ist. Wir können ja auch sagen: 4 ist der 5. Theil von 20, weil 5 mal 4 = 20 ist, oder weil 5 in 20 4 mal enthalten ist.

Man sieht hieraus, dass zwischen den Aufgaben des Messens und Theilens ein inniger Zusammenhang besteht; daher kann beim schriftlichen Dividieren dasselbe Zeichen gesetzt und derselbe Vorgang eingehalten und die Schüler können leicht auf die Erklärung geführt werden:

Dividieren heißt untersuchen, wie oft eine Zahl in einer anderen gegebenen Zahl enthalten ist, oder eine Zahl in zwei oder mehrere gleiche Theile theilen.

Oder: Dividieren heißt eine Zahl durch eine andere messen oder theilen.

Der Lehrer lasse sich in mehreren Aufgaben die Zahl nennen, welche gemessen und getheilt wird, und sage:

Die Zahl, welche gemessen oder getheilt wird, heißt **Dividend**.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso lasse er sich in diesen Aufgaben die Zahl angeben, durch welche der Dividend gemessen oder getheilt wird, und sage:

Die Zahl, durch welche gemessen oder getheilt wird, heißt **Divisor**.

Er frage ferner, welche Zahl in den gegebenen Aufgaben durch das Dividieren erhalten wurde und sage dann:

Die Zahl, welche man durch das Dividieren erhält, heißt **Quotient**.

Die Schüler sind schon im ersten Schuljahre mit dem Anschreiben und dem Zeichen der Division bekannt gemacht worden, und wir erinnern hier nur; dass 4 : 2 = 2 gelesen wird: 4 gemessen oder getheilt durch 2 ist gleich 2, oder 4 dividiert durch 2 ist gleich 2

Das Dividieren innerhalb des Zahlenkreises bis 1000 fordert ein genaues Vorgehen und viele Übung, wenn man beim Dividieren größerer Zahlen nicht auf Schwierigkeiten stoßen soll.

Um den Schülern das Dividieren der außer dem Einmaleins liegenden Zahlen zu erleichtern, ist eine gründliche, auf Anschauung beruhende, mündliche Vorbereitung sehr zu empfehlen.

Diese könnte etwa in Folgendem bestehen:

2 Knaben haben 5 Zehnkreuzerstücke zu theilen; wieviel erhält jeder? Wenn jeder 2 Zehnkreuzerstücke oder 20 Kreuzer erhält, wieviel haben sie zusammen bekommen? Was bleibt noch übrig? Was werden sie wohl mit dem 5. Zehnkreuzerstücke thun müssen? Wieviele einzelne Kreuzer erhalten sie, wenn sie das Zehnerstück wechseln lassen? Wieviel erhält jeder hievon? Wieviel hat nun jeder zusammen? Auf diese Art läßt sich die Hälfte, der dritte, vierte Theil von 70, 80, 90, 64 u. s. w. entwickeln.

3 Brüder haben 648 fl. zu theilen; wieviel bekommt einer?

Sie haben das Geld in Staatsnoten, also 6 H., 4 Z. und 8 Gulden.

Wieviele Hunderter erhält jeder? Warum? Wieviele Zehnernoten? Wenn jeder 1 Zehnernote erhält, wieviel haben sie zusammen erhalten? Wieviel Zehner bleiben übrig? Was werden sie nun thun, damit sie weiter theilen können? Wieviele einzelne Gulden erhält man für eine Zehnernote? Wieviele Gulden waren schon vorhanden? Wieviel sind das zusammen? Wieviel erhält jeder Bruder von den 18 fl.? u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es kann hier auch schon der Fall behandelt werden, dass ein Theil des Quotienten 0 ist. Z. B. 824 fl. sind unter 4 Personen zu theilen, wie viel erhält jede Person?

Man führt die Schüler wieder durch Fragen dahin, dass wohl die 8 Hunderter unter 4 Personen so vertheilt werden können, dass auf jede Hunderter (2) kommen; dass sich aber 2 Zehner nicht so in 4 gleiche Theile theilen lassen, dass auf jeden Theil Zehner entfallen; man erhält daher keine Zehner (0 Zehner) und muss die 2 Zehnernoten wechseln lassen, wofür man 20 Guldennoten erhält. Diese zu den 4 Gulden gezählt, geben 24 fl., welche nun wieder getheilt werden u. s. w.

In ähnlicher Weise geht man mit Hilfe der Zehnerbundstäbchen bei der Theilung 2zifferiger und mit Hilfe der Hundertbünde bei der Theilung 3zifferiger Zahlen vor.

Für den letzteren Fall legt der Lehrer einen Hundertbund vor, und beauftragt einen Schüler, diese Stäbchen unter 3 Mitschüler so zu vertheilen, dass jeder gleichviel erhält. Der beauftragte Schüler wird den Hundertbund auflösen und hat nun 10 Zehnerbünde. Die Schüler sehen, dass jeder 3 Zehnerbünde erhält, diese wieder zusammengelegt nur 9 Zehnerbünde geben und daher 1 Zehnerbündchen übrig bleibt, welches nun wieder aufgelöst werden muss.

Man versuche auf dieselbe Art 200, 400, 500 in 3 gleiche Theile zu zerlegen.

Nach diesen Vorbereitungen geht man zur Division von 2- und 3ziffrigem Dividende über. Zuerst werden aber solche Aufgaben gewählt, wo kein Übergang in eine andere Ordnung stattfindet. Z. B.: 86 : 2.

86 : 2 = 4 Z. + 3 E. = 43.
8.
6
6

Wieoft ist 2 in 8 E. enthalten? Wie oft daher in 8 Z.? Die 4 Zehner schreiben wir rechts hinter das Gleichheitszeichen. Wir wollen sehen, ob 2 in 8 Z. genau 40 mal enthalten ist; 40 mal 2 ist 80 oder 8 Z.; diese schreiben wir unter die 8 Z. und subtrahieren. Da nichts übrig bleibt, so ist 2 in 8 Z. genau 40 mal enthalten. Nun suchen wir, wie oft 2 in 6 E. enthalten sind und setzen deshalb die 6 E. herab. 2 ist in 6 E. 3 mal enthalten; diese

3 E. setzen wir hinter die 4 Z.; 2 mal 3 ist 6; schreiben wir diese 6 unter die 6 Einer und subtrahieren, so bleibt nichts übrig. 2 ist daher in 86 40 mal und 3 mal, also 43 mal enthalten.

Ebenso verfährt man bei der Division einer dreizifferigen Zahl durch Einer. Z. B.:

396 : 3 = 1 H. + 3 Z. + 2 E. = 132.

3..
9.
9.
6
6

Nun kommen Aufgaben, in welchen bei der Division der höheren Zahlen ein Rest bleibt Z. B.: 96 : 2.

96 : 2 = 4 Z. + 8 E. = 48.

8.
16
16

Wie oft ist 2 in 9 E. enthalten? Wie oft daher in 9 Z.? Wir schreiben 40 oder 4 Z. in den Quotienten. Wieviel ist 40 mal 2? Wieviel Zehner sind 80 E.? Die 8 Z. schreiben wir unter die 9 Z. und subtrahieren. Es bleibt 1 Z. = 10 E. Wieviel sind 10 E. und die noch vorhandenen 6 E., welche wir zu 1 herabsetzen? Wie oft ist 2 in 16 E. enthalten? Wir schreiben die 8 E. in den Quotienten, und suchen ob noch ein Rest bleibt; 8 mal 2 ist 16, 16 von 16 weggenommen, bleibt nichts.

Wieviel ist der 4. Theil von 357?

357 : 4 = 8 Z. + 9 E. + $\frac{1}{4}$ = $98\frac{1}{4}$.

32.
37
36
1

Können wir 3 H. so in 4 gleiche Theile theilen, dass auf 1 Theil ein Hunderter kommt? Wir müssen daher die 3 H. in Zehner auflösen. Wieviel Zehner sind 3 H.? Wieviel Zehner sind schon vorhanden? Wieviel Zehner haben wir also zu theilen? Wieviel ist der 4. Theil von 35 Z.? Wieviel Z. sind 8 mal 4 Z.? Wieviel Zehner bleiben von den 35 Z. noch übrig? Was ist noch zu theilen? (3 Z. und 7 E.) Wieviel Einer sind 3 Z. und 7 E.? Wieviel ist der 4. Theil von 37 E.? Wieviel ist aber 9 mal 4? Was bleibt also noch übrig? Der Quotient ist daher 8 Z. und 9 E. oder 89 mit dem Reste 1. Man kann aber den Rest noch in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4 gleiche Theile theilen; wieviel ist der 4. Theil von 1? Der 4. Theil von 357 ist also $89\frac{1}{4}$.

Nach wenigen Beispielen sehen die Schüler, dass man die einzelnen Quotienten (Theilquotienten) gleich unmittelbar neben einander schreiben kann, weil sie nach der Ordnung Hunderter, Zehner und Einer bedeuten und weil sie nach der Reihe hingeschrieben, schon in ihrer wahren Bedeutung erscheinen; auch der Grund des Herabsetzens der Ziffern werden sie bald einsehen.

Man gebe nun auch Aufgaben, in welchen ein Theilquotient 0 ist, z. B.:

642 : 6 = 107.

6
4
0
42

Die Schüler werden hier aufmerksam gemacht, dass 6 in 4 nicht oder 0 mal enthalten ist, diese 0 aber im Quotienten erscheinen muss; denn bliebe sie weg, so wäre der Zehner nicht ausgedrückt. Anfangs lasse der Lehrer das Product aus dem Quotienten 0 und dem Divisor 6 angeben und es unter den Theildividend 4 setzen; die Schüler werden aber bald zur Einsicht kommen, dass sie anstatt die 2 E. des Dividendes zum Reste 4 zu setzen, dieselben sogleich zum Theildividend herabsetzen können.

Aufgaben im III. R. M. S. 40 und 41.

Nun folgt das Dividieren durch zweizifferige Divisoren, und zwar a) durch reine Zehner.

Wieviel ist der 10. Theil von 350?

Der 10. Theil von 1 H. ist 1 Z., sind von 3 H. sind daher 3 Z. der 10. Theil 5 Z. sind 5 E.

350 : 10 = 35. Die Schüler sehen, dass beim Dividieren durch 10 als Quotient die Ziffern des Dividendes in derselben Reihenfolge erscheinen, dass jedoch aus den Hunderter Zehner, aus den Zehnern Einer werden, dass also jede Ziffer um eine Stelle weiter zur Rechten geschoben wurde.

Eine ganze Zahl wird durch 10 dividiert, indem man jede Ziffer derselben um 1 Stelle weiter zur Rechten schiebt, und dieses geschieht, wenn man von derselben eine Ziffer zur Rechten abschneidet; die abgeschnittene Ziffer gibt, wenn sie nicht 0 ist, den Rest. Z. B.

638 : 10 = 63
8 Rest.

Nun dürften die Schüler in der Division durch 20, 30 u. s. w. keine besondere Schwierigkeit finden. Wieviel ist der 20. Theil von 473?

473 : 20 = 23
4
7
6
13 Rest.

$\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{10}$. Um daher den 20. Theil von 473 zu bekommen, nimmt man von 473 zuerst den 10. Theil, indem man eine Ziffer rechts abschneidet und dividiert dann noch 47 durch 2. Zu dem Reste 1 wird die abgeschnittene Ziffer gesetzt.

Übungsaufgaben im III. R. M. S. 41, 2. Gruppe.

b) Bei der Division durch Zehner und Einer wähle man anfangs solche Divisoren, in welchen die Einer sehr klein sind, damit die Schüler die Ziffern des Quotienten leichter aufsuchen können. Z. B.:

483 : 21 = 23
42
63
63

Die Schüler haben schon bei der Division durch einzifferige Divisoren gelernt, dass sie 2 Ziffern des Dividendes zusammenfassen müssen, wenn die erste Ziffer des Dividendes kleiner ist als der Divisor; sie werden daher auch hier die 4 H. in Zehner verwandeln und die vorhandenen 8 Zehner hinzugeben. 4 H. = 40 Z. und 8 dazu, sind 48 Z. Wir suchen daher, wie oft 21 E. in 48 E. enthalten sind. 21 E. sind in 48 E. nahe so oft enthalten, wie 20 E. in 40 E. oder wie 2 in 4, also 2mal, daher sind 21 E. in 48 Z. 10 mal so oft, also 20 mal enthalten. Um zu erfahren, ob dieses richtig ist, nehmen wir 20 mal 21 E. und suchen, ob sie sich von 48 Z. subtrahieren lassen. 20 mal 21 E. sind 420 E. oder 42 Z. Diese lassen sich von 48 Z. wegnehmen und es bleiben noch 6 Z. übrig. 6 Z. oder 60 E. und 3 E. sind 63 E. 21 E. sind in 63 E. nahe so oft enthalten, wie 20 E. in 60 E. oder wie 2 in 6, also 3 mal. 3 mal 21 E. sind 63 E., daher bleibt von 63 E. nichts übrig. 21 ist also in 483 23 mal enthalten.

Nach längerer Übung auf dieser Stufe, wähle man Divisoren, deren Einer ziemlich groß sind, z. B. 345: 19. Die Schüler werden hier wahrscheinlich sagen 19 ist in 34 oder 1 ist in 3 3mal enthalten. Man lasse den Quotienten 3 anschreiben und mit dem Divisor multipli-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

cieren; die Schüler überzeugen sich sogleich, dass derselbe zu groß ist, da ja 3 mal 19 57 ist und dieses Product daher nicht von 34 weggenommen werden kann, sie sehen auch leicht ein, dass man hier auch auf die Einer Rücksicht nehmen muss. Man mache sie damit bekannt, dass man sich das Aufsuchen der Ziffern des Quotienten erleichtert, wenn man für den gegebenen Divisor die nächst höhere reine Zehnerzahl annimmt.

Übungsaufgaben im III. R. M. S. 41, 3. Gruppe.
Abgeleitete Aufgabe III. R. M. S. 41, letzte Gruppe.
Angewandte Aufgabe III. R. M. S. 42 und 43.
A. K. S. 37 bis 40.

Im 4. Schuljahre wird das Dividieren im unbegrenzten Zahlenraume fortgesetzt. Das Lehrverfahren ist das gleiche, wie beim Dividieren unter 1000.

Als Übergang werden noch Aufgaben mit zweizifferigem Divisor sowohl im Sinne des Messens als des Theilens durchgeführt, wobei darauf hingewiesen wird, dass sowohl die Form des schriftlichen Dividierens als auch das Resultat sich gleich bleiben, ob man die Schlussweise des Messens oder des Theilens anwendet, und dass man daher der Kürze und Einfachheit wegen beim schriftlichen Dividieren auch bei den Aufgaben, welche eine Theilung fordern, sich der Ausdrücke bedient, welche beim Messen angewendet werden.

```
29016 : 72 = 403
288
----
 216
 216
----
```

Hienach würden wir bei der Aufgabe sagen: 72 ist in 2 nicht 1mal, also auch in 2 ZT. nicht 10000 mal und in 29 T. nicht 1000 mal enthalten, wir nehmen daher sogleich die drei ersten Ziffern des Dividendes, nämlich 290 als ersten Theildividend an und sagen 72 ist in 290 E. (7 in 29) 4 mal, also in 290 H. 400 mal enthalten und setzen in den Quotienten 4 H., 400 mal 72 ist 4 H. mal 72 = 288 H., diese von 290 H. subtrahiert, bleiben 2 H. 2 H. = 20 Z. und hierzu 1 Z. herabgesetzt sind 21 Z. 72 ist in 21 E. nicht 1 mal, also auch in 21 Z. nicht 10 mal enthalten, daher kommt im Quotienten an die Stelle der Zehner 0. Wir setzen zu den 21 Z. = 210 E. sogleich die 6 E. herab und erhalten 216 E. 72 ist in 216 (7 in 21) 3 mal enthalten, wir schreiben die 3 E. in den Quotienten; 3mal 72 ist 216, es bleibt also nichts übrig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind die Schüler auf die angegebene Weise in Dividieren gehörig geübt, so entfällt beim Rechnen die Angabe der Stellenwerte, und man sagt kurz: 72 in 290 (7 in 29) ist 4 mal enthalten; 4 mal 2 ist 8 und 4mal 7 ist 28; (schreibt 288 unter 290) 288 von 290 bleibt 2; 1 herab. 72 in 21 ist 0 mal enthalten; 6 herab. 72 in 216 (7 in 21) ist 3mal enthalten; 3 mal 2 ist 6, 3 mal 7 ist 21; 216 von 216 bleibt nichts.

Die Division durch 3- und mehrzifferige Divisoren wird auf gleiche Art durchgeführt.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wenn der Divisor rechts Nullen hat. Z. B.

35872 : 400 = 89
32
38
36
also 272 Rest

400 = 4 H. 4 H. sind in 358 H. ebenso oft enthalten, als 4 E. in 358 E., also 89 mal, bleibt 2 als Rest, zu welchem die abgeschnittenen Ziffern gesetzt werden.

Oder: 35872 : 400 = 89.
3200
3872
3600
272 Rest

Wenn der Divisor rechts Nullen hat, so läßt man dieselben weg, schneidet vom Dividende ebenso viele Ziffern rechts ab, und setzt diese Ziffern zum letzten Reste herab.

Haben die Schüler im Subtrahieren mittels des Ergänzens die gehörige Fertigkeit erlangt; sind sie tüchtig geübt worden, die Summe mehrerer Zahlen, sogleich während des Addierens, sowie das Product einer Zahl mit einem einzifferigen Multiplicator sogleich während des Multiplicierens von einer gegebenen Zahl zu subtrahieren, also beide Operationen unter einem zu verrichten; so wird es ihnen auch nicht schwer werden, jenes abgekürzte Divisionsverfahren zu erlernen, bei welchem man die Theilproducte nicht anschreibt, sondern sie sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und nur die Reste hinsetzt.

Wir wollen hier ein Beispiel und zwar zuerst mit einzifferigem Divisor darstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vollständige Form:	Abgekürzt:
25884 : 9 = 2876	25884 : 9 = 2876
18	78
78	68
72	54
68	
63	
54	
54	

Bei der abgekürzten Form spricht man:

9 in 25 2 mal; 2 mal 9 ist 18 und **7** ist 25; 8 herab.
9 in 78 8 mal; 8 mal 9 ist 72 und **6** ist 78; 8 herab.
9 in 68 7 mal; 7 mal 9 ist 63 und **5** ist 68; 4 herab.
9 in 54 6 mal; 6 mal 9 ist 54 und **0** ist 54.

Schüler, welche nach dieser abgekürzten Form dividieren können, werden gar leicht dahin gebracht, dass sie auch den Rest nicht anschreiben, sondern sich denselben merken und den Quotienten gleich unter die entsprechende Stelle des Dividendes setzen. Z. B.

25884 : 9	Man spricht hier:
2876	9 in 25 2 mal, bleibt 7;
	9 in 78 8 mal, bleibt 6;
	9 in 68 7 mal, bleibt 5;
	9 in 54 6 mal.

Bei der Division durch einen mehrzifferigen Divisor wird das Product aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und der Rest angeschrieben. Z. B.

Vollständige Form.	Abgekürzte Form:
80842 : 83 = 974	80842 : 83 = 974
747	614
614	332
581	
332	
332	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man spricht hier: 83 in 808 oder 8 in 80 ist 9 mal enthalten; 9 mal 3 ist 27 und **1** ist 28, bleibt 2, 9 mal 8 ist 72 und 2 ist 74 und **6** ist 80; 4 herab. 8 in 61 ist 7 mal enthalten; 7 mal 3 ist 21 und **3** ist 24, bleibt 2; 7 mal 8 ist 56 und 2 ist 58 und **3** ist 61. u. s. w.

Die nähere Begründung des Vorganges siehe Seite 51 und 62.

Aufgaben IV. Rechenbuch M. S. 20—26. A. K. S. 12 bis 16.

Nun wird den Schülern auch die Probe der Division gezeigt. Schon im ersten Schuljahre mussten sie beim Messen und Theilen die Begründung angeben, sie sagten z. B. 3 ist in 12 4 mal enthalten, weil 4 mal 3 12 ist, und der 3. Theil von 12 ist 4, weil 3 mal 4 12 ist. Schon hiebei wird der Dividend als Product aus dem Quotienten und dem Divisor hingestellt.

Beim Messen wird aus dem Dividend und dem Quotienten der Multiplicator gesucht; beim Theilen sucht man den Multiplicand, daher:

Dividieren heißt, aus dem Producte zweier Zahlen und einer derselben die andere finden. Hieraus geht auch hervor, dass die Multiplication die Probe über die Division und die Division die Probe über die Multiplication ist.

Um die Schüler zur Einsicht des Verfahrens bei der Divisionsprobe zu führen, gebe man eine Aufgabe, bei welcher eine Theilung verlangt wird, z. B. Wieviel ist der 4. Theil von 7348?

7348 : 4 = 1837.	Was erhält man, wenn man den
33	4. Theil (1837) der Zahl 7348
14	wieder 4 mal nimmt? Wie kann man
28	sich also überzeugen, ob man richtig
	dividiert habe?

Die Schüler werden auch leicht einsehen, dass man, wenn bei der Division ein Rest bleibt, diesen bei der Probe noch zum Producte aus dem Quotienten und dem Divisor addieren muss.

Aus dem früheren ist ersichtlich, dass die Division die Probe über die Multiplication ist. Der Lehrer lasse sowohl zur Wiederholung der Probe über die Multiplication als auch zur Einübung der Division Multiplicationen machen und das Product abwechselnd durch jeden der beiden Factoren dividieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Allgemeine Bemerkungen.

Schon im 3. Schuljahre, nachdem die Schüler die vier Grundoperationen innerhalb des Zahlenraumes bis 1000 durchführen gelernt haben, müssen diese gewonnenen Kenntnisse ihre praktische Verwertung finden; denn dies fördert nicht nur die formale Bildung der Jugend, sondern macht ihnen auch den Rechenunterricht interessant, schon deshalb, weil sie den Nutzen desselben einsehen lernen. Zu diesem Zwecke können hier schon leichtere Gewinn- und Verlustrechnungen, Regeldetri-Aufgaben (jedoch nur durch einfache Schlüsse zu lösen), Gesellschafts- und Durchschnittrechnungen gegeben werden, wie sie im III. R. M. als Wiederholungsaufgaben bezeichnet sind. Es ist hier nicht gemeint, dass diese Rechnungen schon ausführlich behandelt werden sollen, sondern die Schüler werden durch die Fragen des Lehrers zu Lösung geführt, ohne dass sie auch nur mit dem Namen Gesellschaftsrechnung ꝛc. bekannt gemacht werden. Um nicht missverstanden zu werden, wollen wir hier ein Beispiel durchführen.

Zwei Taglöhner A und B haben zusammen 24 fl. verdient: wieviel bekommt jeder, wenn A 3 und B 5 Tage gearbeitet hat?

Wieviele Tage haben beide Taglöhner zusammen gearbeitet? Was haben sie für diese 8 Tage als Lohn erhalten? Wieviel beträgt dieses für 1 Tag? Wievielmal 3 fl. wird daher A erhalten? Wieviel B.?

Ein Wirt mischt 2 hl Wein à 20 fl. und 3 hl à 35 fl. zusammen; wieviel ist 1 hl des gemischten Weines wert?

Wieviel kosten die 2 hl der 1. Sorte? Wieviel die 3 hl der 2. Sorte? Wieviel kostet daher die ganze Mischung? Wieviel hl enthält die Mischung? Was kostet daher 1 hl hievon?

Auch einfache Zinsrechnungen können hier schon durchgeführt werden. Da aber später von diesen Rechnungen in besonderen Capiteln gehandelt wird, so wollen wir dieselben, um Wiederholungen zu vermeiden, hier übergehen. Dasselbe gilt vom Rechnen mit Decimalen, worin im 3. Schuljahre bis zu den Tausendteln geschritten wird. Das III. Rechenb. M. II. Abschnitt von Seite 44 bis 51 bietet eine hinreichende Menge von Aufgaben. Für das 4. Schuljahr sind vortreffliche Wiederholungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 26 bis 29.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf das Rechnen mit sogenannten Rechnungsvortheilen ist kein besonderer Wert zu legen, da gründliches Verständnis und Sicherheit im Rechnen höher zu schätzen sind, als Schnelligkeit. Diese Vortheile müssen von den Schülern aus gegebenen Aufgaben selbst gefunden werden. Zu diesem Behufe müssen gewisse Vorübungen gemacht werden, welche hauptsächlich die Verwandlung der Geldsorten zum Gegenstande haben, als: der Zehner in Kreuzer, der Kreuzer in Zehner und Kreuzer, der Gulden in Zehner, der Zehner in Gulden und Kreuzer, der Zwanziger, Viertel-Gulden und halben Gulden in Gulden und Kreuzer.

Wir verweisen hierbei auf das III. R. M.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Abschnitt.

Die Decimalzahlen.

§. 15.

Wesen und Numeration der Decimalzahlen.

Der Begriff der Decimalzahlen, so wie das Rechnen mit denselben läſst eine zweifache Auffaſſung und Behandlungsweise zu. Man betrachtet nämlich die Decimalzahlen bloß als eine Erweiterung des dekadischen Systems und rechnet mit ihnen nach denselben Regeln, wie mit ganzen Zahlen, oder man faſst sie als Brüche auf.

Für die erste Behandlungsweise sprechen mehrere triftige Gründe.

Führt man den Schülern die Decimalzahlen als Brüche vor, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, daſs ihr Nenner 10, 100, 1000 ꝛc., kurz eine Potenz von 10 ist, und lehrt darauf sogleich die eigenthümliche Behandlungsweise dieser Brüche; so entzieht man den Schülern gleich im Anfange, was ihnen zum Voraus nicht vorenthalten bleiben sollte; die concrete und praktische Grundlage dieser besonderen Brüche. Erhält aber der Schüler auch hier eine recht lebendige Anschauung von der dekadischen Abstufung der Bruchtheile, und faſst er den Zusammenhang mit den dekadisch eingetheilten Maßen, Gewichten ꝛc. schon von Anfang an auf; so wird bei ihm der ganze Unterricht weit wirksamer sein. Dieser Vorgang ist auch natürlicher, indem der Zusam menhang zwischen den ganzen Zahlen und den Decimalzahlen sogleich ersichtlich ist. Auch der pädagogische Grundsatz: Knüpfe das Neue an etwas schon Bekanntes, spricht hierfür, da ja das Rechnen mit Decimalzahlen aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen abgeleitet wird, so wiederholen sie das letztere während sie zugleich etwas Neues lernen. Bei der zweiten Auffaſſung müſste das Rechnen mit gemeinen Brüchen vorausgehen, welches nach unserem Lehrplane erst später vorkommt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um die Schüler mit den Decimalzahlen bekannt zu machen, schreibe der Lehrer eine Zahl, welche aus lauter gleichen Ziffern besteht, an die Tafel, z. B. 3333 und frage: Was gilt die Ziffer 3 an der 1. Stelle rechts? Was gilt sie an der 2. Stelle? Wievielmal so viel sind 3 Z. als 3 E.? Was gilt die Ziffer 3 an der 3. Stelle? Wievielmal so viel sind aber 3 H. als 3. Z. u. s. f. Man wiederholt also hier, was die Schüler schon bei der Numeration gelernt haben: Eine Ziffer gilt in der nächstfolgenden Stelle gegen links 10 mal so viel als an der nächst vorangehenden rechts.

Was gilt die Ziffer 3 an der 4. Stelle? Was an der 3. Stelle? Der wievielte Theil von 3 T. sind 3 H.? Was gilt sie an der 2. Stelle? Der wievielte Theil sind 3 Z. von 3 H.? Was gilt die Ziffer 3 an der 1. Stelle? Der wievielte Theil sind 3 E. von 3 Z.

Eine Ziffer gilt an jeder folgenden Stelle gegen die Rechte den 10. Theil von dem, was sie an der nächst vorhergehenden links gilt.

Wenn wir aber zur Zahl 3333 nach den Einern noch eine Ziffer rechts hinzusetzen, den wievielten Theil von den Einern müsste diese Ziffer gelten? Wieviel ist der 10. Theil von 1 E.? Wieviel von 2 E.? Wieviel ist der 10. Theil von 3 E.?

Wir haben bis jetzt die Ziffern an der 1. Stelle rechts immer als Einer angesehen.

Wenn wir aber nach den Einern rechts noch weitere Ziffern setzen, so müssen wir durch ein bestimmtes Zeichen anzeigen, wo sich die Einerstelle befindet; man ist übereingekommen, dieses durch einen Punkt zu bezeichnen, den man oben rechts nach den Einern setzt, und wir lesen daher die Zahl 3333·3 3333 Ganze 3 Zehntel.

Den wievielten Theil von 3 Zehnteln wird aber die Ziffer 3 bedeuten, die wir nach den Zehnteln hinzufügen?

Wieviel ist der 10. Theil von 1 Zehntel? Von 2 Zehnteln? Wieviel ist daher der 10. Theil von 3 Zehnteln? Wie werden wir also die Zahl 3333·33 lesen?

Auf diese Art führe man die Schüler dahin, dass die Ziffer 3 an der 3. Stelle nach dem Punkte rechts Tausendtel, an der 4. Stelle Zehntausendtel, an der 5. Stelle Hunderttausendtel u. s. w. gilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In wieviele gleiche Theile muss man das Ganze theilen, um Zehntel zu erhalten? In wieviele gleiche Theile muss man die Zehntel theilen, um Hundertel zu bekommen? u. s. f.

Wenn man das Ganze in 10 gleiche Theile und die auf einander folgenden niedrigeren Theile wieder in 10 gleiche Theile theilt, so nennt man die hiedurch erhaltenen Theile Zehntheilchen oder Decimalen. Eine Zahl, in welcher Decimalen vorkommen, heißt Decimalzahl.

Der Punkt, welcher die Ganzen von Decimalen trennt, heißt Decimalpunkt.*) Die Stellen rechts von demselben heißen Decimalstellen. Es bedeutet jede Ziffer in der ersten Stelle nach dem Decimalpunkte Zehntel, in der zweiten Hundertel, in der dritten Tausendtel u. s. w.

Wir wollen nun die Decimalstellen mit den Stellen der ganzen Zahlen übersichtlich darstellen:

Ganze:							Decimalen:					
3	3	3	3	3	3	.	3	3	3	3	3	3
Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderter	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Millionteil

Aus diesem Schema zeigt sich, dass die Decimalzahlen nur eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems sind, ferner, dass die Zehner und Zehntel, Hunderter und Hundertel Tausender und Tausendtel u. s. w. immer gleichweit von den Einern entfernt sind.

1 Ganzes = 10 Zehntel,
1 Zehntel = 10 Hundertel,
1 Hundertel = 10 Tausendtel,
1 Tausendtel = 10 Zehntausendtel,
1 Zehntausendtel = 10 Hunderttausendtel u. s. w., daher ist:
1 Ganzes = 10 Zehntel = 100 Hundertel = 1000 Tausendteln.

*) In Deutschland macht man ein Komma; daher sagt man statt Decimalpunkt auch Decimalzeichen oder noch besser Einerzeichen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

1 Zehntel = 10 Hundertel = 100 Tausendtel = 1000 Zehntausendtel.

1 Hundertel = 10 Tausendtel = 100 Zehntausendtel = 1000 Hunderttausendtel u. s. w.

Nun lehre man die Schüler das Anschreiben und Lesen der Decimalzahlen. Man zeigt ihnen, dass man zuerst die Ganzen anschreibt, nach denselben den Decimalpunkt setzt und diesem die Zehntel, Hundertel u. s. w. folgen lässt. Enthält die Decimalzahl keine Ganzen, so setzt man an deren Stelle eine Null. Z. B. 5 Zehntel, 2 Hundertel schreibt man 0·52. Auch wenn Zehntel, Hundertel u. s. w. fehlen, so werden an diese Stellen Nullen gesetzt. Z. B. 6 Tausendtel, 8 Zehntausendtel wird geschrieben 0·0068. (Übungen im Anschreiben der Decimalzahlen IV. Rechb. M. S. 30 bis 32).

Beim Lesen der Decimalzahlen spricht man zuerst die Ganzen aus und dann jede Decimale einzeln mit oder ohne Angabe des Stellenwertes, oder auch alle Decimalen als Zahl mit Angabe des Stellenwertes der letzten Decimale. Z. B. 37·308 wird gelesen:

37 Ganze, 3 Zehntel, keine Hundertel, 8 Tausendtel, oder 37 Ganze mit den Decimalen 3, 0, 8, oder 37 Ganze, 308 Tausendtel.

Was die letzte Leseart betrifft, so muss diese den Schülern erst recht klar gemacht werden. Wir lassen Decimalzahlen z. B. 0·25, 0·375 u. s w. zuerst nach der ersten Art lesen und fragen dann: Wieviel Hundertel sind 2 Zehntel? Wieviel Hundertel sind noch angegeben? Wieviel Hundertel macht dieses zusammen? Wie können wir also statt 2 Zehntel, 5 Hundertel sagen? Wieviel Hundertel sind 3 Zehntel, 7 Hundertel zusammen? Wieviel Tausendtel sind 37 Hundertel? Wieviel Tausendtel sind schon angegeben? Wieviel Tausendtel sind dieses zusammen? Wie können wir also statt 3 Zehntel, 7 Hundertel, 5 Tausendtel sagen? u. s. w. *)

Übungen im IV. Rechenbuche M. S. 32 und 33.

*) Über diese Art Decimalen zu lesen sagt der berühmte österreichische Mathematiker Dr. L. C. Schulz v. Straßnitzki: Unsere Schulen legen ganz mit Unrecht darauf einen Wert, dass der Decimalbruch auf diese Art ausgesprochen werde, während gerade die erste Art die einfachste ist, und den Vortheil hat, dass man Ziffer für Ziffer, wie sie ausgesprochen wurde, anschreiben

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

§. 16.

Einfluss des Decimalpunktes auf den Wert der Decimalen.

Obgleich diese Betrachtung erst bei der Multiplication und Division der Decimalen vorgenommen werden sollte, so findet sie doch beim Elementar-Unterrichte auch hier ihre Rechtfertigung dadurch, da sie das Wesen der Decimalzahlen noch besser erfassen lehrt.

a) Der Lehrer lasse einer gegebenen Decimalzahl rechts eine und hierauf mehrere Nullen anhängen und hierauf den Stellenwert der Ziffern der dadurch entstandenen Decimalzahlen angeben. Z. B. 7·83, 7·830, 7·8300, 7·83000. Die Schüler ersehen, dass dadurch die Ziffern in diesen Zahlen ihre Stelle nicht verändern, weshalb auch die ganze Zahl ihren Wert beibehält.

Der Wert einer Decimalzahl wird nicht geändert, wenn man derselben rechts eine, zwei oder mehrere Nullen anhängt.

b) Man schreibe die Zahlen 3·785 und 37·85 an die Tafel, und lasse sie mit einander vergleichen. Die Schüler sehen, dass man die zweite Zahl aus der ersten dadurch erhält, dass man das Decimalzeichen um eine Stelle weiter nach rechts setzt und dass dadurch jede Ziffer um eine Stelle nach links rückt; hiebei wurden aus den 3 Einern 3 Zehner, aus den 7 Zehnteln 7 Einer, aus den 8 Hunderteln 8 Zehntel und aus den 5 Tausendteln 5 Hundertel. Jede Ziffer gilt also 10 mal so viel als vorher, es ist also die ganze Zahl 10 mal so groß geworden.

Setzt man das Decimalzeichen um 2 Stellen weiter nach rechts, so rückt jede Ziffer der Zahl 3·785 um 2 Stellen weiter nach links, und jede Ziffer der neuen Decimalzahl 378·5, und daher die Zahl selbst, gilt 100 mal soviel als vorher. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man:

Eine Decimalzahl wird mit 10, 100, 1000 ... multipliciert, wenn man das Decimalzeichen um 1, 2, 3 ... Stellen weiter nach rechts rückt.

---

kann, während man nach der zweiten Art erst dann zu schreiben anfangen kann, wenn der Wert der letzten Ziffer ausgesprochen wurde, man muß also die ganze Zahl im Gedächtnisse behalten, was, wenn die Zahl etwas größer ist, zu vielen Irrungen Veranlassung geben kann.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Hat der Multiplicand nicht so viele Decimalstellen als zur Weiterrückung des Decimalzeichens erfordert werden, so füllt man die links vom Decimalzeichen leergewordenen Stellen durch Nullen aus. Z. B. 3·2 × 100. Hier müssen die 3 Einer an die Stelle der Hunderter und die 2 Zehntel an die Stelle der Zehner kommen, dadurch wird die Einerstelle leer, welche mit 0 ausgefüllt wird. 3·2 × 100 = 320.

24·7 × 1000 = 24700. Hier kommen die 2 Zehner an die Stelle der Zehntausender, die 4 Einer an die Stelle der Tausender und die 7 Zehntel an die Stelle der Hunderter, daher werden an die Einer- und Zehnerstelle Nullen gesetzt.

Oder: man hängt der Decimalzahl so viele Nullen an, als zur Verrückung des Decimalzeichens nöthig sind, da man ja einer Decimalzahl durch Anhängung von Nullen jede beliebige Anzahl von Decimalstellen geben kann, ohne dass der Wert derselben geändert wird.

$$3{\cdot}2 \times 100 = 3{\cdot}20 \times 100 = 320$$
$$24{\cdot}7 \times 1000 = 24{\cdot}700 \times 1000 = 24700.$$

c) Der Lehrer schreibe die Zahlen 67·25 und 6·725 an die Tafel und lasse sie wieder mit einander vergleichen. Die Schüler sehen, dass man die Zahl 6·725 aus der Zahl 67·25 erhält, indem man das Decimalzeichen um eine Stelle weiter nach links rückt. Hiedurch wird aber jede Ziffer um eine Stelle weiter nach rechts gerückt, aus 6 Zehnern werden 6 Einer, aus 7 Einern 7 Zehntel, aus 2 Zehnteln 2 Hundertel, aus 5 Hunderteln 5 Tausendtel; jede Ziffer der zweiten Zahl gilt also nur den 10. Theil, von dem, was sie in der ersten Zahl gilt, die Zahl 6·725 ist daher nur der 10. Theil von der Zahl 67·25. Auf dieselbe Weise ersieht man, dass die Zahl 0·6725 den 100. Theil und die Zahl 0·06725 nur den 1000. Theil der Zahl 67·25 beträgt. Wenn man daher das Decimalzeichen um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter nach links schiebt, so rückt jede Ziffer der Zahl um 1, 2, 3 . . . Stellen nach rechts, und der Wert der Zahl beträgt nur den 10., 100., 1000. . . . Theil von dem der ursprünglich gegebenen Zahl. Eine Decimalzahl wird durch 10, 100, 1000 . . . . dividiert, wenn man das Decimalzeichen um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter nach links rückt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 17.

Addition der Decimalzahlen.

Die Schüler wissen, dass man bei der Addition der ganzen Zahlen nur Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s. w. addieren kann, und dass man zur Erleichterung des Addierens die Posten so untereinander schreibt, dass die Ziffern an den gleichnamigen Stellen untereinander zu stehen kommen. Es ist ihnen daher auch einleuchtend, dass auch bei der Addition der Decimalzahlen Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. gesetzt werden.

Man lasse anfangs Posten von gleich viel Decimalstellen addieren. Z. B.:

34·278	Man lasse die Tausendtel addieren und frage:
694·634	Wieviel beträgt die Summe der Tausendtel?
87·432	Wieviel Hundertel sind in 19 Tausendteln enthalten? Wieviel Tausendtel enthält diese Summe
6·375	
822·719	außer dem einen Hundertel noch? Die Schüler

begreifen leicht, dass man die 9 Tausendtel unter die Tausendtel schreiben und das eine Hundertel zu den Hunderteln weiter zählen muss. Ebenso verfahre man bei der Addition der Hundertel und Zehntel. Bei letztern erhalten sie 17 Zehntel, welche aus 1 Ganzen und 7 Zehnteln bestehen; auch hier begreifen sie leicht, dass die 7 Zehntel unter die Zehntel geschrieben und 1 Ganzes zu den Ganzen gezählt wird. Kürzer: 5 und 2 ist 7 und 4 ist 11 und 8 ist 19, 9 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 7 ist 8 und 3 ist 11 und 3 ist 14 und 7 ist 21, 1 angeschrieben, bleibt 2 u. s. w.

Die Schüler sehen nun, dass die Decimalzahlen gerade so addiert werden wie die ganzen Zahlen, dass man jedoch das Decimalzeichen setzen muss, wenn man von den Zehnteln zu den Ganzen übergeht, und dass dasselbe in der Summe genau unter das Decimalzeichen der Posten zu stehen kommt. Der Lehrer dulde aber nie, dass die Schüler erst nach vollendeter Addition das Decimalzeichen setzen.

Hierauf werden Posten mit ungleich vielen Decimalstellen gegeben. Z. B. 24·3, 6·475, 136·25. Aus dem Vorhergehenden wissen die Schüler, dass 24·3 = 24·300, 136·25 = 136·250 ist. Nun haben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie Posten mit gleich vielen Decimalstellen, und können daher die Addition wie früher verrichten. Sie überzeugen sich jedoch sehr bald, dass die angehängten Nullen auf die Summe keinen Einfluss haben, und dass man sie deshalb wegläßt und die Posten sogleich nach der 2. Art schreibt.

1. Art.		2. Art.
24·300		24·3
6·475	oder	6·475
136·250		136·25
167·025		167·025

Nun lasse man noch solche Posten addieren, bei welchen keine Ganzen vorkommen. Z. B.: 0·34, 0·375, 0·5, 0·0062.

0·34
0·375 2 Zehntausendtel schreibt man, da die übrigen
0·5 Posten keine Tausendtel enthalten, sogleich in die
0·0062 Summe.
1·2212

Das weitere Verfahren ist wie früher.

Übungsaufgaben IV. R. M. S. 34.

Anwendungen IV. R. M. S. 35. A. K. S. 15 bis 19.

§. 18.

Subtraction der Decimalen.

Der Lehrer gebe zuerst Beispiele, in welchen Minuend und Subtrahend gleich viele Decimalstellen haben, z. B.: Von 87·26 sollen 54·84 subtrahiert werden. Die Schüler werden kaum im Zweifel sein, dass sie den Subtrahend so unter den Minuend zu setzen haben, dass die Ganzen unter die Ganzen, die Zehntel unter die Zehntel und die Hundertel unter die Hundertel zu stehen kommen. Der Lehrer frage:

87·26 Wieviel Hundertel muss man auf 4 Hundertel
54·84 zählen, um auf 6 Hundertel zu kommen? (Die Hun-
32·42 dertel werden angeschrieben.) Was muss man thun, da man 8 Zehntel von 2 Zehnteln nicht wegnehmen kann? Wieviel Zehntel hat man, wenn man zu 2 Zehnteln einen Einer hinzugibt? Wieviel Zehntel muss man zu 8 Zehnteln geben, um auf 12 Zehntel

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

zu kommen? Da man jetzt zum Subtrahieren der Ganzen kommt, und der Rest auch Ganze enthält, so muss das Decimalzeichen gesetzt werden. Wieviel Einer haben wir zum Minuend gegeben, um die 8 Zehntel subtrahieren zu können? Was müssen wir daher auch zum Subtrahend hinzugeben? Wieviel sind 4 E. und **1** E.? Wieviel müssen wir zu den 5 E. zählen, um auf 7 E. zu kommen? Wieviel müssen wir zu den 5 Z. zählen, um auf 8 Z. zu kommen? Der Rest ist also 32·42.

Die Schüler ersehen aus diesem Vorgange, dass man bei der Subtraction der Decimalzahlen eben so verfährt wie mit ganzen Zahlen; dass man jedoch das Decimalzeichen setzen muss, wenn man von den Zehnteln zu den Ganzen übergeht. Man kann daher kurz sagen: 4 und **2** ist 6; 8 und **4** ist 12, bleibt 1 (hier wird das Decimalzeichen gesetzt); 1 und 4 ist 5 und **2** ist 7; 5 und **3** ist 8.

Wenn Minuend und Subtrahend nicht gleich viele Decimalstellen haben, so setzt man so viele Nullen zu, dass die Anzahl der Decimalstellen die gleiche wird, oder man schreibt diese Nullen nicht an, sondern stellt sich dieselben nur vor, und verfährt wie früher. Z. B.: 26·275 — 14·3, 12·7 — 4·378, 15 — 3·1785.

26·275		26·275	12·700		12·7
14·300	oder	14·3	4·378	oder	4·378
11·975		11·975	8·322		8·322

15·0000		15
3·1785	oder	3·1785
11·8215		11·8215.

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch M. S. 35 und 36. A. K. S. 20 bis 21.

Jemehr Decimalstellen vorkommen, desto geringer ist der Wert der niedrigsten Stellen. Sehr niedrige Decimalstellen sind aber im praktischen Leben wertlos. So ist z. B. 0·001 Gulden, der 10. Theil eines Kreuzers, eine fast wertlose Größe; daher können solche überflüssige Stellen weggelassen werden. Hiedurch entsteht zwar ein Fehler, den man dadurch möglichst zu vermindern sucht, indem man bei der letzten der beibehaltenen Decimalen eine Correctur vornimmt. Setzt man z. B. für die Decimalzahl 3·7843 die Zahl 3·784, so

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

beträgt der Fehler 3·7843 — 3·784 = 0·0003. Wenn man für die Zahl 5·2838 die Zahl 5·283 setzt, so ist letztere Zahl um 0·0008 zu wenig; setzt aber statt der Zahl 5·2836 die Zahl 5·284, so ist diese um 5·284 — 52838 = 0·0002 zu groß. Hieraus sieht man, dass im zweiten Falle, wo die letzte beibehaltene, Decimale um 1 vermehrt wurde, der Fehler geringer ist, als im ersten Falle. Man überzeugt sich auf dem angezeigten Wege leicht, dass der Fehler für den zweiten Fall größer wird, wenn die letzte beibehaltene Decimale kleiner ist als 5.

Durch diese Betrachtung sehen die Schüler ein, dass bei Abkürzung einer Decimalzahl die letzte beibehaltene Decimale um 1 vermehrt wird, wenn die höchste wegzulassende Decimale 5 oder größer ist als 5; dass hingegen die überflüssigen Decimalen ohne weiteres weggelassen werden, wenn die höchste wegzulassende Decimale kleiner ist als 5.

Angewandte Aufgaben IV. Rechenbuch M. S. 36, b.

§. 19.

Multiplication der Decimalzahlen.

Bei der Multiplication der Decimalzahlen wird den Schülern zuerst gezeigt, wie eine Decimalzahl mit einer ganzen Zahl multipliciert wird.

Die Multiplication der Decimalzahlen mit 10, 100, 1000 u. s. w. wurde schon oben gezeigt, und wir haben hier nur mehrere Übungen zur Wiederholung vorzunehmen. Wir gehen hierauf zur Multiplication mit einer andern ganzen Zahl über. Z. B.

4·75 × 7
33·25

Wir sagen: 7 mal 5 Hundertel sind 35 Hundertel = 3 Zehntel und 5 Hundertel; 5 Hundertel werden angeschrieben; 3 Zehntel gemerkt und dann zum Producte der Zehntel addiert. 7 mal 7 Zehntel sind 49 Zehntel und die früher gebliebenen 3 Zehntel dazu sind 52 Zehntel = 5 Einer und 2 Zehntel; 2 Zehntel werden angeschrieben und 5 Einer weitergezählt. 7 mal 4 Einer sind 28 Einer und 5 Einer sind 33 Einer.

Zweite Art der Erklärung:

Multipliciert man das 100fache der Zahl 4·75 d. i. 475 mit 7, so erhält man 3325, dieses Product ist aber nicht das gesuchte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Product, sondern das 100fache desselben. Das wahre Product findet man, wenn von 3325 den 100. Theil nimmt, der 100. Theil von 3325 sind 3325 Hundertel oder 33·25.

Aus mehreren auf diese Art durchgeführten Beispielen versehen die Schüler:

Eine Decimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man dieselbe so mit der ganzen Zahl multipliciert, als ob sie auch eine ganze Zahl wäre, aber im Producte so viele Decimalen abschneidet, als ihrer im Multiplicand vorkommen.

Da man nach §. 13 S. 55 Multiplicand und Multiplicator mit einander verwechseln kann, so wird die Multiplication einer ganzen Zahl mit einer Decimalzahl auf dieselbe Art durchgeführt. Z. B.

$$\begin{array}{r} 432 \times 0{\cdot}2 \\ \hline 86{\cdot}4 \end{array}$$

Nun haben wir zu erfahren, wie eine Decimalzahl mit einer Decimalzahl multipliciert wird. Z. B. 36·346 × 3·47.

Wir wollen im Multiplicator das Decimalzeichen weglassen. Welche Zahl erhalten wir dann? Wie wird die Zahl 36·346 mit 347 multipliciert? Man läſst diese Multiplication wirklich verrichten, und erhält die Zahl 12612·062.

Der wievielte Theil ist aber die Decimalzahl 3·47 von der Zahl 347? Wenn man nun die Zahl 36·346 mit dem 100. Theil von 347 multipliciert, so wird man auch nur den 100. Theil von 12612·062 erhalten. Wie erhält man den 100. Theil von 12612·062? Also ist 36·346 × 3·47 = 126·12062.

Wieviele Decimalen haben beide Factoren zusammen? Wieviele das Product? Die Schüler abstrahieren hieraus die Regel: Decimalzahlen werden multipliciert, indem man sie so multipliciert, als ob sie ganze Zahlen wären, und dann vom Producte so viele Decimalen abschneidet, als beide Factoren zusammen haben.

Wenn wir die Zahl 0·062 mit 0·04 multiplicieren, so müssen im Producte 5 Decimalen abgeschnitten werden; da aber nur 3

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

0·062 × 0·04 Stellen vorhanden sind, so werden links
0·00248 noch 2 Nullen vorgesetzt.

Sind im Producte nicht so viele Stellen vorhanden als abgeschnitten werden sollen, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 37 und 38 a.

Anwendungen im IV. Rechenbuche M. S. 38 b. A. K. S. 21 bis 24.

§. 20.

Division der Decimalzahlen.

Wie bei der Multiplication wird auch hier wieder zuerst gezeigt, wie eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl dividiert wird.

Die Division der Decimalzahlen durch 10, 100, 1000 u. s. w. wurde schon in §. 16 gezeigt und es sind hier nur mehrere Übungen als Wiederholung vorzunehmen.

Hierauf wird zu Division der Decimalzahlen durch andere Zahlen geschritten. Z. B.

973·56 : 42 = 23·18.
133
75
336

97 Z. durch 42 E. dividiert, erhält man 2 Z. und es bleiben noch 13 Z. 13 Z. = 130 E. und 3 E. dazu sind 133 E.; 42 E. sind in 133 E. 3 mal enthalten und es bleiben noch 7 E., Da man 7 E. nicht als solche nicht durch 42 dividieren kann, so verwandelt man dieselben in Zehntel; 7 E. = 70 Zehntel geben mit den vorhandenen 5 Zehnteln 75 Zehntel; diese durch 42 dividiert, erhält man 1 Zehntel, daher muss im Quotienten, bevor man 1 Zehntel anschreibt, das Decimalzeichen gesetzt werden. 42 mal 1 Zehntel sind 42 Zehntel von 75 Zehntel bleiben 33 Zehntel = 330 Hundertel und die 6 Hundertel dazu sind 336 Hundertel. Diese durch 42 dividiert, erhält man gerade 8 Hundertel.

Die Schüler ersehen nun wieder:

Decimalzahlen werden durch ganze Zahlen ebenso dividiert wie die ganzen Zahlen, nur wird im Quo-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tienten das Decimalzeichen gesetzt, bevor man die erste Decimale des Dividendes in Rechnung zieht.

Nach mehreren ähnlichen Beispielen geht man zu solchen Beispielen über, in welchen nach Herabsetzung der letzten Decimale ein Rest bleibt, z. B.

105·7 : 8 = 13·2125
25
17
10
20
40

Hier erhält man 13 Ganze zum Quotienten und 1 zum Reste. Da man dem Dividende eine beliebige Anzahl Nullen anhängen kann, ohne dass der Wert desselben verändert wird, so kann man auch zum Reste 1 eine von diesen, dem Dividende angehängt gedachten Nullen herabsetzen und weiter dividieren. Wie sagen dann 8 in 10 ist 1 mal enthalten, 1 mal 8 und 2 ist 10. Ebenso verfahren wir auch mit dem Reste 2 und dem folgenden Reste 4.

Bleibt bei fortgesetzter Division immer wieder ein Rest, so entwickelt man im Quotienten nur so viele Decimalen als man derselben benöthiget.

Bei einzifferigem Divisor schreibt man gewöhnlich auch die Reste nicht an und setzt die Ziffern des Quotienten so unter den Dividend, dass die gleichnamigen Stellen und das Decimalzeichen des Quotienten genau unter dem des Dividendes zu stehen kommen. Z. B.:

105·7000 : 8.
13·2125

Um das Verfahren zu zeigen, wie eine Decimalzahl durch eine Decimalzahl zu dividieren ist, mache man die Schüler zuvor mit dem Satze bekannt: Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit einer und derselben Zahl multipliciert.

Zu diesem Behufe lasse man in einer beliebigen Division, z. B. 68 : 4 den Dividend und den Divisor mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicieren und die Division sodann jedesmal ausführen.

68 : 4 = 17, 680 : 40 = 17, 6800 : 400 = 17.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Aufgabe : 11·025 : 0·75 wird nun so gelöst:

11·025 : 0·75 = 1102·5 : 75 = 14·7
352
525

Die Schüler wissen, wie eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl dividiert wird. In der vorliegenden Aufgabe ist aber auch der Divisor eine Decimalzahl.

Der Lehrer fragt: Womit müsste man den Divisor multiplicieren, um eine ganze Zahl zu erhalten? Was muss aber dann auch mit dem Dividend geschehen, da der Quotient ungeändert bleiben muss? Man hat dann anstatt 11·025 durch 0·75, 1102·5 durch 75 zu dividieren.

Soll eine Decimalzahl durch eine Decimalzahl dividiert werden, so multipliciert man Dividend und Division mit 10, 100, 1000 .. je nachdem der Divisor 1, 2, 3 . . . Decimalstellen hat; dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl, durch welche man sodann dividiert.

Hängt man dem Divisor 0·75 eine Nulle an, so hat er ebensoviele Decimalstellen, wie der Divisor.

11·025 : 0·750 = 11·025 × 1000 : 0·75 × 1000 = 11025 : 750 = 14·7.

Lässt man sodann im Dividend und Divisor das Decimalzeichen weg, so hat man beide mit 1000 multipliciert und aus beiden ganze Zahlen erhalten.

Man kann also auch den beiden Decimalzahlen durch Anhängung von Nullen gleich viele Decimalstellen geben, die Decimalzeichen weglassen, wodurch man die Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl erhält. Indem man im Dividend und im Divisor, wenn beide gleich viele Decimalstellen haben, die Decimalzeichen wegläßt, verrichtet man dasselbe, als ob man beide mit 10, 100, 1000 .. multipliciert hätte.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 39 und 40 a.)

Anwendungen im IV. Rechenbuche M. S. 40 bis 42, b.) A. K. S. 24 bis 26.

Wir wollen hier noch mit einem anderen Vorgange bei der Division der Decimalzahl bekannt machen.

Wir wissen: eine Zahl wird durch 10, 100, 1000, u. s. w. dividiert, indem man jede Ziffer um 1, 2, 3 .... Stellen weiter zur Linken

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

setzt. Hat man also durch eine Zahl zu dividieren, deren erste Ziffer links an der Stelle der Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. steht, so dividiert man wie gewöhnlich, setzt aber im Quotienten jede Ziffer um 1, 2, 3 . . Stellen weiter rechts. Z. B. Es sei 11764·9 durch 700 zu dividieren, so sagt man: 7 in 11 ist 1 mal enthalten, die 11 sind hier Tausender, diese um 2 Stellen weiter rechts gesetzt, gehen sie in Zehner über (100 ist in 1000 10 mal enthalten), daher schreibt man 1 im Quotienten an die Stelle der Zehner. Hat man

11764·9 : 700 = 16·809 so den Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten bestimmt, so dividiert man weiter, ohne sich ferner um den Stellenwert der einzelnen Ziffern zu kümmern, der sich von selbst ergibt.

Ist 12,207.031·25 durch 5000 zu dividieren, so sagt man: 5 in 12 ist 2 mal enthalten, da aber 12 an der Stelle der Millionen steht, so muss 2 an die Stelle der Tausender kommen (1000 ist in 1,000.000 1000 mal enthalten), man dividiert nun weiter und erhält 12,207.031·25 : 5000 = 2441·40625.

Ist 6·255 durch 50 zu dividieren, so sagt man: 5 in 6 ist 1 mal enthalten, schreibt aber die 1 an die Stelle der Zehntel (10 ist in 1 1 zehntelmal enthalten) und man erhält: 6·255 : 50 = 0·1251; ebenso: 6·255 : 500 = 0·01251 ; 6·255 : 5000 = 0·001251.

Da das Ganze 10 Zehntel enthält, so ist ein Zehntel in einem Ganzen 10 mal enthalten, daher 1 : 0·1 = 10; 2 Ganze enthalten 20 Zehntel, daher ist 0·1 in 2 Ganzen 20 mal enthalten; ebenso findet man, dass 0·1 in 3 Ganzen 30 mal enthalten ist; es ist also: 1 : 0·1 = 10; 2 : 0·1 = 20; 3 : 0·1 = 30; 4 : 0·1 = 40 u. s. w. Es hat also jede Zahl 10 mal so viel Zehntel als sie Einer hat; daher ist 19 : 0·1 = 190 ; 28 : 0·1 = 280; 678 : 0·1 = 6780; 17·8 : 0·1 = 178; denn 17 Ganze haben 170 Zehntel und die schon vorhandenen 8 Zehntel dazu sind 178 Zehntel. Durch diese mit den Schülern vorgenommene Entwickelung ersehen dieselben, dass eine Zahl durch 0·1 dividiert, genau dasselbe Resultat gibt, als wenn man sie mit 10 multipliciert hätte, d. h. jede Ziffer der Zahl wird um 1 Stelle weiter gegen links gerückt.

Da ein Ganzes 100 Hundertel enthält, so ist ein Hundertel in einem Ganzen 100 mal enthalten; daher 1 : 0·01 = 100; 2 Ganze

haben 200 Hundertel, daher ist 2 : 0·01 = 200; ebenso 3 : 0·01 = 300; 4·75 : 0·01 = 475; denn die 4 Ganzen haben 400 Hundertel, die 7 Zehntel haben 70 Hundertel; und die 5 Hundertel dazu sind 475 Hundertel; 1 Hundertel ist in 475 Hundertel 475 mal enthalten.

Eine Zahl durch 0·01 dividieren heißt so viel als sie mit 100 multiplicieren, d. h. man muss jede Ziffer der Zahl um 2 Stellen weiter nach links rücken. Ebenso ergibt sich, dass eine Zahl durch 0·001, 0·0001, 0·00001 u. s. w. dividieren gerade so viel ist, als sie mit 1000, 10.000, 100.000 u. s. w. multiplicieren, dass man also die Division verrichtet, wenn man jede Ziffer der Zahl um 3, 4, 5, u. s. w. Stellen weiter nach links rückt.

Hat man nun z. B. die Zahl 871·2 durch 0·3 zu dividieren, so muss man sie durch 3 und durch 0·1 dividieren. Die erste Division verrichtet man auf die gewöhnliche Art, die zweite, dass man jede Ziffer um eine Stelle weiter links schiebt; man sagt daher: 3 in 8 ist 2 mal enthalten, da 8 aber Hunderter sind, so muss 2 an die Stelle der Tausender kommen, und daher ist 871·2 : 0·3 = 2904.

Es sei ferner 590·49 : 0·003. Man sagt: 3 in 5 ist 1 mal enthalten; da die 5 aber Hunderter sind, so muss 1 an die Stelle der Hunderttausender, d. i. an die 6 Stelle kommen. Man schreibt 1 an, punktiert sich zur Erleichterung die folgenden 5 Stellen und dividiert hierauf durch 3 ruhig weiter.

590·49 : 0·003 = 1 . . . . .

Man erhält dann 590·49 : 0·003 = 196830.

Weil an die Stelle der Einer keine andere Ziffer mehr kommt, so wird sie durch 0 ausgefüllt. Nach diesen Vorbereitungen wird die Division durch mehrzifferige Zahlen keine bedeutenden Schwierigkeiten machen.

Es sei 17·28 : 14·4. Man sagt: 14 in 17 ist 1 mal enthalten. da aber sowohl 14 als 17 Einer sind, so kommt die Ziffer 1 an die Einerstelle, da weder ein Vor- noch Rückwärtsrücken stattfindet. Mit 1 wird der ganze Divisor multipliciert. Da 1 ein Einer ist, so findet bei der Multiplication weder ein Vor- noch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

17·28 : 14·4 = 1·2
14·4
2·88

Rückwärtsrücken statt, und wir schreiben das Theilproduct 14·4 so unter den Dividend, dass die Ziffern der gleichwertigen Stellen unter einander zu stehen kommen. Nach vollbrachter Subtraction sagt man: 14 ist in 28 2mal enthalten, welche 2 man an die Stelle der Zehntel zu schreiben hat, da ja 28 Zehntel durch 14 Einer dividiert 2 Zehntel als Quotienten geben, indem Einer sowohl als Divisoren als auch als Multiplicatoren den Stellenwert nicht verändern. Man hat somit:

17·28 : 14·4 = 1·2
14·4
2·88
2·88

denn, indem man mit 0·2 den Divisor 14·4 multipliciert, muss jede Ziffer um eine Stelle weiter rechts gerückt werden.

Es sei 0·04782969 durch 0·0059049 zu dividieren. Man sagt: 5 ist in 47 (wegen der nachfolgenden 9) 8 mal enthalten. Die 47 sind Tausendtel, aber auch die 5 sind Tausendtel, daher muss man die 8 im Quotienten um 3 Stellen weiter nach links, also an die Stelle der Einer setzen, es steht also der Anfang so:

0·04782969 : 0·0059049 = 8·

Der Divisor mit 8 multipliciert und das Theilproduct gehörig unter den Dividend geschrieben u. s. w. erhält man:

0·04782969 : 0·0059049 = 8·1
472392
59049
59049

102·1920 : 31935 = 0·0032
95·805
6·3870
6·3870

Man sagt: 3 ist in 10 3 mal enthalten, weil aber die 3 an der Stelle der Zehntausender steht, so muss man um 4 Stellen weiter rechts rücken, da 10 aber Zehner sind, die um

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4 Stellen nach rechts gerückt Tausendtel geben, so kommt die 3 des Quotienten an die Stelle der Tausendtel. Wenn man nun mit 3 Tausendtel des Quotienten den Divisor multipliciert, so muss jede Ziffer des Productes um 3 Stellen weiter rechts, also die 5 (von 3 mal 5 ist 15) an die Stelle der Tausendtel d. i. unter die Decimale 2 des Dividendes kommen u. s. w.

Die ganze Darstellung zeigt:

Man dividiert den ersten Theil des Dividendes durch den ersten Theil des Divisors, wodurch man die erste Ziffer des Quotienten erhält, deren Stellenwert bestimmt werden muss, und nun dividiert man nach der gewöhnlichen Art weiter.

Der Stellenwert der ersten Ziffer im Quotienten kann auch auf folgende Weise bestimmt werden: Man denkt sich den Divisor unter den ersten Theildividend gesetzt, so ist der Stellenwert derjenigen Ziffer des Dividendes, unter welcher die Einerziffer des Divisors steht, auch der Stellenwert, der ersten Ziffer des Quotienten. Durch den Stellenwert der ersten Ziffer ist aber auch der Stellenwert aller übrigen Ziffern bestimmt, z. B.

8724·3475 : 54·6 = 1.	5·3978 : 956·3 = 0·005
546	956

Im ersten Beispiele steht die Einerziffer (4) des Divisors unter der Ziffer 7 des Dividendes, welche an der Hunderterstelle steht; folglich bedeutet auch die erste Ziffer im Quotienten ebenfalls Hunderter.

Da im zweiten Beispiele die Einerziffer (6) des Divisors unter der Ziffer 8 des Dividendes, welche an der Hundertelstelle steht, zu stehen kommt, so bedeutet auch die erste Ziffer des Quotienten Hundertel.

Es ist selbstverständlich, dass auch bei diesem Verfahren die kürzere Art des Dividierens angewendet wird. Hier wurden nur des besseren Verständnisses wegen die Producte aus dem Divisor und dem Quotienten angeschrieben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

§. 21.

Allgemeines.

Sowohl beim Kopfrechnen als auch beim schriftlichen Rechnen hatten es die Schüler mit benannten, unbenannten, einnamigen und mehrnamigen Zahlen zu thun, ohne dass man sie auf diesen Unterschied aufmerksam machte. Bei den Zahlen 5 Gulden, 12 Meter, 100 Tage weiß man nicht nur die Menge der Einheiten, aus denen sie bestehen, sondern auch was für Einheiten es sind, d. i. die Art derselben.

Solche Zahlen, welche Einheiten einer bestimmten Art angeben, nennt man benannte oder concrete Zahlen. Lassen wir von den benannten Zahlen 5 Gulden, 12 Meter, 100 Tage die Namen Gulden, Meter, Tage weg, so weiß man nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben. Solche Zahlen, welche nur die Menge, nicht aber die Art derselben ausdrücken, nennt man unbenannte, reine, auch abstracte Zahlen.

Eine benannte Zahl, welche nur aus Einheiten von gleicher Benennung besteht, heißt eine einnamige Zahl, z. B. 8 Gulden, 12 Gramm.

Eine benannte Zahl, welche Einheiten verschiedener Benennung ausdrückt, die sich jedoch auf einerlei Benennung zurückführen lassen, nennt man eine mehrnamige Zahl, z. B. 5 Gulden 60 Kreuzer.

Man weise darauf hin, dass bei den unbenannten Zahlen immer 10 niedrigere Einheiten zusammen als eine höhere Einheit, also 10 Einer als 1 Zehner, 10 Z. als 1 Hunderter u. s. w. angesehen werden, und dass man in ähnlicher Weise auch bei den benannten Zahlen irgend eine Anzahl von niedrigeren Einheiten oder Ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

heiten niederer Benennung wieder mit einem besonderen Namen bezeichnet, und als eine Einheit höherer Benennung aufgefasst wird. So sind z. B. Gulden, Meter, Kilogramm, Jahr die höhere Benennung von Kreuzer, Decimeter, Gramm, Monat, und die vier zuletzt genannten sind die niederen Benennungen.

100 Kreuzer geben 1 Gulden, 10 Decimeter 1 Meter, 12 Monate 1 Jahr.

Die Zahlen 100, 10, 12 zeigen hier an, wieviele Einheiten der niederen Benennung (Kreuzer, Decimeter, Monat) eine Einheit der höheren Benennung (Gulden, Meter, Jahr) enthält.

Die Zahl, welche anzeigt, wieviele Einheiten der niederen Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt Auflösezahl oder Verwandlungszahl zwischen beiden Benennungen.

Beim Rechnen mit mehrnamigen Zahlen ist es oft nothwendig, eine Einheit der höheren Benennung in Einheiten der niederen Benennung oder Einheiten der niederen Benennung in Einheiten der höheren Benennung umzuwandeln. Ersteres nennt man das Resolvieren (Auflösen), letzteres das Reducieren (Zurückführen).

Was die Schüler schon auf den früheren Stufen über das Verwandeln der Maße, Gewichte und Münzen und aus dem Rechnen mit mehrnamigen Zahlen gelernt haben, wird nun erweitert und im Zusammenhange vorgenommen.

Hiezu ist aber eine genaue Kenntnis der Maße, Gewichte und Münzen und der Verwandlungszahlen nothwendig. Was die Schüler hierüber gelegentlich erlernt haben, muss nun übersichtlich zusammengefasst und dem Gedächtnisse eingeprägt werden.

§. 22.

Übersicht der Maße, Gewichte und Münzen.

Wir geben im Nachfolgenden eine solche Übersicht und weisen darauf hin, dass beim Flächenmaße das Quadratmeter an die Tafel gezeichnet, und an diesem die Eintheilungen in Quadratdecimeter u. s. w. gemacht werden. Beim Körpermaße leistet der auf S. 29 beschriebene Krämer'sche Apparat gute Dienste.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Zeitmaße.

1 Jahr hat 12 Monate,	1 Tag hat 24 Stunden,
1 Monat „ 30 Tage,	1 Stunde „ 60 Minuten,
1 Woche „ 7 Tage,	1 Minute „ 60 Secunden.

2. Bogen- und Winkelmaße.

Der Umfang eines Kreises wird in 360 gleiche Bogen, Grade eingetheilt. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad (Winkelgrad) heißt. Sowohl bei den Bogen, als bei den Winkeln wird 1 Grad (°) in 60 Minuten (′) 1 Minute in 60 Secunden (″) eingetheilt.

3. Zählmaße.

1 Schock hat 60 Stück — 1 Dutzend 12 Stück.

1 Ries Papier hat 10 Buch, 1 Buch hat 10 Lagen, 1 Lage 10 Bogen.

4. Längenmaße.

1 Meter (m) = 10 Decimeter (dm).
1 Decimeter = 10 Centimeter (cm).
1 Centimeter = 10 Millimeter (mm).
1 Kilometer (km) = 1000 Meter.
1 Myriameter (Mm) = 10000 Meter.

5. Flächenmaße.

1 Quadrat-Meter (m^2) = 100 Quadrat-Decimeter, 1 Quadrat-Decimeter (dm^2) = 100 Quadrat-Centimeter, 1 Quadrat-Centimeter (cm^2) = 100 Quadrat-Millimeter (mm^2).

1 Ar (a) = 100 m^2, 1 Hektar (ha) = 100 a = 10000 m^2,
1 Quadrat-Myriameter = 100000000 m^2 = 1000 Hektar.

6. Körper- und Hohlmaße.

1 Cubik-Meter (m^3) = 1000 Cubik-Decimeter	1 Liter (l) = 1 dm^3 = 10 Deciliter
1 Cubik-Decimeter (dm^3) = 1000 Cubik-Centimeter	1 Deciliter (dl) = 10 Centiliter (cl).
1 Cubik-Centimeter (cm^3) = 1000 Cubik-Millimeter (mm^3).	1 Hektoliter (hl) = 100 l.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Gewichte.

1 Tonne (t) = 1000 Kilogr.	1 Gramm (g) = 10 Decigramm
1 Centner = 50 Kilogr.	1 Decigr. (dg) = 10 Centigramm
1 Kilogr. (kg) = 100 Dekagr.	
1 Dekagr. (dkg) = 10 Gramm	1 Ctgr. (cg) = 10 Milligr. (mg.)

8. Münzen.

1. In Österreich-Ungarn rechnet man in österreichischer Währung, wornach aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden. 1 Gulden ö. W. hat 100 Kreuzer.

Vor dem Jahre 1858 rechnete man in Conventionsmünze. Ein Gulden C. M. hatte 60 Kreuzer à 4 Pfennige. 100 fl. C. M. = 105 fl. ö. W.

2. Geprägte Münzen:

Aus Gold: Achtguldenstücke, Vierguldenstücke und Ducaten. Diese dienen nur als Handelsmünzen und haben keinen festgesetzten Wert. Bei den k. k. Cassen werden die Achtguldenstücke zu 8 fl. 10 kr. in Silber, die Vierguldenstücke zu 4 fl. 5 kr. in Silber angenommen; darnach gilt ein Ducaten 4 fl. 80 kr. in Silber.

Aus Silber: 2-, 1- und ¼- Guldenstücke.

Als Silber-Scheidemünze werden Stücke zu 20, 10 und 5 Kreuer geprägt.

Aus Kupfer: Stücke zu 4, 1 und ½ Kreuzer.

3. Papiergeld:

Banknoten zu 10, 100 und 1000 Gulden und Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden.

§. 23.

Das Resolvieren.

Der Lehrer lasse einige Resolutionen im Kopfe ausführen und hiebei die Schüler beachten, dass sie immer zuerst wissen müssen, wieviele Einheiten der niederen Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, um sodann diese niederen Einheiten so oftmal nehmen zu können als höhere Einheiten gegeben sind. Z. B. Wieviel Tage sind 5 Wochen?

Wieviel Tage hat eine Woche? Wieviel Tage haben 2 Wochen? 3 Wochen? u. s. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schüler schließen hieraus: 1 Woche hat 7 Tage oder 1 mal 7 Tage; 2 Wochen haben 2 mal 7 Tage u. s. w.

Auf diese Art werden die Schüler auf die Regel geführt: Einheiten höherer Benennung werden in Einheiten niederer Benennung verwandelt, wenn man die Auflösezahl mit der Anzahl der Einheiten der höheren Benennung multipliciert. Es ist jedoch beim schriftlichen Rechnen vortheilhafter nach der Regel zu verfahren: Einheiten höherer Benennung werden in Einheiten niederer Benennung verwandelt, wenn man die Anzahl der Einheiten höherer Benennung mit der Auflösezahl multipliciert. Z. B.

Wieviel Kreuzer sind 26 fl.? Nach der obigen Schlussweise würde man sagen: 1 fl. hat 100 Kreuzer, 26 fl. haben daher 26 mal 100 Kreuzer. Man kann aber auch so schließen: 1 fl. hat 100 mal 1 kr., 2 fl. haben 100 mal 2 kr. u. s. w., 26 fl. haben 100 mal 26 kr. Es ist anzurathen, bald diese und bald die erste Regel anzuwenden.

Hierauf gebe der Lehrer Beispiele, in denen verlangt wird, eine einnamige Zahl höherer Benennung in Einheiten einer entfernt niederen Benennung aufzulösen. Z. B. Wieviel Secunden hat 1 Tag? Er frage: Wieviel Stunden hat 1 Tag? Wieviel Minuten hat 1 Stunde? Wieviel Minuten haben 24 Stunden? (24 mal 60 M. = 1440 M.)

Wieviel Secunden hat 1 Minute? Wieviel Secunden sind 1440 mal 60 Secunden? 1 Tag hat daher 86400 Secunden.

Die Schüler sehen hieraus, dass sie die gegebenen Einheiten der höchsten Benennung in Einheiten der nächst niederen, diese wieder in Einheiten der folgenden niederen Benennung verwandeln müssen u. s. w.

Wieviel Stunden sind 29 Tage und 8 Stunden?

29 × 24		29 × 24
116	oder	124 (Die 8 Stunden hier eingezählt.)
58		58
696 Stunden		704 Stunden
+8		
704 Stunden		

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wieviel Minuten sind 5 Tage 13 Stunden und 36 Minuten?

5 T. 13 St. 36 M.
× 24
120
+13
133 Stunden oder
× 60
7980
+36
8016 Minuten.

5 T. 13 St. 36 M.
× 24
133 Stunden (Die 13 St. hier eingezählt.)
× 60
8016 Minuten. (Die 36 M. hier eingezählt.)

Die Schüler werden leicht einsehen, dass man bei Verwandlung einer mehrnamigen Zahl in Einheiten der in derselben vorkommenden niedersten Benennung die Einheiten der höchsten Benennung mit der Auflösezahl zu multiplicieren, zu diesem Producte die schon vorhandenen Einheiten dieser Benennung zu addieren und dieses Verfahren bis zur niedersten Benennung fortzusetzen hat. Auch die zweite Berechnungsweise, bei welcher man die vorhandenen gleichnamigen Einheiten beim Multiplicieren dazu = oder einzählt, werden sie bald auffassen.

Noch einfacher ist das Resolvieren einer mehrnamigen Zahl, wenn die Benennungen zum Decimalsystem gehören. Z. B.

Wieviel Centimeter sind 8 m 7 dm 9 cm?

8 m sind 80 dm und 7 dm sind 87 dm; 87 dm sind 870 cm und 9 cm sind 879 cm; 8 m 7 dm 9 cm = 879 cm.

Wie viel cm^2 sind 8 m^2 15 dm^2 28 cm^2?

Die Auflösezahl ist hier 100, daher:

8 m^2 sind 800 dm^2 und 15 dm^2 sind 815 dm^2; 815 dm^2 sind 81500 cm^2 und 28 cm^2 sind 815 8 cm^2.

8 m^2 15 dm^2 28 cm^2 = 81528 cm^2.

Wieviel Kreuzer sind 12 fl. 18 kr.?

12 fl. sind 1200 kr. und 18 kr. sind 1218 kr. 12 fl. 18 kr. = 1218 kr.

Wieviel Cubik. cm sind 4 Cub. m 18 Cub dc 2 Cub cm?

Die Auflösezahl ist hier 1000, daher:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4 Cub. m. sind 4000 Cub. dc. und 18 Cub. dc. sind 4018 Cub. dc; 4018 Cub. dc. sind 4018000 Cub. cm. und 2 Cub. cm. sind 4018002 Cub. cm. 4 Cub. m. 18 Cub. dm. 2 Cub. cm. = 4018002 Cub. cm.

Hieraus ersehen die Schüler, dass man die Einheiten der verschiedenen zum Decimalsysteme gehörigen Benennungen nur in ihrer natürlichen Reihenfolge nebeneinander zu setzen, die etwa fehlenden Ziffern durch Nullen zu ersetzen, und der auf diese Art erhaltenen Zahl die niedersten der gegebenen Benennungen beizusetzen hat.

Wieviel Decimeter, Centimeter und Millimeter sind 0·375 Meter?

0·3 m, sind 3 dm, 0·07 m sind 7 cm, 0·005 m sind 5 mm; daher: 0·375 m. = 3 dm. 7 cm. 5 mm.

5·684 Hektoliter sollen in eine mehrnamige Zahl verwandelt werden.

Da 1 Hektoliter = 100 Liter, so sind 0·68 Hektoliter 68 Liter; und da 1 Hektoliter = 1000 Deciliter, so sind 0·004 Hektoliter 4 Deciliter; daher: 5·684 Hektoliter = 5 Hektoliter 68 Liter 4 Deciliter.

Hieraus ersehen die Schüler: Je nach dem die Auflösezahl 10,100 oder 1000 ist, bilden immer 1, 2 oder 3 Decimalen nach rechts die Ganzen der nächstniedriegeren Benennung.

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch M. S. 46 und 47. A. K. S. 27 und 28.

§. 24.

Das Reducieren.

So wie beim Resolvieren lasse der Lehrer auch beim Reducieren zuerst einige Aufgaben im Kopfe lösen und gehe erst dann zum schriftlichen Reducieren über. Die ersten Beispiele sollen Verwandlungen von Einheiten niederer Benennung in die nächst höhere Benennung fordern. Z. B. Wieviel Wochen sind 56 Tage? Der Schüler schließt hier: 1 Woche hat 7 Tage, 56 Tage sind daher so oftmal 1 Woche als 7 Tage in 56 Tagen enthalten sind; um zu erfahren, wieviele Wochen 56 Tage sind, muss ich also untersuchen, wie oft 7 in 56 enthalten ist, d. h. ich muss 56 (die Einheiten der niederen Benennung) durch 7 (die Auflösezahl) dividieren; daraus die Regel:

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Einheiten niederer Benennung werden in Einheiten der nächsthöheren Benennung verwandelt, wenn man sie durch die Auflösezahl dividiert.

Die Schüler sehen auch leicht ein, dass der Rest, welcher allenfalls bei dieser Division bleibt; Einheiten derjenigen Benennung bedeutet, welche man reduciert hat, und so gelangt man auf die Verwandlung von Einheiten niederer Benennung in eine mehrnamige Zahl. Z. B. Es sei die Aufgabe gegeben:

Wieviel Tage, Stunden und Minuten sind 6497 Minuten? so wird die schriftliche Bearbeitung so aussehen:

6497 Min.: 60
49 108 Stunden: 24 = 4 Tage
17 Minuten 12 Stunden.

6497 Minuten = 4 Tage 12 Stunden 17 Minuten.

Welche Decimalzahl von Tagen geben 48 Tage 9 Stunden 36 Minuten?

36 Min.: 60 = 0·6 Stunden.
9·6 Stund.: 24 = 0·4 Tage;
also 48 Tage 9 Stunden 36 Minuten = 48·4 Tage.

3784 mm = 3 m 7 dm 8 cm 4 mm	Auflösezahl	10
2697 Liter = 26 Hektoliter 97 Liter	„	100
85624 Kreuzer = 856 fl. 24 Kreuzer	„	„
2318427 Cub. cm = 2 Cub. m 318 Cub. dm 427 Cub. cm.	„	1000

Aus obiger Darstellung sieht man, dass die Verwandlung niederer Einheiten in Ganze der höheren Benennungen, wenn diese nach dem Decimalsystem eingetheilt sind, geschieht, indem man sie durch 10, 100 oder 1000 dividiert, also 1, 2 oder 3 der niedrigsten Stellen abschneidet; jede hiedurch entstandene Abtheilung bildet eine Benennung für sich.

5 m 8 dm 7 cm soll als Decimalzahl dargestellt werden.

8 dm = 0·8 m 7 cm = 0·07 m; daher 5 m 8 dm 7 cm = 5·87 m.

Wieviel Kilogramm sind 28 Kilogramm 12 Dekagramm 5 Gramm?

12 Dekagramm sind 0·12 Kilogramm, 5 Gramm sind 0·005 Kilogramm, daher 28 Kilogr. 12 Dekagr. 5 Gr. = 28·125 Kilogramm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schüler ersehen hieraus: Eine mehrnamige Zahl, deren Bestandtheile nach dem Decimalsystem eingetheilt sind, wird in eine Decimalzahl der höchsten Benennung verwandelt, indem man ihre Bestandtheile in der Ordnung nebeneinander setzt, welche das Decimalsystem erfordert.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 47 und 48. A. K. S. 28 und 29.

§. 25.

Addition mehrnamiger Zahlen.

Nachdem die Schüler mehrere Beispiele im Kopfe ausgerechnet haben, lasse der Lehrer einige Posten mehrnamiger Zahlen an die Tafel schreiben z. B.:

25 fl.	12	kr.
6 „	21	„
38 „	17	„
19 „	8	„
88 fl.	58	kr.

und fordere die Schüler auf, dieselben zu addieren.

Die Schüler sehen sogleich, dass sie ebensoviele Additionen zu machen haben, als Benennungen gegeben sind, und warum die Posten gerade so untereinander geschrieben werden müssen, da sie ja schon längst wissen, dass man nur gleichnamige Zahlen addieren kann.

Nach der Gewohnheit beim schriftlichen Addieren mit der niedersten Benennung zu beginnen, werden sie auch hier zuerst die Kreuzer und dann die Gulden addieren. Bei solchen Aufgaben, in welchen, wie in der oben gegebenen, keine Reductionen zu machen sind, kann man den Schülern auch gestatten, bei den Einheiten der höchsten Benennung zu beginnen. Die Schüler werden wohl sehr bald selbst darauf kommen, dass es vortheilhafter ist bei den Einheiten der niedersten Benennung anzufangen, wenn sie Aufgaben zu lösen haben, in welchen Reductionen zu machen sind. Solche Aufgaben können sehr bald gegeben werden. Z. B.

38 fl.	57	kr.
13 „	48	„
916 „	72	„
187 „	54	„
1156 fl.	31	kr.

Hier beträgt die Summe der Kreuzer 231. Man leite die Schüler an die hier nöthige Reduction vorzunehmen und die hiebei als Rest erhaltenen 31 Kreuzer unter die Posten der Kreuzer zu schreiben und die 2 fl. zu den Einern der Gulden weiter

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

zu zählen. Geübte Schüler kommen sehr bald darauf, dass die Einer aus der Summe der Kreuzer immer unter die Einer der Kreuzer zu stehen kommt, die Zehner aber zu den Zehnern gezählt und deren Summe durch die Auflösezahl 10 (ein Gulden hat 10 Zehner der Kreuzer) in Gulden verwandelt werden kann.

Es wird daher die Addition kurz so verrichtet: 4 und 2 ist 6 und 8 ist 14 und 7 ist 21, bleibt 2; 2 und 5 ist 7 und 7 ist 14 und 4 ist 18 und 5 ist 23, d. i. 23 Zehner der Kreuzer oder 2 fl. und 3 Zehner; letzter werden unter die Zehner der Kreuzer geschrieben und die 2 fl. zu den Gulden gezählt.

Die Reductionen können hier sehr leicht im Kopfe gemacht werden.

Wir wollen hier noch ein anderes Beispiel in Betrachtung ziehen.

23	Jahre	2	Mon.	15	Tage
9	"	8	"	20	"
5	"	9	"	17	"
38	Jahre	8	Mon.	22	Tage

15 Tage + 20 Tage + 17 Tage = 52 Tage. = 1 Mon. 22 Tage; 1 Mon. + 9 Mon. + 8 Mon. + 2 Mon. = 20 Mon. = 1 Jahr 8 Mon. u. s. w.

Bei der Addition mehrnamiger nach dem Decimalsystem gebildeter Zahlen lässt man dieselben von den Schülern auf höchste oder niedrigste Benennung bringen und sodann die hierdurch erhaltenen einnamigen Zahlen addieren. Z. B.

5 m 3 dm 6 cm		536 cm		5·36 m
8 m 9 dm 7 cm	oder	897 cm	oder	8·97 m
7 m 8 dm 5 cm		785 cm		7·85 m
22 m 1 dm 8 cm		2218 cm		22·18 m
		= 22 m 1 dm 8 cm;		= 22 m 1 dm 8 cm.

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch M. S. 48, 49 und 50. A. K. S. 29 bis 31.

§. 26.

Subtraction mehrnamiger Zahlen.

Beim Addieren der mehrnamigen Zahlen giengen wir vom Kopfrechnen aus und dann zum schriftlichen Rechnen über; wir wählten zuerst Beispiele mit mehrnamigen Zahlen, die keine decimale Eintheilung haben, und dann solche mit decimaler Eintheilung. Der-

selbe Stufengang wird auch bei der Subtraction beobachtet, und zwar werden zuerst Aufgaben vorgenommen, bei welchen keine Zahl des Minuends kleiner ist als die gleichnamige Zahl des Subtrahends. Z. B.

28 fl. 54 kr.	Nach der Lösung einiger solcher Aufgaben schreite der Lehrer zu Übungen, in denen eine Zahl des Minuends kleiner ist als die gleichnamige des Subtrahends. Z. B.
17 „ 12 „	
11 fl. 42 kr.	

12 Tage 5 St.		12 Tage 29 St.	Man erinnere die Schüler, was sie gethan haben, wenn die Einer, Zehner ꝛc. des Subtrahends größer wären als die des Minuends, und zeige ihnen, dass man auch hier zu den 5 St. im Minuend, wie es in der Nebenrechnung angezeigt wird, soviele Einheiten hinzuzählt, als deren eine Einheit der höheren Benennung enthält, also 24 St. und jetzt die 12 St. von 29 subtrahiert. Damit aber der Rest ungeändert bleibt, so muss man auch die Zahl des Subtrahends in der nächst höheren Benennung um 1 Einheit vermehren.
7 „ 12 „	oder	8 „ 12 „	
		4 Tage 17 St.	

Die Nebenrechnung wird aber nicht schriftlich gemacht, sondern die erforderlichen Veränderungen werden nur im Kopfe durchgeführt.

Sind die mehrnamigen Zahlen nach dem Decimalsysteme eingetheilt, so ist die Subtraction am vortheilhaftesten zu vollziehen, wenn man diese Zahlen in Decimalzahlen derselben Benennung umwandelt und dann subtrahiert. Z. B.

38 m 7 dm 4 cm 3 mm		38743 mm		38·743 m
17 „ 8 „ 5 „ 6 „	oder	17856 „	oder	17·856 „
20 m 8 dm 8 cm 7 mm		20887 mm		20·887 m

Übungsaufgaben. IV. R. M. S. 51 u. 52. A. K. S. 32 u. 33.

§. 27.

Zeitrechnung.

Was man unter Zeit versteht, läßt sich zwar nicht erklären, ist aber aus der Erfahrung allgemein bekannt. Wir messen die Zeit, indem wir sie mit einem Zeitraume vergleichen, den alle Menschen kennen und den uns die Natur selbst bietet. Zum Messen größerer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zeiten bietet sich die Zeit dar, in welcher die Erde ihre Bahn um die Sonne zurücklegt; wir nennen diesen Zeitraum ein Jahr. Zur Messung kleinerer Zeiten ist die Zeit tauglicher, innerhalb deren sich die Erde um sich selbst dreht.

Diese Drehung der Erde nehmen wir nun wahr durch die scheinbare Drehung des ganzen Sternenhimmels um die Erde; so sehen wir, dass jeder Stern der im Osten aufgeht, einen höchsten Punkt am Himmel erreicht (culminiert) und im Westen wieder untergeht, und so einen Kreis in derselben Zeit beschreibt, in welcher sich die Erde um ihre Achse dreht. Diese Zeit nennt man einen Sterntag; er dient in der Astronomie zur Zeitmessung. Bei dieser Messung dient der Weg desjenigen Himmelspunktes als Grundlage, im welchen die Sonne im Augenblicke des Frühlingsanfangs steht, und der Frühlingspunkt genannt wird. Wenn dieser seine höchste Stelle am Himmelsgewölbe erreicht hat, so sagen die Astronomen es sei Null Uhr Sternzeit. Da nun diese Bewegung der Erde vollkommen gleichförmig ist, so braucht auch der Frühlingspunkt zu gleichen Wegen gleiche Zeiten; der 24. Theil seiner Umdrehungszeit wird eine Stunde Sternzeit genannt. Es ist daher 7 Uhr Sternzeit, wenn der Frühlingspunkt um $\frac{7}{24}$ seines Kreises über den höchsten Punkt desselben hinaus ist; es ist 19 Uhr Sternzeit, wenn derselbe $\frac{19}{24}$ seines Weges zurückgelegt hat u. s. w.

An der gleichförmigen Drehung aller Gestirne von Osten nach Westen um die Erde, nimmt auch die Sonne Theil, wodurch Tag und Nacht entsteht, was allein als Grundlage der bürgerlichen Zeitmessung dienen kann. Aber während die Sonne sich täglich um die Erde nach Westen dreht, legt sie auch von ihrer jährlichen scheinbaren Bahn um die Erde beiläufig $\frac{1}{365}$ dieses Weges nach Osten zurück. Wenn sie daher z. B. heute gleichzeitig mit einem gewissen Sterne aufgeht, so ist sie morgen um $\frac{1}{365}$ ihrer Bahn östlicher und kann, da sie diesen Weg in 4 Minuten macht, erst 4 Minuten später aufgehen, der Sonnentag ist also um 4 Minuten länger als der Sterntag. Da sich aber die Sonne auf ihrer jährlichen Bahn nicht gleichförmig, sondern von der Zeit des Perihel (Sonnennähe) bis zum Aphel (Sonnenferne) immer langsamer und von da an auf der Bahnhälfte bis zum Perihel immer schneller bewegt, so bleibt sie bald weniger bald mehr hinter den Sternen zurück. Im bür-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gerlichen Leben sind aber nur gleiche Zeitmaße anwendbar; daher wurde statt des wahren Sonnentages für die bürgerliche Zeitmessung der mittlere Sonnentag eingeführt, d. i. ein Zeitraum, der so oft genommen, als wahre Sonnentage im Jahre enthalten sind, auch genau die Jahreslänge gibt. Der mittlere Sonnentag wird in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, und die Secunde in 60 Tertien getheilt. Diese 24 Stunden werden bei uns in zwei Hälften gezählt, und zwar vom Mittage an, wo die Sonne am höchsten steht, und von Mitternacht an, wo die Sonne ihren tiefsten Stand hat.

Unsere Uhren können daher meist nicht 12 Uhr zeigen, wenn der wahre Mittag oder die wahre Mitternacht eintritt, da sie ja für die mittlere Sonnenzeit eingerichtet sind. Den Unterschied zwischen der wahren und mittleren Sonnenzeit nennt man Zeitgleichung, von welcher in astronomischen Kalendern Tabellen enthalten sind. Der mittlere Sonnentag ist bald größer bald kleiner als der wahre. So liegt z. B. im November der wahre Mittag 16 Minuten vor und im Februar 15 Minuten hinter dem mittleren, daher kommt es, dass im Februar die dunklen Abende schon stark, die dunklen Morgen aber noch wenig abgenommen haben.

Die Zeitgleichung benützt man, um eine Uhr nach der Sonne zu stellen. Man beobachtet den wahren Mittag durch astronomische Mittel (Horoscop) und fügt zu demselben die Zeitgleichung des betreffenden Tages, so findet man den mittleren Mittag, d. h. die Zeit, in welcher unsere Uhren auf 12 stehen müssen.

Der Tag ist derjenige Zeitraum, der den Schülern am meisten bekannt ist. Weil wir die Stunden des Tages sowohl von Mittag als auch von Mitternacht an zählen, so sind zur näheren Bezeichnung der Stundenzahl noch die Benennungen; morgens, vormittags, mittags, nachmittags, abends, nachts nöthig.

Noch eine andere Eintheilung des Jahres wird durch Bewegung des Mondes um die Erde bedingt. Der Zeitraum, in welchem der Mond diesen Umlauf beendet, stimmt beiläufig mit demjenigen überein, welchen wir einen Monat nennen.

Die christlichen Völker zählen die Jahre von der Geburt des Weltheilandes, Jesu Christi. Vom Tage der Geburt Christ

schreiben die Christen das Jahr 1, nach Ablauf des ersten Jahres das Jahr 2 u. s. w. Wenn wir daher die Jahreszahl 1883 schreiben, so ist dieses das 1883. n. Chr. G.; es sind also erst 1882 ganze Jahre verflossen, und erst am 31. December 1883 um 12 Uhr nachts sind 1883 volle Jahre vorüber; in demselben Augenblicke beginnt aber das Jahr 1884.

Dasselbe gilt auch von den Monaten und Tagen. Schreiben wir den 16. November 1882, so sind seit Chr. G. 1881 Jahre, 10 Monate und 15 Tage verflossen, und wenn 1882, den 16. November 10 Uhr vormittags schreiben, so sind von Chr. G. bis zu diesem Augenblicke 1881 Jahre, 10 Monate, 15 Tage und 10 Stunden verflossen.

Die Zeit (die Jahreszahl, Monat und Tag), wann etwas geschieht, nennt man das Datum.

Soll das aus dem Datum die verflossene Zeit bestimmt werden, so braucht man also nur die Jahreszahl, die Ordnungszahl des Monates und des Tages um 1 zu vermindern.

Ist für eine Begebenheit der seit Chr. G. verflossene Zeitraum als eine durch Jahre, Monate, Tage . . . ausgedrückte Zahl gegeben, so kann daraus wieder leicht das Datum berechnet werden. Z. B.: Als Amos Comenius geboren wurde, zählte man seit Chr. G. 1591 Jahre, 2 Monate und 27 Tage; welches Datum schrieb man an seinem Geburtstage?

Als 1591 Jahre nach Chr. G. verflossen waren, schrieb man 1592; nach Verlauf von 2 Monaten war man im 3. Monate, also im März; und nach Verlauf von 27 Tagen in diesem Monate schrieb man den 28. Comenius wurde also am 28. März 1592 geboren.

Welches Datum schrieb man 1829 Jahre, 6 Monate, 12 Tage und 8 Stunden nach Chr. G.?

1829 nach Chr. G. schrieb man 1830; nach Ablauf von 6 Monaten, war man im 7. Monate, also im Juli; nach Ablauf von 12 Tagen begann der 13. Juli. Man schrieb also 1830 den 13. Juli 8 Uhr vormittags.

Ein gewöhnliches, gemeines Jahr wird zu 365 Tagen gerechnet, die Zeit des Umlaufes der Erde um die Sonne beträgt aber 365 Tage 48 Minuten und 48 Secunden (astronomisches Jahr).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da diese Minuten und Secunden nahe 6 Stunden, also fast $\frac{1}{4}$ Tag ausmachen, so würde man alle 4 Jahre einen Fehler von 1 Tag begehen, d. i. einen Tag zu wenig gerechnet haben. Um diesen Fehler zu berichtigen, rechnet man jedes 4. Jahr zu 366 Tagen und nennet ein solches Jahr ein Schaltjahr, weil im Februar nach dem 23. ein Tag eingeschaltet wird.

Dadurch, dass man jedes 4. Jahr als Schaltjahr annimmt, begeht man aber wieder einen Fehler, da 4 mal 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden nur 23 Stunden 15 Minuten 12 Secunden betragen, also um 44 Minuten 48 Secunden weniger als einen ganzen Tag. Da aber von 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden nur 11 Minuten 12 Secunden auf 6 Stunden fehlen, so wird dieser Unterschied in so viel Jahren einen ganzen Tag ausmachen, als 11 Minuten 12 Secunden = 672 Secunden in einem Tag = 86400 Secunden enthalten sind, also:

$$86400 : 672 = 128\tfrac{4}{7}.$$

Es wird daher der Unterschied in etwa 129 Jahren 1 Tag betragen, und man könnte jedes 129. Jahr als gemeines Jahr anstatt als Schaltjahr rechnen.

In 100 Jahren beträgt der Unterschied 100 mal $11\frac{1}{5}$ Minuten, also $18\frac{2}{3}$ Stunden. Rechnet man daher, wie es auch wirklich geschieht, alle 100 Jahre statt eines Schaltjahres ein gemeines Jahr, so wird der Fehler wieder geringer, beträgt jedoch in 400 Jahren $21\frac{1}{3}$ Stunden, also nahezu einen Tag, welcher zu wenig gerechnet würde, und um auch diesen Fehler auszugleichen, rechnet man das 400. Jahr wieder als Schaltjahr. Es wurde bestimmt, dass 1700, 1800 und 1900 als gemeine Jahre, 2000 als Schaltjahr, 2100, 2200, 2300 gemeine Jahre, 2400 als Schaltjahr gerechnet werden.

Selbst bei dieser Annahme ergibt sich für den Zeitraum von 400 Jahren wieder eine Differenz von $2\frac{2}{3}$ Stunden, die aber erst in 3600 Jahren einen Tag ausmacht, über den zu verfügen wir unseren Nachkommen überlassen.

Ob ein Jahr ein Schaltjahr sei, wird gefunden, wenn man die Jahreszahl durch 4 dividiert; bleibt kein Rest, so ist das Jahr ein Schaltjahr, sonst ein gemeines Jahr. Je nach den hierbei möglichen Resten 1, 2, 3, ist das gemeine Jahr das 1., 2., 3. nach dem Schaltjahre. Die Secularzahlen machen hiervon eine Ausnahme.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn sich die Anzahl der Jahrhunderte durch 4 ohne Rest theilen läſst (also nicht die ganze Zahl), z. B.: **16**00, **20**00, **24**00, so ist das Jahr ein Schaltjahr, sonst aber ein gemeines Jahr. Z. B.: **17**00, **18**00, **19**00, **21**00.

Das Jahr hat bekanntlich 12 Monate, die aber nicht alle gleiche Dauer haben. Der Februar hat in einem gemeinen Jahre 28 Tage, in einem Schaltjahre 29 Tage. Die Monate: Jänner, März, Mai, Juli, August, October und December haben 31 Tage, die übrigen Monate 30. Im Rechnen nimmt man gewöhnlich den Monat zu 30 Tagen, wonach dann das Jahr zu 360 Tagen gerechnet werden muſs.

Die vier Phasen des Mondes: Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel haben die Eintheilung des Monates in Wochen veranlaſst.

Das gemeine Jahr enthält, da die Woche 7 Tage hat, 52 Wochen und 1 Tag, das Schaltjahr 52 Wochen und 2 Tage.

Die Aufgaben bei der Zeitrechnung fordern:

a) den Endpunkt eines Zeitraumes, oder b) die Dauer desselben, oder c) den Anfangspunkt des Zeitraumes zu berechnen.

a) Endpunkt des Zeitraumes.

Beispiele:

1. Friedrich von Schiller wurde am 10. November 1759 geboren, erreichte ein Alter von 45 Jahren 5 Monaten und 22 Tagen; an welchem Tage starb er?

Am 10. November 1759 waren seit Chr. G. 1758 Jahre 10 Monate und 9 Tage verflossen; als er starb, war um 45 Jahre 5 Monate und 22 Tage mehr Zeit abgelaufen, daher muſs man

1758 J.	10 M.	9 T.	
45 „	5 „	22 „	
1804 „	4 „	8 „	

diese Zeit zu 1758 Jahren 10 Monaten und 9 Tagen addieren. Hierdurch erhält man 1804 Jahre 4 Monate 8 Tage; als die bei seinem Tode nach Chr. G. verflossene Zeit; daher ist der Sterbetag Schillers der 9. Mai 1805.

Man findet also das Ende des Zeitraumes, indem man zur Zeit des Anfangs die Dauer des Zeitraumes addiert.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Oder:

45 Jahre nach dem 10. Nov. 1759 war der 10. Nov. 1804
5 Monate „ „ 10. Nov. 1804 „ „ 10. April 1805
29 Tage „ „ 10. April 1805 „ „ 9. Mai 1805.

Man kann also die Rechnung kürzer lösen, indem man, ohne die verflossene Zeit zu suchen, zum Anfangsdatum die Jahre, Monate, Tage... der Dauer des Zeitraumes addiert.

2. Kaiser Franz I. wurde am 12. Februar 1768 geboren und starb in einem Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann starb er?

67 Jahre nach dem 12. Februar 1768 war der 12. Februar 1835,
18 Tage „ „ 12. Februar 1835 „ „ 2. März 1835.

In dieser Aufgabe erhält man bei der Addition der Tage 30 Tage, welche erst dann in Rechnung kommen können, wenn der betreffende Monat bekannt ist; hier ist es der Februar eines gemeinen Jahres, der 28 Tage hat, daher entfallen noch 2 Tage für den März.

b) Dauer des Zeitraumes.

Johann Heinrich Pestalozzi wurde am 12. Jänner 1746 geboren und starb am 17. Februar 1827; wie alt ist er geworden?

Am 17. Februar 1827 waren seit Chr. G. 1826 Jahre 1 Monat und 16 Tage verflossen, am 12. Jänner 1746 aber 1745 Jahre 11 Tage. Der Verstorbene war offenbar so alt, als von Chr. G. bis zu seinem Sterbetage mehr Zeit verflossen war, als bis zu seinem Geburtstage; daher muss man, um das Alter zu finden, die Anzahl der Jahre, Monate und Tage, die bis zu seinem Geburtstage verflossen sind, von jenen bis zum Sterbetage subtrahieren.

1826 J. 1 M. 16 T.
1745 „ — „ 11 „
81 J. 1 M. 5 T.

Pestalozzi wurde also 81 Jahre 1 Monat und 5 Tage alt.

Man erhält also die Dauer des Zeitraumes, wenn man die am Anfange desselben verflossene Zeit von der am Ende subtrahiert.

Oder:

Vom 12. Jänner 1746 bis 12. Jänner 1827 sind 81 Jahre.
„ 12. Jänner 1827 „ 12. Februar 1827 „ 1 Monat.
„ 12. Februar 1827 „ 17. Februar 1827 „ 5 Tage.

Daher das Alter 81 Jahre 1 Monat 5 Tage.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Anfang des Zeitraumes.

Karl der Große starb am 28. Jänner 814 n. Chr. G. in einem Alter von 71 Jahren 9 Monaten 26 Tagen; wann wurde er geboren?

Beim Tode Karls des Großen waren seit Chr. G. 813 Jahre 27 Tage verflossen; da er aber um so viele Jahre, Monate und Tage vor diesem Zeitpunkte geboren wurde, als die Dauer seines Lebens beträgt, so muss man 71 Jahre 9 Monate 26 Tage von

813 J. —	M.	27 T.	
71 „	9 „	26 „	
741 „	3 „	1 „	

813 Jahren 0 Monaten 27 Tagen subtrahieren. Als Karl der Große geboren wurde, waren also seit Chr. G. 741 Jahre 3 Monate 1 Tag verflossen; daher fällt der Tag seiner Geburt auf den 2. April 742.

Man findet also den Anfang eines Zeitraumes, wenn man die Dauer desselben vom Ende subtrahiert.

§. 28.

Multiplication mehrnamiger Zahlen.

Zuerst werden wieder einige Aufgaben im Kopfe ausgerechnet. Z. B.: Es ist die Zahl 8 Stunden 18 Minuten 3 mal zu nehmen. Die Schüler sehen leicht ein, dass sie sowohl die 8 Stunden, als auch 18 Minuten 3 mal zu nehmen haben, und rechnen daher: 3 mal 8 Stunden sind 24 Stunden, und 3 mal 18 Minuten sind 54 Minuten; zusammen 24 Stunden 54 Minuten.

Schriftlich: $\frac{\text{8 St. 18 M.} \times 3}{\text{24 St. 54 M.}}$

Nun werden Aufgaben gegeben, in deren Lösung Reductionen vorkommen. Z. B.: Wieviel sind 8 mal 6 Tage 11 Stunden?

Mündlich: 8 mal 6 Tage sind 48 Tage; 8 mal 11 St. sind 88 St. oder 3 Tage und 16 St.; diese zu 48 Tagen gezählt, gibt 51 Tage, 16 St..

Schriftlich: $\frac{\text{6 Tage 11 St.} \times 8}{\text{51 Tage 16 St.}}$ 11 St. × 8 = 88 St.
88 : 24 = 3 Tage
16 St.

Aus der Lösung dieser Aufgabe ersehen die Schüler, dass es beim schriftlichen Multiplicieren vortheilhafter ist bei der niedrigsten Benennung zu beginnen. Die Reductionen sollen, wo es möglich ist, im Kopfe ausgeführt werden.

Mehrnamige Zahlen mit decimaler Eintheilung werden am vortheilhaftesten multipliciert, wenn man sie in die niedrigste Benennung oder in eine Decimalzahl der höchsten Benennung verwandelt. Z. B. 412 fl. 75 kr. sollen mit 34 multipliciert werden.

41275 kr. × 34		412·75 fl. × 34
165100	oder	1651 00
123825		12382 5
1403350 kr. = 14033 fl. 50 kr.		14033·50 fl.

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch, M. S. 52 bis 55. A. K. S. 33 bis 35.

§. 29.

Division mehrnamiger Zahlen.

Wir unterscheiden hier wieder die Division als Messen und als Theilen. Betrachten wir die Aufgabe: Wieviel Meter erhält man für 9 fl., wenn 1 Meter 12 kr. kostet? Man erhält so oftmal 1 Meter als 12 kr. in 9 fl., d. i. in 900 kr. enthalten sind.

Hieraus sieht man, dass Dividend und Divisor benannte Zahlen sind.

Mündlich: 9 fl. sind 900 kr.; 12 kr. sind daher in 9 fl. ebenso oft enthalten als in 900 kr. 900 kr. = 840 kr. + 60 kr. 12 kr. in 840 kr. 70 mal und in 60 kr. 5 mal also in 900 kr. 75 mal enthalten. Man erhält daher 75 Meter.

Schriftlich: 900 : 12 = 75
60

Man bringt also Dividend und Divisor auf gleiche Benennung und dividiert.

Wie oft sind 3 m 6 dm 7 cm in 197 m 1 dm 8 cm enthalten?

3 m 6 dm 7 cm = 367 cm
198 m 1 dm 8 cm = 19818cm. 19818 : 367 = 54.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Aufgabe: 58 fl. 24 kr. sollen unter 7 Personen zu gleichen Theilen getheilt werden; wieviel erhält jede Person? verlangt das Theilen: die 58 fl. 24 kr. müssen in 7 gleiche Theile getheilt, d. i. durch 7 dividiert werden. Man sieht hieraus: Der Dividend ist eine benannte Zahl, der Divisor eine unbenannte, und der Quotient muss den Namen des Divisors erhalten.

Mündlich: Der 7. Theil von 58 fl. sind 8 fl. und es bleiben noch 2 fl. zur weiteren Vertheilung. 2 fl. sind 200 kr., hierzu die schon vorhandenen 24 kr. sind 224 kr. = 210 kr. + 14 kr., Der 7. Theil von 210 kr. sind 30 kr. und $\frac{1}{7}$ von 14 kr. sind 2 kr. daher von 224 kr. 32 kr. Jede der 7 Personen erhält 8 fl. 32 kr.

Schriftlich.

58 fl. 24 kr. : 7 = 8 fl. 32 kr.
2 „ 200 „
224 kr.
14

oder: 58 fl. 24 kr. = 58·24 fl. 58·24 fl. : 7 = 8·32 fl.

Man dividiert zuerst die Zahl der höchsten Benennung, verwandelt den etwa sich ergebenden Rest in die nächstniedrigere Benennung, addiert hiezu die im Dividende schon vorhandenen Einheiten dieser Benennung und dividiert die hiedurch erhaltene Summe.

Vortheilhafter aber ist es, den Dividend in eine einnamige Zahl zu verwandeln und diese zu dividieren. Wieviel beträgt der 63. Theil von 620 kg 42 dg 4 g? 620 kg 42 dg 4 g = 620·424 kg

620·424 kg : 63 = 9·848 kg
534
302
504
9·848 kg = 9 kg 84 dg 8 g

Selbstverständlich ist es für den Schüler übender und bildender, wenn er bei jeder Aufgabe selbst zu beurtheilen hat, ob sie ein Messen oder ein Theilen fordert; daher sollen die angewandten Aufgaben nicht nach diesen Forderungen gesondert, sondern untereinander abwechselnd gegeben werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch, M. S. 55 bis 60.

Wiederholungsaufgaben IV. Rechenbuch, M. S. 60 bis 63. A. K. S. 35 bis 47.

Nach dem Lehrplane für die achtclassigen Volks- und Bürgerschulen kommt jetzt in der 4. Classe das Rechnen mit den häufiger vorkommenden gemeinen Brüchen. Zu diesen gehören: Halbe, Viertel, Achtel; Drittel, Sechstel, Zwölftel; Fünftel, Zehntel; Zwanzigstel, Fünfundzwanzigstel, Fünfzigstel und Hundertel. Da für das Rechnen mit diesen Brüchen dieselben Regeln gelten, wie für alle Brüche, so wollen wir der Übersichtlichkeit, des Zusammenhanges und der Raumersparnis wegen diese Abtheilung hier übergehen und verweisen auf den dritten Abschnitt der III. Abtheilung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Abtheilung.

Das Rechnen in den oberen Schulclassen.

Erster Abschnitt.

Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen.

§. 30.

Allgemeine Bemerkungen.

So wie in den früheren Schuljahren ist es auch hier wieder angezeigt, zunächst eine Wiederholung vorzunehmen. Diese erstreckt sich in der V. Classe hauptsächlich auf das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen, mit ein- und mehrnamigen Zahlen.

Die Wiederholungsübungen erhalten aber hier eine Erweiterung. Diese besteht in Multiplications- und Divisionsvortheilen und in der abgekürzten Multiplication und Division der Decimalzahlen.

Diese Vortheile erstrecken sich bei der Multiplication auf das Multiplicieren mit 11, und mit Multiplicatoren, in welchen die Ziffer 1 vorkommt, auf das Zerlegen des Multiplicators in Factoren, mit welchen sich leicht multiplicieren läßt, so wie auf das Multiplicieren mit einem Multiplicator, der mit Ausnahmen der Einer oder der höchsten Ziffer lauter 9 enthält. Bei der Division sind die Vortheile zu beschränken auf Aufgaben mit Divisoren, welche sich in 2 Factoren zerlegen lassen, durch welche sich leicht dividieren läßt, und auf das Dividieren durch 25 und 125.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 31.

Rechnungsvortheile bei der Multiplication.

a) Wenn der Multiplicator die Ziffer 1 enthält.

Anstatt:	6374 × 31	25409 × 1·04	58·23 × 1·36
	6374	25409	58 23
	19122	101636	17 469
	197594	26425·36	3 4938
			79·1928

kann man das Anschreiben eines Partialproductes ersparen und schreiben

6374 × 31	25409 × 1·04	58·23 × 1·36
19122	101636	17 469
197594	26425·36	3 4938
		79·1928

Kommt also im Multiplicator die Ziffer 1 vor, so läſst man den Multiplicand als erstes Theilproduct gelten, multipliciert ihn dann nur mit den geltenden Ziffern des Multiplicators und setzt die erhaltenen Theilproducte gehörig darunter.

b) Multiplicieren mit 11.

Man multipliciert nach dem eben angegebenen Vortheile z. B.

37429 × 11
37429
411719

Hieraus sieht man folgendes Verfahren: Man schreibt die erste Ziffer rechts unverändert an, addiert dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, kurz zu jeder Ziffer die Ziffer in der nächst höheren Stelle; das so eben gegebene Beispiel auf diese Weise durchgeführt, spricht man: 9 ist 9, 9 und 2 ist 11, bleibt 1; 1 und 2 ist 3 und 4 ist 7; 4 und 7 ist 11, bleibt 1; 1 und 7 ist 8 und 3 ist 11, bleibt 1; 1 und 3 ist 4.

37429 × 11
411719

c) Wenn sich der Multiplicator in Factoren zerlegen läſst, mit denen man leicht multiplicieren kann, so mul-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

tipliciere man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor und dann das erhaltene Product mit dem andern Factor.

$$\begin{array}{r} 3824 \\ \underline{26768} \\ 134840 \end{array} \times \begin{array}{r} 35 \\ \hline 7\times5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2756 \\ \underline{19292} \\ 212212 \end{array} \times \begin{array}{r} 77 \\ \hline 7\times11 \end{array}$$

d) Wenn der Multiplicator an allen Stellen 9 hat mit Ausnahme der niedersten Stelle. Soll z. B. die Zahl 1562 mit 994 multipliciert werden und man multipliciert mit 1000, so ist das erhaltene Product um das 6-fache zu viel; daher muss man 1562 mit 6 multiplicieren und dieses Product vom 1000-fachen Producte subtrahieren.

Hat also der Multiplicator in allen Stellen mit Ausnahme der niedrigsten Stelle 9, so addiert man zu der niedersten Ziffer so viel hinzu, dass man 100, 1000 . . bekommt, multipliciert den Multiplicand zuerst mit 100, 1000 . . . . dann mit der zu der niedersten Ziffer addierten Zahl und subtrahiert das letztere Product vom ersten, also:

$$\begin{array}{r} 1562_{000} \\ \underline{9372} \\ 1552628 \end{array} \times \begin{array}{r} 994 \\ \hline 1000-6 \end{array}$$

e) Wenn der Multiplicator in allen Stellen 9 hat mit Ausnahme der höchsten Stelle, wo auch eine andere Ziffer sein kann. Es soll z. B. die Zahl 6827 mit 499 multipliciert werden. Wenn man den Multiplicator um 1 vermehrt, so erhält man eine Zahl (500), welche aus einer einzigen geltenden Ziffer mit rechts lauter Nullen besteht. Multipliciert man nun den Multiplicand mit dieser Zahl, so ist das Product um das 1-fache des Multiplicands, d. i. der Multiplicand selbst, zu groß, weshalb man diesen von jenem Producte zu subtrahieren hat; also:

$$\begin{array}{r} 6827 \\ \underline{3413500} \\ 3406673 \end{array} \times \begin{array}{r} 499 \\ \hline 500-1 \end{array}$$

Hier wird der oben stehende Multiplicand von dem darunter geschriebenen 500fachen Producte subtrahiert.

Aufgaben in Močniks Arithmethik für Bürgerschulen 1. Heft, S. 13. A. K. V. R. S. 5 bis 7.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 32

Abgekürzte Multiplication der Decimalzahlen.

Wir haben schon früher gezeigt, wie wertlos sehr niedrige Decimalstellen für das praktische Leben sind, dass aber ein einfaches Weglassen der wertlosen Stellen nicht genügt. Dieses ist namentlich bei der Multiplication der Fall, denn eine an sich wertlose Decimalstelle kann durch Multiplication mit einer Ziffer in einer hohen Stelle zu bedeutendem Einflusse kommen, daher lässt man die Vernachlässigung nicht bei den Factoren, sondern erst im Producte eintreten. Es soll z. B. die Zahl 4·0312 mit 7·0048 multipliciert werden und man verlangt im Producte nur 4 Decimalstellen also Zehntausendtel.

Wir wollen zur besseren Einsicht die unabgekürzte Art neben die abgekürzte setzen.

4·0312 × 7·0048		4·0312 × 7·0048	
28·2184	. . .	282184	
161	248	161	
32	2496	32	
28·2377	4976	28·2377	

Wir multiplicieren zuerst mit den 7 Einern, wobei jede Ziffer des Productes an ihrer Stelle verbleibt, daher kommt die 4 von $7 \times 2 = 14$ an die 4. Stelle d. i. die Stelle der Zehntausendtel. Wenn wir mit 4 Tausendtel multiplicieren, so müssen wir jede Ziffer des Productes um 3 Stellen weiter rechts rücken, die Ziffer 8 von $4 \times 2 = 8$ käme daher an die 7. Stelle, d. i. die Stelle der Zehnmilliontel*), welche wir aber nicht brauchen; wir streichen daher die Ziffer 2 durch. Würden wir die Multiplication mit 0·004 bei der Ziffer 1 beginnen, so käme die Ziffer 4 von $4 \times 1 = 4$ in die 6. Stelle, d. i. in die Stelle der Milliontel **), welche wir ebenfalls nicht brauchen, daher streichen wir auch die Ziffer 1 durch. Beginnen bei der Ziffer 3, so erhalten wir 12 Hunderttausendtel = 1 Zehntausendtel und 2 Hunderttausendtel, wovon die 2 an die 5. Stelle

*) 0·0002 × 0·004 = 0·0000008.
**) 0·001 × 0·004 = 0·000004.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

käme, die wir aber nicht brauchen, 1 Zehntausendtel aber gehört schon zur 4. Stelle. Wir durchstreichen daher auch noch die Ziffer 3 und sagen: 4 mal 3 ist 12, gibt 1 zur Correctur, 4 mal 0 ist 0 und 1 ist 1 und schreiben die Ziffer 1 an die 4. Stelle und multiplicieren weiter: $4 \times 4 = 16$. Wir durchstreichen auch die 0 hinter 3, denn eine Ziffer an dieser Stelle würde mit 0·0008 multipliciert Hunderttausendtel geben, welche in die 5. Stelle kämen, und sagen 8 mal 4 ist 32, wovon 3 (als Tausendtel) in die 3. und 2 (als Zehntausendtel) in die 4. Stelle kommt.

Um uns die Sache zu erleichtern, wollen wir nun jede Ziffer des Multiplicators unter diejenige Stelle des Multiplicands setzen, bei welcher wir mit jener zu multiplicieren beginnen müssen. Es sei z. B. 375·36249 mit 65·274 zu multiplicieren, und es werden 3 Decimalstellen, also Tausendtel verlangt.

Wir beginnen die Multiplication mit der Ziffer in der höchsten Stelle des Multiplicators, also mit den 6 Zehnern. Um hierdurch Tausendtel zu erhalten, müssen wir bei Zehntausendteln beginnen, wir schreiben daher die 6 Zehner des Multiplicators unter die 4 Zehntausendtel des Multiplicands; um durch die Multiplication mit Einern Tausendtel zu erhalten, müssen bei den Tausendteln beginnen, daher schreiben wir diese 4 Einer unter die 2 Tausendtel des Multiplicands. Um bei der Multiplication mit Zehnteln Tausendtel zu erhalten, müssen bei den Hunderteln anfangen, wir schreiben daher die 2 Zehntel des Multiplicators unter die 6 Hundertel des Multiplicands, und so muss man, um durch Multiplication mit Hundertel die Zehntel und bei jener mit Tausendtel die Einer multiplicieren, um Tausendtel zu erhalten, wir schreiben daher die 7 Hundertel des Multiplicators unter die 3 Zehntel des Multiplicands und die 4 Tausendtel des Multiplicators unter die 8 Einer des Multiplicands. Wir haben also hier die Ziffer der Einer des Multiplicators (5) unter die 3. Decimale (2) des Multiplicands, d. i. die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands gesetzt, welche noch im Producte erscheinen soll.

$$
\begin{array}{r}
378{\cdot}36249 \times 65{\cdot}274 \\
4\,7256 \\
\hline
22701\,749 \\
1891\,812 \\
75\,672 \\
26\,385 \\
1\,513 \\
\hline
24697{\cdot}131
\end{array}
$$

Die Ziffern des Multiplicators rechts von der Einerstelle schrieben wir in umgekehrter Ordnung links und die links von der Einerstelle nach rechts.

Multiplicieren wir nun mit der ersten rechts stehenden Ziffer des Multiplicators, nämlich 6, die erste rechts stehende Ziffer des Multiplicands, nämlich 9, so erhalten wir als Product, da 6 den Wert von Zehnern und 9 den von Hunderttausendteln hat, 54 Zehntausendtel = 5 Tausendtel und 4 Zehntausendtel; wovon wir erstere die 5 Tausendtel, als Correctur nehmen, die 4 Zehntausendtel vernachlässigen, und sagen weiter: 6 mal 4 ist 24 und 5 (die Correctur) ist 29 u. s. w. In gleicher Weise multiplicieren wir mit jeder nach links folgenden Ziffer. Es ergibt sich auch hier, dass man die Theilproducte, so wie die Summanden unter einander schreiben muss.

Die abgekürzte Multiplication wird nun auf folgende Art verrichtet:

1. Man schreibt die Ziffer der Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche im Producte noch vorkommen soll, und die übrigen Ziffern aber in umgekehrter Folge so an, dass die Ziffer der niedrigsten Stelle an die höchste Stelle zu stehen kommt. Leere Stellen über dem Multiplicator zur Rechten oder Linken besetzt man mit Nullen, oder denkt sich dieselben mit Nullen besetzt.

2. Man multipliciert mit jeder Ziffer des Multiplicators einzeln den Multiplicand, von der gerade über ihr stehenden Ziffer anfangend und schreibt die so erhaltenen Theilproducte wie Additionsposten untereinander, ihre Summe ist dann das verlangte Product. Um aber die Fehler der letzten Ziffer rechts einigermaßen zu verbessern, beginnt man die Multiplication mit jeder einzelnen Ziffer nicht mit der gerade über ihr stehenden Ziffer des Multiplicands, sondern mit deren Nachbarin rechts, schreibt jedoch dieses Product nicht an, sondern merkt sich hiervon die nächsten Zehner (die Übertragsziffer) und zählt diese als Correctur zu dem Producte aus der betreffenden Ziffer des Multiplicators und der gerade über ihr stehenden Ziffer, aber nur dann, wenn dieses Product nicht unter 5 schließt, erhöht sie aber um 1, wenn dieses Product über 4 schließt.

Es sei das Product $326{\cdot}75 \times 0{\cdot}00587$ mit 4 Decimalstellen zu suchen, so ist nach den angegebenen Regeln:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$326{\cdot}75_{00} \times 0{\cdot}00587$		$0{\cdot}00587_{0} \times 326{\cdot}75$
78 5000		57623
1 6338	oder	1 7610
2614		1174
228		352
1·9180		41
		3
		1·9180

Die letzte Decimalstelle im Producte ist bei der abgekürzten Multiplication nicht immer genau; will man dieselbe genau erhalten, so entwickle man um eine Decimale mehr, als verlangt wird.

Aufgaben in M. V. R., S. 9 und 10.

§. 33.

Rechnungsvortheile bei der Division und nachträgliche bei der Multiplication.

a) Eine Zahl wird durch 25 dividiert, indem man den Dividend mit 4 multipliciert und das erhaltene Product durch 100 dividiert. Z. B.

98725 : 25	74383 : 25
3949·00	2975·32

b) Eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man den Dividend mit 8 multipliciert und das erhaltene Product durch 1000 dividiert. Z. B.

843625 : 125	374613 : 125
6749 000	2996·904

c) Läßt sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend zuerst durch den einen Factor und dann den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor. Z. B.

41076 : 42	37863 : 72
: 6	: 8
6846	4732·875
: 7	: 9
978	525·875

d) Auch die Multiplication mit 25 und 125 läßt mit Hilfe der Division vortheilhaft durchführen. Man multipliciert eine Zahl

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anstatt mit 25 mit 100 und dividiert das Product durch 4; anstatt mit 125 zu multiplicieren, multipliciert man mit 1000 und dividiert das Product durch 8. Z. B.

$$\frac{234_{00}}{5850} \times 25 \qquad \frac{537_{000}}{67125} \times 125$$

Aufgaben in M. Arithmetik für Bürgerschulen, 1. H., S. 20.

§. 34.

Abgekürzte Division der Decimalzahlen.

Um den Vorgang bei der abgekürzten Division klar zu machen, wollen wir von einem Beispiele ausgehen: 2907·94604 soll durch 83·42036 dividiert werden, und man verlangt im Quotienten nur 4 Decimalstellen.

2907·946 : 83·4204 = 34·8589.

405334
71652
4916
745
78
3

Wir sprechen hier: 8 in 29 ist 3 mal enthalten. Da diese 3 Zehner sind, so haben wir im Quotienten 2 Ziffern vor dem Decimalzeichen, und noch 4 Decimalstellen, also zusammen 6 Ziffern; daher brauchen wir im Dividende 7 Ziffern und im Divisor 6 Ziffern. Wir werden also 2907·946 durch 83·4204 dividieren. Das Wesen unserer Abkürzung besteht zunächst darin, dass wir bei jeder folgenden Theildivision anstatt zu dem Reste eine weitere Ziffer des Dividends herabzusetzen, immer eine Ziffer rechts im Divisor weglassen. So streichen wir, nachdem wir die Ziffer 3 im Quotienten erhalten und das Theilproduct subtrahiert haben, die letzte Ziffer (4) im Divisor durch. Nachdem wir die Ziffer 4 im Quotienten gefunden haben, multiplicieren wir mit derselben die durchgestrichene 4 des Divisors, und sagen 4 mal 4 ist 16, gibt 2 zur Correctur, 4 mal 0 ist 0 und 2 ist 2, welche 2 wir von der niedrigsten Ziffer (4) des 2. Theildividends subtrahieren, indem wir daraufzählend sagend: und 2 ist 4. Nachdem wir so den Divisor (83·420) mit dem Quotienten multipliciert und das 2. Theilproduct vom Theildividend (405·334) subtrahiert haben, streichen wir die nächste Ziffer 0 im Divisor und sagen 8 in 71 ist 8 mal enthalten,

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

multiplicieren nun den Divisor (83·42) mit 8 und da 8 mal 0 keine Correctur gibt, sagen wir sogleich 8 mal 2 ist 16 u. s. w. und subtrahieren das 3. Theilproduct vom 3. Theildividend (71652), wodurch wir den 4. Theildividend (4916) erhalten u. s. w.

Wenn auf diese Art mehrere Beispiele durchgeführt werden, so ersehen die Schüler folgende Regeln:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und ihren Stellenwert, wodurch zugleich bekannt ist, wieviele Stellen der Quotient erhält.

2. Man bestimme den abgekürzten Divisor, welcher so viele Stellen haben muss, als der Quotient hat.

3. Man bestimme den abgekürzten Dividend, welcher entweder eben so viele Stellen hat, als der Quotient oder auch um 1 mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividendes nicht enthalten ist.

4. Man dividiere nach den Regeln der gewöhnlichen Divisior so lange fort, bis die Ziffer an der niedrigsten Stelle des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde, wenn dieses nicht schon im Anfange der Auflösung geschehen sein sollte. Nun schneide man bei Bestimmung jedes folgenden Theilquotienten die niederste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab, multipliciere den neuen Theilquotienten mit den noch übrigen Ziffern des Divisors und nehme jedesmal noch aus dem Producte der zuletzt abgeschnittenen Ziffer und dem neuen Theilquotienten die Zehner als Correctur in das erste eigentliche Product auf.

5. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

In folgenden Aufgaben soll der Quotient mit 3 Dec. bestimmt werden:

24·548|4 : 7·163|5 = 3·426
3057
192
49
6

Da hier die erste Ziffer 3 des Quotienten Einer bedeutet, so wird der Quotient im Ganzen 4 Ziffern enthalten; de abgekürzte Divisor muss daher ebenfalls 4 Ziffern haben, deshalb schneiden wir die letzte Ziffer rechts vom Divisor ab. Der abgekürzte Divisor ist daher 7·163. Der abgekürzte Dividend muss aber

5 Ziffern bekommen, da der Divisor in 4 Ziffern desselben nicht enthalten ist, er ist daher 24·548. Nun multiplicieren wir den abgekürzten Divisor mit 3, sagen aber: 3 mal 5 ist 15, gibt 2 zur Correctur; 3 mal 3 ist 9 und 2 ist 11 und 7 ist 18 u. s. w. Anstatt die Ziffer 4 des Dividends herabzusetzen, schneiden wir vom Dividend die niedrigste Ziffer 3 ab und unser neuer Divisor ist 716, durch welchen wir nun 3057 dividieren, und die Ziffer 4 im Quotienten erhalten; 4 mal 3 ist 12, gibt 1 zur Correctur; 4 mal 6 ist 24 und 1 ist 25 und 2 ist 27 u. s. w.

5·97521 : 25·6853 = 0·232

83
6
1

Da hier die erste Ziffer des Quotienten 2 Zehntel bedeutet, so hat man im Quotienten 3 Ziffern zu entwickeln, daher ist der abgekürzte Divisor 25·6 und der abgekürzte Dividend 5·97.

37842·5897|4 : 0·837 = 45212·174

4362
1775
1018
1819
1457
620
34
1

Da hier die erste Ziffer 4 im Quotienten Zehntausende bedeutet, so erhält der Quotient vor dem Decimalzeichen 5 Stellen, also mit den 3 Decimalen zusammen 8 Ziffern. Der abgekürzte Divisor sollte daher 8 und der abgekürzte Dividend 9 Stellen haben; da aber der Divisor nur 3 Ziffern hat, so müssen, bevor die Abkürzung beginnen kann, durch die gewöhnliche Division so viele Ziffern entwickelt werden, dass sie mit den hierauf durch die Abkürzung zu erhaltenden zusammen die verlangte Zahl ausmachen, also hier nachdem die niedrigste Ziffer 7 des abgekürzten Dividendes in Rechnung gebracht wurde.

Aufgaben in M. V. R., S. 13 und 14.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 35.

Einige besondere Eigenschaften der Zahlen.

Strehl und andere Methodiker empfehlen, die Theilbarkeit der Zahlen erst dann vorzunehmen, wenn man zum Abkürzen der Brüche kommt, also gleich eine Anwendung von den erkannten Gesetzen machen kann, sonst schwebt diese Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen in der Luft, und wenn man dann zur Lehre von den Brüchen und dem Abkürzen derselben kommt, so haben die Schüler die Kennzeichen der Theilbarkeit vergessen.

Dem letzteren läſst sich wohl durch Wiederholen und auch dadurch vorbeugen, wenn man die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen unmittelbar vor dem Bruchrechnen vornimmt. Hierdurch wird vermieden, den Zusammenhang im Bruchrechnen stören zu müssen.

Der Lehrer gebe den Schülern mehrere Zahlen, welche sich durch eine andere Zahl ohne Rest dividieren lassen und führe sie hierdurch auf die Erklärung: Eine Zahl ist durch eine andere theilbar, wenn sie sich durch dieselbe ohne Rest dividieren läſst.

Er frage: durch welche Zahl ist die Zahl 4 theilbar? Durch welche Zahl die Zahl 9?

Diejenige Zahl, durch welche eine andere Zahl theilbar ist, nennt das Maß dieser Zahl.

Welches Maß habt ihr für die Zahl 4, welches für die Zahl 9 gefunden? Suchet nun auch ein Maß für die Zahl 6, für 12., 15 u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Wievielfache ist 6 von 2 und von 3? das Wievielfache ist 12 von 3? u. s. w.

Gebt Zahlen an, welche durch 2, 3, 4 u. s. w. theilbar sind.

Diejenige Zahl, welche durch eine andere Zahl theilbar ist, nennt man ein **Vielfaches** der letzteren. Gebt auch Zahlen an, welche durch 1 theilbar sind. Suchet eine Zahl, welche nicht durch 1 theilbar ist.

Durch 1 sind alle Zahlen theilbar.

Dividiert die Zahl 2 durch 2; 5 durch 5; u. s. w., bleibt hierbei ein Rest?

Jede Zahl ist durch sich selbst theilbar.

Durch welche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 u. s. w. theilbar?

Jene Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind, nennt man Primzahlen.

Suchet alle Primzahlen von 1 bis 100.

Durch welche Zahlen ist die Zahl 12 theilbar?

Solche Zahlen, welche nicht nur durch sich selbst und durch 1, sondern auch noch durch eine andere Zahl theilbar sind, nennt man **zusammengesetzte** Zahlen.

Gebet zusammengesetzte Zahlen an.

Durch welche Zahl ist sowohl die Zahl 25 als auch 10 theilbar?

Wie oft ist 5 in 25 enthalten? Wie oft in 15? Wie oft also in beiden Zahlen $25 + 15 = 40$ zusammen? (Mehrere solche Beispiele.)

Wenn zwei Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar sind, so ist auch ihre Summe durch diese Zahl theilbar.

Um wievielmal weniger ist die Zahl 5 in 15 als in 25 enthalten? Wie oft daher in $25 - 15 = 10$? Also 5 mal weniger, 3 mal d. i. 2 mal. (Mehrere Beispiele.)

Wenn zwei Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar sind, so ist auch ihr Unterschied durch diese Zahl theilbar.

Wie oft ist 5 in 15 enthalten? Wie oft ist in 2 mal 15, 3 mal 15 u. s. w. enthalten?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist es auch jedes Vielfache derselben.

V. Rechenbuch M. S. 19.

§. 36.

Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen und Zerlegung in ihre Primfactoren.

Der Lehrer lasse die Zahl 10 durch 2 dividieren, um die Schüler zu überzeugen, dass 10 durch 2 theilbar ist. Da nun 10 durch 2 theilbar ist, so muss auch jedes Vielfache von 10, also 20, 30, . . . 100, 200, 300, 1000, 2000 u. s. w. durch 2 theilbar sein. Jede ganze Zahl, die an der Einerstelle 0 hat, ist ein Vielfaches von 10 und daher durch 2 theilbar.

$5732 = 5730 + 2$, $5734 = 5730 + 4$, $5736 = 5730 + 6$.

Jede Zahl läßt sich in zwei solche Theile zerlegen, von welchen der eine ein Vielfaches von 10, also durch 2 theilbar ist und der andere aus den Einern besteht. Es kommt daher nur darauf an, was für eine Ziffer an der Stelle der Einer steht. Steht an der Einerstelle 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl, die Summe zweier durch 2 theilbarer Zahlen, daher selbst durch 2 theilbar.

Durch 2 ist jede ganze Zahl theilbar, die an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6, 8 hat.

Der Lehrer lasse nun die Zahl 100 durch 4 dividieren, um den Schülern zu zeigen, dass 100 durch 4 theilbar ist. Da 100 durch 4 theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache von 100, also: 200, 300, . . 1000, 2000, 3000, 1200, . . . durch 4 theilbar. Jede Zahl, die an der Stelle der Zehner und Einer Nullen hat, ist ein Vielfaches von 100 und daher durch 4 theilbar.

$6548 = 6500 + 48$, $3712 = 3700 + 12$.

Jede ganze Zahl läßt sich in 2 Addenden zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, also durch 4 theilbar ist, und der andere durch die Ziffern an der Stelle der Zehner und Einer ausgedrückt ist. Ist nun diese Zahl durch 4 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

Durch 4 sind alle Zahlen theilbar, deren zwei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Um das Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahl 8 zu finden, läſst man 1000 durch 8 dividieren, geht dann in derselben Weise vor wie bei 2 und 4, und findet schließlich:

Durch 8 sind alle Zahlen theilbar, deren drei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 8 theilbar sind.

Da 10 durch 5 theilbar ist, so muſs auch jedes Vielfache von 10 durch 5 theilbar sein. Es folgt hieraus, daſs es bei der Theilbarkeit der Zahlen durch 5 nur auf die Einer ankommt, indem jeder höhere Bestandtheil, für sich allein genommen, als ein Vielfaches der durch 5 theilbaren Zahl 10, also ebenfalls durch 5 theilbar sein muſs.

Durch 5 sind alle Zahlen theilbar, welche an der Einerstelle 5 oder 0 haben.

Um die Schüler auf das Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen durch 3 zu führen, lasse er die Zahlen 10, 100, 1000 . . . durch ihre zunächst kleineren Vielfachen von 3 nebst ihren Resten ausdrücken, als:

$$10 = 3 \times 3 + 1$$
$$100 = 3 \times 33 + 1$$
$$1000 = 3 \times 333 + 1$$
$$10000 = 3 \times 3333 + 1 \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in einer Zahl, welche man untersuchen will, ob sie durch 3 theilbar ist, diese Werte statt 10, 100, 1000 u. s. w., z. B. in der Zahl 7254, so findet man, weil:

$$\begin{aligned} 7254 &= 7000 + 200 + 50 + 4 \\ &= 7.1000 + 2.100 + 5.10 + 4 \\ &= 7.(3.333 + 1) + 2.(3.33 + 1) + 5.(3.3 + 1) + 4^{*)} \end{aligned}$$

Verrichtet man die angezeigten Multiplicationen wirklich, so erhält man:

$$7254 = 3.2331 + 7 + 3.66 + 2 + 3.15 + 5 + 4.$$

Ordnet man diese Ausdrücke so, daſs zuerst alle angezeigten Producte, welche den Factor 3 haben, zu stehen kommen, dann aber die noch übrigen Zahlen, so erhält man:

$$7254 = 3.2331 + 3.66 + 3.15 + (7 + 2 + 5 + 4)$$

---

*) Hier können die zu Obigem nöthigen Erklärungen bezüglich der Klammern gegeben werden.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Da nun die drei ersten Ausdrücke, weil sie Vielfache von 3 sind, durch 3 theilbar sind, so kommt es nur auf die noch übrigen $7 + 2 + 5 + 4$, d. i. auf die Summe der Ziffern der Zahl 7254 an, ob diese Zahl durch 3 theilbar ist. Da man nun diese Zerlegung bei jeder anderen Zahl machen kann, so können wir sagen:

Durch 3 sind alle Zahlen theilbar, deren Ziffersumme durch 3 theilbar ist.

Wenn eine Zahl durch 2 und auch durch 3 theilbar ist, so muss sie auch durch 2×3, d. i. durch 6 theilbar sein. Welche Zahlen sind aber durch 2 theilbar? Welche durch 3?

Durch 6 sind alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffersumme durch 3 theilbar ist.

Um die Schüler auf das Kennzeichen für Theilbarkeit der Zahlen durch 9 zu führen, lassen wir die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. durch ihre zunächst kleineren Vielfachen von 9 nebst ihren Resten ausdrücken, als:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 \times 1 + 1 \\ 100 &= 9 \times 11 + 1 \\ 1000 &= 9 \times 111 + 1 \\ 10000 &= 9 \times 1111 + 1 \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in einer Zahl, welche man untersuchen will, ob sie durch 9 theilbar ist, anstatt 10, 100, 1000 u. s. w. z. B. in der Zahl 7263, so findet man, weil:

$$\begin{aligned} 7263 &= 7000 + 200 + 60 + 3 \\ &= 7.1000 + 2.100 + 6.10 + 3 \\ &= 7.(9.111 + 1) + 2.(9.11 + 1) + 6.(9.1 + 1) + 3 \end{aligned}$$

Verrichtet man die angezeigte Multiplication wirklich, so erhält man:

$$9.777 + 7 + 9.22 + 2 + 9.6 + 6 + 3$$

Ordnet man diese Ausdrücke so, dass zuerst alle angezeigten Producte, welche den Factor 9 haben, zu stehen kommen, so erhält man:

$$7263 = 9.777 + 9.22 + 9.6 + (7 + 2 + 6 + 3)$$

Da nun die drei ersten Ausdrücke, als Vielfache von 9, durch 9 theilbar sind, so kommt es nur auf die noch übrigen $(7 + 2 + 6 + 3)$ auf die Summe der Ziffern der Zahl 7263 an, ob

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Zahl durch 9 theilbar ist. Da man diese Zerlegung mit jeder anderen Zahl vornehmen kann, so können wir sagen:

Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffersumme durch 9 theilbar ist.

Da jede Zahl, welche in der Einerstelle 0 hat, ein Vielfaches von 10 ist, so sind durch 10 alle Zahlen theilbar, welche keine Einer haben.

Die Regeln für die Theilbarkeit der übrigen Zahlen, wie 7, 11, 13, 17, 19 u. s. w. sind sehr zusammengesetzt und haben keinen praktischen Wert.

Sind die Schüler in den Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen bis zur Geläufigkeit an Beispielen geübt worden, so geht man auf das Zerlegen der Zahlen in Primfactoren über.

Als Vorbereitung gebe man zusammengesetzte Zahlen an, als: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 24 u. s. w. und lasse von den Schülern im Kopfe aufsuchen, welche Primzahlen miteinander multipliciert die gegebene Zahl als Product geben.

Hierauf leite man sie auf das schriftliche Verfahren, welches in Folgendem besteht:

Will man eine Zahl in Primfactoren zerlegen, so dividiere man sie durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist (1 ausgenommen); den Quotienten dividiert man wieder durch die kleinste Primzahl, durch welche er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen und setze dieses Verfahren solange fort, bis man zum Quotienten eine Primzahl erhält. Die hiebei in Anwendung gebrachten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren der gegebenen Zahl. Es soll z. B. die Zahl 1260 in Primfactoren zerlegt werden. Man erhält:

1260 : 2 = 630	oder	1260	2	
630 : 2 = 315		630	2	
315 : 3 = 105		315	3	
105 : 3 = 35		105	3	
35 : 5 = 7		35	5	
		7	7	

Die Primfactoren der Zahl 1260 sind die nach und nach angewendeten Divisoren 2, 2, 3, 3, 5 und der letzte Quotient 7; denn

$$1260 = 2 \times 630 = 2 \times 2 \times 315 = 2 \times 2 \times 3 \times 105$$
$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 35 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 21. A. K. S. 30 u. 31.

§. 37.

Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes.

Der Lehrer gebe den Schülern mehrere Zahlen an. Z. B. 12, 15, 21, welche eine und dieselbe Zahl als Maß haben, und lasse sie im Kopfe aufsuchen, durch welche Zahl diese Zahlen theilbar sind, und sage:

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere Zahlen theilbar sind, heißt ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen.

Hierauf gebe er mehrere Zahlen an, welche zwei oder mehrere Zahlen als gemeinschaftliches Maß haben, z. B. 24, 36, 48 und lasse die Schüler beachten, welches unter den gemeinschaftlichen Maßen (2, 3, 4, 6, 12) das größte sei, und lasse sie untersuchen, ob es nicht ein noch größeres gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen gebe und sage:

Die größte unter denjenigen Zahlen, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, nennt man das größte gemeinschaftliche Maß derselben.

Er lasse nun untersuchen, ob die Zahlen 2, 3, 4, 5 auch ein gemeinschaftliches Maß haben, und sage dann:

Zwei oder mehrere Zahlen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, nennt man **Primenzahl unter sich** oder **relative Primzahlen.**

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, hat man zwei Methoden:

1. Man zerlegt jede derselben in ihre Primfactoren, hebt unter diesen diejenigen heraus, die in allen gegebenen Zahlen zugleich vorkommen; so ist das Product dieser Factoren ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen und zwar das größte, weil kein Factor mehr dazukommen darf, ohne dass es aufhören würde ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen zu sein.

Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 360 und 630 gesucht werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

360	2	630	2
180	2	315	3
90	2	105	3
45	3	35	5
15	3	7	7
5	5		

Das größte gemeinschaftliche Maß besteht daher aus den Factoren 2, 3, 3, 5 und ist: $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Wenn das größte gemeinschaftliche Maß von großen Zahlen gesucht werden soll, deren Primfactoren oft mühsam zu finden sind, so zieht man nachfolgende Methode vor.

2. Um den Gang bei der Anwendung der zweiten Methode nicht unterbrechen zu müssen, ist es angezeigt, die Schüler vorher mit zwei Sätzen bekannt zu machen, worauf dieselbe gegründet ist.

Man wiederhole zunächst das, was die Schüler bei der Probe über die Division kennen gelernt haben und lasse z. B. 315 durch 36 dividieren. Wenn wir 315 durch 36 dividieren, so erhalten wir 8, 8 mal 36 ist 288, dieses vom Dividend abgezogen gibt 27 als Rest; man erhält also den Rest, wenn man vom Dividend das Product aus dem Divisor und dem Quotienten subtrahiert; daher $315 - 36 \times 8 = 27$.

$315 : 36 = 8$
27

Wenn nun der Dividend 315 und der Divisor 36 ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist hierdurch nicht nur 315 und 36×8, sondern auch $315 - 36 \times 8$, also der Rest 27 theilbar. Daher:

Wenn der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist durch dieses auch der Divisionsrest theilbar, und es ist dasselbe daher auch das gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste.

Den Dividend erhält man, wenn man zum Producte aus dem Divisor und dem Quotienten den Rest addiert, daher ist $36 \times 8 + 27 = 315$.

Haben der Divisor 36 und der Rest 27 ein gemeinschaftliches Maß, so muss hierdurch nicht nur 36×8 und 27, sondern auch die Summe $36 \times 8 + 27$ d. i. der Dividend 315 theilbar sein.

Wenn der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß haben, so muss auch der Dividend durch dasselbe theilbar sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es soll nun das größte gemeinschaftliche Maß zwischen den Zahlen 1872 und 312 gesucht werden. Da dasselbe nicht größer sein kann, als die kleinere der Zahlen, so suchen wir, ob nicht die größere Zahl (1872) durch die kleinere (312) theilbar ist; ist dieses der Fall, so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen; hier ist also 312 das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen.

1872 : 312 = 6

Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 630 und 72 gesucht werden.

Dividieren wir 630 durch 72, so bleibt der Rest 54. Da der Dividend 630 und der Divisor dasselbe größte gemeinschaftliche Maß haben, wie der Divisor 72 und der Rest 54, so sucht man, ob nicht 54 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen 72 und 54 sei, indem man 72 durch 54 dividiert; es bleibt hier der Rest 18. Das gr ößte gemein schaftliche Maß zwischen dem Divisor 54 und dem Reste 18, muss auch das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend 72 und dem Divisor 54, und zugleich auch zwischen dem Reste 54 und dem Divisor 72, und daher auch zwischen 630 und 72 sein.

630 : 72 = 8
54
72 : 54 = 1
18
54 : 18 = 3
0

oder

72	630	8
18	54	1
	0	3

Wir suchen daher wieder, ob nicht der Rest 18 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen 54 und 18 sei, indem wir wieder 54 durch 18 dividieren. Da bei dieser Division kein Rest bleibt, so ist der Divisor 18 das gemeinschaftliche Maß zwischen 54 und 18, daher auch zwischen 72 und 54 und folglich auch zwischen 630 und 72. Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren, um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Man dividiere die größere Zahl durch die kleinere; bleibt kein Rest, so ist die kleinere Zahl das verlangte größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt jedoch ein Rest, so dividiere man durch denselben den eben angewendeten Divisor; und wiederhole diese Division des zuletzt gebrauchten Divisors durch den sich ergebenden Rest so oft, bis man auf den Rest 0 kommt. Der letzte Divisor ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß. Wäre der letzte Divisor 1, so haben die beiden Zahlen kein gemeinschaftliches, sie sind daher relative Primzahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das soeben dargestellte Verfahren nennt man die Staffeldivision.

V. Rechenbuch M. S. 22 und 23.

Um das größte gemeinschaftliche Maß von mehreren gegebenen Zahlen nach dieser Methode zu erhalten, suche man dieses für zwei derselben, dann von dem gefundenen Maße und der dritten Zahl, hierauf von dem neuen Maße und der vierten gegebenen Zahl u. s. w.; das zuletzt gefundene größte gemeinschaftliche Maß ist zugleich das größte gemeinschaftliche Maß aller gegebenen Zahlen. Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 640, 512 und 144 gesucht werden.

640	512	1	144	128	1
128		4	16		8

Also ist 16 das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

§. 38.

Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

Der Lehrer gebe z. B. die Zahl 15 an, und lasse von den Schüler untersuchen, durch welche Zahlen diese Zahl theilbar ist; ebenso lasse er suchen, durch welche Zahlen die Zahl 36 theilbar ist, und sage dann:

Wenn eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar ist, so nennt man sie das **gemeinschaftliche Vielfache** dieser Zahlen.

Hierauf lasse er die für die Zahl 36 gefundenen Zahlen 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 mit einander multiplicieren und sodann das aus denselben erhaltene Product 279.756 durch jede dieser Zahlen dividieren; die Schüler ersehen hieraus, dass das Product mehrerer Zahlen, durch jede derselben theilbar, also ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen ist.

Nun lasse er die Zahlen 8 und 12 mit einander multiplicieren und bemerken, dass nicht nur das hieraus erhaltene Product 96 ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen ist, sondern dass es auch die Zahlen 72, 48 und 24 sind, dass es aber keine kleinere Zahl gibt, welche durch 8 und 12 theilbar ist, als die Zahl 24; 24 ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 8 und 12.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen hat man 2 Methoden.

1. Es sei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen den Zahlen 48, 60 und 84 zu suchen. Zerlegen wir jede dieser Zahl in ihre Primfactoren, so erhalten wir:

$$48 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3$$
$$60 = 2 . 2 . 3 . 5$$
$$84 = 2 . 2 . 3 . 7$$

Unser zu suchendes Vielfaches muss durch 48 theilbar sein, d. h. es muss 48 als Factor enthalten, daher muss die zu suchende Zahl den Factor 2 4 mal und den Factor 3 1 mal enthalten. Schreiben wir uns daher den Factor 2 3 mal und 3 1 mal als Bestandtheile unseres zu suchenden Vielfachen auf. Das zu suchende Vielfache muss aber auch durch 60 theilbar sein, daher muss es auch die Primfactoren von 60 enthalten.

$2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$

Es soll daher den Factor 2 2 mal, 3 1 mal und 5 1 mal enthalten. Da 2 ohnehin schon 4 mal und 3 1 mal als Factor vorkommt, so braucht nur mehr der Factor 5 hinzuzukommen. Wir kommen zur Zahl 84. Da 84 den Factor 2 nur 2 mal und 3 nur 1 mal enthält, so brauchen wir wegen der Zahl 84 zu den bereits gefundenen Factoren $2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$ nur den Factor 7 hinzuzusetzen, und das Product von $2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7$ d. i. die Zahl 1680 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 48, 60 und 84. Dieses Product ist aber das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der genannten Zahlen; denn läßt man nur einen seiner Factoren weg, so ist es nicht mehr durch jede der gegebenen Zahlen theilbar.

Man findet also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen, wenn man jede derselben in Primfactoren zerlegt, aus diesen alle verschiedenen Factoren und zwar jeden so oftmal nimmt, als er in einer der gegebenen Zahlen am öftesten vorkommt und diese herausgehobenen Factoren miteinander multipliciert.

2. Es soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 3, 4, 5, 6, 8, 10 gesucht werden.

Würden wir die gegebenen Zahlen miteinander multiplicieren, so wäre das erhaltene Product ein Vielfaches der gegebenen Zahlen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

da ja das Product durch jeden seiner Factoren theilbar ist. Wir wollen aber das kleinste gemeinschaftliche Vielfache suchen, daher stellen wir folgende Überlegung an: Eine Zahl, welche durch 6 theilbar ist, ist auch durch 3 theilbar, wenn sie durch 8 theilbar ist, so ist sie es auch durch 4, und eine durch 10 theilbare Zahl muss auch durch 5 theilbar sein. Wenn wir also die Zahlen 6, 8 und 10 mit einander multiplicieren, so erhalten wir ein Vielfaches nicht nur von den Zahlen 6, 8, 10, sondern auch der Zahlen 3, 4, 5. Wir können also diejenigen Zahlen, durch welche andere der gegebenen Zahlen theilbar sind, streichen und erhalten dann das gemeinschaftliche Vielfache $6 \times 8 \times 10 = 480$. Sehen wir weiter, ob wir nicht ein noch kleineres erhalten können. $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $10 = 2 \times 5$.

Nehmen wir nun jeden der Primfactoren so oft, als er in einer dieser Zahlen am öftesten vorkommt, so erhalten wir $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$. Dividieren wir $8 \times 6 \times 10$, durch deren gemeinschaftliches Maß 2, und multiplicieren wir die erhaltenen Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Maße, so erhalten wir ebenfalls $2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ 120 ist also ein gemeinschaftliches Vielfaches von 6, 8, 10. Da wir aber keinen der Factoren 2, 3, 4, 5 weglassen dürfen, wenn das Product ein gemeinschaftliches Vielfaches bleiben soll, so ist es das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 6, 8, 10 und daher auch von 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Es sei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 6, 7, 9 zu suchen. Da 2 in 6 ohne Rest enthalten ist, so streichen wir die 2 weg. Die Zahlen 6 und 9 haben das gemeinschaftliche Maß 3 durch dieses 6 und 9 dividiert und die Quotienten mit dem Maße 3 multipliciert, erhalten wir $3 \times 2 \times 3 = 18$, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6 und 9, da aber unser Vielfaches auch durch 7 theilbar sein muss, so müssen wir dasselbe auch noch mit 7 multiplicieren, und wir erhalten $3 \times 2 \times 3 \times 7 = 126$.

$$\begin{array}{l} 2, 6, 7, 9 \\ \hline 2 . 7 . 3 \mid 3 \end{array}$$

Diesem Verfahren wollen wir beistehende Form geben.

Ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 15, 18 und 20 zu suchen, erhalten wir zunächst: 3, 18, 4; da 3 in 18

15 , 18 , 20	
3 , 18 , 4	5
9 , 2	2

ohne Rest enthalten ist, so streichen wir 3 durch, und da 18 und 4 das gemeinschaftliche Maß 2 haben, so dividieren wir sie durch dasselbe und wir erhalten schließlich: $2 \times 2 \times 9 \times 5 = 180$.

Führt man noch mehrere Beispiele auf diese Art durch, so ersehen die Schüler:

Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden, schreibt man dieselben in eine Reihe, streicht diejenigen, welche in größeren Zahlen ohne Rest enthalten sind, durch, dividiert die übrigen, wenn zwei oder mehrere von ihnen ein gemeinschaftliches Maß haben, durch dieses, und setzt die nicht durch dieses Maß theilbaren Zahlen unverändert zu den Quotienten herab. Ist von den hieraus erhaltenen Zahlen eine in einer größeren ohne Rest enthalten, so wird jene durchgestrichen, und wenn zwei oder mehrere von ihnen ein gemeinschaftliches Maß haben, so dividiert man sie wieder durch dasselbe, und setzt dieses Verfahren solange fort, als noch zwei Zahlen erscheinen, die ein gemeinschaftliches Maß haben. Schließlich werden die zuletzt erhaltenen Zahlen und die gemeinschaftlichen Maße, durch welche man dividiert (und die man rechts neben die betreffenden Zahlenreihen gesetzt hat), mit einander multipliciert. Das hieraus erhaltene Product ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M. S. 23 und 24.

Wiederholungsaufgaben im V. Rechenbuche M. S. 24, 25. und 26.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dritter Abschnitt.

Lehre von den gemeinen Brüchen.

§. 39.

Wesen und Behandlungen der gemeinen Brüche überhaupt.

Die Schüler haben schon im Anschlusse an den Zahlenraum bis 100 die einfachsten Brüche kennen, leichte Beispiele über diese Brüche ausführen gelernt, sind auch auf die Behandlung der Divisionsreste aufmerksam gemacht, und hierdurch für das Bruchrechnen vorbereitet worden.

Der Lehrer bringe hier in Erinnerung, dass jedes Ding, welchem nichts weggenommen wurde, ein Ganzes, was man vom Ganzen wegnimmt und was dann noch übrig bleibt, einen Theil nennt, dass man ein Ganzes (eine Einheit) entweder in ungleiche oder in gleiche Theile theilen kann.

Wenn man ein Ganzes, z. B. ein Meter, ein Kilogramm, einen Gulden, einen Strich an der Tafel u. s. w. in zwei oder mehrere gleiche Theile theilt und einen oder mehrere solche Theile nimmt, so heißt die hiedurch erhaltene Zahl eine gebrochene Zahl oder ein Bruch.

Einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen nennt man einen Bruch.

Der Lehrer mache mehrere gleich lange Striche an die Tafel, sage, dass jeder Strich ein Ganzes vorstellt, und theile den ersten Strich in 2, den zweiten in 3 gleiche Theile u. s. w., nehme bald von diesem, bald von jenem Striche einen und dann auch mehrere gleiche Theile und frage hierbei, z. B. In wieviele gleiche Theile wurde (hier das Ganze) dieser Strich (getheilt)? Wie nennt man einen solchen Theil, den man erhält, wenn man das Ganze in 5

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleiche Theile theilt? Er schneide durch eine Klammer 3 Theile ab, und frage: Wieviele Fünftel habe ich jetzt genommen? In wieviele gleiche Theile muss man das Ganze theilen, wenn man den Bruch $\frac{4}{8}$ haben will? Wieviele solche Theile muss man nehmen?

An den in verschiedener Anzahl von gleichen Theilen getheilten Strichen bemerken die Schüler, dass die Theile umsokleiner werden, in je mehr gleiche Theile das Ganze getheilt wird, und an den soeben bezeichneten Übungen wird ihnen klar, dass man bei einem Bruche wissen muss, in wieviele gleiche Theile Ein Ganzes getheilt wurde oder was für Theile vom Ganzen man habe, und wieviele solche Theile es sind. Hieraus ersehen die Schüler, dass man, um einen Bruch auszudrücken, 2 Zahlen braucht, nämlich jene, welche anzeigt, in wieviele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, und somit die Art der Theile angibt, sie benennt oder nennt und daher auch der Nenner heißt, und die andere, welche anzeigt, wieviele solche Theile zu nehmen sind, also die Theile zählt, und darum auch der Zähler heißt.

Der Nenner eines Bruches ist der Name der Theile, der Zähler die Zahl derselben. Nun sage man den Schülern, dass man, um der Zahl der Theile nicht immer den Namen, durch ein Wort ausgedrückt, beisetzen zu müssen, übereingekommen sei, unter der Zahl der Theile, dem Zähler, einen Querstrich zu machen, und unter denselben den Nenner zu setzen. Um also den Bruch 5 Achtel auszudrücken, schreibt man $\frac{5}{8}$.

Nun lasse man mehrere ausgesprochene Brüche anschreiben, angeschriebene Brüche aussprechen und von jedem derselben die Entstehung und Bedeutung angeben.

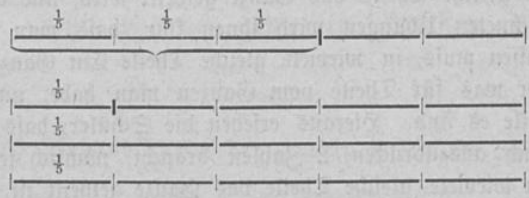
Für die Schüler der IV. Classe ist es hinreichend, wenn sie nur die soeben angeführte Entstehungsart der Brüche kennen lernen. Die Schüler der V. Classe werden aber auch mit der zweiten Entstehungsart bekannt gemacht.

Um hierbei das Neue an etwas Bekanntes anzuknüpfen, die erste Entstehungsart versinnlichend zu wiederholen und den Unterschied beider Entstehungsarten recht auffallend zu machen, zeige er die Entstehung des Bruches $\frac{2}{3}$ an einem Papierbogen, indem er denselben in 3 gleiche Theile theilt und hiervon 2 solcher Theile nimmt. Hierauf lege er 2 Bogen genau übereinander und theile dieselben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zugleich durchschneidend in 3 gleiche Theile, und lasse die Schüler bemerken, dass hier 2 Ganze in 3 gleiche Theile getheilt wurden, dass man von 2 Ganzen den 3. Theil genommen und ebenfalls $\frac{2}{3}$ erhalten hat.

Auch durchgetheilten Linien können beide Entstehungsarten des Bruches versinnlicht werden. Z. B. Die Entstehung des Bruches $\frac{3}{5}$.



Wie die nebenstehende Figur zeigt, erhalten wir den Bruch $\frac{3}{5}$, wenn wir von 1 Ganzen den 5. Theil 3 mal nehmen, oder auch dadurch, dass wir von 3 Ganzen den 5. Theil 1 mal nehmen. Von 3 Ganzen erhalten wir aber auch den 5. Theil, wenn wir dieselben durch 5 dividieren.

Die Schüler ersehen hieraus, dass ein Bruch als angezeigte Division betrachtet werden kann, und dass $\frac{3}{5}$ auch heißt $3:5$ d. i. 3 soll durch 5 dividiert werden, und dass man umgekehrt anstatt $3:5$ auch $\frac{3}{5}$ schreiben kann, und dass in dieser Division der Zähler, der Dividend und der Nenner der Divisor ist. Auch durch Schlüsse können die Schüler zu diesem Resultate geführt werden. Man fragt: Wieviel ist der 5. Theil von 3 Ganzen? Wieviel ist der 5. Theil von 1 Ganzen? Wievielmal soviel ist dieses von 3 Ganzen. Wieviel ist 3 mal $\frac{1}{5}$? Daher ist $\frac{3}{5} = 3:5$. Drei Fünftel eines Guldens nehmen ist daher ebensoviel, als das Fünftel von drei Gulden nehmen.

Um die Schüler auf den Begriff eines echten und unechten Bruches zu führen, schreibe er mehrere echte und unechte Brüche an die Tafel, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{3}$, frage nach der Bedeutung und Entstehung derselben und lasse sie hierbei bemerken, dass es solche Brüche gibt, die weniger enthalten, als das Ganze, und die daher kleiner sind, als ein Ganzes, und dass es hingegen Brüche gibt, die ebenso viele Theile als ein Ganzes enthalten, und die daher dem Ganzen gleich sind, und endlich solche, welche mehr

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theile enthalten, als zu einem Ganzen gehören, und die daher größer sind als ein Ganzes.

Brüche, welche kleiner sind als ein Ganzes, nennt man **echte Brüche.** Bei den echten Brüchen ist der Zähler kleiner als der Nenner.

Brüche, welche einem Ganzen gleich oder größer sind, als ein Ganzes, nennt man **unechte Brüche.** Bei den unechten Brüchen ist der Zähler dem Nenner gleich oder größer als der Nenner. Nun lege man den Schülern allerlei echte und unechte Brüche vor, und übe sie in Erkennen und Unterscheiden und verhalte sie überall den Grund anzugeben. Auch frage man, wieviel bei jedem der ihnen vorgelegten echten Brüche zum Ganzen fehlt, lasse mehrere Guldenbrüche durch Kreuzer ausdrücken und auch auf die Art untersuchen, ob sie kleiner, einem Gulden gleich oder größer als ein ganzer Gulden sind, z. B. $\frac{3}{4}$ fl. = 75 kr.; $\frac{5}{8}$ fl. = 100 kr; $\frac{6}{5}$ fl. = 120 kr. Schließlich sage der Lehrer, dass man eine ganze Zahl mit einem beigesetzten Bruche eine gemischte Zahl nennt. Z. B. $5\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{5}$.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S.

Nach dem Vorausgegangenen wird es den Schülern leicht werden, unechte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln und umgekehrt.

Es soll z. B. untersucht werden, wieviel Ganze in dem Bruche $\frac{37}{8}$ enthalten sind. Der Lehrer lasse dies zuerst durch das Kopfrechnen suchen und frage: Wieviel Achtel sind ein Ganzes? Wievielmal 1 Ganzes sind daher $\frac{37}{8}$? Wie oft sind $\frac{8}{8}$ in $\frac{37}{8}$ enthalten? Wieviel sind 4 mal $\frac{8}{8}$? Wieviel Achtel bleiben noch übrig? Es sind also $\frac{37}{8} = 4$ Ganze und $\frac{5}{8}$. Schon aus dieser Darstellung sehen die Schüler, dass sie, um einen unechten Bruch in eine ganze oder eine gemischte Zahl zu verwandeln, den Zähler durch den Nenner zu dividieren haben. Dasselbe ergibt sich auch aus der zweiten Entstehungsart des Bruches, denn $\frac{37}{8} = 37 : 8 = 4\frac{5}{8}$.

Es soll 6 Ganze in Achtel verwandelt werden. Der Lehrer frage: Wieviel Achtel hat ein Ganzes? Wie oftmal 8 Achtel haben daher 6 Ganze? Also ist $6 = \frac{48}{8}$.

Es soll die gemischte Zahl $4\frac{3}{5}$ in einen unechten Bruch verwandelt werden

Wieviel Fünftel hat 1 Ganzes. Wie oftmal $\frac{5}{5}$ sind daher 4 Ganze? Wieviel sind 4 mal $\frac{5}{5}$? Wieviele Fünftel haben wir noch zu den $\frac{20}{5}$ hinzuzählen? Folglich sind $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$. Wir haben hier, um die gemischte Zahl in einen unechten Bruch zu verwandeln, zuerst die Ganzen in solche Bruchtheile verwandelt, welche der gegebene Bruch enthält, daher die ganze Zahl mit dem Nenner multipliciert, und hierzu die schon vorhandenen Bruchtheile, d. i. den Zähler addiert, kurz:

Eine gemischte Zahl wird in einen unechten Bruch verwandelt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliciert, dem Producte den Zähler addiert und dieser Summe den Nenner des Bruches gibt. Z. B. $7\frac{4}{5} = \frac{39}{5}$.

Verwandle $54\frac{13}{35}$ in einen unechten Bruch.

$$\begin{array}{r} 54 \times 35 \\ \hline 270 \\ 162 \\ \hline 1890 \\ +\ 13 \\ \hline 1903 \end{array} \qquad 54\frac{13}{35} = \frac{1903}{35}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche M. S. 28.

Es werden nun mehrere Brüche von gleichem Nenner aber von ungleichem Zähler an die Tafel geschrieben, z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{7}{8}$, und um ihre Bedeutung gefragt; die Schüler sehen leicht ein, dass $\frac{7}{8}$ der größte unter diesen Brüchen ist, denn sie wissen ja, dass 7 Theile eines Ganzen größer sind als 6, 5 oder eben so große Theile, und können daher leicht den Satz ableiten:

Von mehreren Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist derjenige unter ihnen der größte, der den größten Zähler hat.

Sodann lasse man den Zähler eines Bruches z. B. von $\frac{2}{3}$ mit 2, 3, 4, 5 . . . multiplicieren und den Wert der erhaltenen Brüche: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$ untersuchen. Die Schüler werden leicht finden, dass der Wert eines Bruches zwei-, drei-, viermal u. s. w. so groß wird, wenn man den Zähler desselben mit 2, 3, 4, 5 . . . . multipliciert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert, den Nenner aber unverändert läſst. Z. B. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Der Lehrer laſse dann den Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$ durch 2, 3, 4 dividieren und die nun vorliegenden Brüche $\frac{12}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ bezüglich ihres Wertes vergleichen, und die Schüler werden finden, daſs der Zähler des Bruches $\frac{6}{5}$ nur halb so groß ist, als der Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$, und daſs auch der Wert des Buches $\frac{6}{5}$ nur die Hälfte des Bruches $\frac{12}{5}$ beträgt; der Zähler des Bruches $\frac{4}{5}$ ist nur der 3. Theil von dem Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$ und der Wert des Bruches $\frac{4}{5}$ ist auch nur der 3. Theil vom Werte des Bruches $\frac{12}{5}$ u. ſ. w. Dividiert man also den Zähler eines Bruches durch 2, 3, 4 . . ., so wird auch der Wert des Bruches durch 2, 3, 4 . . dividiert, also:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert, den Nenner aber unverändert läſst. Z. B. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

Es werden nun einige Brüche an die Tafel geschrieben, welche gleiche Zähler aber verschiedene Nenner haben; man laſse die Schüler beurtheilen, welcher von diesen Brüchen der größte ist. Z. B. $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{5}$. Die Schüler wissen aus der Erfahrung, daſs die Theile um so kleiner werden, in je mehr gleiche Theile das Ganze getheilt wird, daſs also $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{6}$ ist, so wie auch, daſs $\frac{3}{4}$ größer sein müssen als $\frac{3}{5}$, indem $\frac{1}{4}$ größer ist als $\frac{1}{5}$, müssen ja auch 3 mal $\frac{1}{4}$ d. i. $\frac{3}{4}$ größer sein als 3 mal $\frac{1}{5}$, d. i. $\frac{3}{5}$. Die schließen hieraus:

Wenn mehrere Brüche gleiche Zähler haben, so ist derjenige Bruch unter ihnen der größte, der den kleinsten Nenner hat.

Nun laſse der Lehrer den Nenner eines Bruches z. B. $\frac{7}{60}$ durch 2, 3, 4 . . . dividieren, und den Wert der nun vorliegenden Brüche $\frac{7}{60}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{7}{15}$ u. ſ. w. beurtheilen. Der Nenner von $\frac{7}{30}$ ist nur halb so groß als von $\frac{7}{60}$; $\frac{1}{30}$ ist aber 2 mal so groß als $\frac{1}{60}$, daher sind auch $\frac{7}{30}$ 2 mal so groß als $\frac{7}{60}$ u. ſ. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Wert eines Bruches wird also mit 2, 3, 4 . . . multipliciert, wenn man den Nenner des Bruches durch 2, 3, 4 . . . dividiert. Hieraus folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler unverändert läßt und den Nenner durch die ganze Zahl dividiert. Z. B. $\frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Hierauf lasse der Lehrer den Nenner eines Bruches z. B. $\frac{5}{6}$ mit 2, 3, 4 . . . multiplicieren, und den Wert der nun vorliegenden Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{5}{24}$ . . . beurtheilen. Der Nenner des Bruches $\frac{5}{12}$ ist 2mal so groß, als der von $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$ ist aber nur die Hälfte von $\frac{1}{6}$, daher ist auch 5mal $\frac{1}{12}$ d. i. $\frac{5}{12}$ die Hälfte von $\frac{5}{6}$ u. s. w. Hieraus folgt:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler unverändert läßt und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert. Z. B. $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{24}$.

Ein Bruch wird also mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multipliciert und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividiert und den Zähler unverändert läßt. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4 : 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert und den Zähler unverändert läßt. Z. B.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}; \frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Wird also der Zähler eines Bruches multipliciert oder dividiert, so geschieht das nämliche mit dem Bruche. Z. B.

$$\frac{4}{5} \times 2 = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}; \frac{4:2}{5} = \frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird der Nenner eines Bruches multipliciert oder dividiert, so ist dieses am Bruche die entgegengesetzte Rechnung. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}; \quad \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 29 und 30.

§. 40.

Formveränderung der Brüche mit gleichbleibendem Werte.

Nun lasse der Lehrer den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicieren, und frage wievielmal so groß der Wert des Bruches geworden sei; dann lasse er den Nenner des dadurch erhaltenen Bruches mit derselben Zahl multiplicieren, und frage wievielmal so klein jetzt dieser Bruch wieder sei.

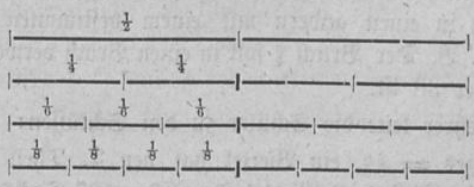
$$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{2} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Wird also der Zähler und der Nenner eines Bruches mit einer und derselben Zahl multipliciert, so wird der Bruch durch Multiplication des Zählers eben so vielmal vergrößert, als er durch die Multiplication des Nenners verkleinert wird, folglich bleibt der Wert des Bruches ungeändert.

Zu demselben Resultate kann der Lehrer die Schüler auch auf anschauliche Weise durch getheilte Linien führen*); die Schüler sehen hier:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$



*) Vergleiche §. 6.

Um den Satz noch eindringlicher zu machen, lasse er die Guldenbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{25}{50}$ in Kreuzer auflösen.

Auf dieselbe Art überzeuge man die Schüler, dass der Wert eines Bruches sich auch nicht ändert, wenn man den Zähler und den Nenner desselben durch eine und dieselbe Zahl dividiert, und lasse dann zusammenfassen:

Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Auf diesem wichtigen Satze beruht die Formveränderung der Brüche, mit gleichbleibendem Werte. Hierzu gehört: das Erweitern, Gleichnamigmachen und Abkürzen der Brüche.

§. 41.

Erweitern der Brüche.

Das Erweitern des Bruches geschieht dadurch, dass man Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliciert. Der Lehrer lasse die Schüler bemerken, dass man hiedurch einen Bruch erhält, der durch größere Zahlen ausgedrückt wird, dass also nur die Form geändert wird, nicht aber der Wert. Die Zahl, mit welcher man Zähler und Nenner multipliciert, heißt Erweiterungszahl.

Man lasse nun einen Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$ durch verschiedene Zahlen erweitern, als 2, 3, 5, 10 ... und bemerken, dass man hiedurch einen Bruch mit sehr verschiedenem Nenner ohne Veränderung seines Wertes ausdrücken könne, und dass aber hiebei die neuen Nenner Vielfache des ursprünglichen Nenners sind. Hierauf lasse man sie einen gegebenen Bruch in einen andern mit einem bestimmten Nenner verwandeln. Z. B. Der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 36 ist.

Der Lehrer leite die Schüler zu den Schlüssen:

1 Ganzes $= \frac{36}{36}$, ein Viertel hat den 4. Theil von $\frac{36}{36}$, d. i. 9 Sechsunddreißigstel, 3 Viertel 3 mal $9 = 27$ Sechsunddreißigstel, also $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$. Schriftlich: $1 = \frac{36}{36}$, $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$, $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Oder: Wievielmal so groß ist der neue Nenner 36 als der ursprüngliche? Mit welcher Zahl muss man den Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ multiplicieren, um den Nenner 36 zu erhalten? Da wir den früheren Nenner 4 mit 9 multiplicieren müssen, um den Nenner 36 zu bekommen, was muss auch mit dem Zähler geschehen, wenn der Wert des Bruches ungeändert bleiben soll?

$36 : 4 = 9$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{36}.$$

Die Schüler ersehen hieraus, dass man untersuchen muss, wie oft der Nenner des Bruches in dem Nenner, welchen man dem Bruche geben soll, enthalten ist, und dass man den Zähler mit diesem Quotienten, d. i. mit der Erweiterungszahl multiplicieren muss.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 31. A. K. S. 32 und 33.

§. 42.

Gleichnamigmachen der Brüche.

Zwei oder mehrere Brüche gleichnamig machen, heißt dieselben unter gleichen Nenner bringen.

Die Schüler haben bemerkt, dass der gegebene Nenner, den ein Bruch beim Erweitern erhalten soll, ein Vielfaches des früheren ist, sie werden daher nun leicht einsehen, dass zwei oder mehrere Brüche den gleichen Nenner erhalten können, wenn dieser ein Vielfaches aller Nenner der gegebenen Brüche ist.

Will man nun zwei oder mehrere Brüche auf gleichen Nenner bringen, so sucht man ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Nenner, und um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, wählt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner wird Hauptnenner oder Generalnenner genannt.

Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Halbe und Drittel kann man in Sechstel verwandeln. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Die schriftliche Form ist aus nachstehender Rechnung zu ersehen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Hauptnenner ist 6.

$1 = \frac{6}{6}$
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

oder:

	6	
$\frac{1}{2}$	3	3
$\frac{2}{3}$	2	4
$\frac{5}{6}$	1	5

Die Zahlen in der ersten Spalte sind die Erweiterungszahlen, die man erhält, indem man den Hauptnenner durch die Nenner der gegebenen Brüche dividiert, und mit denen man die Zähler der gegebenen Brüche multipliciert, um die Zahlen der zweiten Reihe, die Zähler zu dem Hauptnenner, zu erhalten.

Die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ sollen auf gleichen Nenner gebracht werden.

2, 3, 4, 5, 6, 8	
5, 3, 4	2

Der Hauptnenner ist
$5 \times 3 \times 4 \times 2 = 120.$

$1 = \frac{120}{120}$
$\frac{1}{2} = \frac{6}{120}$
$\frac{1}{3} = \frac{40}{120}, \frac{2}{3} = \frac{80}{120}$
$\frac{1}{4} = \frac{30}{120}, \frac{3}{4} = \frac{90}{120}$
$\frac{1}{5} = \frac{24}{120}, \frac{4}{5} = \frac{96}{120}$
$\frac{1}{6} = \frac{20}{120}, \frac{5}{6} = \frac{100}{120}$
$\frac{1}{8} = \frac{15}{120}, \frac{7}{8} = \frac{105}{120}$

oder:

	120	
$\frac{1}{2}$	60	60
$\frac{2}{3}$	40	80
$\frac{3}{4}$	30	90
$\frac{4}{5}$	24	96
$\frac{5}{6}$	20	100
$\frac{7}{8}$	15	105

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 31 bis 33. A. K. S. 35.

§. 43.
Abkürzen der Brüche.

Einen Bruch abkürzen oder reducieren heißt, ihn ohne Änderung seines Wertes durch kleinere Zahlen darstellen. Das Abkürzen der Brüche bringt die Vortheile, dass man mit kleineren Zahlen zu rechnen hat, und dass man sich vom Werte der Brüche viel leichter eine richtige Vorstellung machen kann, wenn im Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, als wenn größere Zahlen vorhanden wären.

Das Abkürzen der Brüche geschieht, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Ein Bruch läßt sich nur kürzen, wenn Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Versinnlichung beim Unterrichte benütze der Lehrer getheilte Linien und Theile eines Guldens.

Übungsaufgaben V. Rechenbuch M., S. 33.

§. 44.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

Wir haben bis jetzt Brüche behandelt, deren Zähler und Nenner beliebige ganze Zahlen sind; solche Brüche nennt man gemeine Brüche. Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 . . . . . also 1 mit darauf folgenden Nullen ist, nennt man Decimalbrüche. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{37}{1000}$.

Bei den Decimalbrüchen wird blos der Zähler angeschrieben, und um dieselben von den dabei befindlichen Ganzen zu unterscheiden, werden sie von den Einheiten durch das Decimalzeichen gesondert, durch welches so viele Ziffern als Decimalen abgeschnitten werden, als der Nenner Nullen hat. Z. B.

$$\frac{3}{10} = 0{\cdot}3, \quad \frac{25}{100} = 0{\cdot}25, \quad \frac{135}{1000} = 0{\cdot}135.$$

Umgekehrt ist:

$$\begin{aligned} 35{\cdot}3658 &= 35 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000} \\ &= 35 + \frac{3000}{10000} + \frac{600}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{8}{10000} \\ &= 35 + \frac{3658}{10000} = \frac{353658}{10000}. \end{aligned}$$

Die Schüler wissen bereits, dass ein Bruch eine angezeigte Division ist, daher werden sie sehr leicht auf die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch geführt, wenn man sie die durch den Bruch angezeigte Division ausführen läßt, indem sie wirklich den Zähler durch den Nenner dividieren. Werden hierbei die Reste resolviert, was beim schriftlichen Rechnen durch Anhängung einer Null geschieht, so erhält man der Ordnung nach Zehntel, Hundertel u. s. w.

Z. B. $\frac{7}{8}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden.

$\frac{7}{8} = 7_0 : 8 = 0{\cdot}875.$
60
40

Wir sagen : 8 ist in 7 0 mal enthalten, gibt also 0 Ganze, wir schreiben daher 0 in den Quotienten und setzen da das Decimalzeichen; wir lösen nun die 7 Ganzen in Zehntel auf, 7 Ganze sind 70 Zehntel;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese durch 8 dividiert, gibt 8 Zehntel und es bleiben 6 Zehntel als Rest; 6 Zehntel = 60 Hundertel. Diese durch 8 dividiert, erhält man 7 Hundertel im Quotienten und 4 Hundertel als Rest; 4 Hundertel = 40 Tausendtel durch 8 dividiert, gibt 5 Tausendtel.

Auf dieselbe Art, wie bei den echten Brüchen, verfährt man auch bei den unechten. Z. B. Der unechte Bruch $\frac{9}{8}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden.

$$\frac{9}{8} = 9 : 8 = 1{\cdot}125, \quad \frac{9}{8} = 1{\cdot}125.$$
$$10$$
$$20$$
$$40$$

Die Schüler werden bald die Erfahrung machen, dass bei der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche die Division manchmal endlich, manchmal aber auch unendlich ist, dass also nicht jeder gemeine Bruch genau in einen Decimalbruch verwandelt werden kann. Der Lehrer lasse bei diesen Aufgaben die Nenner der gemeinen Brüche in Primfactoren zerlegen, und dann erst die Aufgabe ausführen; hieraus ersehen die Schüler, dass nur jene gemeinen Brüche genau in Decimalbrüche verwandelt werden können, deren Nenner nur die Primfactoren 2 und 5 enthalten. Daher können die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{19}{32}$, u. s. w. ferner die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{29}{125}$ u. s. w., so wie die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{39}{40}$, $\frac{111}{800}$ u. s. w. genau in Decimalbrüche verwandelt werden.

Lässt man die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ in Decimalbrüche verwandeln, so ersehen die Schüler, dass bei Brüchen, die sich nicht genau in Decimalbrüche verwandeln lassen, bei fortgesetzter Division im Quotienten die nämlichen Ziffern wiederkehren. Bei den ersten zwei Brüchen erscheint immer wieder dieselbe Ziffer, beim dritten wiederholt sich eine ganze Reihe von Ziffern (714285).

$$\frac{1}{3} = 0{\cdot}33\ldots, \quad \frac{2}{3} = 0.66\ldots$$
$$\frac{5}{7} = 0{\cdot}714285|714285$$

Man sagt den Schülern, dass solche Decimalbrüche **periodische Decimalbrüche** heißen. Die Reihe von Ziffern, die beständig wiederkehrt, heißt Periode, dieselbe kann ein- und mehrzifferig sein.

Durch Verwandlung der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{13}{14}$ in Decimalen ersieht man, dass die Periode entweder gleich mit der ersten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{2}{3} = 0{\cdot}66\ldots$, $\frac{5}{6} = 0{\cdot}833\ldots$ oder erst mit einer späteren Decimale beginnt.
$\frac{2}{7} = 0{\cdot}285714$, $\frac{13}{14} = 0{\cdot}9285714$

Erstere nennt man rein periodische und letztere gemischt periodische Decimalbrüche.

Wiederholt sich nur eine Ziffer, so schreibt man diese nur einmal und setzt über dieselbe einen Punkt; bei einer mehrzifferigen Periode setzt man über die erste und letzte Ziffer derselben einen Punkt. Z. B.

$$\tfrac{1}{3} = 0{\cdot}\dot{3},\ \tfrac{13}{14} = 0{\cdot}9\dot{2}8571\dot{4}.$$

Nun sage man auch den Schülern, dass man sich in den meisten Fällen mit 3 oder 4 Decimalstellen begnügt, nur nimmt man die niedrigste noch beibehaltene Decimale um 1 größer an, wenn bei fortgesetzter Division auf sie 5 oder eine höhere Ziffer als 5 folgt. So nimmt man z. B. 0·844 anstatt 0·84362 an.

Bei Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch, hat man zunächst zu sehen, ob der Decimalbruch ein endlicher oder ein periodischer sei.

Ist der Decimalbruch ein endlicher, so braucht man ihn nur mit Angabe der Benennung seiner letzten Decimalstelle (also nach der 3. Leseart, Seite 81) auszusprechen und den ausgesprochenen Decimalbruch in der Form eines gemeinen Bruches anzuschreiben, und wenn eine Abkürzung möglich ist, dieselbe auszuführen. Z. B.

$0{\cdot}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{\cdot}375 = \frac{375}{1000} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$.

Es sei ein rein periodischer Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Wir multiplicieren den Bruch mit 10, 100, 1000 .. je nachdem die Periode 1, 2, 3 .. Ziffern hat, um sie vor das Decimalzeichen zu bringen, ziehen hievon den einfachen Bruch ab, und erhalten so den 9-fachen, 99-fachen, 999-fachen Wert und hieraus durch Division den gesuchten Bruch. Z. B. $0{\cdot}\dot{7}2\dot{9}$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Wir multiplicieren den Bruch mit 1000, um die ganze Periode vor das Decimalzeichen zu bringen, und wir haben:

$$\begin{array}{rl} \text{1000facher Bruch} = & 729{\cdot}\dot{7}2\dot{9} \\ \text{1facher Bruch} = & 0{\cdot}729 \\ \hline \text{bleibt 999facher Bruch} = & 729 \end{array}$$

$$\text{also einfacher Bruch} = \frac{729}{999} = \frac{81}{111} = \frac{27}{37}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus mehreren solchen Beispielen wird ersichtlich:

Ein reinperiodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Periode einmal als Zähler, und als Nenner soviel 9 schreibt, als die Periode Ziffern hat.

Ist der Bruch ein gemischtperiodischer, so multiplicieren wir denselben zuerst mit einer solchen Zahl, dass die der Periode vorangehenden Decimalen und die ganze erste Periode vor das Decimalzeichen kommen, also mit 100, 1000, 10000 . . , je nachdem die Periode und die ihr vorangehenden Decimalen 2, 3, 4 . . . Ziffern enthalten, dann noch mit einer Zahl, dass bloß die der Periode vorangehenden Ziffern vor das Decimalzeichen kommen, also mit 10, 100, 1000 . . . je nachdem der Periode 1, 2, 3 . . . Ziffern vorausgehen, ziehen dann das zweite Product vom ersten ab, wodurch man ein Vielfaches des Decimalbruches erhält, aus welchem sich durch die Division der Bruch selbst berechnen läßt. Z. B. Der Bruch $0{\cdot}3\dot{8}4$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

$$\begin{array}{rl} \text{1000facher Bruch} = & 384{\cdot}84 \\ \text{davon 10facher Bruch} = & 3{\cdot}84 \\ \hline \text{bleibt 990facher Bruch} = & 381 \\ \text{1facher Bruch} = & \frac{381}{990} = \frac{127}{330} \end{array}$$

Aus mehreren Beispielen ersieht man:

Man verwandelt einen gemischtperiodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch, indem man die der Periode vorausgehenden Decimalen und einmal die Periode anschreibt, hiervon die der Periode vorausgehenden Decimalen als ganze Zahl betrachtet subtrahiert, den Rest als Zähler des gemeinen Bruches nimmt, und als Nenner soviele 9 als die Periode und so viele rechts folgenden Nullen schreibt als der Periode Ziffern vorausgehen.

Übungsaufgaben V. Rechenbuch M., S. 34 und 35.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 45.

Addition der Brüche.

Die Schüler wissen, dass man nur Gleichnamiges addieren kann und dass die Summe den Namen der Posten haben muss. Man erinnere hier auch, dass bei einem Bruche der Zähler die eigentliche Zahl, der Nenner aber der Name der Bruchtheile ist. Die gleichnamigen Brüche $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, und $\frac{5}{8}$, können wir ja auch darstellen als 1 Achtel, 3 Achtel, 5 Achtel, und so wie 1 Gulden 3 Gulden und 5 Gulden zusammen 9 Gulden sind, so sind auch 1 Achtel, 3 Achtel und 5 Achtel zusammen 9 Achtel oder $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und unter ihre Summe den Nenner setzt. Wenn die Summe ein unechter Bruch ist, so verwandelt man denselben in eine gemischte Zahl.

Die Schüler sehen auch leicht ein, dass Brüche von ungleichen Nennern zuerst auf gleichen Nenner gebracht werden müssen, um die Addition verrichten zu können. Z. B. Wieviel ist $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$?

Mündlich: Kann man Viertel und Fünftel als solche addieren? Wie müssen die Brüche beschaffen sein, damit man sie addieren kann? Sucht, welchen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner wir den beiden Brüchen geben können. Wieviel Zwanzigstel sind $\frac{1}{4}$? Wieviel $\frac{3}{4}$? Wieviel Zwanzigstel sind $\frac{1}{5}$? Wieviel $\frac{4}{5}$?

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20},\ \frac{3}{4} = \frac{15}{20};\quad \frac{1}{5} = \frac{4}{20},\ \frac{4}{5} = \frac{16}{20};\quad \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}.$$

Schriftlich:

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$

$\frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$

oder:

		20
$\frac{3}{4}$	5	15
$\frac{4}{5}$	4	16
		$31 : 20 = 1\frac{11}{20}$

Die Schüler sehen auch ein, dass man bei der Addition gemischter Zahlen zuerst die Summe der Brüche und dann die Summe der ganzen Zahlen sucht. Z. B. $5\frac{2}{3} + 18\frac{4}{5} + 24\frac{3}{8} + 9\frac{2}{3} = ?$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

		120		
5	$\frac{2}{3}$	40	80	3, 5, 8. Der kl. g. Nenner ist $3 \times 5 \times 8 = 120$.
18	$\frac{4}{5}$	24	96	
24	$\frac{3}{8}$	15	45	
9	$\frac{3}{4}$	30	90	
58	$\frac{71}{120}$		311 : 120	$= 2\frac{71}{120}$
			71	

Man gebe als Aufgaben gemeine Brüche zu addieren, und fordere, dass diese Aufgabe auch in Decimalbrüchen ausgeführt wird, und umgekehrt.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuch M., S. 35 und 36. A. K. S. 36 und 37.

§. 46.

Subtraction der Brüche.

Wenn die Schüler die Addition der Brüche gründlich aufgefasst haben, so macht ihnen auch die Subtraction keine Schwierigkeiten. Der Lehrer beobachte folgenden Stufengang.

1. Es werde ein Bruch von einem gleichnamigen Bruch subtrahiert, z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$. Die Schüler werden hierbei zur Einsicht geführt: Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

2. Eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl, wo die Brüche gleichnamig sind, und der Bruch des Minuends größer ist, als der des Subtrahends, z. B. $28\frac{4}{5} - 17\frac{2}{5} = 11\frac{2}{5}$.

3. Einen Bruch von einer ganzen Zahl, z. B. $8 - \frac{3}{4}$. Hiebei leite man die Schüler an, 1 Ganzes in einen Bruch von dem im Subtrahend gegebenen Nenner aufzulösen.

$8 = 7\frac{4}{4}$ oder

$7\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$

8	4
$\frac{3}{4}$	3
$7\frac{1}{4}$	1

4. Eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl mit gleichnamigen Brüchen, wovon jedoch der Bruch des Subtrahends größer ist als der des Minuends, z. B. $75\frac{1}{4} - 24\frac{3}{4}$.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Im Kopfe: Nimmt von $75\frac{1}{4}$ zuerst 24 weg, so bleiben $51\frac{1}{4}$ oder $50\frac{5}{4}$; hiervon $\frac{3}{4}$ weg, bleiben $50\frac{2}{4}$ oder $50\frac{1}{2}$.

Schriftlich:

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ 75\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 24\frac{3}{4} & 3 \\ \hline 50\frac{1}{2} & \frac{2}{4}=\frac{1}{2}. \end{array}$$

5. Ungleichnamige Brüche; die Schüler begreifen nach dem Vorhergehenden sehr leicht, dass diese gleichnamig gemacht werden müssen. Z. B.

$\frac{7}{8} - \frac{4}{5}$. Hier ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner $5 \times 8 = 40$.

$\frac{1}{8} = \frac{5}{40}$, $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$
$\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$, $\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$
$\frac{3}{40}$

oder:

$$\begin{array}{c|c|c} & 40 & \\ \hline \frac{7}{8} & 5 & 35 \\ \frac{4}{5} & 8 & 32 \\ \hline \frac{3}{40} & & 3 \end{array}$$

6. Gemischte Zahlen von gemischten Zahlen mit ungleichnamigen Brüche. Z. B.

1. $487\frac{11}{12} - 94\frac{7}{8}$.

$$\begin{array}{r|c|c} & 24 & \\ \hline 487\frac{11}{12} & 2 & 22 \\ 94\frac{7}{8} & 3 & 21 \\ \hline 393\frac{1}{24} & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 12, 8 & \\ \hline 3, 4 & 2 \end{array}$$

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist $3 . 4 . 2 = 24$.

2. $2876\frac{11}{30} - 979\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r|c|c} & 30 & \\ \hline 2876\frac{11}{30} & 1 & \begin{array}{r}30\\17\\\hline 47\end{array} \\ 979\frac{5}{6} & 5 & 25 \\ \hline 1896\frac{11}{15} & & \frac{22}{30}=\frac{11}{15} \end{array}$$

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 30.

Übungsaufgaben V. R. M., S. 37—39. A. K. S. 37 u. 38.

§. 47.

Multiplication der Brüche.

Die Schüler wissen bereits, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciert wird. Hier werden Wiederholungsübungen ange-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stellt, bei welchen die Schüler zu Einsicht gelangen, dass die Division des Nenners durch die ganze Zahl sich nicht häufig anwenden lässt.

Indem der Lehrer mehrere Brüche mit ihrem Nenner multiplicieren lässt, kommen die Schüler auch darauf, dass ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert, den Zähler zum Producte gibt.

Z. B. $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} = 3$. Oder: $\frac{7}{8} \times 8 = \frac{7}{1} = 7$.

Nun lasse der Lehrer eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplicieren. Er leite sie an, dass sie beim Kopfrechnen zuerst die ganze Zahl, und dann erst den Bruch der gemischten Zahl multiplicieren, und die bei letzterer Multiplication sich ergebenden Ganzen zum früheren Producte addieren. Z. B. Wieviel ist $5\frac{2}{3} \times 7$? 7 mal 5 ist 35. 7 mal $\frac{2}{3}$ ist $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; $35 + 4\frac{2}{3} = 39\frac{2}{3}$.

Beim Zifferrechnen multipliciert man zuerst den Bruch und dann die Ganzen oder man verwandelt die gemischte Zahl in einen unechten Bruch, welcher sodann mit der ganzen Zahl multipliciert wird. Z. B.

$5\frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3} + 35 = 4\frac{2}{3} + 35 = 39\frac{2}{3}$, oder $5\frac{2}{3} \times 7 = \frac{17}{3} \times 7 = \frac{119}{3} = 39\frac{2}{3}$.

Bei der Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruche könnte man zeigen, dass man dasselbe Product erhält, wenn man die Factoren verwechselt, z. B. $\frac{3}{4} \times 4 = 4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$. Es ist jedoch nothwendig, diesen Fall näher zu betrachten.

Zu diesem Behufe wollen wir eine Aufgabe mit benannten Zahlen ins Auge fassen. Z. B. Was kostet $\frac{1}{2}$ Kilogramm, wenn 1 Kilogramm 36 Kreuzer kostet?

Was müsste man wohl thun, wenn man wissen wollte, was 4 Kilogramme kosten? Wir müssten 36 Kreuzer mit 4 multiplicieren? Womit muss man daher 36 kr. multiplicieren um zu erfahren, was $\frac{1}{2}$ Kilogramm kostet? Der wievielte Theil ist $\frac{1}{2}$ Kilogramm von 1 Kilogramm? Den wievielten Theil von 36 kr. wird daher $\frac{1}{2}$ Kg. kosten? Wie findet man aber die Hälfte von 36 kr.? Daher ist $36 \times \frac{1}{2} = 36 : 2 = 18$ kr. Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$ multiplicieren ist daher soviel, als diese Zahl durch 2 dividieren.

Auf ähnliche Weise findet man, dass eine Zahl mit $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots$ multiplicieren soviel bedeutet, als sie durch 3, 4, 5... dividieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei Lösung der Aufgabe: Was kostet $\frac{2}{3}$ Meter, wenn 1 Meter 48 kr kostet? wird man schließen? Wenn 1 Meter 48 kr. kostet, so kosten $\frac{2}{3}$ Meter $\frac{2}{3}$ mal 48 kr., d. i. man muss die 48 kr. $\frac{2}{3}$mal hingeben, und die Aufgabe fordert, die 48 kr. mit $\frac{2}{3}$ zu multiplicieren, also $48 \times \frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$ Meter kostet den 3. Theil von 48 kr. Die $\frac{2}{3}$ Meter kosten 2 mal $\frac{48}{3}$ kr. $= \frac{48}{3}$ kr. $\times$ 2; daher ist 48 kr. $\times \frac{2}{3} = \frac{48}{3}$ kr. $\times 2 = 16 \times 2 = 32$ kr. Eine Zahl mit $\frac{2}{3}$ multiplicieren, heißt daher den 3. Theil der Zahl 2 mal nehmen.

Aus diesem und mehreren ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler:

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, wenn man sie durch den Nenner des Bruches dividiert und mit dem Zähler multipliciert. Es wird daher eine ganze Zahl mit einem Bruche ebenso multipliciert, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl.

Eine Zahl mit 1 multipliciert, gibt sich selbst zum Producte; ist der Multiplicator größer oder kleiner als 1, so muss auch das Product größer oder kleiner werden als der Multiplicand. Ein echter Bruch ist aber kleiner als 1, folglich muss das Product, welches man erhält, wenn man eine Zahl mit einem echten Bruche multipliciert, kleiner werden als diese Zahl. Auch hierauf mögen die Schüler aufmerksam gemacht werden.

Um die Schüler auf die Multiplication eines Bruches mit einem Bruche zu führen, gebe man eine Aufgabe, z. B. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$.

Wie würden wir den Bruch $\frac{7}{8}$ mit 3 multiplicieren? Was erhalten wir hiedurch? Wann wäre $\frac{21}{8}$ das wahre Product? Womit haben wir aber nach unserer Aufgabe $\frac{7}{8}$ zu multiplicieren? Wievielmal so klein ist $\frac{3}{5}$ als 3? Wievielmal so klein wird also das Product werden? Den wievielten Theil von $\frac{21}{8}$ haben wir daher zu nehmen? Wie findet man den 5. Theil einer Zahl? Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert? Das ganze Verfahren hiebei schriftlich dargestellt gibt:

$$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{8} : 5 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$$

Oder: $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$ heißt, es soll von $\frac{7}{8}$ der 5. Theil 3 mal genommen werden. Wir wollen zuerst den 5. Theil von $\frac{7}{8}$ suchen. Der 5. Theil von $\frac{1}{8}$ ist $\frac{1}{40}$; der 5. Theil von $\frac{7}{8}$ ist daher $\frac{7}{40}$; $\frac{7}{40}$ 3 mal genommen ist $\frac{21}{40}$. Lassen wir dieses Product mit den beiden gegebenen Brüchen vergleichen, so ersehen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Schüler daraus, wie bei der ersten Entwickelung, dass das Product der Zähler, als Zähler und das Product der Nenner beider Brüche als Nenner des Bruches, den man als Product gefunden hat, erscheint.

$$\text{Also: } \frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{8 \times 5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}.$$

Ein Bruch wird daher mit einem Bruche multipliciert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert, und das Product der Zähler als Zähler und das Product der Nenner als Nenner des gesuchten Productes annimmt.

Um eine gemischte Zahl mit einem Bruche oder mit einer gemischten Zahl zu multiplicieren, verwandle man die gemischte Zahl zuerst in einen unechten Bruch und verrichte dann die Multiplication,

$$\text{Z. B. } 4\tfrac{3}{4} \times \tfrac{5}{6} = \tfrac{19}{4} \times \tfrac{5}{6} = \tfrac{95}{24} = 3\tfrac{23}{24},$$

$$6\tfrac{3}{5} \times 7\tfrac{1}{3} = \tfrac{33}{5} \times \tfrac{22}{3} = \tfrac{726}{15} = 48\tfrac{2}{5}.$$

Wenn sich Zähler und Nenner der beiden Brüche gegenseitig abkürzen lassen, so ist es vortheilhaft, das Product der Zähler und das der Nenner bloß anzuzeigen, abzukürzen und dann erst die Multiplication zu verrichten.

$$\text{Z. B. } \frac{4}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{3}{4}; \text{ oder } \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{3}{4}.$$

$$7\tfrac{4}{5} \times 3\tfrac{1}{3} = \frac{39}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{\overset{13}{\cancel{39}} \times \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} = 26; \text{ oder:}$$

$$7\tfrac{4}{5} \times 3\tfrac{1}{3} = \frac{\overset{13}{\cancel{39}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 26.$$

Sollen mehrere Brüche oder gemischte Zahlen miteinander multipliciert werden, verwandle man letztere in unechte Brüche, setze die Zähler als Factoren über und alle Nenner als Factoren unter den Bruchstrich, kürze nach Möglichkeit ab, und multipliciere sodann.

Z. B. $5\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times 6\frac{1}{8} \times 1\frac{3}{5} \times \frac{9}{10} \times 3\frac{1}{3}$.

$$\frac{43 \times \overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{7}{\cancel{49}} \times \overset{1}{\cancel{8}} \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{4}{\cancel{8}} \times \underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{1}{\cancel{8}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{10}} \times \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{43 \times 7 \times 3}{4 \times 5} = \frac{903}{20} = 45\tfrac{3}{20}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder kürzer: $\frac{43}{\cancel{8}^{4}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{7} \times \frac{\cancel{49}^{7}}{\cancel{8}_{1}} \times \frac{\cancel{8}^{1}}{5} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{1}} \times \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{3}_{1}}$

$$= \frac{43 \times 7 \times 3}{4 \times 5} = \frac{903}{20} = 45\tfrac{3}{20}.$$

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 39—44. A. K. S. 39 bis 42.

§. 48.

Division der Brüche.

Die Schüler wissen, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird. Aus mehreren zur Wiederholung gegebenen Beispielen ersehen die Schüler, dass die Division des Zählers durch die ganze Zahl nicht häufig anzuwenden ist. Der Lehrer nehme hierauf die Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl vor, und leite die Schüler an, dass sie entweder die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, und alsdann die Division verrichten, oder dass sie zuerst die Ganzen und dann den Bruch der gemischten Zahl dividieren, den bei der Division der Ganzen sich etwa ergebenden Rest mit dem angehängten Bruche als gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, und dann durch die ganze Zahl dividieren. Z. B. $56\frac{3}{4} : 15$.

$$56\tfrac{3}{4} : 15 = \frac{227}{4} : 15 = \frac{227}{60} = 3\tfrac{47}{60};$$

$$\text{oder: } 56\tfrac{3}{4} : 15 = 3\tfrac{47}{60}$$

$$\underline{11\tfrac{3}{4}}$$

$$\frac{47}{4} : 15 = \frac{47}{60}$$

Um die Schüler zur Einsicht zu bringen, wie eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert wird, gibt es verschiedene Wege. Es soll z. B. 8 durch $\frac{2}{5}$ dividiert werden. a) Man leite die Schüler an, die Ganzen auf die Benennung des Nenners zu bringen, also hier 8 Ganze in Fünftel aufzulösen. Wieviele Fünftel sind 8 Ganze? Wie oft sind $\frac{2}{5}$ in $\frac{40}{5}$ enthalten? $8 : \frac{2}{5} = \frac{40}{5} : \frac{2}{5} = 40 : 2 = 20$,

b) $\frac{1}{5}$ ist in 1 5mal, und in 8 40mal enthalten; $\frac{2}{5}$ ist aber eine 2mal so große Zahl, ist also nur $\frac{1}{2}$ mal soft in $\frac{40}{5}$ enthalten, als $\frac{1}{5}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also nur 20 mal. $8 : \frac{1}{5} = \frac{40}{5} : \frac{1}{5} = 40 : 1 = 40$ $\frac{40}{5} : \frac{2}{5}$ $= 40 : 2 = 20$.

c) $8 : 2 = 4$; es soll aber nicht durch 2, sondern durch $\frac{2}{5}$ dividiert werden; $\frac{2}{5}$ ist aber 5 mal so klein als 2, daher ist auch $\frac{2}{5}$ in 8 5 mal so oft enthalten als 2, also $4 \times 5 = 20$ mal enthalten.

$$8 : 2 = 4$$
$$4 \times 5 = 20.$$

Wir haben im Vorstehenden die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch im Sinne des Messens behandelt; nicht so leicht ist die Auffassung im Sinne des Theilens. Zur Erleichterung wollen wir eine angewandte Aufgabe benützen. Z. B. $\frac{1}{4}$ Liter kostet 20 Kreuzer; was kostet 1 Liter? Wenn 4 Liter 20 kr. kosten würden, so würde 1 Liter den 4. Theil von 20 kr. kosten, daher müsste man 20 kr. durch 4 dividieren; deshalb wird man auch, um zu erfahren, was ein Liter kostet, wenn $\frac{1}{4}$ Liter 20 kr. kostet, auch 20 kr. durch $\frac{1}{4}$ dividieren. 1 Liter kostet also 20 kr.: $\frac{1}{4}$.

Um die Bedeutung von 20 kr.: $\frac{1}{4}$ zu erfahren, lösen wir die Aufgabe, indem wir schließen: 1 Liter kostet 4 mal soviel als $\frac{1}{4}$ Liter; man muss also 20 mit 4 multiplicieren; daher ist

$$20 \text{ kr.} : \tfrac{1}{4} = 20 \text{ kr.} \times 4 = 80 \text{ kr.}$$

Aus mehreren ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler, dass eine Zahl durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. dividieren, so viel heißt, als sie mit 2, 3, 4... multiplicieren.

Nun geben wir die Aufgabe: Was kostet 1 Meter, wenn $\frac{7}{8}$ Meter 35 kr. kosten?

Nach dem Vorigen muss man 35 kr. durch $\frac{7}{8}$ dividieren. 1 Meter kostet daher 35 kr.: $\frac{7}{8}$.

$\frac{1}{8}$ Meter kostet den 7. Theil von 35 kr. $= \frac{35}{7}$ kr. 1 Meter kostet 8 mal so viel, als $\frac{1}{8}$ Meter, daher $\frac{35}{7}$ kr. $\times 8$ $= 5$ kr. $\times 8 = 40$ kr.

Werden mehrere Beispiele nach der angegebenen Weisen behandelt, so ersehen die Schüler, dass man hierbei den Dividend durch den Zähler des Divisors dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert.

Mit einem Bruche multipliciert man aber, wenn man den Dividend durch den Nenner dividiert und den Quotienten mit dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zähler multipliciert. Kehrt man daher bei der Division den Divisor um, d. h. macht man den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler und multipliciert den Dividend mit dem umgekehrten Divisor, so hat man ja auch den Dividend durch den ursprünglichen Zähler des Divisor dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert.

Eine Zahl wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliciert. Z. B.

$$8 : \tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{3} \times 5 \text{ oder } 8 \times \tfrac{5}{3} = \tfrac{40}{3} = 13\tfrac{1}{3}.$$

Nun lehre man die Schüler einen Bruch durch einen Bruch dividieren. Z. B. $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$.

Nach der eben angegebenen Regel ist

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5 \times 7} \times 8 = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}, \text{ also } \frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{35}.$$

Wir wollen nun noch einen andern Entwicklungsgang einschlagen: Wäre der Bruch $\frac{3}{5}$ durch 7 zu dividieren, so erhielten wir

$$\frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5 \times 7} = \frac{3}{35}.$$

Der Divisor 7 ist aber 8 mal so groß als $\frac{7}{8}$. Wenn man denselben Dividend durch eine 8 mal so große Zahl dividiert, so wird der Quotient 8 mal so klein; $\frac{3}{35}$ ist also 8 mal so klein als der verlangte Quotient für den Divisor $\frac{7}{8}$, daher müssen wir $\frac{3}{35}$ noch mit 8 multiplicieren. $\frac{3}{35} \times 8 = \frac{3}{5 \times 7} \times 8 = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$.

$\frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$, daher auch $\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{35}$.

Ein Bruch wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man den Dividend mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.

Dafs bei der Division durch einen echten Bruch eine größere Zahl erscheint, als der Dividend, obgleich die Division eine Verminderungsrechnung ist, kann man sich leicht erklären, wenn man bedenkt, dafs der Quotient umso größer wird, je kleiner der Divisor ist. Eine Zahl durch 1 dividiert, gibt sich selbst zum Quotienten; da nun ein echter Bruch kleiner ist als 1, so mufs ja der Quotient größer werden, als der Dividend.

Gemischte Zahlen werden, bevor man die Division verrichtet, in unechte Brüche verwandelt. Z. B.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$5\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{7} = \tfrac{23}{4} : \tfrac{2}{7} = \tfrac{23}{4} \times \tfrac{7}{2} = \tfrac{161}{8} = 161 : 8 = 20\tfrac{1}{8}.$$

$$\tfrac{5}{6} : 8\tfrac{4}{9} = \frac{5}{6} : \frac{76}{9} = \frac{5}{\cancel{6}_{2}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{76} = \frac{15}{152}$$

$$6\tfrac{2}{3} : 4\tfrac{10}{11} = \frac{20}{3} : \frac{54}{11} = \frac{\cancel{20}^{10}}{3} \times \frac{11}{\cancel{54}_{27}} = \frac{110}{81} = 110 : 81 = 1\tfrac{29}{81}.$$

Übungsaufgaben V. R. M. S. 44—48. A. K. S. 42 bis 45. Wiederholungsaufgaben V. R. M. S. 49—51. A. K. S. 45 bis 50 und VI. R. S. 1 bis 20.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

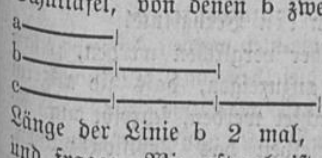
Vierter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

I. Verhältnisse.

§. 49.

Um den Schülern einen deutlichen Begriff von einem Verhältnisse beizubringen, lasse der Lehrer Vergleichungen zwischen benannten und unbenannten Zahlen, insbesondere mit Linien anstellen. Z. B.: Karl hat 12 Kreuzer und Franz 3 Kreuzer; wievielmal soviel Kreuzer hat Karl als Franz? [Um wieviele Kreuzer hat Karl mehr als Franz?]*). Ein Stück Zucker wiegt 2 Kilogramm, ein anderes 6 Kilogramm; wievielmal soviel wiegt das zweite Stück als das erste? (Um wieviel Kilogramm wiegt das zweite mehr als das erste?) Max ist 10 Jahre alt, sein Vater 40 Jahre; wievielmal so alt ist der Vater als Max? (Um wieviele Jahre ist Max jünger als der Vater?) Wievielmal sogroß ist die Zahl 15 als 3? Der Lehrer zeichne 3 gerade Linien an die Schultafel, von denen b zweimal, und c dreimal solang ist als a.



Er messe mittelst einer Schnur die Linie a und lasse die Schüler beachten, dass die Länge dieser Linie in der Länge der Linie b 2 mal, in jener von c 3mal enthalten ist, und frage: Wie oftmal ist a in b, in c enthalten? Wievielmal solang ist c als b, als a? (Um wieviel Theile hat b, und um wieviel Theile c mehr als a?) Die Schüler bemerken, dass sie in allen angegebenen Beispielen zwei Größen oder zwei Zahlen miteinander verglichen, d. i. untersucht haben, wievielmal sogroß

*) Die eingeschalteten Fragen können in der Volksschule wegbleiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die eine Größe oder Zahl als die andere ist, oder um wieviel Theile die eine mehr hat als die andere.

Eine Vergleichung zweier Zahlen (oder Größen), durch welche man erfahren will, wievielmal so groß die eine als die andere ist, oder um wieviele Einheiten die eine größer ist als die andere, bei welcher man also untersucht, wie sich zwei Zahlen zu einander verhalten, nennt man ein Verhältnis.

Die Schüler begreifen auch leicht, dass man nicht angeben kann, um wieviel 6 Meter mehr als 3 Kilogramm oder 5 fl. sind, oder wie oft 3 Kilogramm in 6 Meter oder in 6 fl. enthalten sind, u. s. w.; dass man also nur Gleichartiges in Vergleichung bringen kann; es können daher nur unbenannte Zahlen mit unbenannten, und von den benannten nur gleichnamige Zahlen in ein Verhältnis gebracht werden.

Wird bei einem Verhältnisse untersucht, wievielmal so groß die eine Zahl als die andere ist, so nennt man das Verhältnis ein geometrisches; wird hingegen die Vergleichung angestellt, um zu erfahren, um wieviel Einheiten die eine Zahl mehr hat als die andere, so wird das Verhältnis ein arithmetisches genannt. In der Volksschule werden nur die geometrischen Verhältnisse behandelt, daher kann in dieser die Erklärung der Begriffe „geometrisches und arithmetisches Verhältnis" entfallen; wir werden in der Folge unter dem Worte „Verhältnis" immer das geometrische verstehen, und sagen:

Die Vergleichung zweier Zahlen oder zweier gleichartiger Größen, um zu sehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, nennt man ein Verhältnis.

Die zwei Zahlen, welche miteinander verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses. Um anzuzeigen, dass sie als im geometrischen Verhältnisse stehend betrachtet werden, schreibt man sie nebeneinander und setzt zwischen dieselben das Divisionszeichen, weil man ja durch die Division erfährt, wievielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist. Z. B.: 6 : 2, und man liest: 6 verhält sich zu 2. Das Verhältnis wird also als angezeigter Quotient dargestellt.

Das zur Linken stehende Glied, der Dividend, heißt das Vorderglied oder Vordersatz, das zur Rechten stehende Glied,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Divisor, heißt Hinterglied oder Nachsatz. Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal so groß das Vorderglied ist als das Hinterglied, heißt der Exponent des Verhältnisses.

Wir sehen hieraus, dass die Division im Sinne des Messens auf den Begriff des Verhältnisses führt, ebenso, wie sie als Theilung zur Entstehung der Brüche Anlass gibt.

Da nun die Schüler wissen, dass der Exponent eines Verhältnisses der Quotient ist, den man erhält, wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied dividiert, so sind sie auch im Stande, aus dem Exponenten und einem Gliede das andere zu finden.

Das Vorderglied (Dividend) ist gleich dem Hinterglied (Divisor) multipliciert mit dem Exponenten.

Das Hinterglied ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

Ist das Hinterglied eines Verhältnisses größer als das Vorderglied, so heißt das Verhältnis ein steigendes, z. B. 3 : 5; im ntgegengesetzten Falle ein fallendes, z. B. 5 : 2.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 65. A. K. VI. R. S. 22 bis 24.

Die Verhältnisse: 12 : 3 und 8 : 2 haben gleiche Exponenten; Verhältnisse, welche gleiche Exponenten haben, heißen gleiche Verhältnisse, d. h. sie haben gleichen Wert.

Man kann daher ein Verhältnis durch größere oder ekleinere Zahlen ausdrücken; der Wert desselben bleibt ungeändert, so lange sich der Exponent nicht ändert.

Der Lehrer lasse beide Glieder eines Verhältnisses, z. B.: 12 : 3 mit 2, 3, 5, 10 multiplicieren und den Exponenten aller Verhältnisse angeben; hierauf lasse er beide Glieder eines Verhältnisses z. B. 60 : 40 durch 2, 4, 5, 10 dividieren und ebenfalls den Exponenten der hierdurch erhaltenen Verhältnisse suchen.

Hieraus ersehen die Schüler:

1. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert.

2. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied durch dieselbe Zahl dividiert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf den ersten Satz uns stützend, können wir ein Verhältnis, in welchem Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen ausdrücken, indem wir beide Glieder mit dem zu entfernenden Nenner multiplicieren. Z. B.: das Verhältnis $\frac{2}{3} : 5$ soll durch ganze Zahlen dargestellt werden. Beide Glieder mit dem Nenner 3 multipliciert, gibt das Verhältnis 2 : 15, dessen Exponent $\frac{2}{15}$, so, wie im gegebenen Verhältnisse ist.

Aus dem Verhältnisse $12 : 2\frac{1}{5}$ erhalten wir 60 : 11.

Durch Anwendung des zweiten Satzes können wir ein Verhältnis, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abkürzen, z. B.: statt des Verhältnisses 18 : 72 erhalten wir, indem wir beide Glieder durch 18 dividieren, das einfachere Verhältnis 1 : 4.

Das Verhältnis $3\frac{3}{4} : 8\frac{5}{8}$ soll auf die einfachste Form gebracht werden.

$3\frac{3}{4} : 8\frac{5}{8}$	Wir verwandeln die gemischten Zahlen in
$\frac{15}{4} : \frac{69}{8}$	unechte Brüche; bringen beide Brüche auf den
30 : 69	gemeinschaftlichen Nenner 8, und dividieren beide
10 : 23	Glieder durch 3.

Übungsaufgaben im V. R. M., S. 66, b.

Gulden und Kreuzer sind zwar gleichartige, aber nicht gleichnamige Größen. Es verhalten sich daher 5 Gulden zu 20 Kreuzern nicht wie 5 zu 20. Wollen wir eine Vergleichung anstellen, so müssen wir zuerst die 20 Kreuzer auf die Benennung Gulden bringen oder die Gulden in Kreuzer umwandeln, und wir erhalten $\frac{1}{5}$ fl. : 5 fl. d. i. 1 : 25; oder

20 kr. : 500 kr.
1 : 25

Mehrnamige Zahlen müssen auf eine Benennung gebracht werden.

Aufgaben im V. R. M., S. 66, b.

Nun mache der Lehrer von den Verhältnissen viele Anwendungen. Z. B.: Ein viereckiger Tisch ist 2 m lang und 1 m breit; wie verhält sich die Breite zur Länge?

Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute 540 m und die andere 560 m zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Franz und Karl haben denselben Weg zur Schule. Franz brauchte, um diesen Weg zu machen, 25 Minuten, Karl 30 Minuten; wie verhält sich die Geschwindigkeit Franzens zu jener Karls?

Es wird hier ein näheres Eingehen nöthig sein. Der Lehrer macht die Schüler aufmerksam, dass Franz, der den nämlichen Weg in 25 Minuten zurücklegt, schneller gehen, also eine größere Geschwindigkeit haben muss, als Karl, der hiezu die längere Zeit von 30 Minuten braucht. Wenn nun die Geschwindigkeit Franzens größer ist, als die Karls, so kann sich die erstere zur zweiten nicht wie 25 : 30 verhalten.

Den wievielten Theil des Weges legt Franz in 1 Minute zurück? Den wievielten Theil Karl? Da nun Franz in einer Minute $\frac{1}{25}$, und Karl $\frac{1}{30}$ des nämlichen Weges zurücklegt, so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie $\frac{1}{25} : \frac{1}{30}$, d. i. wie 30 : 25 oder abgekürzt, wie 6 : 5.

Übungsbeispiele V. R. M. S. 67, c und d. A. K. IV. R. S. 24 bis 26.

Der Lehrer lasse mehrere Verhältnisse untereinander schreiben, das Product aller Vorderglieder, sowie aller Hinterglieder und aller Exponenten suchen. Z. B.

Einfache Verhältnisse	3 : 2	Exponent	$\frac{3}{2}$
	5 : 8	"	$\frac{5}{8}$
	7 : 6	"	$\frac{7}{6}$
Zusammengesetztes Verhältnis	$3 \times 5 \times 7 : 2 \times 8 \times 6$	"	$\frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 8 \times 6}$
oder	35 : 32	"	$\frac{35}{32}$

Ein Verhältnis, dessen Vorderglied das Product aus den Vordergliedern mehrerer einfachen Verhältnisse und dessen Hinterglied das Product aus den Hintergliedern derselben Verhältnisse ist, heißt ein zusammengesetztes Verhältnis.

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Anwendung. Von zwei Rechtecken ist das eine 18 m. lang und 12 m. breit, das andere 20 m. lang und 6 m. breit; wie verhalten sich die Flächen der beiden Rechtecke?

Verhältnis der Längen	18 : 20
" " Breiten	12 : 6
" " Flächen	$18 \times 12 : 20 \times 6$
oder	9 : 5 .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Proportionen.

§. 50.

Der Lehrer gebe irgend ein Verhältnis an, lasse die Schüler andere diesem gleiche Verhältnisse auffinden, und je zwei Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbinden. Dann sage er:

Wenn zwei gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbunden werden, so entsteht eine Proportion. Z. B. $6 : 3 = 4 : 2$. Diese Proportion wird gelesen: 6 verhält sich zu 3, wie sich 4 zu 2 verhält.

Eine Proportion hat also 4 Glieder; das 1. und 4. Glied (6 und 2) nennt man die beiden äußeren, das 2. und 3. Glied (3 und 4) die beiden inneren Glieder.

Eine Proportion, in welcher alle Glieder unbenannte Zahlen sind, heißt eine Zahlenproportion.

Die Glieder einer Proportion können auch benannte Zahlen sein, jedoch müssen die Glieder eines jeden Verhältnisses gleiche Benennung haben. Z. B. 20 Meter : 5 Meter = 16 fl. : 4 fl.

In der Proportion : $16 : 8 = 8 : 4$ sind die beiden inneren Glieder einander gleich; eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder einander gleich sind, wird eine stetige Proportion und jedes der beiden inneren Glieder die mittlere geometrisch Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. 8 ist also die mittlere stetige Proportionale zwischen 16 und 4. Der Lehrer lasse eine beliebige Proportion an die Tafel schreiben, z. B. $20 : 4 = 15 : 3$. Wie heißt hier der Exponent? Wie werden wir das Vorderglied des ersten Verhältnisses finden, wenn nur das Hinterglied und Exponent bekannt wären? $20 = 4 \times 5$; ebenso lasse man suchen $15 = 3 \times 5$.

Setzet nun in unserer Proportion statt der beiden Vorderglieder die für dieselben aufgefundenen Factoren. Hieraus ersehen die Schüler,

$4 \times 5 : 4 = 3 \times 5 : 3$ dass sowohl die äußeren als die inneren Glieder miteinander multipliciert, dieselben Factoren 4, 5 und 3 enthalten, also auch dasselbe Product geben.

Zu demselben Resultate kommt man auch, wenn man in einer Proportion edes Verhältnis durch dessen kleineres Glied abkürzt.

$$20 : 4 = 15 : 3$$
$$5 : 1 = 5 : 1$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Wir haben also für die Richtigkeit einer Proportion zwei Kennzeichen: 1. Die Gleichheit der Verhältnisse, d. i. die Gleichheit der Exponenten und 2. die Gleichheit der Producte aus den beiden äußeren und aus den beiden inneren Gliedern.

Eine Proportion bleibt daher so lange richtig, als das Product der äußeren Glieder dem Producte der beiden inneren Glieder gleich ist.

Hieraus folgt:

1. Aus einer Proportion, z. B. $6 : 3 = 4 : 2$ lassen sich 7 weitere Proportionen ableiten:

a) Wenn man die beiden inneren Glieder verwechselt.

$$6 : 4 = 3 : 2$$

b) Durch Vertauschung der äußeren Glieder.

$$2 : 3 = 4 : 6$$

c) Durch gleichzeitige Verwechslung sowohl der inneren als auch der äußeren Glieder.

$$2 : 4 = 3 : 6$$

d) Wenn man die inneren Glieder zu den äußern und die äußern zu den inneren Gliedern macht.

$$3 : 6 = 2 : 4$$

e) Durch Wiederholung der schon oben angegebenen Verwechslungen, an der letzten Proportion $3 : 6 = 2 : 4$ ausgeführt.

$$3 : 2 = 6 : 4$$
$$4 : 6 = 2 : 3$$
$$4 : 2 = 6 : 3$$

Der bloße Anblick dieser Proportionen zeigt ihre Richtigkeit.

2. Man kann in einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied mit einer beliebigen Zahl multiplicieren, und die daraus erhaltene Proportion bleibt richtig. Z. B. Aus:

$3 : 2 = 6 : 4$ folgt auch:

$3 \times 3 : 2 \times 3 = 6 : 4$ oder $9 : 6 = 6 : 4$
$3 \times 3 : 2 = 6 \times 3 : 4$ „ $9 : 2 = 18 : 4$
$3 : 2 \times 3 = 6 : 4 \times 3$ „ $3 : 6 = 6 : 12$
$3 : 2 = 6 \times 3 : 4 \times 3$ „ $3 : 2 = 18 : 12$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mittelst dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen, wenn man den Nenner eines äußeren Gliedes als Factor in ein inneres, und den Nenner eines inneren Gliedes als Factor in ein äußeres überträgt. Z. B.

$$8 : 13\tfrac{1}{3} = 3 : 5 \qquad \tfrac{40}{3} : 8 = 5 : 3$$
$$8 : \tfrac{40}{3} = 3 : 5 \qquad 40 : 8 \times 3 = 5 : 3$$
$$8 : 40 = 3 : 5 \times 3 \qquad 40 : 24 = 5 : 3$$
$$8 : 40 = 3 : 15$$

oder oder

$$8 \times 3 : 40 = 3 : 5 \qquad 40 : 8 = 5 \times 3 : 3$$
$$24 : 40 = 3 : 5 \qquad 40 : 8 = 15 : 3$$

3. In jeder Proportion kann man ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl dividieren, ohne dass die Proportion aufhört, richtig zu sein. Z. B.

Aus $15 : 12 = 30 : 24$ folgt:

$$(15 : 3) : (12 : 3) = 30 : 24 \qquad \text{oder } 5 : 4 = 30 : 24$$
$$(15 : 3) : 12 = (30 : 3) : 24 \qquad \text{„ } 5 : 12 = 10 : 24$$
$$15 : (12 : 3) = 30 : (24 : 3) \qquad \text{„ } 15 : 4 = 30 : 8$$
$$15 : 12 = (30 : 3) : (24 : 3) \qquad \text{„ } 15 : 12 = 10 : 8$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Proportion durch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn in derselben ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben. Z. B.

Aus $x : 8 = 6 : 24$ erhält man $x : 1 = 2 : 1$
„ $9 : x = 80 : 16$ „ „ $9 : x = 5 : 1$
„ $8 : 20 = 7 : x$ „ „ $2 : 5 = 7 : x$

4. Wenn man von zwei oder mehreren Proportionen die ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multipliciert, so geben die Producte in derselben Ordnung wieder eine Proportion. Z. B.

$$3 : 4 = 6 : 8$$
$$5 : 8 = 15 : 24$$
$$7 : 9 = 28 : 36$$
$$3 \times 5 \times 7 : 4 \times 8 \times 9 = 6 \times 15 \times 28 : 8 \times 24 \times 36$$
$$105 : 288 = 2520 : 6912$$

Eine durch Multiplication der gleichvielten Glieder mehrerer Proportionen entstandene Proportion nennt man eine zusammengesetzte Proportion.

5. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hinterglieder.

Aus $16 : 4 = 12 : 3$ folgt:

$(16 + 12) : (4 + 3) = 16 : 4$ und $12 : 3$

$(16 - 12) : (4 - 3) = 16 : 4$ und $12 : 3$

6. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Differenz, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.*)

Aus $16 : 4 = 12 : 3$ folgt:

$(16 + 4) : (16 - 4) = (12 + 3) : (12 - 3)$

oder $20 : 12 = 15 : 9$

Wenn drei Glieder einer Proportion bekannt sind, so lässt sich jedesmal das noch unbekannte Glied finden, d. h. die Proportion auflösen. Das unbekannte Glied bezeichnet man gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z. Es sei z. B. die Proportion $12 : 4 = x : 5$ aufzulösen. Der Exponent des ersten Verhältnisses ist 3, folglich auch der Exponent des zweiten Verhältnisses, daher ist das Vorderglied desselben $x = 5 \times 3 = 15$ und man hat die Proportion $12 : 4 = 15 : 5$.

Um eine Proportion aufzulösen, sucht man aus dem bekannten Verhältnisse den Exponenten und mittelst desselben das unbekannte Glied des andern Verhältnisses.

Man lasse eine Proportion, z. B. $15 : 3 = 10 : x$ an die Tafel schreiben, und frage:

Welches Product geben die beiden inneren Glieder? Welches Product müssen auch die beiden äußeren geben? Da uns von dem Producte 30 ein Factor bekannt, wie finden wir den anderen? Wie groß ist also

*) Von den Sätzen 1, 5 und 6 kann in der Volksschule Umgang genommen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das äußere Glied x? $x = \frac{3 \times 10}{15} = 2$; die Proportion ist also 15 : 3 = 10 : 2. Die Schüler ersehen:

Man findet ein äußeres Glied der Proportion, indem man die beiden inneren Glieder miteinander multipliciert und das Product durch das bekannte äußere Glied dividiert.

Um aus der Proportion 15 : x = 10 : 2 das innere Glied x zu finden, frage man nach dem Producte der beiden äußeren Glieder, erinnere die Schüler, dass dieses auch das Product der beiden inneren Glieder ist, dass sie von diesem Producte schon einen Factor, nämlich 10 wissen, und daher den anderen Factor finden, indem sie das Product durch den bekannten Factor, das innere Glied 10 dividieren. Also $x = \frac{15 \times 2}{10} = 3$.

Man findet ein inneres Glied, indem man die beiden äußeren Glieder miteinander multipliciert und das Product durch das bekannte innere Glied dividiert.

Übungsaufgaben V. R. M. S. 68 und 69. A. K. VI. R. S. 27 bis 28.

Die bisher besprochenen Proportionen heißen geometrische Proportionen. Durch Gleichstellung zweier arithmetischer Verhältnisse erhält man eine arithmetische Proportion. Diese hat jedoch für die Volksschule fast nur als stetige Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder einander gleich sind, ein Interesse. Z. B. $8 \div 5 = 5 \div 2$. Das gleiche innere Glied (5) heißt das arithmetische Mittel zwischen 8 und 2.

In einer arithmetischen Proportion ist aber die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder, also $8 + 2 = 5 + 5$. Ist das innere Glied unbekannt, wie in $8 \div x = x \div 2$, so ist $8 + 2 = 2x$, und $x = \frac{8 + 2}{2} = 5$.

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen oder Größen findet man, wenn man ihre Summe durch 2 dividiert.

III. Anwendung der Proportionen.

§. 51.

Die Schüler begreifen leicht, dass z. B. 4 Meter Tuch 20 fl. kosten, wenn 2 Meter derselben Gattung Tuch 10 fl. kosten, und dass hier 4 benannte Zahlen als: 4 Meter und 2 Meter 20 fl. und 10 fl. in einem gewissen Zusammenhange zueinander stehen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Es gibt im Leben und in der Natur Größen der mannigfaltigsten Art, die miteinander in so innigem Zusammenhange stehen, dass, wenn die eine sich ändert, wächst, auch die andere sich ändern, wachsen oder abnehmen muss.

Zur Lösung der Aufgaben mit Anwendung der Proportion ist es sehr wichtig, dass die Schüler über diesen Zusammenhang klar werden, daher muss sie der Lehrer durch gründliche Beurtheilung vieler und mannigfaltiger Beispiele zu dieser Einsicht führen.

Der einfachste Zusammenhang, der zwischen solchen Größen stattfinden kann, ist der, dass, wenn die eine 2 mal, 3 mal, 4 mal u. s. w. so groß wird, auch die andere 2 mal, 3 mal, 4 mal u. s. w. so groß werden muss, so dass ihr Quotient stets derselbe ist; man sagt dann: solche Größen stehen in einem geraden Verhältnisse oder sie sind gerade proportioniert. Z. B. Die Größe, Ware und ihr Preis, Arbeitszeit und Arbeitslohn, Gewicht und Rauminhalt eines Körpers, die Zeit und der zurückgelegte Weg, Capital und Interessen u. s. w. bei übrigens gleichen Umständen. Zur Erläuterung dessen kann der Lehrer folgende Betrachtung anstellen lassen:

Kostet 1 Meter Tuch 5 Gulden, so kosten
2 Meter 2 mal 5 also, 10 Gulden
3 „ 3 „ 5 „ 15 „
4 „ 4 „ 5 „ 20 „

Daher kostet die doppelte Ware (Warenmenge) auch das doppelte Geld, die dreifache, vierfache Ware u. s. w. auch das dreifache, vierfache Geld u. s. w.

Aus dem Obigen ersehen die Schüler, dass sich 2 Meter zu 3 Meter ebenso verhalten, wie 10 fl. zu 15 fl. u. s. w. Wir können daher die Proportionen aufstellen:

2 Meter : 3 Meter = 10 fl. : 15 fl.
2 „ : 4 „ = 10 fl. : 20 fl. u. s. w.

Hierauf wird der Begriff des umgekehrten Verhältnisses oder der verkehrt proportionierten Größen entwickelt.

Wenn 1 Arbeiter zu einer Arbeit 2 Tage braucht, so würden 2 Arbeiter (unter sonst gleichen Umständen) nicht etwa 4 Tage, sondern bei gleichem Fleiße nur die halbe Zeit, also nur 1 Tag

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

brauchen; 3 Arbeiter brauchen nur den 3. Theil von 2 Tagen (d. i. $\frac{2}{3}$ Tage) u. s. w.

Wenn z. B. 1 Arbeiter zu einer Arbeit 24 Tage braucht, so brauchen 2 Arbeiter nur die Hälfte von 24 Tagen, also 12 Tage,
„ „ 3 „ „ den 3. Theil „ 24 „ „ 8 „
„ „ 4 „ „ den 4. „ „ 24 „ „ 6 „
u. s. w.

Es brauchen daher: die doppelte Zahl der Arbeiter nur die Hälfte, die dreifache Zahl der Arbeiter nur ein Drittel der Zeit u. s. w.

Man kann daher folgende Proportionen aufstellen:

2 Arb. : 3 Arb. = 8 Tg. : 12 Tg. oder 2 : 3 = 8 : 12
1 „ : 4 „ = 6 „ : 24 „ „ 1 : 4 = 6 : 24

Die Zahl der Arbeiter und die Zahl der Arbeitstage stehen in einem solchen Zusammenhange, dass zu einer 2-, 3-, 4-mal so großen Zahl der einen Art nur die Hälfte, das Drittel, das Viertel der anderen Art gehören. Von solchen Zahlen sagt man, sie stehen in einem umgekehrten Verhältnisse oder sie sind umgekehrt proportioniert.

Im umgekehrten Verhältnisse stehen auch: die Zahl der zu Nährenden und die Dauer der Lebensmittel, mit welchen sie ausreichen sollen, das Capital und die Zeit (bei gleichen Interessen), die Geschwindigkeit einer Bewegung und die Zeit derselben (bei gleichem Wege), der Preis des Getreides und das Gewicht des Gebäckes u. s. w.

Ist eine Rechenaufgabe derart, dass man aus den gegebenen Größen und der unbekannten Größe x eine Proportion bilden kann, so nennt man sie eine Regeldetrie-Aufgabe, weil das Rechnungsverfahren bei solchen Aufgaben „Regel von Dreien“ (lateinisch: Regula de tribus) heißt.

Der Lehrer gebe eine solche Aufgabe und mache die Schüler aufmerksam, dass darin eine Frage, ein Fragesatz, und eine Bedingung, ein Bedingungssatz, vorkommt. So heißt z. B. in der Aufgabe: Was kosten 5 Hektoliter Wein, wenn 3 Hektoliter 36 fl. kosten? der Fragesatz: Was kosten 5 Hektoliter Wein? und der Bedingungssatz ist „wenn 3 Hektoliter 36 fl. kosten.“

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Lehrer lasse den Bedingungssatz aufschreiben und unter denselben den Fragesatz setzen, als:

3 hl 36 fl. (Bedingungssatz)
5 „ x „ (Fragesatz).

Man lasse das Verhältnis 36 fl. : x fl. ansetzen und frage, ob die 5 hl mehr oder weniger kosten werden, als 3 hl. Wenn nun 5 hl mehr kosten als 36 fl., werden dann unter x fl. mehr oder weniger gedacht werden müssen als 36 fl.? Wenn nun unter x fl. mehr als 36 fl. gedacht werden müssen, ist dann das Verhältnis 36 fl. : x fl. steigend oder fallend? Wenn nun das eine Verhältnis steigend ist, wie muss in einer Proportion auch das andere Verhältnis sein? Werden wir daher 5 hl : 3 hl oder 3 hl zu 5 hl setzen? Wir wollen das Verhältnis 3 hl : 5 hl als das erste annehmen; und erhalten dann die Proportion 3 hl : 5 hl = 36 fl. : x fl. Wir können aber auch das Verhältnis 36 fl. : x fl. als das erste setzen, und erhalten dann die Proportion 36 fl. : x fl. = 3 hl : 5 hl. Welche Proportionen lassen sich nun bilden, wenn wir x fl. : 36 fl. setzen? Da die Schüler in der Auflösung der Proportionen schon geübt sind, so wird ihnen diese selbst überlassen.

Nach dem hier angegebenen Vorgange entfällt die Eintheilung der Aufgaben in solche, welche zur geraden und in solche, welche zur ungeraden Regeldetrie gehören, die Schüler haben immer nur zu beurtheilen, ob das Verhältnis, welches das Glied x enthält, ein steigendes oder fallendes werde, und hienach auch das andere Verhältnis als steigendes oder fallendes hinzuzusetzen.

Geht man nach der Eintheilung der Aufgaben in solche, welche zur geraden und zur umgekehrten Regeldetri gehören, vor, so setze man das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der anderen Art, und zwar, wenn beide Arten gerade sind, in der nämlichen Ordnung, sind sie aber verkehrt proportioniert, in umgekehrter Ordnung.

In der soeben behandelten Aufgabe sind beide Arten von Zahlen gerade proportioniert, da 2-, 3-, 4-mal so viel Hektoliter auch 2-, 3-, 4-mal so viel Gulden kosten, daher setzt man das Verhältnis x fl. : 36 fl. gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Hektoliter (zu x fl. gehören 5 Hektoliter zu 36 fl. 3 Hektoliter) in der nämlichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ordnung genommen, also 5 : 3 und löst dann die erhaltene Proportion auf.

3 hl 36 fl. $3 : 5 = 36 : x$

5 „ x „ $x = \frac{36 \times 5}{3} = 60$ fl.

In der Aufgabe: 6 Arbeiter können eine Arbeit in 20 Tagen verrichten; wieviel Tage brauchen 10 Arbeiter hiezu? sind beide Arten der Zahlen verkehrt proportioniert, denn 2-, 3-, 4-mal so viele Arbeiter brauchen zur Verrichtung derselben Arbeit nur die Hälfte, das Drittel, das Viertel der Zeit; daher setzt man wohl das Verhältnis zwischen den 2 Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der 2 Zahlen der andern Art, jedoch in umgekehrter Ordnung, also:

6 Arb. 20 Tage T. T. Arb. Arb.

10 „ x „ $x : 20 = 6 : 10$

$x = 2 \times 6 = 12$ Tage.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 68 bis 75.

Der Lehrer verbindet mit der Lösung der Aufgaben mittelst der Proportion die Lösung nach der Schlussrechnung. Wir wollen nachfolgend in einigen Beispielen die Lösung nach dieser Art zeigen.

a) Was kosten 25 Liter, wenn 5 Liter 90 Kreuzer kosten?

25 Liter sind 5 mal 5 Liter; daher kosten 25 Liter 5 mal 90 kr. = 4 fl. 50 kr.

b) 36 kg kosten 8 fl.; was kosten 9 kg?

9 kg sind der 4. Theil von 36 kg; daher kosten 9 kg $\frac{1}{4}$ von 8 fl., also 2 fl.

c) Bei 100 Einkaufspreis gewinnt man 18·25 fl.; wieviel bei 275 fl. Einkaufspreis?

bei 200 fl. 2 mal 18·25 . . . . 36·5

„ 50 „ $\frac{1}{2}$ mal 18·25 . . . . 9·125

„ 25 „ $\frac{1}{2}$ mal 9·125 . . . . 4·5625

275 50·188 fl.

d) Für 63 hl zahlt man 420 fl.; wieviel für 18 hl?

63 hl . . . . . kosten 420 fl.

9 „ = $\frac{1}{7}$ von 63 hl „ 60 „

18 „ = 2 mal 9 „ „ 120 „

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

e) Der Schall legt in 5 Secunden 1660 Meter zurück; wieviel in 8 Sekunden?

In 5 Sec. 1660 m
" 1 " $\frac{1}{5}$ von 1660 m = 332 m
8 " 8 mal 332 m = 2656 m

f) Eine Locomotive legt in 1 Minute 500 Meter zurück und braucht, um eine gewisse Strecke zu durchfahren, 20 Minuten; wieviel Meter müsste sie in 1 Minute zurücklegen, wenn sie dieselbe Strecke in 15 Minuten durchlaufen sollte?

Die bestimmte Strecke ist 500 m × 20 = 10000 m.

Die Locomotive muss also in 1 Minute den 15. Theil von 10000 m zurücklegen;

der 5. Theil von 10000 m ist 2000 m, daher der 15. Theil $\frac{1}{3}$ von 2000 m $666\frac{1}{3}$ Meter.

Aufgaben der Regeldetri lassen sich auch manchmal durch eine passende Zerfällung der Mehrheit, deren Wert gesucht werden soll, lösen. Z. B.

Was kosten 27 kg, wenn 8 kg 16 fl. 48 kr. kosten?

27 kg sind 3 mal 8 kg und noch 3 kg; 3 mal 8 kg kosten 3 mal 16 fl. 48 kr., d. i. 49 fl. 44 kr.; 3 kg = 2 kg + 1 kg 2 kg sind von 8 kg der 4. Theil, daher kosten sie auch den 4. Theil von 16 fl. 48 kr., d. i. 4 fl. 12 kr.; 1 kg kostet davon die Hälfte, also 2 fl. 6 kr.; daher 27 kg

49 fl. 44 kr.
4 " 12 "
2 " 6 "
55 fl. 62 kr.

Was kosten 15 hl 75 l Wein, wenn 36 hl 432 fl. 60 kr. kosten?

36 hl			432·6 fl.
12 hl	= $\frac{1}{3}$	von 36 hl	144·2 fl.
3 "	= $\frac{1}{4}$	" 12 "	36·05
50 l	= $\frac{1}{6}$	" 3 "	6·008
25 "	= $\frac{1}{2}$	" 50 l	3·004
15 hl 75 l		. . . . .	189·262 fl.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 52.

Ein Fuhrmann hat 12 Centner Ware für 60 fl. 50 Meilen weit zu fahren, wieviel würde er für 9 Centner erhalten, wenn er diese auf derselben Straße 20 Meilen weit fahren soll?

Nehmen wir bei dieser Aufgabe auf die Anzahl der Meilen keine Rücksicht, so hat man die Aufgabe: Ein Fuhrmann hat 12 Centner für 60 fl. zu fahren, wieviel wird er für 9 Centner erhalten? 12 Ctr.: 9 Ctr. = 60 fl.: x fl.; x = 45 fl. Nun heißt die Aufgabe weiter: Wenn man für 50 Meilen Weges 45 fl. bezahlt, wieviel hat man für 20 Meilen zu bezahlen?

50 M.: 20 M. = 45 fl.: x fl.; x = 18 fl.

Hat der Lehrer viele solcher Auflösungen vorgenommen, so kann er zu Ansätzen schreiten, durch welche die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri mit einemmale gelöst werden. Er lasse dann bei der Lösung der Proportionen die Operationen nicht wirklich ausführen, sondern nur anzeigen. So wäre z. B. obige Aufgabe auf folgende Art durchzuführen: Aus der Proportion

12 Ctr.: 9 Ctr. = 60 fl.: x fl. erhält man $x = \frac{60 \times 9}{12}$ fl.

Nun lasse man in die zweite Proportion diese angezeigte Rechnung anstatt 45 fl. einsetzen, und man erhält dann die Proportion $50\,\text{M.} : 20\,\text{M.} = \frac{60 \times 9}{12}$ fl.: x fl. Versetzt man den Nenner 12 in das erste Glied, so erhält man $12 \times 50 : 20 = 60 \times 9 : x$ und hieraus

$$x = \frac{60 \times 9 \times 20}{12 \times 50} = 18 \text{ fl.}$$

Durch die Schlussrechnung:

für 12 Ctr. 50 Meilen gefahren zahlt man 60 fl.
" 9 " 20 " " " " ? "

für 1 Ctr. 50 Meilen gefahren zahlt man den 12. Theil
" 9 " 50 " " " " 9 mal soviel.
" 9 " 1 " " " " den 50. Theil
" 9 " 20 " " " " 20 mal soviel.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{daher } \frac{60 \text{ fl.} \times 9 \times 20}{12 \times 50} = 18 \text{ fl.}$$

Setzen wir die Aufgabe so an, wie bei der einfachen Regeldetrie, als:

12 Ctr. 50 M. 60 fl. Bedingungssatz.
9 Ctr. 20 M. x fl. Fragesatz.

Die aufmerksame Betrachtung des obigen Aufsatzes zeigt, dass alle Glieder des Bedingungssatzes mit Ausnahme der Zahl 60 als Nenner des Bruches, und alle Glieder des Fragesatzes mit Ausnahme des unbekannten Gliedes als Zähler erscheinen.

Übungsaufgaben V. R. M. S. 75, 76.

Wiederholungsaufgaben V. R. M. S. 77, 78. A. K. S. 37 — 41.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fünfter Abschnitt.

Des Rechnen mit entgegengesetzten Zahlen.

I. Entgegengesetzte Zahlen.

§. 53.

Der Begriff „entgegengesetzte Größen" muss den Schülern durch Vorführung praktischer Fälle recht klar gemacht werden. Z. B. Man wollte die Verlassenschaft eines Verstorbenen berechnen; es haben sich 300 fl. bares Geld vorgefunden und für die verkauften Geräthschaften sind 200 fl. gelöst worden; hingegen haben sich 100 fl. Schulden gefunden, und die Begräbniskosten betrugen 30 fl. Hier sieht man nun, dass die Verlassenschaft durch die vier Größen, 300 fl., 200 fl., 100 fl. und 30 fl. bestimmt werden muss, welche alle einerlei Einheiten, nämlich Gulden bedeuten, von denen aber in dieser Rechnung die beiden ersten den zwei letzten gerade entgegengesetzt sind, denn die 300 fl. bares Geld und die 200 fl., als der Erlös der Geräthschaften, sind der Verlassenschaft zum Vortheile, und die zwei letzten, 100 fl. Schulden und 30 fl. Begräbniskosten, sind derselben zum Nachtheile, vermindern nämlich dieselbe.

Würden die Schulden und die Begräbniskosten zusammen auch 500 fl. betragen, so wäre die Verlassenschaft gleich Null, es würden das Bargeld und der Erlös aus den Geräthschaften ganz aufgehoben.

Solche Größen, welche mit einander in Verbindung gebracht, sich gegenseitig vermindern oder ganz aufheben, nennt man **entgegengesetzte Größen.**

Entgegengesetzte Größen sind: Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, Bewegungen von einem bestimmten Punkte aus nach rechts und nach links, nach vorwärts und nach rückwärts, aufwärts und abwärts, Wärmegrade und Kältegrade u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von zwei widersprechenden Größen nennt man die eine positiv und die andere negativ.

Wird irgend eine Größe für sich allein in Betracht gezogen, so kann man weder sagen, dass sie positiv noch negativ sei, ebenso wenig als man von irgend einem Gegenstande sagen kann, er sei groß oder klein, bevor man ihn mit einem anderen Gegenstande derselben Art verglichen hat. Man nennt solche Größen, die weder positiv noch negativ sind, absolute Größen.

Welche von zwei entgegengesetzten Größen als positiv zu nehmen ist, bleibt unserer Willkür überlassen, nur ist man genöthigt, die andere, welche als mit der als positiv angenommenen Größe im Widerspruche steht, negativ anzunehmen und umgekehrt. Nimmt man z. B. die Einnahme, das Vermögen, den Weg von Norden nach Süden, die Anzahl der Sprossen, welche man über eine Leiter hinaufgestiegen ist, u. s. w. als positiv an, so muss man beziehungsweise Ausgabe, Schulden, den Weg von Süden nach Norden, die Anzahl der Sprossen, welche man über eine Leiter hinabgestiegen ist, u. s. w. als negativ annehmen und umgekehrt.

Besitzt jemand 3 fl. Vermögen, und gibt er 1 Gulden aus, so wird bei Bestimmung seines gegenwärtigen Vermögenstandes, wenn man den Besitz von 3 fl. als positiv annimmt, der Gulden Ausgabe negativ sein müssen, und verursachen, dass das Vermögen um 1 Gulden vermindert, mithin blos 2 Gulden Vermögen oder gleich 2 positiven Einheiten ist. Gibt er 2 Gulden aus, so ist das Vermögen nur 1 Gulden, oder gleich einer positiven Einheit, und wird die Ausgabe gleich 3 Gulden, so wird das Vermögen gleich Null sein. Steigt aber die Ausgabe auf 4 Gulden, so wird man mit dem ursprünglichen Vermögen 3 Gulden nur 3 Gulden von dieser Ausgabe bestreiten können, wodurch man auf Null kommt; um aber den vierten Gulden ausgeben zu können, wird man einen Gulden Schulden machen müssen.

Dieser Gulden, den man schuldig geworden ist, muss aber, da das Vermögen positiv war, eine negative Einheit sein. Es findet sich also hier im Resultate eine negative Einheit, auf die man aber nur kommen konnte, indem man vorher auf Null gekommen war. Es ist einleuchtend, dass man um vom Negativen auf das Positive

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

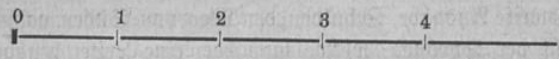
zu kommen, wieder die Null als Grenze zwischen beiden finden muss. Hieraus ersieht man:

1. Jede Menge negativer Einheiten tilgt eine ebenso große Menge positiver Einheiten, und umgekehrt; sind sie beide gleich groß, so tilgen sie einander gänzlich.

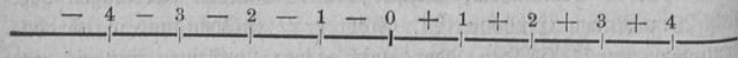
2. Der Übergang einer positiven Größe in eine negative geschieht bei der Null, und umgekehrt.

Der Begriff der entgegengesetzten Größen findet seine Anwendung auch auf unbenannte Zahlen. Zur bildlichen Darstellung sowohl positiver als negativer Zahlen benütze der Lehrer die Zahlenlinie.

Er lasse von einem Schüler eine gerade Linie an die Schultafel zeichnen und von einem Punkte 0 derselben nach einer Richtung z. B. nach rechts gleiche Strecken (Längeneinheiten) auftragen, und sage dann, dass die Entfernungen der Endpunkte dieser Strecken vom Anfangspunkte 0 die



aufeinander folgenden natürlichen Zahlen darstellen, und dass man durch fortgesetztes Auftragen der Längeneinheit in der Zahlenlinie ebenso, wie in der durch sie versinnlichten natürlichen Zahlenreihe ohne Ende vorwärtsschreiten könne. Die Schüler bemerken: Schreitet man dann von irgend einer Zahl durch fortgesetztes



Wegnehmen einer Einheit nach rückwärts, so kommt man nach und nach zu 1 und durch Hinwegnahme noch einer Einheit nach 0. Man kann aber nach demselben Gesetze die Zahlenreihe von 0 aus noch weiter rückwärts fortsetzen; dann verlängert man die Zahlenlinie über 0 nach links und trägt auch hier gleich große Strecken auf, so stellen die Entfernungen ihrer Endpunkte von Punkte 0 Zahlen dar, welche sich von den natürlichen Zahlen nur dadurch unterscheiden, dass sie von 0 aus nach rückwärts fortschreiten, dass sie also mit den früheren Zahlen in einem gewissen Gegensatze stehen. Hat man daher die von 0 nach rechts fortschreitenden Zahlen mit + 1, + 2, + 3 . . . bezeichnet, so müssen die nach links von 0 fortschreitenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zahlen mit — 1, — 2, — 3 . . . bezeichnet werden. Die Schüler sehen hier auch, dass man, um vom Positiven ins Negative zu kommen oder umgekehrt, die Grenze 0 überschreiten muss.

Die mit Vorzeichen (+ oder —) versehenen Zahlen werden entgegengesetzte oder algebraische Zahlen genannt.

Das Zeichen — muss immer ausdrücklich gesetzt werden, das Zeichen + kann aber am Anfange eines algebraischen Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen weggelassen werden. Hat eine Zahl kein Vorzeichen, so ist jedesmal das Zeichen + vorgesetzt zu denken; daher bedeutet 5 soviel als + 5.

Durch die Einführung positiver und negativer Zahlen ist es möglich geworden, die Subtraction zweier Zahlen auch dann auszuführen, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend. Soll z. B. Die Differenz 4—7 gefunden werden, so hat man in der Zahlenreihe vom Minuende + 4 um 7 Einheiten rückwärts schreiten, wodurch man zur Zahl — 3 kommt. Um dieses auf praktische Fälle anzuwenden, denken wir, jemand mache 3 Schritte vorwärts und hierauf 7 Schritte rückwärts, so sind dieses 4 Schritte rückwärts, wenn auch ein Hindernis z. B. eine Mauer da wäre, so dass diese 4 Schritte nicht wirklich gemacht werden können. Wenn jemand 3 Gulden gewinnt und 7 Gulden verliert, so macht dieses 4 Gulden Verlust, ob er den Verlust zahlen kann oder nicht. — (Wenn man in eine Schüssel 3 Äpfel hineinlegt und 7 herausnimmt, so ist dieses so viel, als ob man keine Äpfel hineingelegt aber 4 herausgenommen hätte, dieses bleibt wahr, ob in der Schüssel ursprünglich kein Apfel oder 4 Äpfel waren, obwohl sich nur im zweiten Falle wirklich 7 Äpfel wegnehmen ließen.

§. 54.

Addition entgegengesetzter Zahlen.

Algebraische Zahlen, welche zu einer anderen Zahl addiert oder von ihr subtrahiert werden sollen, umgibt man mit Klammern; z. B. (+ 4) + (— 5) bedeutet die Summe der Zahlen + 4 und — 5; der Ausdruck (+ 4) — (— 5) bedeutet die Differenz der Zahlen + 4 und — 5. Die Zeichen + und — zwischen den eingeklammerten Zahlen, welche die auszuführende Rechnungsoperation anzeigen, nennt man Rechnungs- oder Operationszeichen. Die Zeichen + und — innerhalb der Klammern heißen Vorzeichen oder Qualitätszeichen. Die Klammern können weggelassen werden, wenn dadurch keine Zweideutigkeit entsteht. So kann man z. B. anstatt (+ 4) — (— 5) auch 4 — (— 5) schreiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sei die Summe $+ 7 + (+ 3)$ zu suchen. Schreitet man in der Zahlenreihe von $+ 5$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fort, so gelangt man zur Zahl 10, also $+ 7 + (+ 3) = + (7 + 3) = + 10$.

Wollen wir die Summe von $- 7 + (- 3)$ erhalten, so müssen wir von $- 7$ in negativer Richtung um 3 Einheiten fortschreiten, wodurch wir zur Zahl $- 10$ gelangen; wir erhalten also:

$$- 7 + (- 3) = - (7 + 3) = - 10$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir:

$$+ 7 + (- 3) = + (7 - 3) = + 4$$
$$- 7 + (+ 3) = - (7 - 3) = - 4$$

Hieraus ersehen die Schüler:

Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man ihre Zahlwerte addiert und der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt. Z. B. 7 fl. Vermögen und 3 fl. Vermögen sind 10 fl. Vermögen. 7 fl. Verlust und 3 fl. Verlust sind 10 fl. Verlust.

2. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man der Differenz ihrer Zahlwerte das Vorzeichen der größeren gibt. Z B. 7 fl. Vermögen und 3 fl. Schulden gibt 4 fl. Vermögen. 7 fl. Schulden und 3 fl. Vermögen gibt 4 fl. Schulden.

Einen Zahlenausdruck, in welchem mehrere Zahlen durch die Zeichen $+$ oder $-$ verbunden erscheinen, nennt man einen mehrgliedrigen Zahlenausdruck. Z. B. $50 + 8$, $36 - 15$ (zweigliedrig) $160 + 5 + 26$, $500 - 13 - 4$, $16 + 3 - 2$ (dreigliedrige).

Die einzelnen Glieder heißen für sich betrachtet eingliedrige Zahlenausdrücke. Z. B. 8, $- 3$.

Die Schüler wissen:

$$15 + 4 = 19, \quad 50 + 36 + 4 = 90$$
$$25 - 36 = 11, \quad 12 - 5 + 3 = 10.$$

Wir haben mehrgliedrige Ausdrücke in einen eingliedrigen verwandelt, indem wir die durch die Rechnungszeichen angezeigten Additionen und Subtractionen wirklich ausgeführt haben; man nennt dieses reducieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn mehrgliedrige Ausdrücke addiert werden sollen, so reduciert man dieselben und verrichtet dann die Addition; z. B.

$$(12 - 3) + (8 - 15) = 9 + (-7) = 2$$

oder man setzt die Glieder der Posten mit ihren unveränderten Zeichen nebeneinander und reduciert. Dieses muss besonders dann geschehen, wenn die Glieder der Posten eine unbekannte Zahl enthalten. Z. B.

$$(5 - 8) + (12 - x) = 5 - 8 + 12 - x = 9 - x$$

Aufgaben.

$+ 8 + (+ 3) = ?$ $\quad + 8 + (- 2) = ?$

$- 12 + (+ 15) = ?$ $\quad - 18 + (- 15) = ?$

$- 1820 + (+ 1882) = ?$ $\quad - 1820 + (- 1882)$

$$\begin{array}{rrrr} + 12 & - 12 & + 12 & - 12 \\ \underline{+ 5} & \underline{- 5} & \underline{- 5} & \underline{+ 5.} \end{array}$$

$+ 0{\cdot}75 + (+ 3{\cdot}275) = ?$ $\quad 0{\cdot}75 + (- 3{\cdot}275) = ?$

$+ \frac{7}{8} + \left(+ \frac{3}{4}\right) = ?$ $\quad + \frac{7}{8} + \left(- \frac{3}{4}\right) = ?$

$- 3 + (+ 5) + (- 8) + (- 2) = ?$ $\quad + 3 + (- 5) + (+ 8) = ?$

$- 648{\cdot}21 + (+ 31{\cdot}2) + (- 512{\cdot}1) + (+ 0.2) = ?$

$(3 + 5) + (3 - 5) = ?$ $\quad (84 - 2) + (12 + 3) + (6 - 9 = ?$

§. 55.

Subtraction entgegengesetzter Zahlen.

Der Lehrer erinnere die Schüler, dass sie beim Aufsuchen der Summe vom ersten Summanden an um die Einheiten des zweiten Summanden vorwärts schreiten mussten, wenn dieser positiv war, dass sie hingegen rückwärts schreiten mussten, wenn der zweite Summand negativ war, und dass die Subtraction die entgegengesetzte Rechnungsart von der Addition ist. Die Schüler sehen dann leicht ein, dass sie bei der Subtraction entgegengesetzter Zahlen in der algebraischen Zahlenreihe vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahendes rückwärts zu schreiten haben, wenn der Subtrahend positiv, und vorwärts, wenn der Subtrahend negativ ist, und dass die Zahl, zu welcher sie hiedurch in der Zahlenreihe gelangen, die gesuchte Differenz ist. Es sei z. B. die Differenz $+ 8 - (+ 3)$ zu suchen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schreitet man in der Zahlenreihe von + 8 um 3 Einheiten in negativer Richtung fort, so gelangt man zu der Zahl + 5. Man mache hierbei die Schüler aufmerksam, dass sie ebenso verfahren müssten, wenn sie zu + 8 die Zahl — 5 zu addieren hätten; es ist daher

$$+ 8 - (+ 3) = + 8 + (- 3) = + 5.$$

Ist die Differenz von + 8 — (— 3) zu finden, so muss man von + 8 aus um 3 Einheiten in positiver Richtung fortschreiten, wobei man zu der Zahl + 11 gelangt, was man auch hätte thun müssen, wenn man zu + 8 die Zahl + 3 zu addieren gehabt hätte; daher ist

$$+ 8 - (- 3) = + 8 + (+ 3) = + 11.$$

Auf dieselbe Art findet man:

$$- 8 - (+ 3) = - 8 + (- 3) = - 11$$
$$- 8 - (- 3) = - 8 + (+ 3) = - 5$$

Hieraus ist zu ersehen:

Entgegengesetzte Zahlen werden subtrahiert, indem man zum Minuend den Subtrahend mit dem entgegengesetzten Zeichen addiert.

Um mehrgliedrige Ausdrücke zu subtrahieren, reduciert man dieselben und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

$$(12 - 8 + 7) - (9 - 2) = 11 - (+ 7) = 4$$

Die Hinzugabe einer negativen Zahl ist eigentlich eine Wegnahme. Erhält z. B. jemand zu 5 fl. Vermögen 3 fl. Schulden, so ist dieses ebensoviel, als ob man ihm 3 fl. Vermögen weggenommen hätte.

Die Hinwegnahme einer negativen Größe ist eine wirkliche Hinzugabe. Wenn jemand 3 fl. Schulden hat, so kann man ihm dieselben hinwegnehmen, indem man ihm 3 fl. zu seinem Vermögen hinzugibt, damit er die Schuld hiermit zahle.

Eine negative Zahl wird also subtrahiert, indem man sie hinzugibt, oder indem man sie positiv macht, d. h. ihr Zeichen verändert.

Mehrgliedrige Zahlenausdrücke werden daher auch subtrahiert, wenn man die positiven Glieder des Subtrahends als hinwegnehmend, d. i. negativ, und die negativen Glieder als hinzugebend, d. h. positiv nimmt und zum Minuend addiert, oder kurz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mehrgliedrige Zahlenausdrücke werdem subtrahiert, wenn man zum Minuend die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Glieder des Subtrahends addiert und sodann die Reduction ausführt.

Daher ist auch

$(12 - 8 + 7) - (9 - 2) = 12 - 8 + 7 - 9 + 2 = 4$

$16 - (4 - x) = 16 - 4 + x = 12 + x$

Hieraus folgt auch: Wenn vor einer Klammer das Zeichen — steht, so müssen nach Weglassung der Klammer die Zeichen innerhalb derselben in die entgegengesetzten verändert werden.

Aufgaben.

$+ 5 - (+ 2) = ?$ $\quad + 5 - (- 2) = ?$

$- 17 - (+ 5) = ?$ $\quad - 17 - (- 5) = ?$

Minuend	+ 20	— 20	+ 18	— 54
Subtrahend	— 32	+ 32	— 23	— 70

$+ 7842 - (+ (3641) = ? + 5472 - (+ 618)$

$+ 50{\cdot}27 - (+ 41{\cdot}375) = ? - 47 - (- 38{\cdot}24)$

$+ 712 - (38{\cdot}2 + 6{\cdot}5 - 3) = ?$

$(- 3476 + 14) - (18 - 12 + 16) = ?$

$(12 + 82 - 6) - (9 + 4 - 6 + 3 = ?$

$+ 7834 - [312 - (+ 54)] = ?$

$\frac{1}{2} - (\frac{1}{5} - \frac{1}{4}) - [(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}) - (\frac{1}{3} - \frac{2}{5})] = ?$

§. 56.

Multiplication entgegengesetzter Zahlen.

Der Lehrer mache die Schüler mit der Erklärung bekannt: Multiplicieren heißt, das Product aus dem Multiplicand ebenso aufstellen, wie der Multiplicator aus der Einheit aufgestellt wurde.

Es sei $+ 3 \times + 4$

$+ 4 = 1 + 1 + 1 + 1$

daher $+ 3 \times + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = + 12$

Der Multiplicator 4 ist aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe 4 mal als Summand setzte, daher hat man auch 3 4 mal als Summand zu setzen.

Es sei nun $- 3 \times - 4$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist hier aus -3 ein Product so zu bilden, wie der Multiplicator -4 aus der Einheit gebildet wurde; -4 ist aber aus der Einheit entstanden, indem diese 4 mal als Subtrahend gesetzt wurde, also $-4 = -1 - 1 - 1 - 1$, daher muss man auch -3, 4 mal als Subtrahend setzen; eine negative Zahl muss aber als Subtrahend mit dem entgegengesetzten Zeichen, also mit $+$ gesetzt werden, daher ist $-3 \times -4 = 3 + 3 + 3 + 3 = +12$.

Es ist also

$$+3 \times +4 = +12$$
$$-3 \times -4 = +12$$

Man sieht hieraus:

Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives Product.

Dieser Multiplicationsfall läßt sich durch folgendes Beispiel anschaulich machen. Es hat jemand an 4 Orten 3 fl. Schulden; will man ihm diese Schulden wegnehmen, so muss man ihm 3 fl. Schulden 4 mal wegnehmen, was man dadurch bewirken kann, indem man an jedem dieser 4 Orte 3 fl., also im Ganzen 12 fl., zahlt. Also jemandem 3 fl. Schulden 4 mal wegnehmen ist gerade soviel, als ihm 12 fl. geben. Soll jemand 3 Schritte rückwärts 4 mal zurücknehmen, so muss er 3 mal 4 Schritte vorwärts machen. Mit einem negativen Factor multiplicieren ist nichts anderes als ein wiederholtes Wegnehmen; die Hinwegnahme einer negativen Zahl ist aber entschieden eine Dazugabe.

Es sei $+3 \times -4$.

-4 ist aus der Einheit entstanden, indem man diese 4 mal als Subtrahend gesetzt hat, also $-4 = -1 - 1 - 1 - 1$. Es muss daher auch $+3$ 4 mal als Subtrahend gesetzt werden. Eine positive Zahl wird aber als Subtrahend negativ, daher $+3$ mit dem geänderten Zeichen, also als -3 4 mal gesetzt werden, und es ist daher

$$+3 \times -4 = -3 - 3 - 3 - 3$$

Ist endlich $-3 \times +4$

Hier hat man aus -3 ein Product so zu bilden, wie der Multiplicator $+4$ aus der Einheit entstanden ist; $+4$ wurde aber aus der Einheit erhalten, indem man diese 4mal als Summand, also mit ungeänderten Zeichen gesetzt hat. Man muss daher auch den Multiplicand -3 4 mal mit ungeänderten Zeichen setzen. Es ist daher $-3 \times +4 = -3 - 3 - 3 - 3$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist also:

$$+4 \times -3 = -12$$
$$-4 \times +3 = -12$$

Man sieht hieraus:

Zwei ungleichbezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

Nun lasse der Lehrer das Product von drei und mehreren Factoren suchen, als:

$$+3 . +6 . +10 = +180$$
$$+5 . +4 . +9 . +2 = +360$$

Hieraus ersieht man:

Sind alle Factoren positiv, so ist auch das Product positiv.

Ferner:

$-4 . -3 . -6 . = +12 . -6 = -72$
$-4 . -3 . -6 . -2 = -72 . -2 = +144.$
$-4 . -3 . -6 . -2 . -10 = +144 . -10 = -1440$
$-4 . -3 . -6 . -2 . -10 . -7 = -1440 . -7$
$= +10080.$

Sind alle Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Factoren eine gerade oder eine ungerade ist.

Endlich:

$+4 . +3 . -6 = +12 . -6 = -72.$
$+4 . +3 . -6 . -2 = -72 . -2 = +144$
$+4 . +3 . -6 . -2 . +10 = +144 . +10 = +1440$
$+4 . +3 . -6 . -2 . +10 . -7 = +1440 . -7$
$= -10080.$

Sind die Factoren theils positiv, theils negativ, so ist das Product positiv, wenn die Anzahl der negativen Factoren eine gerade, und negativ, wenn die Anzahl der negativen Factoren eine ungerade ist.

Nun schreite man zur Multiplication eines mehrgliedrigen Multiplicands mit einem eingliedrigen Multiplicator. Die Schüler werden hier aufmerksam gemacht, dass ein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mehrgliedriger Factor zwischen die Klammern gesetzt werden muss Z. B.

$(7 + 4) . 3 = 11 . 3 = 33$, oder

$(7 + 4) . 3 = (7 + 4) + (7 + 4) + (7 + 4) = 7 + 7 + 7 + 4 + 4 + 4 = 7 . 3 + 4 . 3 = 21 + 12 = 33.$

$(7 - 4) . 3 = 3 . 3 = 9$, oder

$(7 - 4) . 3 = (7 - 4) + (7 - 4) + (7 - 4) = 7 + 7 + 7 + (-4) + (-4) + (-4) = 7.3 - 4.3 = 21 - 12 = 9.$

Hieraus ersieht man:

Ist der Multiplicand mehrgliedrig und der Multiplicator eingliedrig, so reduciert man den Multiplicand und führt dann die Multiplication aus, oder man multipliciert jedes Glied des Multiplicands mit dem Multiplicator und reduciert hierauf die Producte. Z. B.

$(12 - 9 + 4 - 3) . 5 = 4 . 5 = 20$ oder

$$(12 - 9 + 4 - 3) . 5 = 12 . 5 - 9 . 5 + 4 . 5 - 3 . 5$$
$$= 60 - 45 + 20 - 15 = 20.$$

Kommt unter den Gliedern des Multiplicands eine unbekannte Zahl vor, so muss das zweite Verfahren angewendet werden. Z. B.

$$(x - 3 + 8) . 5 = 5x - 15 + 40 = 5x + 25$$

Der Factor 5 in dem Ausdrucke $5x$ heißt der Coefficient von x.

Es seien endlich beide Factoren mehrgliedrig. Z. B.

$(5 + 3) . (6 + 4) = 8 . 10 = 80$, oder

$$(5 + 3) . (6 + 4) = (5 + 3) . 6 + (5 + 3) . 4$$
$$= 5 . 6 + 3 . 6 + 5 . 4 + 3 . 4$$
$$= 30 + 18 + 20 + 12 = 80$$

$(5 + 3) . (6 - 4) = 8 . 2 = 16$ oder

$$(5 + 3) . (6 - 4) = (5 + 3) . 6 + (5 + 3) . -4$$
$$= 30 + 18 - 20 - 12 = 16$$

Hieraus ersieht man:

Wenn beide Factoren mehrgliedrig sind, so reduciert man dieselben und verrichtet dann die Multiplication, oder man multipliciert jedes Glied des Multiplicands mit jedem Gliede des

Multiplicators und reduciert sodann die erhaltenen Producte.

Die beiden Factoren können auch zur Erleichterung untereinander geschrieben werden. Z. B.

$$\begin{array}{l} 5 + 3 \\ \underline{6 + 4} \\ 5.6 + 3.6 \ldots\ldots\ldots 30 + 18 \\ \quad + 5.4 + 3.4 \ldots \qquad 20 + 12 \end{array} \Bigg\} = 80.$$

Aufgaben in Močniks Arithmetik für Bürgerschulen S. 9 und 10. A. K. VII. S. 9 und 10.

§. 57.

Division entgegengesetzter Zahlen.

Das Verfahren bei der Division entgegengesetzter Zahlen läſst sich von dem Satze ableiten: Der Quotient muſs so beschaffen sein, daſs er mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt.

Ist nun + 12 durch + 4 zu dividieren, so muſs der Quotient + 3 sein, da nur die Zahl + 3 mit + 4 multipliciert + 12 zum Producte gibt; es ist also $+ 12 : + 4 = + 3$.

Es sei — 12 durch — 4 zu dividieren; soll der Quotient mit dem Divisor — 4 multipliciert — 12 geben, so muſs er positiv, also + 3 sein, wenn er der angegebenen Forderung entsprechen soll. Es ist daher $- 12 : - 4 = + 3$

Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv.

Auf dieselbe Art erhält man:

$$+ 12 : - 4 = - 3$$
$$- 12 : + 4 = - 3$$

Haben Dividend und Divisor ungleiche Vorzeichen, so ist der Quotient negativ.

$$(48 - 6) : 7 = 42 : 7 = 6$$
$$42 : (15 - 36) = 42 : - 21 = - 2$$
$$(300 + 60) : (35 - 11) = 360 : 24 = 15.$$

Wenn der Dividend, oder der Divisor oder beide mehrgliedrig sind, so reduciert man sie und verrichtet dann die Division. Aufgaben in Močniks Arithmetik für Bürgerschulen S. 10. A. K. VII. S. 10 und 11.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Sechster Abschnitt.

Ziffergleichungen.

§. 58.

Um die Schüler auf den Begriff „Gleichung" zu führen, lasse der Lehrer gleichwertige Zahlenausdrücke nebeneinander anschreiben, deren Werte aufsuchen, und wenn die Schüler die Werte als gleich gefunden haben, dieselben durch das Gleichheitszeichen verbinden. Z. B. $5 = 5$, $2 + 7 = 9$, $12 - 5 = 7$, $(8 + 3) . 6 = 48 + 18$.

Nun sage er:

Wenn zwei Zahlenausdrücke, deren Werte einander gleich sind, durch das Gleichheitszeichen verbunden werden, so entsteht dadurch eine Gleichung.

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen die Theile der Gleichung; jeder Theil kann aus mehreren Gliedern bestehen. So ist z. B. in der Gleichung: $5 + 8 = 20 - 7$ der Ausdruck $5 + 8$ der erste, und $20 - 7$ der zweite Theil. Der erste Theil besteht aus den Gliedern 5 und 8, der zweite Theil aus den Gliedern 20 und 7.

Man lasse in der Gleichung $(x - 3) . 5 = 5x - 15$ anstatt x. verschiedene Zahlen z. B. 2, 3, 5, 10 u. s. w. setzen, als:

$(2 - 3) . 5 = 5 . 2 - 15$	$(3 - 3) . 5 = 15 - 15$
$- 1 . 5 = 10 - 15 = - 5$	$0 . 5 = 15 - 15 = 0$ u. s. w.

Die Schüler überzeugen sich auf diese Art, dass die Gleichung $(x - 3) . 5 = 5x - 15$ für jeden Wert der darin vorkommenden noch unbestimmten Zahlen gilt.

Eine Gleichung, welche für jeden Wert der darin vorkommenden noch unbestimmten Zahlen gilt, nennt man eine identische Gleichung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun lasse er auch in der Gleichung $3x + 8 = 5x$ anstatt x die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. setzen; die Schüler erfahren hiedurch, dass dieser Gleichung nur der Wert 4 Genüge leistet, dass diese Gleichung nur unter der Bedingung gilt, wenn $x = 4$ ist.

Gleichungen, welche nur für bestimmte Werte der darin vorkommenden Unbekannten richtig sind, nennt man Bestimmungsgleichungen.

Die Werte der Unbekannten auffinden, welche einer Bestimmungsgleichung Genüge leisten, heißt die Gleichung auflösen.

Die Gleichungen $(x - 3) . 5 = 5x - 15$, $3x + 8 = 5x$ enthalten außer den Unbekannten nur besondere Zahlen; man nennt solche Gleichungen Ziffergleichungen.

Nach der Zahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei oder mit mehreren Unbekannten. So ist

$3x + 2$	eine Gleichung mit einer,
$2x + 3y = 15$	„ „ „ zwei,
$4x + 5y = 3z - 8$	„ „ „ drei Unbekannten.

§. 59.

Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten.

Der Lehrer lasse zu beiden Theilen der Gleichung

$$7 + 8 = 20 - 5$$

die Zahl 6 addieren; die Schüler bemerken, dass die Gleichung hierdurch nicht gestört wird; denn es ist sodann $(7 + 8) + 6 = (20 - 5) + 6$.

Nun lasse er auch von beiden Theilen der Gleichung eine und dieselbe Zahl z. B. 4 subtrahieren, wodurch die Gleichung ebenfalls ungestört bleibt; man erhält

$$(7 + 8) - 4 = (20 - 5) - 4$$

1. Grundsatz. Gleiches zu Gleichem addiert, gibt gleiche Summen, und Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt gleiche Unterschiede.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun zeige der Lehrer, welche Veränderungen mit einer Gleichung infolge des 1. Grundsatzes noch vorgenommen werden können. Subtrahiert man von beiden Theilen der Gleichung 5, so erhält man

$$\begin{array}{r} x + 5 = 12 \\ -5 = -5 \\ \hline x \quad = 12 - 5 \end{array}$$

Es wurde hier das Glied + 5 von dem einen Theile der Gleichung weggenommen, und mit dem entgegengesetzten Zeichen in den andern Theil übertragen.

Addiert man zu beiden Theilen der Gleichung

$$\begin{array}{r} 5x = 20 - 3x \\ 3x = \quad + 3x \\ \hline 5x + 3x = 20 \end{array}$$

3 x, so erhält man auch hier wurde das Glied — 3 x von einem Theile der Gleichung in den andern als + 3 x, also mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen. Dieses kann mit jedem Gliede geschehen, ohne dass die Gleichung gestört wird. Kommen auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Glieder mit denselben Zeichen vor, so kann man sie geradezu weglassen. Z. B. aus $5x - 3 = 8 + x - 3$ wird $5x = 8 + x$. Multipliciert man beide Theile einer Gleichung mit einer und derselben Zahl, so wird die Gleichung nicht gestört. Z. B. Multiplicieren wir beide Theile der Gleichung $7 + 8 = 20 - 5$ mit 3, so erhalten wir $(7 + 8) . 3 = (20 - 5) . 3$

2. Grundsatz. Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt gleiche Producte.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man in einer Gleichung die Brüche wegschaffen, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multipliciert. Z. B.

Aus $\frac{x}{3} - 2 = 5$ erhält man $x - 6 = 15$

„ $\frac{2x}{5} + 1 = \frac{x}{2}$ „ „ $6x + 15 = 5x$

Eine Gleichung wird auch nicht gestört, wenn man beide Glieder durch eine und dieselbe Zahl dividiert. Z. B.

$$(7 + 8) : 3 = (20 - 5) : 3 .$$

3. Grundsatz. Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt gleiche Quotienten.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Satz dient dazu, eine Gleichung, deren Glieder einen gemeinschaftlichen Factor haben, abzukürzen. Z. B. $6\,x = 30$ gibt $x = 5$.

Nun zeige der Lehrer, wie man mit Hilfe der soeben erlernten Sätze eine Gleichung auflöst, und lasse aus dem Vorgehen hiebei die Regeln abstrahieren. Es sei z. B. die Gleichung $\frac{5\,x}{2} = \frac{2\,x}{3} + 11$ aufzulösen.

$$\frac{5\,x}{2} = \frac{2\,x}{3} + 11$$

Wir schaffen zuerst die Brüche weg, indem wir beide Theile der Gleichung mit dem kl. g. Vielfachen der Nenner 2 und 3, d. i. mit 6 multiplicieren, und erhalten

$$15\,x = 4\,x + 66$$

Nun setzen wir das Glied $4\,x$, welches die Unbekannte enthält, in den ersten Theil der Gleichung, und bekommen

$$15\,x - 4\,x = 66\,,$$

hier reduciert, gibt

$$11\,x = 66\,,$$

und endlich durch den gemeinschaftlichen Factor 11 dividiert, bekommen wir $x = 6$.

Um uns von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, setzen (substituieren) wir den gefundenen Wert für die Unbekannte in Gleichung und reducieren zu beiden Seiten. Erhalten wir hierdurch zu beiden Seiten dieselbe Zahl, so ist die Gleichung richtig, sonst nicht.

$$\frac{5\,.\,6}{2} = \frac{2\,.\,6}{3} + 11$$
$$15 = 15$$

Es sei nun die Gleichung $3\,(2\,x - 12) + 8 = 2 - 9\,x$ aufzulösen. Hier kommt ein zusammengesetzter durch eine Klammer verbundener Ausdruck vor, der mit 3 multipliciert werden soll. Verrichten wir diese Operation, so erhalten wir $6\,x - 36 + 8 = 2 - 9\,x$.

Bringen wir nun alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in den ersten Theil der Gleichung und alle übrigen in den zweiten Theil, so entsteht

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$6x + 9x = 2 + 36 - 8,$$

reducieren wir in beiden Theilen, so haben wir

$$15x = 30,$$

und die Unbekannte von ihrem Coefficienten befreit, indem man beide Theile durch denselben dividiert, gibt $x = 2$.

Nachdem der Lehrer mehrere Beispiele auf diese Art mit den Schülern durchgeführt hat, lasse er für die Auflösung einer Gleichung (des ersten Grades) mit einer Unbekannten den ganzen Vorgang in folgende Regeln zusammenfassen:

1. Enthält die Gleichung Brüche, so werden diese weggeschafft, indem man alle Glieder der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner derselben multipliciert, wodurch ganze Zahlen entstehen. (Wegschaffung der Brüche.)

2. Wenn in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vorkommen, so werden die durch Klammern angezeigten Operationen wirklich ausgeführt (Auflösung der Klammern)

3. Man bringe alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten in den einen (gewöhnlich ersten) Theil, der Gleichung, und alle bekannten Glieder dagegen in den andern Theil. (Transponieren.)

4. Man reduciere auf beiden Seiten der Gleichung so weit als möglich. (Reducieren.)

5 Man befreie die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem, man beide Theile der Gleichung durch denselben dividiert (Division durch den Coefficienten der Unbekannten.)

Beispiele.

$$5x + 5 = 3x + 21$$

Auflösung. $5x - 3x = 21 - 5$ Probe. $5 \cdot 8 + 5 = 3 \cdot 8 + 21.$

$2x = 16$ $\quad 45 = 45$

$x = 8$

2) $5(3x - 2) + 4 = 2(3x - 1) + 5$

Auflösung. $15x - 10 + 4 = 6x - 2 + 5$

$15x - 6x = -2 + 5 + 10 - 4$

$9x = 9$

$x = 1$

Probe. $5(3-2) + 4 = 2(3-1) + 5$

$5 + 4 = 4 + 5$

$9 = 9.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$3)\ \frac{5\,x}{3} + \frac{2\,(x-3)}{5} - 4 = 2\,(x-1) + \frac{11}{15}$$

Auflösung.
$$\begin{aligned} 25\,x + 6\,(x-3) - 60 &= 30\,(x-1) + 11 \\ 25\,x + 6x - 18 - 60 &= 30\,x - 30 + 11 \\ 25\,x + 6x - 30\,x &= -30 + 11 + 18 + 60 \\ x &= 59 \end{aligned}$$

Probe.
$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \cdot 59 + \frac{2\,(59-3)}{5} - 4 &= 2\,(59-1) + \frac{11}{15} \\ 1475 + \quad 336 - 60 &= 1740 + 11 \\ 1751 &= 1751 \end{aligned}$$

Auflösungsaufgaben in Močnik's Arithmetik für Bürgerschulen S. 17 und 18. A. K. VII. S. 13 bis 17.

Nun zeige der Lehrer, wie Rechnungsaufgaben mit Hilfe der Gleichungen gelöst werden können. Da hier nicht allgemein giltige Regeln angegeben werden können, sondern Übung und Erfahrung nöthig sind, so zeige der Lehrer gleich an vorliegenden Beispielen, wie die Aufstellung einer Gleichung nach den in der Aufgabe gegebenen Bedingungen geschehen kann. Leichtere Aufgaben lasse er nicht nur algebraisch, sondern auch ohne Ansatz einer Gleichung nur durch Schlüsse lösen.

Es sei z. B. die Aufgabe zu lösen: Man soll eine Zahl suchen, deren 5faches um 5 vermehrt, diese Summe durch 5 dividiert, und den Quotienten um 5 vermindert, 5 zum Unterschiede gibt.

Der Lehrer sage: Wir denken uns, die zu suchende Zahl sei uns schon bekannt, sie heiße x. Wieviel ist das 5fache von x? (5 x wird angeschrieben.) Um wieviel soll das 5fache vermehrt werden? Was haben wir daher zu 5 x noch hinzuzugeben? $(5\,x + 5)$ Wir denken uns, dass diese Summe durch 5 zu dividieren sei. $\left(\frac{5\,x+5}{5}\right)$. Um wieviel soll der Quotient vermindert werden? Wie zeigen wir dieses an? $\left(\frac{5\,x+5}{5} - 5\right)$ Welcher Zahl muss dieser Unterschied gleich sein? Wir erhalten also die Gleichung

$$\frac{5\,x+5}{5} - 5 = 5,$$ welche wir nun auflösen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$5x + 5 - 25 = 25$$
$$5x = 25 + 25 - 5$$
$$5x = 45$$
$$x = 9$$

Es ist hier anzurathen die Probe auch im Kopfe machen zu lassen.

Aus dem obigen Vorgange ersehen die Schüler, dass man die Unbekannte vorläufig als bekannt annimmt, und sie nach den Bedingungen der Aufgabe gerade so behandelt als ob die Zahl schon bekannt wäre. Dadurch kommt man im allgemeinen auf einen doppelten Ausdruck für die Unbekannte, wodurch eine Gleichung entsteht.

Beispiele.

1. Wenn man zu 58 das 4fache einer Zahl addiert, so erhält man 82. Welche Zahl ist es?

Im Kopfe. Um von 58 auf 82 zu kommen, muss man 24 addieren; da nun das 4fache der zu suchenden Zahl zu 58 addiert auch 82 gibt, so ist das 4fache der zu suchenden Zahl gleich 24, und daher die Zahl selbst der 4. Theil von 24, also gleich 6.

Algebraisch. Wir nehmen an, die zu suchende Zahl sei x, so ist das 4fache derselben 4 x, daher nach der Bedingung der Aufgabe $58 + 4x = 82$

$$4x = 82 - 58 = 24$$
$$x = 6$$

Probe. $58 + 4 . 6 = 58 + 24 = 82$.

2. Ich bin jetzt 46 Jahre alt, mein Sohn 11 Jahre, sagte ein Vater; wann wird mein Sohn gerade halb so alt sein, als ich?

Im Kopfe. Nach der gesuchten Anzahl der Jahre ist das Alter des Vaters gleich 46 Jahre mehr der gesuchten Anzahl der Jahre, der Sohn 11 Jahre mehr durch gesuchte Anzahl der Jahre. Nach der Aufgabe muss also 11 mehr der gesuchten Anzahl der Jahre die Hälfte von dem gegenwärtigen Alter des Vaters, also gleich 23 mehr der Hälfte der zu suchenden Anzahl der Jahre sein. Es ist daher die gesuchte Anzahl der Jahre 23 — 11 Jahre mehr der halben gesuchten Anzahl der Jahre, daher muß die Hälfte dieser Zahl gleich 12 und die ganze Zahl gleich 24 Jahre sein.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Algebraisch. Wir nehmen wieder an, die gesuchte Zahl der Jahre sei x. Nach x Jahren ist der Sohn $11 + x$ und der Vater $46 + x$ Jahre alt; da aber der Sohn nach x Jahren halb so alt ist als der Vater, so muss das Alter des Sohnes doppelt genommen dem Alter des Vaters gleich sein. Wir erhalten daher die Gleichung

$$2\,(11 + x) = 46 + x$$
$$22 + 2\,x = 46 + x$$
$$x = 46 - 22$$
$$x = 24.$$

Aufgaben M. Arithmetik für Bürgerschulen S. 23—29.

§. 60.

Auflösung der Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten.

Der Lehrer gebe eine Gleichung mit zwei Unbekannten an, z. B. $x + 3\,y = 31$, lasse die Schüler bemerken, dass nicht nur x, sondern auch y unbekannt ist, dass also in dieser Gleichung zwei Unbekannte vorkommen. Er sage den Schülern, dass sie vorläufig y als eine bekannte Zahl betrachten und x bestimmen sollen. Sie erhalten $x = 31 - 3\,y$. Die Schüler sehen, dass sie für x erst dann einen bestimmten Wert erhalten können, wenn ihnen y bekannt ist. Der Wert von y kann nun entweder unmittelbar gegeben werden, oder es kann für y eine Gleichung mit lauter bekannten Zahlen gegeben sein, aus welchen sich y bestimmen lässt, und in dem Ausdrucke $x = 31 - 3\,y$ substituiert werden kann, oder auch noch eine Gleichung zwischen x und y gegeben sein. Es sei also diese zweite Gleichung $3\,x + y = 21$ gegeben. Aus dieser Gleichung findet man $y = 21 - 3\,x$; setzt man nun diesen Wert von y in den obigen Ausdruck für x, so hat man

$x = 31 - 3\,(21 - 3\,x)$, also eine Gleichung mit einer Unbekannten, woraus man x finden kann; denn $x = 31 - 63 + 9\,x$

$$-8\,x = -32$$
$$x = 4$$

Wird statt x der gefundene Wert 4 in die Gleichung $y = 21 - 3\,x$ gesetzt, so erhält man $y = 21 - 12 = 9$.

Es ist also $x = 4$, und $y = 9$.

Die Schüler sehen hieraus:

1. Wenn zwei Unbekannte bestimmt werden sollen, so müssen auch zwei Gleichungen gegeben sein.

2. Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen, leitet man aus den beiden Gleichungen eine dritte ab, in welcher nur eine Unbekannte vorkommt. Dieses Verfahren nennt man das Eliminieren der zweiten Unbekannten.

Nun werden den Schülern in ähnlicher Weise die gewöhnlichen drei Methoden für das Eliminieren einer Unbekannten gezeigt.

1. Die Gleichsetzungmethode (Comperationsmethode).

Der Lehrer gebe z. B. die Gleichungen an,

$$5x + 6y = 27 \ldots\ldots 1)$$
$$2x - y = 4 \ldots\ldots 2)$$

lasse sie aus jeder der beiden Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte suchen, indem man vorläufig die andere Unbekannte als bekannt ansieht, und lasse dann die beiden Werte einander gleich setzen.

Aus 1. folgt $x = \frac{27 - 6y}{5}$

„ 2. „ $x = \frac{4 + y}{2}$

daher $\frac{27 - 6y}{5} = \frac{4 + y}{2}$

Man findet $y = 2$. Wird dieser Wert in der Gleichung 1. substituiert, so erhält man $5x + 6.2 = 27$ und hieraus $x = 3$.

2. Substitutionsmethode. Man sucht den Wert für eine Unbekannte aus einer dargegebenen Gleichungen und substituiert denselben in die andere Gleichung. Z. B.

$$5x + 6y = 27 \ldots\ldots 1)$$
$$2x - y = 4 \ldots\ldots 2)$$

Aus 1) erhalten wir $x = \frac{27 - 6y}{5}$.

Substituieren wir diesen Wert in 2), so erhalten wir $2 . \frac{24 - 6y}{5} - y = 4$, woraus sich $y = 2$ ergibt. Diesen Wert in 1) substituiert erhalten wir $x = 3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man macht in beiden Gleichungen die Coefficienten der zu eliminierenden Unbekannten einander gleich, indem man die Gleichungen mit entsprechenden Factoren multipliciert, und addiert die neuen Gleichungen, wenn die gleichen Coefficienten ungleiche, und subtrahiert sie, wenn sie gleiche Vorzeichen haben. Z. B.

$$5x + 6y = 27$$
$$2x - y = 4$$

Multiplicieren wir die erste Gleichung mit 2 und die zweite mit 5, so erhalten wir.

$$10x + 12y = 54$$
$$10x - 5y = 20$$

Wird die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert, so ergibt sich

$$17y = 34$$
$$y = 2$$

Multipliciert man die zweite Gleichung mit 6 und addiert sie zur ersten, so erhält

$$\begin{array}{r} 5x + 6y = 27 \\ 12x - 6y = 24 \\ \hline 17x \qquad = 51 \end{array}$$
$$x = 3.$$

Wenn eine Gleichung drei oder mehrere Unbekannte enthält, so müssen die Bedingungen derselben von der Art sein, dass sich ebenso viele wesentlich verschiedene Gleichungen formieren lassen, als Unbekannte sind, sonst ist die Aufgabe unbestimmt.

Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten löst man auf, indem man nach einer der angeführten drei Methoden durch wiederholtes Eliminieren eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten sucht, und in ähnlicher Weise die übrigen Unbekannten bestimmt. Es seien z. B. die Gleichungen gegeben:

$$2x + 4y - 3z = 22 \quad \ldots\ldots 1)$$
$$4x - 2y + 5z = 18 \quad \ldots\ldots 2)$$
$$6x + 7y - z = 63 \quad \ldots\ldots 3)$$

Wir eliminieren aus diesen drei Gleichungen z, indem wir die dritte Gleichung mit 3 multiplicieren, und die erste Gleichung davon abziehen.

$$\begin{array}{r} 18x + 21y - 3z = 189 \\ 2x + 4y - 3z = 22 \\ \hline 16x + 17y \qquad = 167 \quad \ldots\ldots 4) \end{array}$$

Nun haben wir eine Gleichung mit den zwei Unbekannten x und y. Wir brauchen aber noch eine zweite Gleichung mit den Unbekannten x und y. Diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erhalten wir, wenn wir z aus 2) und 3) wegschaffen, indem wir 3. mit 5. multiplicieren und zu 2) addieren.

$$\begin{array}{rcl} 4\,x - 2\,y + 5\,z & = & 18 \\ 30\,x + 35\,y - 5\,z & = & 315 \\ \hline 34\,x + 33\,y \qquad & = & 333 \;\ldots\ldots\; 5) \end{array}$$

Nun haben wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, nämlich:

$$16\,x + 17\,y = 167$$
$$34\,x + 33\,y = 333$$

Eliminieren wir hier mittelst der Comperationsmethode x, so erhalten wir aus 4)

$$x = \frac{167 - 17\,y}{16}$$

und aus 5) . . . $x = \dfrac{333 - 33\,y}{34}$

daher $\dfrac{167 - 17\,y}{\overset{8}{\cancel{16}}} = \dfrac{333 - 33\,y}{\overset{17}{\cancel{34}}}$

$$2839 - 289\,y = 2664 - 264\,y$$

und hieraus $\quad -25\,y = -175$

$$y = 7.$$

Dieser Wert von y in 4) substituiert, erhalten wir $x = 3$, und die Werte von x und y in 3) substituiert gibt $z = 4$.

Das Verfahren, um Aufgaben zu lösen, welche auf Gleichungen mit zwei Unbekannten führen, ist im allgemeinen dasselbe, wie das im §. 58 gelehrte.

Wenn sich eine der Unbekannten durch die andere unmittelbar bestimmen läßt, so kann man solche Aufgaben auch durch eine Gleichung mit einer Unbekannten auflösen.

Am besten werden Beispiele die Sache erläutern:

1. In einem Landtage, in welchem 64 Abgeordnete stimmten, wurde ein Antrag mit einer Stimmenmehrheit von 10 angenommen. Wieviele stimmten dafür, wieviele dagegen?

Mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es sei die Anzahl der Abgeordneten, welche für den Antrag stimmten, x, und jene der Gegner y; so muss die Summe aus x und y gleich 64 sein, und da erstere um 10 mehr waren, so muss die Differenz aus x und y gleich 10 sein. Wir erhalten daher die zwei Gleichungen

$$x + y = 64$$
$$x - y = 10$$

und hier aus $x = 37$ und $y = 27$.

Mittelst einer Gleichung mit einer Unbekannten

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Ist die Anzahl der Abgeordneten, welche für den Antrag stimmten x, so ist jene der Gegner 64 — x, und die Differenz zwischen beiden Ausdrücken muss der Aufgabe nach gleich 10 sein. Wir erhalten daher die Gleichung $x - (64 - x) = 10$, hieraus $x = 37$ und $64 - x = 64 - 37 = 27$.

2. Ein Wirt hat zweierlei Weine, von dem ersten kostet das Hl 30 Thaler, von dem zweiten 16 Thaler; er will hieraus 7 Hl mischen, das Hl zu 20 Thaler. Wieviel Hl muss er von jeder Gattung zur Mischung nehmen?

Mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es sei die Anzahl der Hektoliter, welche von der besseren Sorte zur Mischung genommen werden x und jene der minderen y, so ist $x + y = 7$. x Hektoliter der ersten Sorte kosten 30 x Thaler und die y Hektoliter der zweiten Sorte 16 y Thaler, daher kostet der ganze zur Mischung verwendete Wein 30 x Thaler mehr 16 y Thaler. Das Hektoliter der Mischung soll aber 20 Thaler kosten, daher 7 Hektoliter $20 \times 7 = 140$ Thaler. Wir haben also die zwei Gleichungen $x + y = 7$

$30x + 16y = 140$ und hier aus $x = 2$ und $y = 5$.

Mittelst einer Gleichung mit einer Unbekannten. Ist die Anzahl der Hektoliter, welche von der besseren Sorte zur Mischung verwendet werden x, so ist jene der minderen Sorte 7 — x, daher ist 30 x Thaler der Wert der ersten und 16 (7 — x) Thaler der Wert der zweiten Sorte. Beide Werte müssen offenbar dem Werte der ganzen Mischung d. i. $20 \times 7 = 140$ Thaler gleich sein. Wir erhalten daher die Gleichung

$$30x + 16(7 - x) = 140.$$

Auflösungsaufgaben in Močniks Arithmetik für Bürgerschulen II. S. 21 und 22. A. K. V.I. S. 14 und 15.

Anwendung der Gleichungen mit zwei Unbekannten M. S. 29 bis 34. A. K. VII. S. 16 bis 24.

Wiederholungsaufgaben M. S. 34 bis 37.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Siebenter Abschnitt.

Quadrieren, Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 61.

Der Lehrer lasse eine Zahl z. B. 3 2-, 3-, 4mal als Factor anschreiben und die Multiplication verrichten.

als: $3 \times 3 = 9$

$3 \times 3 \times 3 = 27$

$3 \times 3 \times 3 = 81$

Er weise darauf hin, dass die Producte 9, 27, 81 aus lauter gleichen Factoren bestehen.

Ein Product aus gleichen Factoren nennt man eine Potenz. (Würde.)

Jeder der gleichen Factoren heißt die Wurzel der Potenz.

9 ist die 2. Potenz von 3, 27 ist die 3. und 81 die 4. Potenz von 3.

Eine Zahl zur 2., 3., 4.,... Potenz erheben heißt, diese Zahl 2 mal, 3 mal, 4 mal... als Factor setzen.

Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal die Wurzel als Factor gesetzt wurde, heißt der Exponent.

Des kürzeren Ausdruckes wegen, pflegt man, um anzuzeigen, dass eine Zahl auf eine Potenz erhoben werden soll, dem Exponenten der Potenz rechts etwas über der Wurzel hinzuschreiben. Z. B.

statt 3×3 schreibt man 3^2

„ $3 \times 3 \times 3$ „ „ 3^3

3^2, 4^3 u. s. w. wird gelesen: 3 zur zweiten, 4 zur dritten (Potenz) u. s. w.

Die zweite Potenz einer Zahl wird auch ihr Quadrat, und die dritte Potenz ihr Cubus genannt.

Die Wurzel einer Potenz wird die Quadratwurzel, Cubikwurzel, vierte, fünfte u. s. w. Wurzel genannt, je nachdem sie zum Quadrat, Cubus, zur vierten, fünften Potenz u. s. w. erhoben wurde.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$4 = 2 \times 2, \quad 27 = 3 \times 3 \times 3, \quad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Wir haben hier die Zahlen 4, 27, 16, 3125 in lauter gleiche Factoren zerlegt.

Das Verfahren, eine gegenbene Zahl in lauter gleiche Factoren zu zerlegen, nennt man das Wurzelausziehen. Aus einer gegebenen Zahl die 2., 3., 4.,... Wurzel ausziehen heißt, eine Zahl finden, die 2 mal, 3 mal, 4 mal... als Factor gesetzt, die gegebene Zahl zum Producte gibt.

Das Wurzelausziehen wird dadurch angezeigt, dass man der gegebenen Zahl das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ vorsetzt, was früher mit dem Buchstaben r, als Anfangsbuchstaben des Wortes radix (Wurzel) bezeichnet wurde. In die Öffnung des Wurzelzeichens setzt man die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Wurzel ausgezogen wurden soll, und die man den Wurzelexponenten heißt. $\sqrt[3]{64}$ bedeutet die 3. Wurzel aus 64. Der Exponent 2 wird nicht gesetzt; $\sqrt{25}$ bedeutet daher die 2. Wurzel aus 25.

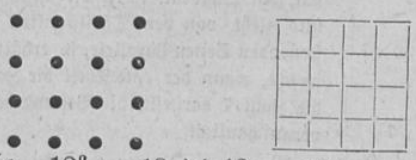
I. Quadrieren.

§. 62.

Der Lehrer lasse mehrere Zahlen mit sich selbst multiplicieren, und sage dann:

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliciert, so heißt das Product das Quadrat dieser Zahl.

Diese Benennung hat darin ihren Grund, weil sich die Menge der Einheiten einer Quadratzahl durch ein Quadrat darstellen läßt, z. B. $4 \times 4 = 16$



Beispiele. $12^2 = 12 \times 12 = 144$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$3{\cdot}75^2 = 3{\cdot}75 \times 3{\cdot}75 = 14{\cdot}0625$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Lehrer mache die Schüler beim Quadrieren von Decimalzahlen aufmerksam, dass das Quadrat der letzteren immer doppelt so viele Decimalen enthält als die Wurzel, weshalb in einem vollständigen Quadrate immer eine gerade Anzahl der Decimalen vorkommen muss.

Hierauf lasse er die Quadrate aller einziffrigen Zahlen suchen, als:

Quadratwurzeln:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Quadrate:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

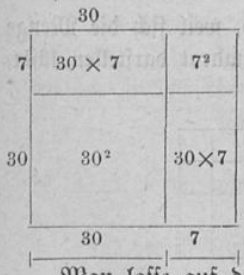
Nun lehre er die Schüler das Quadrieren durch das Verfahren kennen, wodurch das Ausziehen der Quadratwurzel begründet werden kann.

Er gebe z. B. die Zahl 37 zum Quadrieren, lasse dieselbe in Zehner und Einer zerlegen, und dann die Multiplication nach der Weise verrichten, welche die Schüler beim Multiplicieren der entgegengesetzten Zahlen kennen gelernt haben, als:

$$\begin{array}{rl} & 30 + 7 \\ & 30 + 7 \\ \hline & 30.30 + 30.7 \\ & \qquad\quad 30.7 + 7.7 \\ \hline (30 + 7)^2 = & 30^2 + 2.30.7 + 7^2 \end{array}$$

Die Schüler ersehen:

Das Quadrat einer in zwei Glieder zerlegten Zahl besteht: 1. Aus dem Quadrate des ersten Gliedes, 2. aus dem zweifachen Producte des ersten und zweiten Gliedes; 3. aus dem Quadrate des zweiten Gliedes.



Dieser Satz kann auch durch eine geometrische Figur veranschaulicht werden. Beschreibt man über eine gerade Linie, welche man in zwei Theile getheilt hat, ein Quadrat, theilt die anstoßende Seite ebenso und zieht von den Theilpunkten aus mit den anstoßenden Seiten Parallele, so erhält man diese Figur, welche, wenn der eine Theil die Zahl 30, der andere die Zahl 7 darstellt, die Bestandtheile von $(30 + 7)^2$ veranschaulicht.

Man lasse auf diese Art das Quadrat mehrerer Zahlen z. B. 13, 27, 58 u. s. w. suchen.

Eine dreiziffrige z. B. 624 Zahl wird, um sie zu quadrieren, ebenfalls in zwei Theile zerlegt, in 620 + 4. Man erhält dann

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

$624^2 = (620 + 4)^2 = 620^2 + 2 . 620 . 4 + 4^2$; es ist aber $620^2 = (600 + 20)^2 = 600^2 + 2 . 600 . 20 + 20^2$; setzt man oben statt 620^2 diesen Wert, so hat man

$$624^2 = 600^2 + 2 . 600 . 20 + 20^2 + 2 . 620 . 4 + 4^2.$$

Schreibt man diese Bestandtheile untereinander und führt die Rechnung aus, so erhält man

$624^2 =$	
600^2	360000
$2 . 600 . 20$	24000
20^2	400
$2 . 620 . 4$	4960
4^2	16
	$= 389376$

Nach demselben Vorgange erhält man

$6243^2 =$	
6000^2	36000000
$2 . 6000 . 200$	2400000
200^2	40000
$2 . 6200 . 40$	496000
40^2	1600
$2 . 6240 . 3$	37440
3^2	9
	$= 38975049$

Nimmt man auf die Stelle der Ziffern Rücksicht, so können die Nullen weggelassen werden, man braucht nur jeden folgenden Bestandtheil, da er immer um eine Null weniger enthält, um eine Stelle weiter rechts zu schieben, also:

624^2	
6^2	36
$2 . 6 . 2$	24
2^2	4
$2 . 62 . 4$	496
4^2	16
	$= 389376$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

$$\underline{6243^2} =$$

6^2	36
$2.6.2$	24
2^2	4
$2.62.4$	496
4^2	16
$2.624.3$	3744
3^2	9
	38975049

Um also eine mehrziffrige Zahl zum Quadrate zu erheben verfährt man auf folgende Weise:

1. Man erhebe die erste Ziffer links zum Quadrate.

2. Man bilde aus jeder folgenden Ziffer zwei Bestandtheile, nämlich: das doppelte Product aus ihr und der ihr vorangehenden Zahl, und ihr eigenes Quadrat.

3. Man schreibe jeden folgenden Theil unter den nächst vorhergehenden so, dass man immer um eine Stelle rechts hinausrückt, wodurch der Localwert der einzelnen Ziffern berücksichtigt wird. Die Summe dieser Theile ist das verlangte Quadrat.

Wenn eine Zahl auf Nullen endigt, so erhebt man nur die ihnen vorangehenden Ziffern zum Quadrat und hängt diesem doppelt soviele Nullen an, als die Zahl am Ende hat, z. B.

$$1200^2 = 1440000.$$

Der Lehrer lasse nun die Zahlen 1, 9, 10, 99, 100, 999, 1000 zum Quadrate erheben, und weise hiebei die Schüler darauf hin, dass das Quadrat der höchsten einzifferigen Zahl (9) nur 2 Ziffern hat; dass das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl 3 und das Quadrat der größten zweizifferigen Zahl nur 4, das Quadrat der kleinsten dreiziffrigen Zahl 5 das Quadrat der größten dreiziffrigen Zahl nur 6 Ziffern hat u. s. w. Hieraus ersehen die Schüler, dass das Quadrat einer einzifferigen Zahl nicht mehr als 2 Ziffern, das Quadrat einer zweizifferigen Zahl nicht weniger als 3 aber auch nicht mehr als 4 Ziffern haben kann, da ja das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl 3 und das Quadrat der größten zweizifferigen Zahl nur 4 Ziffern hat, u. s. w., dass also, das Quadrat um 1 oder 2 Ziffern mehr erhält, wenn die Zahl der Wurzelziffern

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

um 1 Ziffer größer wird. Das Quadrat einer Zahl hat also doppelt so viele Ziffern als die Zahl oder um eine Ziffer weniger.

Hieraus folgt, dass, wenn man ein gegebenes Quadrat einer ganzen Zahl von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, indem man zu jeder Classe 2 Ziffern nimmt, gerade so viele Classen erhalten werden als die Zahl, aus welcher das Quadrat gebildet wurde, Ziffern enthält.

Dass die letzte Classe zur Linken auch nur eine Ziffer enthalten kann, folgt daraus, dass die höchste Stelle der Wurzel nur ihr eigenes Quadrat gibt, welches auch einziffrig sein kann.

Da jede Decimale im Quadrate zwei Decimalen gibt, so müssen die Decimalen vom Decimalzeichen aus nach rechts eingetheilt werden.

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 53 und 54.

II. Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 63.

Der Lehrer gebe die Quadrate mehrerer einzifferigen Zahlen an und frage, welche Zahl man zum Quadrate erheben müsse, um die gegebene Zahl zu erhalten, z. B. Welche Zahl muss man mit sich selbst multiplicieren, um die Zahl 36 zum Producte zu erhalten? u. s. w.

Die Zahl, welche mit sich selbst multipliciert, eine andere gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt die Quadratwurzel dieser Zahl. Welche Zahl ist die Quadratwurzel aus 4, 16 25?.

Eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert, die gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt aus der Zahl die Quadratwurzel ausziehen.

Es ist $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{81} = 9$

Sowie das Addieren und Subtrahieren, das Multiplicieren und Dividieren entgegengesetzte Operationen sind, so ist auch das Quadrieren dem Ausziehen der Quadratwurzel entgegengesetzt. Daher zeige der Lehrer recht genau, wie beim Quadrieren die aus den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wurzelziffern erhaltenen Bestandtheile des Quadrates in diesem zusammengesetzt wurden, um sie beim Ausziehen der Quadratwurzel ebenso auseinander nehmen zu können.

Es sei z. B. die Zahl 374 zum Quadrate zu erheben und aus dem gefundenen Quadrate die Quadratwurzel zu ziehen. Der Lehrer stelle zur Erleichterung der Vergleichung das Quadrieren und Ausziehen der Quadratwurzel neben einander.

374^2					$\sqrt{13}$	98	76	$= 374$
$3^2 \ldots 9$				.....	9			
				.....	4	98		$: 6 \ldots 2.3$
$2.3.7 \ldots 4$	2			.....	4	2		
$7^2 \ldots$	49			.....		49	76	$: 74 \ldots 2.37$
$2.37.4 \ldots$	29	6		.....		29	6	
$4^2 \ldots$		16		.....			16	
	13	98	76		=	==	==	

Theilt man die Quadratzahl von rechts nach links in Classen zu zwei Ziffern, so sieht man, dass in der ersten Classe links (13) das Quadrat der ersten Wurzelziffer ganz vorkommt, dass sich das doppelte Product der zwei ersten Ziffern bis in die erste Stelle der zweiten Classe erstreckt, das Quadrat der zweiten Ziffer vollständig in der zweiten Classe (98) vorkommt, das doppelte Product aus den zwei ersten Ziffern und der dritten bis in die erste Ziffer der dritten Classe (76) reicht und das Quadrat der dritten Ziffer wieder vollständig in der dritten Classe (76) enthalten ist. Sollen wir nun aus der Zahl 139876 die Quadratwurzel ausziehen, so theilen wir dieselbe von rechts nach links in Classen, von zwei Ziffern; wir erhalten aus unserer gegebenen Zahl 3 Classen.

Da das Quadrat der ersten Wurzelziffer in der ersten Classe enthalten ist, so suchen wir, um die erste Wurzelziffer zu finden eine Zahl, deren Quadrat der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist; diese Zahl ist 3. Da beim Wurzelausziehen der entgegengesetzte Weg der Quadrierung eingeschlagen werden muss, so müssen wir bei der Wurzelausziehung nach und nach alle Posten abziehen, die wir bei der Quadrierung addiert haben, daher ziehen wir das Quadrat der ersten gefundenen Ziffer 3, also 9, von der ersten Classe 13 ab. Es bleibt 4. Wenn wir zum Reste 4 die nächste Classe 98 herabsetzen, so müssen in der hiedurch erhaltenen Zahl 498 jene Bestand-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

heile enthalten sein, welche die zweite Wurzelziffer im Quadrate erzeugt, d. i. das Product aus der zweiten Wurzelziffer und der doppelten ersten und das Quadrat der zweiten Wurzelziffer. Das doppelte Product aus der ersten und zweiten Wurzelziffer erstreckt sich aber nur bis zur ersten Stelle der zweiten Classe, also bis zu 9, daher können wir den zweiten Wurzeltheil finden, wenn wir 49 d. i. die Zahl 498 mit Hinweglassung der letzten Ziffer rechts durch das doppelte der gefundenen Wurzelziffer, also durch $2 \times 3 = 6$ dividieren. Wir sagen nun: 6 ist in 49 7 mal enthalten. Die zweite Classe enthält das vollständige Quadrat der zweiten Wurzelziffer, daher setzen wir dasselbe unter diese Classe. Ziehen wir nun die Bestandtheile der Quadratzahl, welche die zweiten Wurzelziffer erzeugt, nämlich $2 . 3 . 7 = 42$ und $7^2 = 49$ an den gehörigen Stellen von 498 ab, so bleibt als Rest 29.

Setzen wir zu diesem Reste nun die dritte Classe 76 herab, so erhalten wir die Zahl 2976. In dieser müssen jene Bestandtheile des Quadrates enthalten sein, welche die dritte Wurzelziffer erzeugt, nämlich das doppelte Product aus ihr und dem bereits gefundenen Wurzeltheile und ihr Quadrat. Da sich aber das genannte Product nur bis zur ersten Ziffer der dritten Classe erstreckt, so dividieren wir, um die dritte Wurzelziffer zu erhalten die Zahl 2976 mit Hinweglassung der letzten Ziffer d. i. die Zahl 297 durch den doppelten Theil der bereits gefundenen Wurzel, also durch $2 . 37 = 74$ und wir erhalten 4, deren im Quadrate erzeugten Bestandtheile $2 . 37 . 4 = 296$ und $4^2 = 16$ an den gehörigen Stellen von 2976 subtrahiert keinen Rest geben.

Kürzer verfährt man, wenn man die beiden Bestandtheile, welche jede neue Wurzelziffer erzeugt, sogleich zu dem Doppelten der vorhergehenden Wurzelziffern, nämlich zum Divisor hinzusetzt und das Product aus der hieraus entstandenen Zahl und der neuen Wurzelziffer subtrahiert. Unsere frühere Rechnung auf diese Art durchgeführt ist dann:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \sqrt{13|98|76} & = & 374 \\
3^2 \ldots & 9 & & \\
\hline
 & 498 & : & 67 \\
67.7 \ldots & 469 & & \\
\hline
 & 2976 & : & 744 \\
744.4 \ldots & 2976 & & \\
\hline
\end{array}$$

Noch kürzer: Man subtrahiert das Product aus dem jedesmaligen neuen Divisor, nachdem man demselben die neue Wurzelziffer angehängt hat, sogleich während des Multiplicierens vom Dividende, als:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{13|98|76} & = 374 \\ 498 & : 67 \\ \underline{2976} & : 744 \end{array}$$

Hieraus ergeben sich für das Ausziehen der Quadratwurzel folgende Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von rechts nach links in Abtheilungen oder Classen von je zwei Ziffern; die höchste Classe kann auch nur aus einer Ziffer bestehen.

2. Man suche eine Zahl, deren Quadrat der ersten Classe links gleich oder nächst kleiner ist, schreibe diese als erste Ziffer der Wurzel an, und subtrahiere ihr Quadrat von der ersten Classe.

3. Zum Reste setze man die nächste Classe, dividiere die hieraus entstandene Zahl mit Hinweglassung der niedrigsten Stelle durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so gibt der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel. Diese schreibe man sowohl zur Wurzel als auch zum Divisor.

4. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neu gefundenen Wurzelziffer und subtrahiere das Product von dem Dividende mit Zuziehung der vorher weggelassenen Ziffer sogleich während des Multiplicierens.

5. Man setze zum Reste wieder die nächste Classe herab, und wiederhole dieses Verfahren bis man alle Classen der gegebenen Zahl in Rechnung gezogen hat.

Ist eine Wurzelziffer 0, so wird sogleich die nächste Classe herabgesetzt, diese Null muss aber nicht nur in die Wurzel, sondern auch zu dem Divisor gesetzt werden, z. B.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{36|58|16} & = 604 \\ \underline{5816} & : 1204 \end{array}$$

Ist aus einem Decimalbruche oder aus einer ganzen Zahl mit einem angehängten Decimalbruche die Quadratwurzel zu ziehen, so theile man vom Decimalzeichen aus die Zahl nach der linken und rechten Seite hin in Classen ein, hänge, wenn die Anzahl der Decimalen eine ungerade ist, hinten eine Null an und ziehe die Qua-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

dratwurzel wie aus einer ganzen Zahl, setze aber in der Wurzel das Decimalzeichen, bevor die erste Classe der Decimalen in Rechnung gezogen wird, z. B.

$\sqrt{10|32{\cdot}97|96} = 32{\cdot}14$ $\quad$ $\sqrt{0{\cdot}06|25} = 0{\cdot}25$ $\quad$ $\sqrt{0{\cdot}37|5_0} = 0{\cdot}61$

132 : 62	225 : 45	150 : 121
897 : 641		29 Rest.
25696 : 6424		

Wenn beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest bleibt, so ist die gegebene Zahl kein vollständiges Quadrat; in diesem Falle ist die Wurzel nicht ganz genau, sie ist irrational; sie kann jedoch bis auf jeden beliebigen Grad von Genauigkeit gefunden werden, wenn man dem zuletzt erhaltenen und jedem folgenden Reste zwei Nullen anhängt und das Verfahren, wie vorher, fortsetzt, z. B.

$\sqrt{23} = 4{\cdot}79$
700 : 87
9100 : 949
559

Um die Schüler auf das abgekürzte Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel zu führen, lasse er aus einer entsprechenden Zahl, z. B. aus 43, die Quadratwurzel ziehen;

Ohne Abkürzung:

$\sqrt{43} = 6{\cdot}557438$
700 : 125
7500 : 1305
97500 : 13107
5751 00 : 131144
505 2400 : 1311483
111 795100 : 13114868
6 876156

Abgekürzt

$\sqrt{43} = 6{\cdot}557438$
700 : 125
7500 : 1305
97500 : 13107
5751 : 13114
505
112
7

Bei Vergleichung beider Verfahrungsarten ersehen die Schüler, dass man, wenn es sich darum handelt, viele Decimalen zu entwickeln, die Arbeit bedeutend abkürzen kann. Wenn man nämlich, nachdem man mehr als die Hälfte der verlangten Wurzelziffern gefunden hat, anstatt eine neue Classe von Nullen anzuhängen, im neuen Divisor die letzte Ziffer weglässt und die folgenden Wurzelziffern durch die abgekürzte Division entwickelt.

Zur Begründung dieses Verfahrens merke man: Das Ausziehen der Quadratwurzel unterscheidet sich von einer Divisionsaufgabe, dass bei letzterer der Divisor beständig bleibt, beim Ausziehen der Quadratwurzel aber für jeden neuen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wurzeltheil neu aufgestellt werden muß. Der Quotient ist in jeder Aufgabe von den höchsten Stellen des Dividendes und des Divisors abhängig, alle späteren Stellen dienen nur zu genauen Bestimmung des Restes. Wie die neben befindliche Darstellung zeigt, sind diese höheren Stellen der Divisoren beim Wurzelziehen beständig dieselben, besonders dann, wenn man schon die Hälfte der Ausarbeitung gemacht hat.

Werden die Schüler hingewiesen, daß man einen gemeinen Bruch quadriert, indem man sowohl Zähler als Nenner zum Quadrat erhebt; so ist es ihnen auch einleuchtend, daß man aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszieht, indem man sie sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner zieht, z. B.

$$\sqrt{\tfrac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}; \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}, \ \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}25, \ \sqrt{0{\cdot}25} = 0{\cdot}5$$

Man kann auch den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln und dann aus diesem die Quadratwurzel ziehen.

Das Quadratwurzel-Ausziehen findet seine vorzüglichste Anwendung in der Geometrie. Wir verweisen hier auf die Methodik der geometrischen Formenlehre und auf die Aufgaben im M. Arithm. für Bürgerschulen, II. Heft, S. 44 bis 46.

Hier wollen wir nur auf die eine Anwendung für die Proportionslehre hinweisen, nämlich auf die Berechnung der mittleren geometrischen Proportionale. Es sei die stetige geometrische Proportion $3 : x = x : 12$ gegeben, so ist $x \times x = 3 \times 12$ oder $x^2 = 36$, und daher $x = \sqrt{36} = 6$.

Die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

III. Cubieren.

§. 64.

Der Lehrer lasse mehrere Zahlen mit sich selbst und das hieraus erhaltene Quadrat noch einmal mit der Zahl selbst multiplicieren z. B. 6, 12, 150, 0·5, 0·25, 1·037, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$ u. s. w.

Er lasse die Schüler hierbei bemerken, daß sie diese Zahlen dreimal als Factor gesetzt haben, und sage, daß man das erhaltene Product den Cubus der Zahl heißt:

Eine Zahl zum Cubus erheben oder cubieren heißt, sie dreimal als Factor setzen.

Beim Cubieren der Decimalbrüche weise der Lehrer darauf hin, daß der Cubus dreimal soviel Decimalen enthält, als der gegebene

Decimalbruch, und dass daher in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen ein Vielfaches von 3 sein muss.

Nun lasse der Lehrer die dritten Potenzen aller einziffrigen Zahlen suchen, als:

Cubikwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Cubus: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Nun lehre man die Schüler das Cubieren durch das Verfahren kennen, wodurch das Ausziehen der Cubikwurzel begründet wird.

Der Lehrer lasse eine zweiziffrige Zahl, z. B. $45 = 40 + 5$ zum Cubus erheben. Ihr Quadrat ist

$40.40 + 2.40.5 + 5.5$, wird dieses noch mit $40 + 5$ multipliciert, so hat man:

$$\begin{array}{rl}
 & 40.40 + 2.40.5 + 5.5 \\
 & 40 + 5 \\
\hline
 & 40.40.40 + 2.40.40.5 + 40.5.5 \\
 & \qquad\qquad 40.40.5 + 2.40.5.5 + 5.5.5. \\
\hline
(40+5)^3 = & 40^3 + 3.40^2.5 + 3.40.5^2 + 5^3
\end{array}$$

Hieraus ersehen wir:

Der Cubus einer in zwei Glieder zerlegten Zahl besteht:

1. Aus dem Cubus des ersten Gliedes.
2. Aus dem Producte des dreifachen Quadrates des Gliedes mit dem zweiten Gliede.
3. Aus dem Producte des dreifachen ersten Gliedes mit dem Quadrate des zweiten Gliedes.
4. Aus dem Cubus des zweiten Gliedes.

Man lasse auf diese Art den Cubus mehrerer Zahlen, z. B. 27, 59, 92 u. s. w. suchen.

Nun schreite der Lehrer zum Cubieren einer dreiziffrigen Zahl; er lasse dieselbe ebenfalls zunächst in zwei Glieder zerlegen, z. B. 436. $436^3 = (430 + 6)^3 = 430^3 + 3.430^2.6 + 3.430.6^2 + 6^3$; es ist aber $430^3 = (400 + 30)^3 = 400^3 + 3.400^2.30 + 3.400.30^2 + 30^3$.

Wenn wir nun diesen Wert oben anstatt 430^3 setzen, so erhalten wir $436^3 = 400^3 + 3.400^2.30 + 3.400.30^2 + 30^3 + 3.430^2.6 + 3.430.6^2 + 6^3$. Schreiben wir diese Bestandtheile unter einander und berechnen sie wirklich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
\begin{array}{rr}
\underline{436^3 =} & \\
400^3 \;\ldots\ldots & 64000000 \\
3 \,.\, 400^2 \,.\, 30 \ldots\ldots & 14400000 \\
3 \,.\, 400 \,.\, 30^2 \;\ldots\ldots & 1080000 \\
30^3 \;\ldots\ldots & 27000 \\
3 \,.\, 430^2 \,.\, 6 \ldots\ldots & 3328200 \\
3 \,.\, 430 \,.\, 6^2 \ldots\ldots & 46440 \\
6^3 \;\ldots\ldots & 216 \\
\hline
 & = 82881856
\end{array}
$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$
\begin{array}{rr}
\underline{4572^3 =} & \\
4000^3 \;\ldots\ldots & 64000000000 \\
3 \,.\, 4000^2 \,.\, 500 \ldots & 24000000000 \\
3 \,.\, 4000 \,.\, 500^2 \ldots & 3000000000 \\
500^3 \;\ldots\ldots & 125000000 \\
3 \,.\, 4500^2 \,.\, 70 \ldots & 4252500000 \\
3 \,.\, 4500 \,.\, 70^2 \ldots & 66150000 \\
70^3 \;\ldots\ldots & 343000 \\
3 \,.\, 457^2 \,.\, 2 \ldots & 125309400 \\
3 \,.\, 457 \,.\, 2^2 \ldots & 54840 \\
2^3 & 8 \\
\hline
 & = 95569357248
\end{array}
$$

Lassen wir in diesen beiden Beispielen die Nullen weg, so erhalten wir

$$
\begin{array}{rr}
\underline{436^3} & \\
4^3 \;\ldots & 64 \\
3 \,.\, 4^2 \,.\, 3 \;\ldots & 144 \\
3 \,.\, 4 \,.\, 3^2 \;\ldots & 108 \\
3^3 \;\ldots & 27 \\
3 \,.\, 43^2 \,.\, 6 \;\ldots & 33282 \\
3 \,.\, 43 \,.\, 6^2 \;\ldots & 4644 \\
6^3 \;\ldots & 216 \\
\hline
 & 82881856
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\underline{4572^3} & \\
4^3 \;\ldots & 64 \\
3 \,.\, 4^2 \,.\, 5 \;\ldots & 240 \\
3 \,.\, 4 \,.\, 5^2 \;\ldots & 300 \\
5^3 \;\ldots & 125 \\
3 \,.\, 45^2 \,.\, 7 \;\ldots & 42525 \\
3 \,.\, 45 \,.\, 7^2 \;\ldots & 6615 \\
7^3 \;\ldots & 343 \\
3 \,.\, 457^3 \,.\, 2 \;\ldots & 1253094 \\
3 \,.\, 457 \,.\, 2^3 \;\ldots & 5484 \\
2^3 & 8 \\
\hline
 & 95569357248
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich folgende Regeln für das Cubieren einer mehrziffrigen Zahl:

1. Die erste Ziffer links gibt ihren Cubus.

2. Jede folgende Ziffer gibt drei Bestandtheile: a) das dreifache Product aus dem Quadrate der vorhergehenden Ziffern (als Zahl für sich betrachtet) und dieser Ziffer; b) das dreifache Product aus der vorhergehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer und c) ihren eigenen Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so untereinander geschrieben, dass man mit jedem derselben um eine Stelle weiter rechts hinausrückt, wodurch der Localwert jeder einzelnen Ziffer berücksichtigt wird; sodann werden diese Theile, so wie sie stehen, addiert.

Aufgaben in M. Arithmetik für Bürgerschulen S. 49.

Der Lehrer lasse nun die Zahl, 1, 3, 9, 10, 99, 100, 999, 1000 zum Cubus erheben, und weise die Schüler darauf hin, dass der Cubus einer einzifferigen 1, 2, aber nicht mehr als 3 Ziffern haben kann, da der Cubus der höchsten einzifferigen Zahl (9) nur 3 Ziffern hat, dass der Cubus der kleinsten zweizifferigen Zahl 4 und der größten zweizifferigen Zahl nur 6 Ziffern, der Cubus der kleinsten dreizifferigen Zahl (100) 7 und der der größten dreizifferigen Zahl nur 9 Ziffern hat u. s. w. Hieraus ersehen die Schüler, dass der Cubus einer einziffriger Zahl nicht mehr als 3 Ziffern, der Cubus einer zweizifferigen Zahl nicht weniger als 4, aber nicht mehr als 6 Ziffern haben kann, da ja der Cubus der kleinsten zweizifferigen Zahl 4 und der der größten zweiziffrigen Zahl nur 6 Ziffern hat u. s. w., dass also der Cubus um 1, 2 oder 3 Ziffern mehr erhält, wenn die Anzahl der Wurzelziffer um 1 Ziffer größer wird. Da aber der Cubus der ersten Wurzelziffer auch eine oder zwei Stellen haben kann, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal soviele Ziffern als die Wurzel oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Cubus einer gegebenen Zahl von der Rechten zur Linken in Classen ein und nimmt zu jeder drei Ziffern (die erste Classe links ausgenommen, welche auch nur zwei oder gar nur eine Ziffer haben kann), so erhält man so viele Classen, als in der Wurzel Ziffern sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 65.

Der Lehrer gebe von mehreren einziffrigen Zahlen den Cubus an, und frage, welche Zahl man zum Cubus erheben müsse, um die gegebene Zahl zu erhalten, z. B. Welche Zahl muss man dreimal als Factor setzen, um zum Producte 64 zu erhalten? u. s. w. Die Zahl, welche dreimal als Factor gesetzt, eine andere gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt die Cubikwurzel dieser Zahl.

Welche Zahl ist die Cubikwurzel aus 8? Welche aus 27?

Eine Zahl suchen, welche dreimal als Factor gesetzt, die gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt aus dieser Zahl die Cubikwurzel ausziehen.

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{343} = 7$

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{512} = 8$

$\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{216} = 6$ $\sqrt[3]{729} = 9$

Um den Schülern das Verfahren, aus einer mehrzifferigen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen, möglichst zum Verständnisse zu bringen, zeige er recht genau, wie beim Cubieren die aus den Wurzelziffern erhaltenen Bestandtheile des Cubus in diesem zusammengesetzt wurden, um sie beim Ausziehen der Cubikwurzel ebenso auseinander nehmen zu können. Es sei z. B. die Zahl 246 zum Cubus zu erheben und dann aus dem erhaltenen Cubus wieder die Cubikwurzel zu ziehen.

Der Lehrer stelle zur leichteren Vergleichung das Cubieren und Ausziehen der Cubikwurzel neben einander.

246^3			$\sqrt[3]{14}$	886	936	$= 246$
$2^3 \ldots 8$			$\ldots\ldots 8$			
			$\ldots\ldots 6$	886		$: 12 \ldots 3 \cdot 2^2$
$3 \cdot 2^2 \cdot 4 \ldots 4$	8		$\ldots\ldots 4$	8		
$3 \cdot 2 \cdot 4^2 \ldots$	96		$\ldots\ldots$	93		
$4^3 \ldots\ldots$	64		$\ldots\ldots$	64		
			$\ldots\ldots 1$	062	936	$: 1728 \ldots 3 \cdot 24^2$
$3 \cdot 24^2 \cdot 6 \ldots 1$	036	8	$\ldots\ldots 1$	036	8	
$3 \cdot 24 \cdot 6^2 \ldots$	25	92	$\ldots\ldots$	25	92	
$6^3 \ldots\ldots$		216	$\ldots\ldots$		216	
14	886	936	=	==	==	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theilt man die Zahl 14886936 in Classen zu drei Ziffern, so sieht man, dass in der ersten Classe (14) der Cubus der ersten Wurzelziffer vollständig vorkommt, das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten erstreckt sich bis zur ersten Ziffer der zweiten Classe, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer mit dem Quadrate der zweiten (96) beeinflusst noch die zweite Ziffer der zweiten Classe, der Cubus der zweiten Wurzelziffer 4 liegt vollständig in der zweiten Classe. Das dreifache Product aus dem Quadrate der beiden ersten Wurzelziffern (24) mit der dritten (6) reicht bis in die erste Ziffer der dritten Classe, dreifache Product der beiden ersten Wurzelziffern mit dem Quadrate der dritten reicht bis zur zweiten Ziffer der dritten Classe und der Cubus der dritten Wurzelziffer liegt vollständig in der dritten Classe.

Gehen wir nun zum Ausziehen der Cubikwurzel.

Da in der ersten Classe 14 der Cubus der ersten Wurzelziffer ganz enthalten ist, so suchen wir eine Zahl, die zum Cubus erhoben, der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist; nun haben wir die erste Ziffer der Wurzel, also 2. Der Cubus von 2, nämlich 8, von der ersten Classe 14 subtrahiert gibt 6 als Rest. Setzen wir zum Reste die zweite Classe hinzu, so entsteht die Zahl 6886, in welcher die Bestandtheile enthalten sind, die die zweite Wurzelziffer veranlasst, d. i. das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer und dem Quadrate der zweiten und den Cubus der zweiten Wurzelziffer. Das erste Product erstreckt sich aber nur bis zur ersten Ziffer der zweiten Classe; dividieren wir daher die Zahl 6886 mit Hinweglassung der beiden letzten Ziffern rechts, also 68 durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, d. i. durch $3 . 2^2 = 12$., so erhalten wir die zweite Wurzelziffer 4. Bilden wir nun die drei Bestandtheile, welche die neue Wurzelziffer erzeugt, nämlich $3 . 2^2\ 4 = 48$, $3 . 2 . 4^2 = 96$ und $4^3 = 64$, schreiben wir jede folgende Bestandtheile um eine Stelle nach rechts und subtrahieren dann diese Zahlen von 6886, so erhalten wir den Rest 1062. Wenn wir nun zu diesem Reste die dritte Classe hinzusetzen, so enthält die hieraus entstandene Zahl 1062936 alle Bestandtheile, welche im Cubus die dritte Ziffer erzeugt, nämlich das dreifache Product aus dem Quadrate der dieser Ziffer vorhergehenden Zahl

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit ihr, welches aber nur bis zur ersten Ziffer in der dritten Classe sich erstreckt; dividieren wir daher die Zahl 1062936 mit Ausschluss der zwei letzten Ziffern, d. i. 10629 durch $3 . 24^2 = 1728$, so erhalten wir die dritte Wurzelziffer 6 u. s. w.

Aus mehreren in dieser Weise durchgeführten Beispielen erlernen die Schüler für das Ausziehen der Cubikwurzel folgendes Verfahren:

1. Man theilt die Zahl von rechts nach links in Classen von je drei Ziffern, wobei die erste Classe links auch eine oder zwei Ziffern enthalten kann.

2. Man sucht eine Zahl, deren Cubus der ersten Classe gleich oder nächst kleiner ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer in die Wurzel, und subtrahiert ihren Cubus von der ersten Classe.

3. Zu dem etwa sich ergebenden Reste setze man die zweite Classe herab, betrachte die so entstandene Zahl mit Abschluss der zwei letzten Ziffern rechts als Dividend und das dreifache Quadrat der gefundenen ersten Wurzelziffer als Divisor, der Quotient wird als zweite Wurzelziffer angeschrieben.

4. Nun bilde man die drei Bestandtheile, welche die zweite Wurzelziffer erzeugt, nämlich: das dreifache Product aus dem Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das dreifache Product aus der ersten Wurzelziffer und dem Quadrate der zweiten und den Cubus der zweiten Wurzelziffer, setzt den ersten Bestandtheil unter den Dividend und jeden folgenden Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts darunter und zieht die Summe der so gesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Einschluss der früher weggelassenen zwei Ziffern ab. Läßt sich diese Summe nicht subtrahieren, so ist die neue Wurzelziffer zu groß; man nimmt sie dann nach und nach kleiner, bis man subtrahieren kann. Sollte wieder ein Rest bleiben, so setze man hierzu die folgende Ziffercclasse, dividiere wieder mit Abschluss der zwei letzten Ziffern rechts durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzelzahl, so bekommt man die dritte Wurzelziffer. Hierauf bilde man wieder die drei Bestandtheile, welche sie im Cubus erzeugt, ziehe ihre Summe vom Dividende mit Einbeziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern ab. Nun be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

trachte man das dreifache Quadrat der von den drei gefundenen Ziffern gebildeten Zahl als Divisor u. s. w. Diese Operation wiederholt man solange bis alle Classen der gegebenen Cubikzahl herabgesetzt sind.

Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel irrational. Zum Reste setze man eine Classe von drei Nullen und wiederhole das frühere Verfahren; zum neuen Reste werden wieder drei Nullen gesetzt und dieses solange fortgesetzt, als nach dem Zwecke der Aufgabe Decimalstellen in der Wurzel gesucht werden sollen.

Wenn die gegebene Zahl auch Decimalen enthält, so theilt man diese vom Decimalzeichen an nach rechts in Classen; und wenn hiedurch die letzte Classe rechts weniger als drei Ziffern erhält, so ersetzt man die fehlenden durch Nullen. Bevor die erste Classe der Decimalen herabgesetzt wird, macht man in der Wurzel das Decimalzeichen.

Beispiele.

$$\sqrt[3]{70{\cdot}957|944} = 4{\cdot}14 \qquad \sqrt[3]{0{\cdot}584|600} = 0{\cdot}836$$

```
 64                          512
 ---                         ---
  6957 : 48                   72600 : 192
  48                          576
   12                          216
    1                           27
  ---------                   ---------
  2036944 : 5043              12813000 : 20667
  20172                       124002
    1968                        8964
      64                          216
    ----                        ------
      "                         322944 u. s. f.
```

Auf ganz ähnliche Weise, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel führe man die Schüler darauf, dass man auch die letzteren Ziffern der Cubikwurzeln durch abgekürzte Division erhalten kann, indem man nämlich den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der gefundenen Wurzelzahl mit Hinweglassung der letzten Ziffer dividiert. Der Quotient gibt dann die noch übrigen Stellen der Wurzel, z. B.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sqrt[3]{175} = 5{\cdot}5934468$$

125
50000 : 75
375
375
125
8525000 : 9075
81675
13365
729
323121 : 937443
41888
4390
640
78
4

Wird eine bestimmte Anzahl von Wurzelziffern verlangt, so sucht man mehr als die Hälfte derselben durch das gewöhnliche Verfahren und sodann die übrigen mittelst der abgekürzten Division.

Aus einem gemeinen Bruche wird die Cubikwurzel ausgezogen, indem sie aus dem Zähler und aus dem Nenner auszieht, oder indem man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt und sodann aus diesem die Cubikwurzel auszieht, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt{512}} = \frac{5}{8}\ ;\ \frac{125}{512} = 0{\cdot}244140625$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{0{\cdot}244|140|625} = 0{\cdot}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

Das Ausziehen der Cubikwurzel findet hauptsächlich bei der Körperberechnung seine Anwendung.

Aufgaben im V. R. M. S. 61 bis 63. und M. Arithmetik für Bürgerschulen II. Heft S. 53 und 54.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Achter Abschnitt.

Interessen-, Discont- und Terminrechnung.

I. Einfache Interessenrechnung.

§. 66.

Die Schüler können schon einfache Aufgaben über die Interressenrechnung erhalten, ehe sie mit der Lehre von den Proportionen bekannt sind; denn, wenn sie über die Begriffe: Capital Zins oder Interesse, Procent gehörige Aufklärungen erhalten haben, so fällt es ihnen, sobald sie im Lösen von Multiplications- und Divisionsaufgaben gehörig geübt sind, auch nicht schwer, leichte Interessenrechnungen zu lösen.

Um den Schülern die oben genannten Begriffe zu erklären, weise man sie auf verschiedene, diesbezügliche Fälle aus dem practischen Leben hin, z. B. Wer kein eigenes Haus hat, muss sich eine Wohnung mieten und dem Hausbesitzer für die Benützung derselben eine jährliche Entschädigung geben, welche man Zins nennt. Wer Waren einkaufen will, aber hiezu nicht das nöthige Geld hat, muss sich dasselbe von einem andern ausleihen, aber diesem bis er das geliehene Geld zurückzahlt, etwas Bestimmtes im Gelde entrichten, was man auch Zins nennt. Derjenige, welcher Geld darleiht, heißt Gläubiger, die Person, welche das Geld entlehnt, Schuldner und das dargeliehene Geld wird Capital genannt. Leiht z. B. A dem B 3000 fl. und zahlt B jährlich 150 fl. als Vergütung, so ist A der Gläubiger, B der Schuldner, die 3000 fl. sind das Capital und die 150 fl. der Zins oder die Interessen.

Gleich bei der Darleihung des Capitals kommen der Gläubiger und der Schuldner miteinander überein, wieviel dieser für die jähr-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liche Benützung von je 100 fl. an jenen zu bezahlen hat. Dieser verabredete Betrag für 100 fl. in einem Jahre, nennt man Procent (%), vom Lateinischen pro centum, (für, von, auf hundert) oder Zinsfuß. Wenn z. B. jemand sagt, er habe sein Geld zu 5%, 6% u. s. w. ausgeliehen, so heißt dies, dass er für je 100 fl. in einem Jahre 5, 6, u. s. w. Gulden als Vergütung empfängt, überdies aber noch den ganzen Betrag des dargeliehenen Capitales zu fordern berechtigt ist.

Für die Schüler des dritten Schuljahres wären Aufgaben, wie etwa die nachfolgenden angezeigt.

Von 100 fl, bekommt man 5 fl. Zins; wieviel von 800 fl.? 800 fl. sind 8 mal 100 fl.; daher geben 800 fl. 8 mal 5 fl. also 40 fl. Zins.

Wieviel Zins erhält man für 1 fl. Capital, wenn 100 fl. jährlich 6 fl. Zins geben?

1 fl. ist der 100. Theil von 100 fl, daher gibt auch 1 fl. Capital nur den 100. Theil von 6 fl., der 100. Theil von 1 fl. ist 1 Kreuzer, der 100. Theil von 6 fl. sind 6 Kreuzer; also gibt 1 fl. Capital 6 Kreuzer Zins. Hieraus ersehen die Schüler leicht den Rechnungsvortheil: So viele Gulden jährlichen Zins von 100 fl. Capital, soviele Kreuzer gibt 1 fl. Capital.

Wieviel Zins erhält man jährlich von 48 fl. Capital, wenn dasselbe zu 5% angelegt ist?

100 fl. Capital geben jährlich 5 fl. Zins; 1 fl. Capital gibt daher 5 Kreuzer und 48 fl. Capital geben 48 mal 5 Kreuzer, d. i. 240 kr. oder 2 fl. 40 kr. Zins.

Übungsaufgaben in III. R. M. S. 57.

Die einfache Interessenrechnung kommt unserem Lehrplane gemäß erst in der siebenten Classe vor.

Nachdem der Lehrer die Begriffe Capital, Interessen und Procent wiederholungsweise auseinandergesetzt hat, gebe er eine Aufgabe, in welcher nach den Interessen gefragt wird, und lasse sie nach der zusammengesetzten Proportion und durch Schlüsse auflösen, z. B. Wieviele Gulden Interessen tragen 5400 fl. Capital zu 5% in 3 Jahren?

100 fl. Cap. in 1 J. 5 fl. Inter.
5400 „ „ „ 3 „ x „ „

$$100 : 5400 = 5 : x$$
$$1 : 3$$

$$x = \frac{5400 \times 5 \times 3}{100}$$
$$= 810 \text{ fl. Interessen.}$$

Oder: Je 100 fl. Capital geben in 1 Jahre 5 fl. Interessen; man wird also so oftmal 5 fl. erhalten, soviele 100 fl. man aus-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

geliehen hat, so oftmal also 100 fl. in 5400 fl. enthalten sind, d. i. 5400 : 100 = 54 mal. Die Interessen für 1 Jahr betragen daher 54 mal 5 fl. oder $5 \times 54 = 270$ fl., für 3 Jahre beträgt dies 3 mal 270 fl., also 270 fl. $\times 3 = 810$ fl. Interessen.

Aus beiden Darstellungsweisen ersehen die Schüler. Die Interessen werden gefunden, wenn man das Capital mit den Procenten und der in Jahren ausgedrückten Zeit multipliciert und das Product durch 100 dividiert.

Schüler der siebenten Classe, welche ja schon im Auflösen von Ziffergleichungen geübt wurden, können hier auch mit der Formel bekannt gemacht werden:

$$J = \frac{C \times P \times Z.}{100}$$

Ist die Zeit in Monaten oder Tagen angegeben, so werden diese in Theile des Jahres verwandelt; man dividiert das Product aus dem Capitale, den Procenten und der in Jahren ausgedrückten Zeit durch 100 und im ersten Falle noch durch 12 und im zweiten Falle durch 360, z. B.

Wieviel Interessen erhält man von 3900 fl. Capital zu $4\frac{1}{2}$ % in 5 Monaten?

$$J = \frac{3900 \times 4\frac{1}{2} \times 5}{100 \times 12} = 73\frac{1}{8} \text{ fl.}$$

Wieviel Zinsen geben 8100 fl. Capital zu 5% in 48 Tagen?

$$J = \frac{8100 \times 5 \times 48}{100 \times 360} = 54 \text{ fl.}$$

Wenn die Zeitangabe mehrnamig ist, so kann man sich dieselbe in passende Theile zerlegen und die Zinserträgnisse für die einzelnen Theile suchen. Auch die Procente können zerlegt werden, z. B. Wieviel Zinsen tragen 5634 fl. Capital zu $5\frac{3}{4}$% in 3 Jahren 8 Monaten 25 Tagen?

Capital	5634 Gulden
Zinsen in 1 Jahr zu 1 %	56·34 „
„ „ 1 „ „ 5 %	281·70 „
„ „ 1 „ „ $\frac{1}{2}$ %	28·17 „
„ „ 1 „ „ $\frac{1}{4}$ %	14.085 „
„ „ 1 „ „ $5\frac{3}{4}$%	323·955 „

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zinsen in 3 Jahren	zu $5\frac{3}{4}$%	.....	971·865	Gulden
„ „ 6 Monaten	„ „	.....	161·9775	„
„ „ 2 „	„ „	.....	53·9925	„
„ „ 20 Tagen	„ „	.....	17·9975	„
„ „ 5 „	„ „	.....	4·4994	„
			1210·3319	Gulden

Um Schüler auf die Berechnung des Capitals zu führen, verfahre man ähnlich wie bei der Berechnung der Zinsen.

Wie groß ist das Capital, welches zu 5% in 3 Jahren 810 fl. Interessen trägt?

Nach der Proportion.

100 fl. Cap. in 1 Jahr 5 fl. Inter.
x „ „ „ 3 „ 810 „ „

$$5 : 810 = 100 : x$$
$$1 : 3$$

$$x = \frac{810 \times 100}{5 \times 3} = 5400 \text{ fl. Cap.}$$

Oder: Das zusuchende Capital trägt zu 5% in 3 Jahren 810 fl. Interessen, daher in 1 Jahr $\frac{810}{3}$ fl. Das Capital muss aber aus so oftmal 100 fl. bestehen, als die Procente 5 fl. in den jährlichen Interessen enthalten sind, also aus $\frac{810}{3} : 5 = \frac{810}{3 \times 5}$ mal 100 fl. d. i. $C = \frac{810 \times 100}{5 \times 3}$ fl. = 5400 fl. Capital.

Aus beiden Darstellungen ersehen die Schüler:

Das Capital wird gefunden, indem man die 100fachen Interessen durch das Product aus den Procenten und der Zeit in Jahren dividiert. Durch Buchstaben ausgedrückt.

$$C = \frac{100 \times J}{P \times Z}.$$

Berechnung der Procente. Wir geben z. B. die Aufgabe: Zu wieviel Procent muss man das Capital 5400 fl. anlegen, damit es in 3 Jahren 810 fl. Interessen trägt?

Der Lehrer lasse die Aufgabe mittelst der Proportion lösen und dann durch Schlüsse.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

5400 fl. Cap. in 3 J. 810 fl. Inter.

1 „ „ „ „ „ $\frac{810}{5400}$ „ „

100 „ „ „ „ „ $\frac{810 \times 100}{5400}$

100 „ „ „ „ 1 J. $\frac{810 \times 100}{5400 \times 3}$

Die Procente werden gefunden, wenn man die 100fachen Interessen durch das Product aus dem Capitale und der Zeit in Jahren dividiert. Durch Buchstaben ausgedrückt: $P = \frac{100 \times J}{C \times Z}$.

Berechnung der Zeit. In wieviel Jahren tragen 5400 fl. Capital zu 5% 810 fl. Interessen?

100 fl. Cap. 5 fl. Zins in 1 Jahr

1 „ „ 5 „ „ „ 100 „

5400 „ „ 5 „ „ „ $\frac{100}{5400}$ „

5400 „ „ 1 „ „ „ $\frac{100}{5400 \times 5}$

5400 „ „ 810 „ „ „ $\frac{100 \times 810}{5400 \times 5}$

Die Zeit in Jahren wird gefunden, wenn man die 100fachen Interessen durch das Product aus dem Capitale und den Procenten dividiert.

$$Z = \frac{100 \times J}{C \times P}.$$

Die Erfahrung lehrt, dass die Schüler, die wenigsten Fehler begehen, wenn sie, nachdem das ganze Verfahren gründlich aufgefasst wurde, nach der Strichmethode rechnen. Hiebei werden alle Factoren des Dividends an die rechte, alle Factoren des Divisors an die linke Seite eines aufrechten Striches gesetzt, und wie bei der zusammengesetzten Proportion weiter vorgegangen, z. B. Wieviele Gulden Interessen geben 4872 fl. 75 kr. zu 5% in 8 Monaten?

$$\begin{array}{r|ll} 100 & (4872\tfrac{3}{4}) & \cancel{19491} \\ 4 & 5 & 6497 \\ \cancel{3} & \frac{2}{\cancel{3}} & \\ \hline \end{array}$$

162·425 fl. Inter.

Aufgaben, so wie die hier anzuwendenden Vortheile ꝛc. im V. R. M. S. 85 bis 89. und VII. A. K. S. 31 bis 45.

II. Discontrechnung.

§. 67.

Der Lehrer gehe wieder von einem bestimmten Falle aus, um den Schülern den Begriff Discont oder Rabatt und die Rechnungen hierüber recht klar zu machen, z. B. Jemand hat sich verpflichtet 3000 fl. ohne Zinsen nach 2 Monaten zu zahlen. Nun will er aber diese Schuld sogleich entrichten. Die 3000 fl. würden aber dem Schuldner während der 2 Monate Interessen tragen. Hätte er sie z. B. zu 5% angelegt, so würde er 25 fl. Interessen erhalten.

Wenn er aber sogleich bezahlt, so wird er offenbar einen Nachtheil von 25 fl. erleiden. Ist der Gläubiger damit einverstanden, dass der Schuldner hiefür entschädiget werde, so wird der Schuldner um diese Interessen, also um 25 fl. weniger, daher nicht 3000 fl., sondern nur 3000 fl. — 25 fl. = 2975 fl. zu zahlen haben. Dieser Abzug (25 fl.) von der Schuldsumme (3000 fl.), welche der Gläubiger dem Schuldner wegen früheren Zahlung gewährt, heißt Discont oder Rabatt, und wird nach Procenten berechnet. Der Rest (2975 fl.), den man erhält, wenn man den Discont vom Schuldcapitale subtrahiert, heißt der bare oder gegenwärtige (discontierte) Wert des Capitals.

Auf diese hier angegebene Art wird der Discont und der discontierte Wert des Capitales gewöhnlich von den Kaufleuten bei Warenbeträgen und bei Wechseln berechnet, wo es sich um eine kurze Zeitfrist handelt. Bei längeren Zeitabschnitten würde der Gläubiger durch diese Berechnung sehr im Nachtheile sein. Wünschte z. B. der Schuldner eine Schuld von 100 fl., die er erst in 20 Jahren zu zahlen hätte bei 5% Discont sogleich zu bezahlen, so hätte er, da der Discont auch 100 fl. beträgt, dem Gläubiger gar nichts zu zahlen; ja wären die 100 fl. erst nach 40 Jahren zahlbar, so würde der Discont 200 fl. betragen und der Schuldner vom Gläubiger noch 100 fl. erhalten.

Man geht daher bei längeren Zeitabschnitten in nachstehender Weise vor, z. B.

Jemand will eine unverzinsliche Schuld von 570 fl., die er erst nach 2 Jahren zu zahlen hätte, sogleich bezahlen; a) wieviel der Discont zu 5% jährlich, b) wie groß ist der bare Wert?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Barsumme von 100 fl. wächst bei 5% durch die Interessen in 2 Jahren zu 110 fl. an; oder 110, fl., welche nach 2 Jahren zu zahlen sind, haben einen gegenwärtigen Wert von 100 fl., oder von je 110 fl. werden, wenn sie 2 Jahre früher bezahlt werden, 10 fl. als Discont abgezogen. Wir haben also:

110 fl. Cap. 10 fl. Discont

$$1 \text{ „ } \text{ „ } \frac{10}{110} \text{ „ } \text{ „}$$

$$570 \text{ „ } \text{ „ } \frac{570 \times 10}{110} = 51{\cdot}82 \text{ fl. Discont.}$$

Ziehen wir nun den Discont 51·82 fl. von dem Schuldcapitale 570 fl. ab, so erhalten wir 518·18 fl. als gegenwärtigen Wert.

Probe. 518·18 fl. à 5% Barbezahlung 518·18 fl.
51·82 fl. Inter. für 2 J. Inter. für 2 J. 51·82
570

Aufgaben im V. M. R. S. 90 und 91, M. Arithm. für Bürgersch. 69 bis 71 und A. K. VII. S. 45 und 46.

III. Terminrechnung.

§. 68.

Jemand hat einen Garten um 600 fl. unter der Bedingung gekauft, dass er 100 fl. nach 2 Monaten, 200 fl. nach 4 Monaten und 300 fl. nach 5 Monaten und zwar ohne Interessen zu zahlen habe. Nach wieviel Monaten wäre die ganze Schuld auf einmal zu bezahlen, wenn weder der Schuldner noch der Gläubiger hiedurch einen Nachtheil erleiden soll?

In dieser Aufgabe wird gesagt, dass eine Schuld (600 fl.) in einzelnen Theilbeträgen nach bestimmter Zeitperioden oder Terminen bezahlt wird. Man nennt eine solche Zahlungsweise eine Terminzahlung, und die Zeit, zu welcher diese in verschiedenen Terminen zu zahlenden Capitalien ohne Nachtheil des Schuldners oder des Gläubigers auf einmal geschehen kann, die mittlere Verfallszeit oder den mittleren Zahlungstermin. Das Verfahren, durch welches der mittlere Zahlungstermin gefunden wird, nennt man die Terminrechnung.

Die Schüler werden leicht zur Einsicht gebracht, dass 100 fl. in 2 Monaten ebensoviel Zins tragen als 2 mal 100 fl. in 1 Monate,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

200 fl. in 4 Monaten ebensoviel als 4 mal 200 fl. in 1 Monate und 300 fl. in 5 Monaten ebensoviel als 5 mal 300 fl. in 1 Monate Hienach hat man:

100 fl. in	2	Monaten	=	200 fl. in	1	Monate
200 „ „	4	„	=	800 „ „	1	„
300 „ „	5	„	=	1500 „ „	1	„
600 fl. in	x	„	=	2500 fl. in	1	Monate.

$$\text{Hieraus ist } x = \frac{2500}{600} = 4\tfrac{1}{6} \text{ Mon.}$$

Man findet also den mittleren Zahlungstermin mehrerer Terminzahlungen, wenn man jede Terminzahlung mit der ihr zugehörigen Zeit multipliciert, und die Summe dieser Producte durch die Summe aller Terminzahlungen dividiert.

Um die über diese Rechnung die Proben zu machen, nehmen wir für diese Zahlungen bestimmte Procente an, und berechnen für beide Zahlungsarten die Interessen. Wenn die Rechnung richtig ist, so müssen die einzelnen Terminzahlungen in den ihnen zugehörigen Zeiten ebensoviel Interessen tragen, als die ganze Summe in der für sie gefundenen Zeit. Nehmen wir z. B. 5% an.

100 fl. tragen zu 5% in 2 Monaten					$\frac{5}{6}$	fl. Inter.
200 „ „ „ „ „	4	„			$3\frac{1}{3}$	„ „
300 „ „ „ „ „	5	„			$6\frac{1}{4}$	„ „
				Zusammen	$10\frac{5}{12}$	fl. Inter.

600 tragen zu 5% in $4\frac{1}{6}$ Mon. ebenfalls $10\frac{5}{12}$ fl. Inter.

Zur Terminrechnung gehörten auch Aufgaben, in welchen verlangt wird, dass ein gegebener Zahlungstermin in einen andern verwandelt werde, z. B.

A ist vertragsmäßig verpflichtet 500 fl. nach 2 Jahren, 400 fl. nach 3 Jahren und 200 fl. nach 4 Jahren zu zahlen; er bezahlt aber 800 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Jahren; wann muss er den Rest zahlen?

A hat zu benutzen die Zinsen:

a) von	500 fl.	2	Jahre	=	1000 fl.	1	Jahr.
b) „	400 „	3	„	=	1200 „	1	„
c) „	200 „	4	„	=	800 „	1	„
zusammen	1100 fl.				3000 fl.	1	Jahr;
er benutzt	800 „	$2\frac{1}{2}$	Jahr	=	2000 fl.	1	Jahr.
hat noch zu benutzen	300 fl.	x	Jahr	=	1000 fl.	1	Jahr.

$$\text{hieraus} \quad x = \frac{1000}{300} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Jahre.}$$

Aufgaben im V. R. S. 95 und 96 und A, K. VII. S. 47 — 51.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Neunter Abschnitt.

I. Theilregel oder Gesellschaftsrechnung.

§. 69.

Jede Zahl läſst sich in gleiche oder ungleiche Theile zerlegen. Die Zerlegung einer Zahl in gleiche Theile lehrt die Division. Soll aber eine Zahl in ungleiche Theile zerlegt werden, so muſs außer der Zahl der Theile auch noch angegeben werden, wie groß sie im Vergleiche zu einander werden, oder wie sie sich zu einander verhalten sollen. Das Verhältnis der Theile zu einander wird durch im Voraus gegebenen Zahlen bestimmt, welche Verhältniszahlen heißen.

Die Rechnung, durch welche Zahl so getheilt wird, daſs sich die Theile wie gegebene Zahlen zu einander verhalten, nennt man Theilregel oder Gesellschaftsrechnung.

Ist in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so heißt die Theilregel die einfache; sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird sie die zusammengesetzte Theilregel genannt.

A) Einfache Theilregel.

Der Lehrer gebe z. B. die Aufgabe: A, B und C haben 60 fl. so zu theilen, daſs sich der Theil des A zu jenem des B wie 1 zu 2, der des B zu jenem des C wie 2 zu 3, oder kurz, daſs sich die Theile wie 1 zu 2 zu 3 zu einander verhalten. Wieviel bekommt jeder? Er frage: Wenn A 1 Theil bekommt, wieviel solche Theile muſs B erhalten? Wieviel C? Wieviel Theile sind dies zusammen. In wieviel gleiche Theile müssen daher die 60 fl. getheilt werden? Wieviel beträgt der 6. Theil von 60 fl? Wenn nun A 1 solchen Theil also 10 fl., B 2 Theile oder 20 fl. erhält; wie

verhält sich der Antheil des A zu jenem des B? Wenn B 2 Theile oder 20 fl. und C 3 Theile oder 30 fl. erhält, wie verhält sich der Antheil des B zu jenem des C? Es ist hier die Zahl 60 in die Theile 10, 20 und 30 getheilt werden, die sich eben so zu einander verhalten, wie die gegebene Zahlen 1, 2 und 3.

Man gebe mehrere ähnliche Beispiele, welche die Schüler leicht im Kopfe ausrechnen können und leite sie hierbei auf die Regel hin:

Man addiere die Verhältniszahlen, dividiere durch ihre Summe die zu theilende Zahl und multipliciere den Quotienten mit jeder einzelnen Verhältniszahl.

Die so gefundenen Theile müssen zusammengenommen dem Ganzen gleich sein.

Nun werden Aufgaben für das schriftliche Rechnen gegeben, z. B. Zu einem Geschäfte gibt A 1500 fl. B 1000 und C 800 fl.; sie gewinnen 660 fl.; wieviel gebürt jedem hiervon?

A	1500	15
B	1000	10
C	800	8
		33

Die Antheile am Gewinne müssen sich wie die Einlagen verhalten, also wie die Zahlen 1500, 1000, 800 oder wie 15, 10, 8.

660 fl. : 33 = 20 fl.

A erhält 20 × 15 = 300 fl.
B „ 20 × 10 = 200 „
C „ 20 × 8 = 160 „
660 fl.

Man kann auch so schließen:

3360 fl. geben einen Gewinn von 660 fl.

1 „ gibt „ „ „ $\frac{660}{3360}$ „ = $\frac{1}{5}$ fl.

1500 „ geben „ „ „ $\frac{1500}{5}$ „ = 300 „ erhält A

1000 „ „ „ „ „ $\frac{1000}{5}$ „ = 200 „ „ B

800 „ „ „ „ „ $\frac{800}{5}$ „ = 160 „ „ C

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind die Verhältniszahlen Brüche, so bringt man diese auf gleichen Nenner und betrachtet dann blos die Zähler als Verhältniszahlen.

Aufgaben im V. R. M. S. 97 und 98.

B) Zusammengesetzte Theilregel.

Zwei Arbeiter A und B erhalten für eine vollbrachte Arbeit 42 fl.; wieviel gebürt jedem, wenn A 3 Tage, jeden Tag 10 Stunden und B 5 Tage, jeden Tag 8 Stunden gearbeitet hat? Da A 3 Tage, jeden Tag 10 Stunden gearbeitet hat, so hat er 3 mal 10 Stunden oder 30 Stunden gearbeitet, während B 40 Stunden arbeitete; daher ist die Rechnung.

A	3Ø	3	42 fl.: 7 = 6 fl.	6 fl. × 3 = 18 fl.	gebürt	A,
B	4Ø	4		6 „ × 4 = 24 „	„	B
		7		42 fl.	zusammen.	

Bei dieser Aufgabe hängt die Theilung nicht nur von der Zahl der Arbeitstage, sondern auch von der an jedem Tage zur Arbeit verwendeten Stundenzahl ab; die Rechnung ist daher eine zusammengesetzte Theilregel. Wir haben sie aber auf eine einfache Theilregel zurückgeführt, was man bei der zusammengesetzten Theilregel immer zu thun hat.

Zu einem Geschäfte traten drei Personen A, B und C zusammen. A gab 1000 fl. auf 2 Monate, B 800 fl. auf 5 Monate und C 600 fl. auf 6 Monate; sie gewannen zusammen 960 fl.; wieviel erhält jeder vom Gewinne? Hier sind Antheile am Gewinne nicht nur von der Einlage, sondern auch von der Zeit abhängig. Es ist aber einerlei,

ob	A	1000 fl.	2	Monate	oder	2000 fl.	1	Monat
„	B	800 „	5	„	„	4000 „	1	„
„	C	600 „	6	„	„	3600 „	1	„

im Geschäfte liegen läßt. Im zweiten Falle ist die Zeit für alle drei Einlagen gleich, daher hängen die Antheile nur von den zu dieser Zeit gehörigen Anlagen, d. i. von dem Producte 2000 fl., 4000 fl. und 3600 fl. ab. Diese können daher als die Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung angenommen werden. Daher die Rechnung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A	1000 fl.	2 M.	= 2000	5		40 ×	5	=	200 fl.
B	800 „	5 „	= 4000	10		40 ×	10	=	400 „
C	600 „	6 „	= 3600	9		40 ×	9	=	360 „
			960:	24	=	40			960 fl.

Hieraus ersieht man:

Man verwandelt eine zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung in eine einfache, indem man die zusammengehörigen Verhältniszahlen miteinander multipliciert, und diese Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet.

Aufgaben in V. R. S. 98 und A. K. VII. S. 55 — 58.

II. Die Mischungsrechnung.

§. 70.

Die zur Mischungrechnung gehörigen Aufgaben scheiden sich in zwei Arten, und zwar:

a) In der Aufgabe: 3 hl Wein à 40 fl., 2 hl à 30 fl. und 1 hl à 25 fl. werden gemischt; was kostet 1 hl dieser Mischung? ist die Menge der zur Mischung verwendeten Stoffe nebst dem Werte derselben gegeben, und es soll der Wert der Einheit der Mischung gesucht werden. Hier heißt die Rechnung die Durchschnittsrechnung.

b) Aus Wein, von welchem 1 hl 30 fl. und aus solchem, von welchem 1 hl 20 fl. kostet, soll eine Sorte gemischt werden, von welcher 1 hl 24 fl. kostet.

In dieser Aufgabe ist der Wert der zur Mischung zu verwendenden Stoffe und der Wert der Mischung, der Mittelwert, gegeben, und es soll gesucht werden, wieviel von jedem Bestandtheile genommen werden soll. In diesem Falle ist die Mischungsrechnung eine Alligationsrechnung.

Der Lehrer lasse zuerst Aufgaben der ersten Art lösen. Er lasse bei der hier gegebenen Aufgabe berechnen, wieviel der gesammte zur Mischung verwendete Wein kostet, und frage, wieviel Hektoliter durch die Mischung erhalten werden, und es wird den Schülern leicht sein, einzusehen, dass sie hier nur den ganzen Wert des zur Mischung verwendeten Weines durch die Anzahl der darin enthaltenen Hektoliter zu dividieren haben.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

3 hl	à 40 fl.	betragen	120 fl.
2 „	à 30 „	„	60 „
1 „	à 25 „	beträgt	25 „
6 hl	. . .	betragen	205 fl.

Daher 1 hl 205 fl. : 6 = $34\frac{1}{6}$ fl.

Schwieriger fällt den Schülern die Lösung der Alligationsrechnung. Durch folgendes Verfahren kann aber das Ganze den Schülern leicht verständlich machen.

Wenn man 1 hl zu 20 fl. und 1 hl zu 30 fl. zusammenmischt, so kosten die 2 hl des gemischten Weines 20 fl. + 30 fl. = 50 fl., daher 1 hl 25 fl. Man hat also von beiden Sorten gleich viel zu nehmen. Will man aber Wein erhalten, von welchem 1 hl nur 24 fl. kostet, so muss man begreiflich von der minderen Sorte mehr nehmen als von der besseren, da ja die Mischung billiger werden soll als die frühere. Nun kostet aber 1 hl der minderen Sorte um 4 fl. weniger, und 1 hl der besseren um 6 fl. mehr, als 1 hl der Mischung kosten soll, daher würde man, wenn man lauter Wein der niederen Sorte nehmen würde, 4 fl. gewinnen, und hingegen 6 fl. verlieren, wenn man die bessere Sorte à hl zu 24 fl. verkaufen würde. Nimmt man aber von der minderen Sorte 3 hl und von der besseren 2 hl, so wird der Gewinn einerseits durch den Verlust anderseits ausgeglichen; denn 3 hl à 20 fl, kosten 60 fl. und 2 hl à 30 fl. kosten ja ebenfalls 60 fl.; die erhaltenen 5 hl kosten also 120 fl. und daher 1 hl 120 fl. : 5 = 24 fl.

Man hat also von der niederen Sorte 3 Theile und von der besseren 2 Theile zu nehmen, d. h. die Mischung muss in dem Verhältnisse 3 zu 2 oder 6 zu 4 geschehen. Dieses Verhältnis können wir aber auch finden, wenn wir den Abgang der niederen Sorte vom Mischungswerte 24 — 20 = 4, und den Überschuss der besseren Sorte 30 — 24 = 6 suchen. Wir sehen, dass der Unterschied zwischen dem Werte der minderen Sorte und dem Mischungswerte angibt, wieviel man von der besseren und Unterschied zwischen dem Werte der besseren Sorte und dem Mischungswerte aber angibt, wieviel man von der minderen Sorte zur Mischung zu nehmen hat. Hieraus ergibt sich folgende Regel:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

	30	4	2
24			
	20	6	3

Man schreibe die Werte der zur Mischung zu nehmenden Stoffe so unter einander, dass der mindere Wert unter den höheren Wert zu stehen kommt; vor diese Werte setze man den Mittelwert, schreibe den Unterschied zwischen dem Mittelwerte und der minderen Sorte neben den höheren, und deren Unterschied zwischen dem höheren und dem Mittelwerte neben den minderen Wert. Die jedem Werte beigesetzten Unterschiede geben an wieviel man von jeder Sorte zu nehmen hat. Dividiert man in diesem Beispiele die Verhältniszahlen 6 und 4 durch ihr gemeinschaftliches Maß 2, so erhält man die Verhältniszahlen 3 und 2.

Wenn man die Mischung auf die hier angezeigte Weise vornimmt, d. i. von der besseren Sorte 2 hl und von der minderen 3 hl nimmt, so erhält man 5 hl. Würde aber verlangt, dass man 15 hl erhalten soll, so müßte man so schließen: Zu 5 hl muss man von der besseren Sorte 2 hl, von der minderen 3 hl nehmen, wieviel muss man von jeder Sorte verwenden um 15 hl zu erhalten?

Hier tritt mit der Alligationsrechnung die Gesellschaftsrechnung in Verbindung, da ja die 15 hl nach dem Verhältnisse wie 2 : 3 zu theilen sind, und wir erhalten:

2 $\qquad$ $3 \times 2 = 6$ hl à 30 fl.

3

15 hl : 5 = 3 hl $\qquad$ $3 \times 3 = 9$ hl „ 20 „

6 hl à 30 fl. kosten 180 fl.

9 hl à 20 „ „ 180 fl.

15 hl kosten 360 fl.

1 „ kostet 24 fl.

Hieraus zeigt sich, dass die Probe über die Alligationsrechnung durch die Durchschnittsrechnung gemacht wird.

Aufgaben in M. V. R. S. 99 und 100. VII. A. K. S. 61 bis 64.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zehnter Abschnitt.

Die Kettenrechnung.

§. 71.

Die Kettenrechnung wird den Schülern auf demselben Wege erläutert, wie die zusammengesetzte Regeldetrie. Nehmen wir die Aufgabe:

Wieviel Gulden ö. W. kosten 150 kg Kaffee, wenn 570 kg 630 fl. holländ. kosten, und 100 fl. holl. = 92 fl. ö. W. sind?

Wenn hier nicht um ö. W. gefragt würde, so hieße die Aufgabe: Was kosten 150 kg, wenn 570 kg 630 fl. holl. kosten? Die Rechnung wäre dann: 570 kg : 150 kg = 630 fl. holl. : x fl. holl.,

woraus man $x = \frac{150 \times 630}{570}$ fl. holl. erhalten würde.

Da aber um Gulden ö. W. gefragt wurde, so heißt die Aufgabe weiter: Wieviel Gulden ö. W. sind $\frac{150 \times 630}{570}$ Gulden holl., wenn 100 fl. holl. = 92 fl. ö. W. sind.

Die weitere Rechnung ist nun:

$$100 \text{ fl. holl.} : \frac{150 \times 630}{570} = 92 \text{ fl. ö. W.} : x \text{ fl. ö. W. verhält.}$$

Aus dieser Proportionen erhält man:

$x \times 100 \times 570 = 150 \times 630 \times 92$. Stellt man dieses in Bruchform dar, so erhält man $\frac{150 \times 630 \times 92}{x \times 570 \times 100}$, und wenn man diesen Bruch in die aufrechte Stellung bringt, so hat man

x	150
570	630
100	92

und wenn man den Zahlen die Benennung beisetzt

fl. ö. W. x	150 kg
kg 570	650 fl. holl.
fl. holl. 100	92 fl. ö. W.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man findet hier, dass jede auf der rechten Seite des Striches stehende Zahl mit der ihr gerade gegenüberstehenden gleichen Wert hat; jede Zahl auf der linken Seite ist gleichnamig mit dem der nächstvorhergehenden auf der rechten Seite und die letzte Zahl rechts ist gleichnamig mit der ersten links d. i. mit x. Die Zahlen dieses Ansatzes hängen wie die Glieder einer Kette zusammen; daher heißt man dieses Rechnungsverfahren **Kettenrechnung** auch **Kettensatz**.

Hieraus ergibt sich für die Bildung des Ansatzes bei der Kettenrechnung die Regel:

Man setze die unbekannte Zahl x an die linke Seite eines senkrechten Striches, ihr gegenüber die bekannte Zahl, deren Betrag gesucht wird; fange links mit der Benennung an, welche die eben an die rechte Seite gesetzte Zahl hat, und setze dieses Verfahren fort, bis auf die rechte Seite die Benennung kommt, mit welcher man links angefangen, d. i., welche das unbekannte Glied hat. Gemischte Zahlen werden hierbei in unechte Brüche verwandelt, die Nenner auf die entgegengesetzte Seite als Factoren gesetzt, und wenn es möglich ist, werden die Zahlen zu beiden Seiten abgekürzt. Dividiert man das Product aller rechts stehenden Zahlen durch das Product aller links stehenden, so ist der Quotient die gesuchte Zahl.

Wir wollen nun noch ein Beispiel lösen.

Wieviele Gulden ö. W. kosten 58 metr. Ctr., wenn 12 Londoner Ctr., 54 fl. 75 kr. ö. W. kosten, wenn 1 Londoner Ctr. 112 Londoner Pfund, 97 Londoner Pfund 44 kg und 1 metr. Ctr. 100 kg hat?

fl. ö. W. x	58 metr. Ctr.
metr. Ctr. 1	100 kg
kg 44	97 Londn. Pfd.
Londn. Pfd. 112	1 Londn. Ctr.
Londn. Ctr. 12	$54\frac{3}{4}$ fl. ö. W.

x = 520·87 fl. ö. W.

Man sagt: x fl. ö. W. kosten 58 metr. Ctr., setzt x fl. ö. W. links und 58 metr. Ctr. rechts vom Striche. Da man mit metr. Ctr. aufhört, so muß man die nächste Mittelbestimmung mit metr. Ctr. anfangen, indem man sagt: wenn 1 metr. Ctr. 100 kg hat (hierbei 1 metr. Ctr. links und 100 kg rechts setzt). Hier hat man rechts mit kg aufhört, daher muss man links wieder mit kg anfangen man sagt: wenn 44 kg 97 Londn. Pfd. geben, da man jetzt mit Londn. Pf. aufgehört hat, so fängt man rechts wieder mit Londn. Pfd. an, und sagt, wenn 112 Londn. Pfd. 1 Londn. Ctr. machen; da man mit Londn. Ctr. aufhört, so fängt man links wieder mit Londn. Ctr. an und sagt: wenn 12 Londn. Ctr $54\frac{3}{4}$ fl. ö. W. kosten. Der Ansatz ist nun fertig, da links dieselbe Benennung kommt, mit welcher man rechts angefangen hat.

Aufgaben im V. R. Seite 101 u. 102.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Eilfter Abschnitt.

Procentrechnung und ihre Anwendung.

I. Procentrechnung.

§. 72.

Unter Procent oder Percent (vom Lateinischen pro centum, für oder von 100) versteht man die Zahl, welche anzeigt, wieviele Einheiten einer bestimmten Art von 100 Einheiten derselben Art abhängig oder zu berechnen sind, z. B. 5% von 1200 bezeichnet, dass von je 100 Einheiten dieser Zahl 5 Einheiten, also 12 mal 5 Einheiten zu rechnen sind. Man kann daher auch sagen 1% ist der 100. Theil einer Zahl, und 2%, 3% u. s. w. sind $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$ dieser Zahl.

Für manche Größen gibt man auch, um sehr kleine Brüche zu vermeiden, die von 1000 Einheiten zu berechnende Menge an, und nennt den hiervon entfallenden Betrag Promille (‰). Sagt man also: Jemand erhält für den Einkauf von Staatpapieren im Werte von 5000 fl. 1‰ für seine Mühe, so bedeutet dieses, er bekommt für 1000 fl. 1 fl., also für 5000 fl. 5 fl.

Bei der Procentrechnung ist es nothwendig, immer von praktischen Fällen auszugehen, wenn die Schüler das gehörige Verständnis erlangen sollen.

Wenn jemand sagt: Ich habe bei einem Geschäfte, zu welchem ich 800 fl. verwendete, 5% gewonnen, so heißt dies soviel als bei je 100 fl., die ich im Geschäfte verwendete, habe ich 5 fl., also vom ganzen Betrage so oftmal 5 fl., als 100 fl. in demselben enthalten sind, also 8 mal 5 fl., d. i. 40 fl. gewonnen. Man sagt in diesem Falle die Procente werden von Hundert gerechnet.

Sagt man: Eine Ware kostete mit Einrechnung von 2% Spesen 800 fl., so heißt dieses bei je 100 fl., die man für die Ware ausgab, musste man noch 2 fl. für Spesen dazu rechnen, also ist die Summe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

800 fl. enstanden, indem man zu je 100 fl. des reinen Warenpreises noch 2 fl. Spesen dazu rechnete, also aus je 100 fl. 102 fl. gebildet hat. Hier bedeutet also die Summe 800 fl. Warenpreis und Spesen zusammen; sie ist daher nicht mit 100 fl., sondern mit 102 fl. gleichartig. Die 2% Spesen bedeuten daher nicht von je 100 fl. 2 fl., sondern von je 102 fl. 2 fl. Hier sagt man die Procente werden auf Hundert gerechnet. Heißt es endlich:

Eine Ware ist mit Abzug von 2% wegen Barbezahlung mit 800 fl. bezahlt werden, so bedeutet es die Summe 800 fl. ist entstanden, indem man von der ursprünglichen Summe den Betrag wegen Barbezahlung bereits abgezogen, also bei je 100 fl., die man zu zahlen gehabt hätte, wegen Barbezahlung 2 fl. abgezogen, also anstatt je 100 fl. nur 98 fl. gerechnet hat. In diesem Falle sagt man: die Procente werden in Hundert gerechnet. Hiernach unterscheidet man eine Procentrechnung von Hundert, auf Hundert und in Hundert. Bei jeder Procentrechnung kommen vier Größen vor:

1. Die Grundzahl 100, 2. das Procent, d. i. der Betrag, welcher sich auf 100 bezieht, 3. die Summe, von welchen die Procente berechnet werden, 4. der Ertrag dieser Summen nach den gegebenen Procenten.

Procentrechnung von Hundert.

§. 73.

Wieviel betragen 5% von 6300?

Nach der Proportion:

$$100 : 6300 = 5 : x \qquad x = \frac{6300 \times 5}{100} = 315$$

Nach der Schlussrechnung

6300 gibt

zu 1% den 100. Theil von 6300 = 63

„ 5% 5mal so viel = 63 × 5 = 315.

Man findet den Ertrag (x) einer Summe nach den Procenten von Hundert, wenn man die gegebene Summe mit den Procenten multipliciert und das Product durch 100 dividiert.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnet man den Ertrag mit e, die Procente mit p und die Summe mit s, so ist $e = \frac{sp}{100}$.

Beim Promille wird die gegebene Summe mit Promille multipliciert und das Product durch 1000 dividiert.

Beispiele. Oberösterreich 746500 Einwohner; wieviel betragen 15% davon?

Das Fleisch hat durchschnittlich 26% Nahrungsstoffe; wieviel Kg Nahrungsstoffen enthalten 80 Kg Fleisch?

Welche Summe gibt zu 5% 812 fl. Ertrag?

$$5 : 812 = 100 : x, \quad x = \frac{812 \times 100}{5} = 16240$$

5% oder $\frac{5}{100}$ von der Zahl ist 812.

1% „ $\frac{1}{100}$ „ „ „ „ 162·4

also ist die Zahl selbst $162{\cdot}4 \times 100 = 16240$.

Beispiele. Ein Haus trägt jährlich 1200 fl. Wohnzins; wie groß ist der Wert desselben, wenn es sich zu 4% verzinset?

Eine Ware kostet, da sie um 8% billiger wurde, $25\frac{3}{8}$ fl.; wieviel kostete sie früher?

Wieviel % muss man von 5400 fl. nehmen, um 216 fl. zu erhalten?

$$5400 : 100 = 216 : x, \quad x = \frac{216 \times 100}{5400} = 4\%$$

Oder: die Summe 5400 fl. gibt 216 fl. Ertrag.

„ „ 1 „ „ $\frac{216}{5400}$ fl. „

„ „ 100 „ „ $\frac{216 \times 100}{5400} = 4$ fl. Ertrag.

Man muss also 4 fl. von 100 fl. d. i. 4% nehmen.

Beispiele. Jemand zahlt 320 fl. Wohnzins und wird um 80 fl. gesteigert; wieviel % beträgt die Steigerung? Aus 20 Kg Kaffee erhält man nach dem Brennen nur 17·4 Kg; wieviel % ging am Gewichte verloren?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Procentrechnung auf Hundert.

§. 74.

In der Aufgabe: Eine Ware kostet mit Einrechnung von 2% Spesen 800 fl.; wieviel betragen die Spesen? ist die Summe 800 fl. entstanden, indem man je 100 fl. des reinen Warenpreises um die Spesen von 2 fl. vergrößert, also aus je 100 fl. 102 fl. gebildet hat. Es sind also

in 102 fl. Warenpr. mit Spesen 2 fl. Spesen

" 1 " " " " $\frac{2}{102}$ " "

" 800 " " " " $\frac{800 \times 2}{102}$ " " enthalten, also

15·7 fl. Spesen.

Oder: 102 fl. Warenpreis sammt Spesen verhalten sich zu 800 fl. Warenpreis sammt Spesen, wie sich 2 fl. Spesen zu x fl. Spesen verhalten; also

$$102 : 800 = 2 : x \,,\; x = \frac{800 \times 2}{102} = 15{\cdot}7 \text{ fl. Spesen.}$$

Die Procente auf Hundert findet man, wenn man den gegebenen Betrag mit den Procenten multipliciert und das Product durch die um den Procentsatz vermehrte Zahl 100 dividiert.

Wenn e, p und s die früher angegebene Bedeutung behalten, so ist $e = \frac{sp}{100 + p}$.

Procentrechnung in Hundert.

§. 75.

In der Aufgabe: der Verkaufspreis einer Ware ist nach Abzug von 2% Spesen 800 fl.; wieviel betragen die Spesen? ist die Summe 800 fl. dadurch entstanden, indem man je 100 fl. Warenpreis um 2 fl. Spesen verminderte, also statt je 100 fl. nur 98 fl. angenommen hat. Man hat daher:

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Zu 98 fl. Warenpreis nach Abzug der Spesen gehören 2 fl. Spesen

" 1 " " " " " " " $\frac{2}{98}$ " "

" 800 " " " " " " " $\frac{800 \times 2}{98}$

= 16·33 fl. Spesen.

Oder: 98 fl. Warenpreis nach Abzug der Spesen verhalten sich zu 800 fl. Warenpreis nach Abzug der Spesen wie sich 2 fl. Spesen zu x fl. Spesen verhalten; also:

$$98 : 800 = 2 : x, \; x = \frac{800 \times 2}{98} = 16{\cdot}33 \text{ fl. Spesen.}$$

Man findet die Procente in Hundert, indem man den gegebenen Betrag mit dem Procentsatze multipliciert und das Product durch die um den Procentsatz verminderte Zahl 100 dividiert. $e = \frac{sp}{100 - p}$.

II. Anwendung der Procentrechnung bei Warengeschäften.

§. 76.

1. Tara und Gutgewicht.

Die Waren kommen meistens in einer entsprechenden Verpackung oder Umhüllung (Emballage), z. B. in Kisten, Fässern, Säcken 2c. in den Handel. Das Gewicht einer Ware sammt der Verpackung nennt man Brutto- oder Sporcogewicht. Das Gewicht der Verpackung allein heißt Tara, und jenes der Ware selbst das Nettogewicht.

Wenn man daher vom Bruttogewichte die Tara subtrahiert, so erhält man das Nettogewicht.

Die Tara wird entweder als reine Tara, wie man dieselbe durch wirkliches Abwägen des Behältnisses erhält, oder als Durchschnittstara, d. i. wieviel Gewichtseinheiten bei jedem Frachtstücke (Fass, Kiste 2c.) wegzurechnen sind, oder auch in Procenten angegeben. Wenn man daher sagt, die Tara ist 10%, so heißt dieses: von je 100 kg Brutto sind 10 kg als Tara zu rechnen, oder 100 kg Brutto geben 90 kg Netto.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei gewissen Waren wird dem Käufer wegen des Eintrocknens, Verstaubens oder Verwägens beim Kleinverkaufe ein gewisser Gewichtsabzug gewährt, welcher Gutgewicht heißt.

Das Gutgewicht kann, wie die Tara, entweder geradezu, oder im Durchschnitt, oder in Procenten gegeben sein.

Wenn man vom Bruttogewichte die Tara und das Gutgewicht subtrahiert, so erhält man dasjenige Gewicht, nach welchem die Zahlung berechnet wird, und welches im weitern Sinne auch Nettogewicht genannt wird, z. B. Wenn ein Sack Rosshaar ein Bruttogewicht von 215 kg hat, die Tara 3 kg und das Gutgewicht 1 kg beträgt, so ist das Nettogewicht 211 kg.

Aufgaben im V. R. M. S. 82. d).

2. Warendiscont oder Sconto.

Beim Verkaufe von Waren können bezüglich der Zeit, in welcher die Zahlung zu leistenist, zwei Fälle stattfinden: der Verkäufer bedingt entweder, dass die Zahlung sogleich geschieht oder er gestattet dem Käufer eine Zahlungsfrist. Es ist beim Warenverkaufe fast durchaus üblich, die Warenpreise für eine bestimmte Zahlungsfrist (etwa für 1 Monat, für 2 oder 3 Monate Zeit oder Ziel) festzusetzen, so dass der Verkäufer hierbei keinen Nachtheil erleidet, weil er zu dem Preise, welcher sogleich (contant) zu zahlen wäre, die Interessen für die bestimmte Zahlungsfrist bereits hinzugeschlagen hat. Zieht nun der Käufer die bare Bezahlung vor, so muss ihm der wegen Zahlung auf Frist gemachte Zuschlag nachgelassen werden.

Dieser beim Warenverkaufe dem Käufer wegen Barbezahlung bewilligte Abschlag oder Abzug heißt Warendiscont, Sconto oder auch Rabatt. Der Sconto wird nach Procenten von Hundert berechnet.

Unter Rabatt versteht man häufig auch einen Abzug, welcher vom Preise für solche Waren, bei denen der Erzeuger den Preis für den Einzelnverkauf festgestellt hat, dem Kleinhändler als Ersatz für die Unkosten beim Warenbezuge und zur Ermöglichung eines Gewinnes gewährt wird. Ein solcher Rabatt ist der Buchhändlerrabatt.

Aufgabe. Jemand kauft eine Ware, gewogen Brutto 5400 kg mit 10% Tara; wieviel beträgt die contante Bezahlung, wenn 100 kg Netto zu 18 fl. mit 2% Sconto gerechnet werden?

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Brutto	5400 kg	
Tara 10%	540	à 18 fl.
Netto kg	48·60	
	38 880	
fl.	874·80	
Sconto 2%	17·496	
	857·304 fl. contante Bezahlung.	

Kettensatz:

fl. cont.	x	5400 kg Brutto
	100	90 kg Netto
	100	18 fl. auf Zeit
	100	98 fl. cont.
	x =	857·304 fl. cont. Bez.

3. Sensarie.

Um Geschäfte zwischen Kaufleuten desselben Ortes abzuschließen, gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäckler heißen. Was die Sensale als Vergütung für ihre Mühe erhalten, heißt Sensarie, Mäcklergebür, Courtage.

Bei Warengeschäften beträgt die Sensarie gewöhnlich 1%, wovon $\frac{1}{2}$% der Käufer und $\frac{1}{2}$% der Verkäufer zahlt, bei Wechsel und Papiergeschäften beträgt sie in Wien und mehreren andern Orten 1%.

Aufgaben im V. R. M. S. 84, g.

4. Provision.

Wenn jemand im Auftrage eines andern und für denselben die Ausführung eines kaufmännischen Geschäftes besorgt, z. B. Waren kauft oder verkauft, so wird er Commissionär, und derjenige, in dessen Auftrag er handelt, wird Committent genannt. Der Commissionär erhält für seine Mühe von seinem Committenten gewisse Procente, welche man Provision oder Commission nennt.

Beim Einkaufe wird die Provision von dem um die Einkaufsspesen vermehrten Einkaufspreise berechnet; beim Verkaufe berechnet man die Provision vom Verkaufsbetrage und zieht sie zugleich mit den Spesen vom Verkaufsbetrage ab; was übrig bleibt, ist der reine Ertrag der verkauften Ware, z. B. Ein Sensal besorgt den Einkauf einer Ware im Preise von 870 fl. gegen $\frac{1}{2}$% Sensarie. Diese Ware läſst ein Commissionär weiter befördern und rechnet 2% Provision; was hat der Commissionär zu fordern?

$$\frac{1}{2}\% \text{ Sensarie} = \frac{870 \times \frac{1}{2}}{100} = 4{\cdot}35 \text{ fl.}$$

Warenbetrag 870
½% Sens. 4·35
865·65 × 2
1731·30 : 100 = 17 fl. 31 kr. Prov.

Die Rechnung, welche der Commissionär seinem Committenten über den vollzogenen Einkauf einer Ware macht, heißt Factura, jene über den vollzogenen Verkauf Verkaufsrechnung.

5. Assecuranz.

Unter Assecuranz oder Versicherung versteht man die von einem Privatmanne, einem Handelshause oder gewöhnlich von einer Gesellschaft übernommene Verpflichtung, jemanden gegen eine bedungene Gebür den an einem bestimmten Gegenstande unter gewissen Umständen erlittenen Schaden zu ersetzen. Die Gesellschaften, welche eine solche Verpflichtung übernehmen, heißen Versicherungs- oder Assecuranz-Gesellschaften. Die Gebür, welche für die Übernahme der Schadenvergütung bezahlt wird, heißt Prämie, und die über den Versicherungsbetrag ausgestellte Urkunde nennt man Polizze. Die Prämie wird nach Procenten von Hundert der versicherten Summe berechnet.

Aufgaben V. R. M. S. 83, f).

6. Gewinn und Verlust.

Nimmt man beim Verkaufe einer Ware mehr ein, als man für dieselbe ausgegeben hat, so hat man Gewinn; nimmt man hingegen beim Verkaufe weniger ein, als man beim Einkaufe ausgelegt hat, so hat man Verlust. Gewinn und Verlust sind daher der Unterschied zwischen der Ausgabe (Einkaufsgeld) und der Einnahme (Verkaufsgeld).

Gewinn und Verlust können entweder nach ihrem wirklichen Betrage, oder, wie es gewöhnlich der Fall ist, nach Procenten bestimmt.

Nimmt man z. B. für je 100 fl. Ausgabe 110 fl. Einnahme an, so sind 110 fl. — 100 fl. = 10 fl. der Gewinn bei 100 fl; und dieser beträgt also 10%; hat man hingegen statt je 100fl. Ausgabe nur 90 fl. Einnahme, so sind 100 fl. — 90 fl. = 10 fl. der Verlust bei 100 fl.; derselbe beträgt also auch 10%.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben.

1. Ein Kaufmann kauft eine Ware um 840 fl. und verkauft sie mit 6% Gewinn; wieviel gewinnt er?

Die 840 fl. sind das reine Capital, also sind die Procente von Hundert zu berechnen.

1% von 840 fl. ist 8·4 fl.
6% „ 840 fl. sind 6 mal 8·4 fl. = 50·4 fl. Gewinn.

Oder nach dem Kettensatze:

fl. Gewinn x	840 fl. Einkauf
„. Einkauf 100	6 „. Gewinn

x = 50·4 fl. Gewinn.

2. Eine Ware wurde mit 6% Gewinn um 570 fl. verkauft; wieviel beträgt der Gewinn?

Hier ist der Gewinn schon im Verkaufspreise enthalten, daher ist der Verkaufspreis das um den Gewinn vermehrte Capital: es sind deshalb die Procente auf Hundert zu berechnen.

Bei 106 fl. Einkaufsgeld sind 6 fl. Gewinn,
„ 1 „ „ „ $\frac{6}{106}$ „
„ 570 „ „ „ $\frac{570 \times 6}{106}$ fl. = 32·26 fl. Gew

Oder nach dem Kettensatze:

fl. Gewinn x	570 fl. Verk.
„. Verk. 106	6. fl. Gew.

x = 32·26 fl. Gewinn.

3. Eine Ware wurde um 450 fl. mit 12% Verlust verkauft; wieviel beträgt der Verlust?

Hier ist der Verkauftspreis ein durch die 12% Verlust vermindertes Capital, daher sind die Procente in Hundert zu berechnen.

Bei 88 fl. Verk. sind 12 fl. Verlust
„ 1 „ „ „ $\frac{12}{88}$ „ „
„ 450 „ „ „ $\frac{450 \times 12}{88}$ fl. = $61\frac{4}{11}$ fl. Verlust.

Durch den Kettensatz:

fl. Verl. x	450 fl. Verk.
fl. Verk. 88	12 fl. Verl.

x = $61\frac{4}{11}$ fl. Verlust.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zwölfter Abschnitt.

Zinseszinsen.

§. 74.

Wenn jemand ein bestimmtes Capital (z. B. 1000 fl.) zu bestimmten Procenten (5%) unter der Bedingung anlegt, dass die nach einem vorhinein bestimmten Zeitraume (nach einem Jahre) hievon entfallenden Interessen (50 fl.) wieder zum Capitale geschlagen werden; wenn ferner die im nächsten Zeitraume so angewachsene Summe (1050 fl.) verinteressiert und dieses Verfahren nach jedem späteren Zeitraume auf dieselbe Art wiederholt wird, so sagt man: Das Capital ist zu Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen heißen auch zusammengesetzte Zinsen zum Unterschiede von den einfachen Zinsen, welche zu den gewöhnlichen Terminen bezahlt werden, und doch nicht wieder zum Capitale gerechnet werden, wenn sie auch rückständig bleiben.

1. Berechnung des Wertes einer Geldsumme **nach** einer bestimmten Zeit.

Um die Schüler mit dem Verfahren bei der Zinseszinsenrechnung bekannt zu machen, gebe er eine Aufgabe, z. B. Ein Capital von 4000 fl. ist zu 5% angelegt; zu welcher Summe wird es in 3 Jahren anwachsen, wenn die Interessen am Ende eines jeden Jahres zum Capitale geschlagen und mit diesem weiter verzinset werden?

Auflösung.		
	Anfangscapital	4000 fl.
Zins von 400 fl. zu 5% für das erste Jahr. . . .	200 „	
Capital am Ende des ersten Jahres	4200 fl	
Zins von 4200 fl. zu 5% für das zweite Jahr: . .	210 „	
Capital am Ende des zweiten Jahres	4410 fl.	
Zins von 4410 fl. zu 5% für das dritte Jahr . .	220·5 fl	
Capital am Ende des dritten Jahres	4630·5 fl.	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit den einfachen Zinses wären die 4000 fl. nur zu 4600 angewachsen, der Unterschied ist daher 30 fl. 50 kr.

Bei diesem Verfahren mussten ebensoviele Rechnungen gemacht werden, als in der Aufgabe Jahre angegeben sind, was bei vielen Jahren sehr weitläufig ist. Wir wollen daher ein kürzeres Verfahren kennen lernen.

100 fl. wachsen zu 5% in einem Jahre zu 105 an; daher 1 1·05 fl.; 2 fl. zu 2 mal 1·05 fl. u. s. w. Will man zudaher erfahren wie groß eine Summe in 1 Jahre zu 5% wird, so darf man die selbe nur mit 1·05 multiplicieren.

Die 1·05 fl., welche zu Anfang des 2. Jahres zu 5% angelegt werden, vergrößern sich in diesem Jahre um ihr 1·05 faches; daher ist 1 fl. am Ende des 2. Jahres zu 1·05 × 1·05 fl. angewachsen. Wird diese Summe am Anfange des 3. Jahres angelegt, so gibt sie am Ende des 3. Jahres 1·05 × 1·05 × 1·05 fl. Hieraus sehen wir, dass man, um zu erfahren zu wieviel 1 fl. Capital am Ende einer gegebenen Anzahl von Jahren anwächst, den Jahreswert (1·05) so vielmal als Factor setzen muss, als Jahre gegeben sind.

Sowie bei 5% verhält es sich auch bei 1, 2, 3. . . Procent.

Aus dem Ertrage von 1 fl. findet man den Ertrag für jedes andere Capital, wenn man dieses mit dem Ertrage von 1 fl. multipliciert.

Der Betrag, zu welchem ein Capital mittelst Zinseszinsen nach einer bestimmten Zeit anwächst, wird gefunden, wenn man den Jahreswert von 1 Gulden zur so vielten Potenz erhebt als Jahre gegeben sind, und diese Potenz mit dem Capitale multipliciert.

Nach dieser Regel würden wir unsere frühere Aufgabe so rechnen: $(1·05)^3$ fl. 4000 mal genommen gibt 1·157625 × 4000 = 4630·5 fl.

Würden die Zinsen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale geschlagen, so müsste man, da 100 fl. bei 5% in einem halben Jahre nur zu 102·5 fl. anwachsen und daher 1 fl. nur den Wert von 1·025 erhält, um das Endcapital nach 3 Jahren oder 6 Halbjahren zu erhalten $(1·025)^6$ mit 4000 multiplicieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1{\cdot}025^6 \times 4000 = 1{\cdot}159693 \times 4000 = 4638{\cdot}77 \text{ fl.}$$

Man hat eigene Tabellen, welche die Zahlen schon ausgerechnet enthalten, mit welchen man das Capital zu multiplicieren hat, um den nach Zinsenszinsen angewachsenen Endwert bei verschiedenen Procenten und Zeitperioden zu erhalten.

2. Berechnung des Wertes einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.

Es sei die Aufgabe zu lösen: Wieviel sind 4630·5 fl., welche nach 3 Jahren zu zahlen sind, bei 5% Zinsenszins gegenwärtig, also um 3 Jahre früher wert?

Der Lehrer mache die Schüler hier aufmerksam, dass sie ja nur über die früheren Rechnungen die Probe zu machen haben, denn die Aufgabe könnte ja auch so gegeben sein: Wie groß ist das Capital, welches bei 5% Zinseszinsen in 3 Jahren zu 4630·5 fl. anwächst?

Die Schüler sehen ein, dass sie den künftigen Wert 4630·5 fl. durch die nämliche Zahl zu dividieren haben, um den gegenwärtigen Wert zu finden, mit welcher sie das Anfangscapital multipliciert haben. Die Zahl ist für unsere Aufgabe, die früher berechnete Zahl 1·157625, daher der gegenwärtige Wert 4630·5 fl.: 1·157625 = 4000 fl.

Anstatt 4630·5 fl. : 1·157625 kann man auch $4630{\cdot}5 \times \frac{1}{1.157625}$ setzen; $\frac{1}{1{\cdot}157625} = 0{\cdot}863838$; daher braucht man nur den Endwert des Capitals mit diesem Quotienten zu multiplicieren. Man hat auch hierauf bezügliche Tabellen zusammengestellt. (Močnik Arithmetik für Bürgerschulen III. Hft.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreizehnter Abschnitt.

Berechnung der Münzen, Wechsel und Staatspapiere.

§ 78.

I. Die Münzrechnung.

Das Geld ist das unter allen Culturvölkern durch das Bedürfnis eingeführte allgemeine Tausch-, Vergütung-, Ersatz- und Umsatzmittel, welches für verschiedene Güter in verschiedener Menge als gleiche Wertgröße angenommen wird. Ein aus Metall geprägtes Stück Geld nennt man eine Münze.

Der Wert der Münzen ist abhängig von dem Metalle, aus dem sie geprägt sind, von der Feinheit des Metalles und von ihrem Gewichte. Die aus Gold und Silber geprägten Münzen haben einen allgemein anerkannten Wert. Münzen aus Kupfer haben gewöhnlich nur in jenen Ländern einen bestimmten Preis, in welchen sie geprägt sind, und sie dienen, um sehr kleine Ausgleichungen möglich zu machen. Solche kleine Münzen heißen Scheidemünzen. Gold und Silber werden nicht ganz rein zu Münzen verarbeitet, weil sie zu weich sind, und daher der Abnützung zu sehr unterworfen wären; sie werden deshalb legiert, d. h. sie erhalten einen Zusatz von härteren Metallen, gewöhnlich von Kupfer.

Das ganze Gewicht einer Münze heißt das Schrot derselben; das Gewicht des feinen Metalles, welches sie enthält, das Korn, und das Verhältnis des Kornes zum Schrott wird Feingehalt genannt.

In Österreich-Ungarn, Frankreich, Italien, Belgien, Holland und in der Schweiz dient das Kilogramm mit seinen Unterabtheilungen als Münzgewicht; in Deutschland das Pfund = ½ Kilogramm, in England das Troypfund = 373·246 Gramm, in Rußland das Handelspfund = 409·512 Gramm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Früher wurde die cölnische Mark = 233·87 Gramm, auch die Wiener Mark = 280·67 Gramm und seit 1857 das deutsche Pfund = 500 Gramm als Münzgewicht gebraucht.

Der Feingehalt einer Münze wird im allgemeinen durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler das Korn und dessen Nenner das Schrot ist. In den meisten Staaten geschieht die Angabe in Tausendtheilen des Schrotes ausgedrückt. Das Schrot der Münze wird nämlich gleich 1000 Theile gesetzt, und angegeben, wieviel von diesen 1000 Theilen reines Gold oder reines Silber, und wieviel Kupfer sind. Ist z. B. der Feingehalt einer Münze 500, so kommen auf 1000 Theile Schrot 500 Theile Korn (Gold, Silber) und 500 Theile Kupfer.

Die österreichischen Gulden sind $\frac{900}{1000}$ oder 0·900 fein heißt, in 1000 Gewichtstheilen eines Guldens sind 900 Theile feines Silber und 100 Theile Kupfer, kürzer sagt man die österreichischen Gulden sind $\frac{9}{10}$ fein.*)

In Rußland nennt man die Bestimmung des Feingehaltes die Probe. Diese gibt an, wieviel Solotnik feinen Metalles in einem Pfund = 96 Solotnik Münzmetall enthalten sind.

Die gesetzlichen Bestimmungen des Schrotes und Kornes, über Eintheilung und Ausprägung der Münzen nennt man den Münzfuß, Währung oder Valuta.

Das Korn der Münze gibt den eigentlichen oder inneren Wert der Münze an, der also gleich ist dem Werte des darin enthaltenen feinen Metalles. Der von der Regierung bestimmte Wert, zu welchem die Münze in dem Lande, in welchem sie geprägt wurde, allgemein angenommen werden soll, heißt der gesetzliche Wert, und der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat, wird der Handelswert oder Curswert der Münze genannt. Die Preisverhältnisse zwischen Gold und Silber sind veränderlich. Vor der Entdeckung Amerikas hatte das Gold den 10- bis 12 fachen Wert des Silbers, dann den 15 fachen, im 18.

---

*) Bis zum 1. November 1858 diente die Mark, die Hälfte eines Pfundes, in ganz Deutschland als Gewichtseinheit der edlen Metalle und Münzen. Bei Silbermünzen wurde der Feingehalt in Loth bei Goldmünzen in Karat angegeben. Beim Silber wurde die Mark in 16 Loth à 18 Grän, beim Gold in 24 Karat à 12 Grän eingetheilt.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Jahrhunderte fiel derselbe wegen der beträchtlichen Goldausbeute in Brasilien auf das 14 fache, und gegenwärtig hat — unbedeutende Schwankungen nicht gerechnet — das Gold den $15\frac{1}{2}$ fachen Wert des Silbers.

Wegen dieser Veränderlichkeit der Preisverhältnisse zwischen Gold und Silber muss eines dieser Metalle zum allgemeinen und bleibenden Maße der Werte in einem Lande bestimmt, und daher eine Münze (Münzeinheit) ausgeprägt werden, nach welcher der Wert sämmtlicher Münzen bestimmt wird. Je nachdem nun in einem Lande der Wert sämmtlicher Münzen nach einer bestimmten Silbermünze oder einer Goldmünze bestimmt wird, hat das Land Silberwährung oder Goldwährung.

Die wichtigsten Goldmünzen sind:

1. Die Achtguldenstücke in Österreich-Ungarn, die Zwanzigfrankstücke in Frankreich, Belgien und in der Schweiz und die Zwanzigliretücke in Italien. Von diesen Münzen werden 15·5 Stücke aus einem Kilogramm 0·900 feinem Golde geprägt. Es gibt auch Viergulden-, Zehnfranken- und Zehnlirestücke.

2. Die k. k. österreichischen Ducaten, von denen 67 Stück eine cölnische Mark = 233·87 Gramm wiegen und einen Feingehalt von $23\frac{2}{3}$ Karat haben, d. i. in einer in 24 gleiche Theile, Karat, getheilten cölnischen Mark sind $23\frac{2}{3}$ Karat Gold und $\frac{1}{3}$ Karat Kupfer enthalten.

3. Die deutschen Reichsgoldmünzen, und zwar Fünf- zehn- und Zwanzigmarkstücke. Von den Zehnmarkstücken werden aus dem Pfunde = 500 Gramm feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ Stück ausgeprägt. Der Feingehalt ist 0·900.

4. Die englischen Sovereigns (Pfund oder Livre Sterling); aus dem Troypfund = 373·246 Gramm $\frac{11}{12}$ feinen Goldes werden $46\frac{22}{40}$ Stück geprägt.

5. Die russischen Halbimperale, von denen $62\frac{26}{45}$ Stück russisches Pfund = 409·512 Gramm $\frac{11}{12}$ feines Gold enthalten.

Die wichtigsten Silbermünzfüße sind:

1. Der fünfundvierzig-Guldenfuß oder die österreichische Währung. Aus dem Münzpfunde von 500 Gramm feinen Silbers werden 45 Gulden (0·900 fein) geprägt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bis zum Jahre 1857 bestand in Österreich der Zwanzig-Guldenfuß oder Conventions-Münzfuß, nach welchem aus einer cölnischen Mark (233·87 Gramm) feinen Silbers 20 Gulden Conventionsmünze à 60 Kreuzer à 4 Pfennige geprägt wurden.

2. Der Frankenfuß (in Frankreich, Belgien, Italien und in der Schweiz) nach welchem aus 1 Kilogramm $\frac{835}{1000}$ feinen Silbers $185\frac{5}{9}$ Franks (Lire oder Franken) geprägt werden.

3. Der Silberrubelfuß in Rußland. Der Feingehalt ist $\frac{125}{144}$, und das Korn eines Stückes 17·9961 Gramm.

a) Da der Feingehalt das Verhältnis des Kornes zum Schrote ist, so findet man denselben, indem man das Korn durch das Schrot dividiert, z. B.

Wie groß ist der Feingehalt der neuen österr. Zwanziger, welche bei einem Gewichte von $2\frac{2}{3}$ g $1\frac{1}{3}$ g feinen Silbers enthalten.

$$\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = \frac{4}{8} = \frac{500}{1000}.$$

Die neuen Zwanziger sind also 500 Tausendtheile fein.

b) Das Korn wird erhalten, indem man das Schrot mit dem Feingehalte multipliciert, z. B.

Wie viel Korn hat ein kais. Ducaten, da 67 Ducaten 233·87 Gramm Gold $23\frac{2}{3}$ Karat fein enthalten?

$$\text{Schrot} = \frac{233{\cdot}87 \text{ Gramm}}{67}$$

$$\text{Feingehalt} = \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72};$$

$$\text{Korn} = \frac{233.87}{67} \times \frac{17}{67} = 3{\cdot}4421 \text{ Gramm}$$

c) Das Schrot wird gefunden, indem man das Korn durch den Feingehalt dividiert, z. B.

Welches Schrot hat ein deutsches 20-Markstück, da aus 500 g feinen Goldes $69\frac{3}{4}$ Stück $\frac{9}{10}$ fein geprägt werden?

$$\text{Korn} = \frac{500 \text{ Gramm}}{69\frac{3}{4}} = \frac{2000}{279}$$

$$\text{Schrott} = \frac{2000}{279} : \frac{9}{10} = 7{\cdot}965 \text{ Gramm.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Berechnung der Münzen nach ihrem innern Werte (Münzpari).

Da das feine Gold und Silber überall dasselbe ist, so wird auch der innere Wert einer Münze zugleich ihr allgemeiner, d. i. derjenige sein, welchen sie an allen Orten haben muss. Hat eine Anzahl von Münzen einer Münzsorte ebensoviel feines Metall als eine Anzahl von Münzen einer anderen Münzgattung, so sagt man: sie stehen im Pari (al pari). Die Angabe, wieviel Münzen der einen Art ebensoviel feines Metall enthalten als eine bestimmte Anzahl Münzen einer andern Art, nennt man Münzpari. Da der innere Wert einer Münze nur der Wert des Kornes in derselben ist, der Zusatz also als wertlos betrachtet wird, so gibt das Münzpari auch zugleich das Verhältnis des Wertes der miteinander verglichenen Münzen an.

Aufgaben.

1. Wieviel ist 1 g feinen Silbers wert?

500 g Silber = 45 fl. ö. W.
1 „ „ = 0·09 fl. = 9 kr. Silber.

2. Für 1 Achtguldenstück erhält man bei den k. k. Cassen 8·1 fl. ö. W. in Silber; welchen Silberwert hat hiernach a) 1 Gramm feinen Goldes, b) 1 kg feinen Goldes, c) in welchem Verhältnisse stehen die Werte des Goldes und Silbers zu einander?

1 g Gold = 1 fl. 39½ kr. in Silber.
1 kg Gold = 1395 fl. in Silber.
Gold : Silber = 15·5 : 1.

2. Berechnung der Münzen nach dem Curse.

Da der Preis der edlen Metalle mannigfaltigen Schwankungen unterliegt, so haben auch die Münzen einen veränderlichen Wert. Je mehr Münzen irgend einer Art im Umlaufe sind, desto weniger werden sie gesucht, und desto geringer wird ihr Preis, und umgekehrt.

Dieser veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat, heißt der Curs derselben.

Der Curs wird entweder pr. Stück oder in Procenten angegeben Bei gewissen Münzsorten, besonders bei Goldmünzen, wird ein Aufgeld über ihren gesetzlichen Wert bezahlt; dieses Aufgeld heißt Agio

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

und wird in Procenten von Hundert der besseren Münzsorte berechnet.

§. 76.

II. Die Wechselrechnung.

Ein schriftliches Versprechen, durch welches sich der Aussteller desselben verpflichtet, nach einem hiefür geltenden besonderen Rechte (Wechselrecht) an eine in dieser Urkunde genannte Person eine gewisse Summe Geldes zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen, oder durch eine dritte Person zahlen zu lassen, nennt man einen Wechsel.

Wechsel, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme selbst zu bezahlen, nennt man eigene oder trockene Wechsel.

Z. B. Albert Böhm in Wien kauft bei Franz Klein daselbst Waren im Betrage von 500 fl., zahlbar nach 3 Monaten, und stellt ihm über diese Summe folgenden Wechsel aus:

Wien, am 12. Jänner 1883.

Per fl. 500 ö. W.

Drei Monate à dato zahle ich gegen diesen meinen Wechsel an Herrn F. Klein die Summe von fünfhundert Gulden ö. W.

An
mich selbst
in Wien

A. Böhm.

Böhm ist dann nach Wechselstrenge verpflichtet, nach Verlauf von drei Monaten dem F. Klein die im Wechsel genannte Summe zu zahlen.

Bei einem eigenen Wechsel sind wenigstens 2 Personen betheiligt: 1. die Person, welche sich zur Zahlung verpflichtet, und Aussteller oder Trassant heißt. (Böhm.) 2. Die Person, welche den Wechsel vom Aussteller übernimmt, also der erste Besitzer des Wechsels, dem sich der Aussteller die Zahlung zu leisten verpflichtet, und Wechselnehmer oder Remittent heißt. (Klein.)

Ein Wiener Kaufmann, Karl Resch, erhält von J. Banher in Amsterdam Waren im Betrage von 3000 fl. holländischer Wäh-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

rung, zahlbar nach 3 Monaten. Die Schuld in barem Gelde abzutragen ist aber mit mancherlei Unbequemlichkeiten verbunden, so ist z. B. die erforderliche Menge des holländischen Geldes in Wien nicht leicht zu erhalten, das österreichische Geld hat aber in Amsterdam nur den inneren Wert, die Übersendung ist mit Kosten und Gefahren verbunden. Nun ist aber in Wien der Kaufmann Diamant, welcher an den Kaufmann Dithelm in Amsterdam eine Forderung hat. Resch begibt sich nun zu Diamant, übergibt ihm einen Geldbetrag in österr. Währung, welcher dem von 3000 fl. holländ. gleich ist; hiefür erhält Rasch von Diamant einen Wechsel, welcher lautet:

Wien, am 12. Jänner 1883.

Per fl. 3000 holl.

Drei Monate nach heute zahlen Sie gegen diesen Prima-Wechsel an Herrn Banher die Summe von dreitausend Gulden holländisch.

An Herrn J. Dithelm
in Amsterdam.

Karl Diamant.

In diesem Wechsel verpflichtet sich der Aussteller die Wechselsumme durch eine dritte Person (Dithelm) zahlen zu lassen. Solche Wechsel nennt man fremde, auch gezogene oder trassierte Wechsel. Diesen Wechsel übersendet Resch an Banher in Amsterdam, welcher denselben Dithelm daselbst zur Zahlungserklärung vorweist oder präsentiert. Erklärt sich Dithelm, den Wechsel am bestimmten Zahlungstage einzulösen, d. i. die im Wechsel ausgedrückte Summe zu zahlen, so schreibt er auf den Wechsel unten am Rande zwischen dem Namen des Ausstellers und seinem eigenen Namen das Wort: „Angenommen" oder „Acceptiert" und seine Firma, d. i. den Namen des Handelshauses, welchem er vorsteht. Diese Operation heißt einen Wechsel annehmen, honorieren, acceptieren. Acceptiert aber Dithelm den Wechsel nicht, so ist der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, die Wechselsumme und die Kosten zu ersetzen. Bei einem gezogenen Wechsel sind im allgemeinen vier Personen betheiligt. 1. Der Aussteller oder Trassant, welcher den Wechsel ausstellt, zieht oder trassiert (Diamant); 2. der Bezogene oder Trassat, welchen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Aussteller zur Zahlung der Wechselsumme auffordert, und der, wenn er den Wechsel acceptiert hat, Acceptant heißt (Dithelm); 3. der Remittent, d. i. derjenige, welcher den Wechsel kauft, um ihn seinem Gläubiger zu übermitteln, zu remittieren (Resch).

4. Der Präsentant, welcher den Wechsel behufs der Annahme und nachfolgenden Zahlung vorweist oder präsentiert. (Banher.)

In Hinsicht auf den Trassanten und Trassaten heißt der Wechsel eine Tratte, in Hinsicht auf den Remittenten und Präsentanten eine Rimesse.

Der Zahlungszeit nach unterscheidet man: 1. Tag-, 2. Dato-, 3. Sicht- und 4. Meß- oder Marktwechsel.

Bei den Tagwechseln ist der Zahlungstag unmittelbar angegeben, z. B. am 8. Februar, medio März, (d. h. halben 15. März).

Bei den Datowechseln hat die Zahlung zu einer bestimmten Zeit, vom Tage der Ausstellung an gerechnet, zu geschehen, z. B. vierzehn Tage, zwei Monate à dato oder nach heute.

Sichtwechsel sind solche Wechsel, welche entweder sogleich bei der Präsentation auf Sicht, auf Verlangen (à vista, à piacere) oder nach einer bestimmten Zeit (8 Tage, 2 Monate) vom Tage der Vorweisung und Annahme bezahlt werden sollen.

Meß- oder Marktwechsel sind Wechseln, deren Zahlungszeit auf eine Messe oder einen Markt lautet.

Der Aussteller eines fremden Wechsels ist verpflichtet, auf Verlangen des Übernehmers den Wechsel in mehreren Exemplaren auszustellen, welche als Prima, Secunda, Tertia u. s. w. bezeichnet werden.

Die Prima wird zuerst versendet, im Falle ihres Verlustes die Secunda u. s. w.

Der erste Inhaber des Wechsels kann diesen sammt dem ihm zustehenden Rechte an eine andere Person abtreten. Das Übertragen der Rechte des Wechselinhabers an einen andern, heißt indossieren oder girieren, und geschieht durch eine auf die Rückseite des Wechsels geschriebene Erklärung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 78.

Wechseldiscont.

In Beziehung auf den Wechselverkehr und die hiedurch entspringenden Berechnungen unterscheidet Platzwechsel und ausländische Wechsel oder Devisen.

Platzwechsel sind solche Wechsel, welche auf die Valuta jenes Platzes lauten, an welchem sie in Verkehr kommen, und auch daselbst zahlbar sind.

Devisen hingegen sind für jeden Platz jene Wechsel, welche in der Währung eines fremden Platzes ausgestellt und auch zahlbar sind. So ist z. B. ein auf holländische Gulden in Amsterdam ausgestellter Wechsel für Amsterdam ein Platzwechsel, für Wien, Berlin, Paris u. a. O. eine Devise.

Wer einen Wechsel vor dem Verfallstage kauft, hat für denselben nicht die volle Wechselsumme zu entrichten, sondern der Verkäufer muss sich einen Abzug gefallen lassen, dessen Größe von der Zeit, während welcher der Wechsel noch zu laufen hat (der Zeit vom Verkaufstage bis zum Verfallstage), abhängt. Dieser Abzug heißt Discont, oder Escompt.

Der Unterschied zwischen der Wechselsumme und dem Discont wird discontierter Wert des Wechsels genannt.

Der Wechseldiscont wird nach Procenten auf ein Jahr bestimmt und der Bequemlichkeit wegen nach der Procentrechnung von Hundert gerechnet, obschon er richtig auf Hundert gerechnet werden sollte.

Der Wechseldiscont wird daher berechnet, indem man die Interessen sucht, welche die Wechselsumme (der Nominal- oder Nennwert des Wechsels) zu den gegebenen Discontprocenten für die Zeit vom Verkaufstage bis zum Verfallstage abwirft. Diese Zeit wird in Tagen gerechnet, wobei aber der Verkaufs- oder der Verfallstag nicht einbezogen und die Monate zu sovielen Tagen gerechnet werden als sie wirklich haben, z. B.

Ein auf 5400 fl. lautender und am 2. Juni fälliger Wechsel wird am 12. März mit 5% Discont verkauft; wieviel beträgt

a) der Discont und

b) der discontierte Wert?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Discontierungstag	12. März	5400 × 82	
Verfallstag	2. Juni	108	
März 19 Tage		432	
April 30 „		442800 : 6000	
Mai 31 „		73·8	à 6%
Juni 2 „		— 12·3	à 1%
82 Disconttage		61·5 fl. Discont.	

Wechselsumme 5400 fl.
ab 5% Discont für 82 Tage —61·5 fl.
Discontierter Wert 5338·5

Ein am 18. December 1882 auf 3 Monate à dato ausgestellter Wechsel pr. 3150 fl. wird am 13. Jänner 1883 zu 6% discontiert; wieviel erhält der Verkäufer für diesen Wechsel?

		3150 × 63	
Verfallstag	18. März	945	
Discontierungstag	13. Jänner	1899	
		198450 : 6000	
Jänner 17 Tage		33·075 fl. Discont.	
Februar 28 „		Wechselsumme	3150 fl.
März 18 „		ab Discont	—33.075
63 Disconttage		Discontierter Wert	3116.925

Aufgaben in Močniks Arithmetik für Bürgerschulen III. Heft.

§. 79.

Wechselreduction.

Bei dem Ein- und Verkaufe von Devisen muss der Betrag des fremden Geldes (die Wechselvaluta) in die eigene Währung, oder umgekehrt umgerechnet werden. Diese Umrechnung wird nach dem zur Zeit des Ein- oder Verkaufes des Wechsels stattfindenden Wechselcurse vorgenommen, und heißt Wechselreduction.

Das Steigen und Fallen des Wechselcurses hängt von dem inneren Werte des fremden Geldbetrages von der Laufzeit des Wechsels und wie bei Waren von dem Verhältnisse der Zahl der Käufer und Verkäufer fremder Wechsel ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Angabe der Wechselcurse geschieht durch die Cursblätter oder Curszettel, und ist immer durch zwei Zahlen ausgedrückt, deren eine auf das fremde Geld, die andere hingegen sich auf das Geld bezieht, in welchem am Verkaufsorte des Wechsels Buch und Rechnung geführt wird. Es wird nämlich angegeben, dass für eine unveränderliche oder feste Summe der einen Valuta eine veränderliche, bald größere bald geringere Summe in der anderen Valuta geleistet wird.

Zwischen Wien und fremden Plätzen beträgt die feste Valuta 100 Einheiten des fremden Geldes (bei London 10) und der notierte Curs gibt an, wieviel fl. ö. W. Bankvaluta dafür gezahlt oder empfangen werden. Ist z. B. der Curs auf Paris mit 47 notiert, so bedeutet dies: 100 Franks werden mit 47 fl. ö. W. in Banknoten bezahlt. Der Curszettel enthält zwei Colonnen: der in der mit „Geld" überschriebenen Colonne angegebene Curs gibt an, wieviel bezahlt wird, der in der mit Ware überschriebenen Colonne, dass man den Wechsel zu diesem Preise anbietet.

Die Wechselreduction kann durch die Procentrechnung, durch die Zerfällung oder durch den Kettensatz ausgeführt werden, z. B.

Ein Wiener kauft einen Amsterdamer Wechsel pr. 7200 fl. holl. im Curse von 98·20; wieviel fl. ö. W. muss er dafür bezahlen?

7200 × 98 1/5	oder	100 fl. holl . . .	98·20
586		7000 fl. holl . . .	6874·00
648		200 „ „ . . .	196·40
705600			7070·4
1440			
7070·40 fl. ö. W.	oder		

fl. ö. W. x	7200 fl. holl.
fl. holl. 100	98·2 fl. ö. W

x = 7070·4 fl. ö. W.

§. 80.

III. Berechnung der Staatspapiere und Actien.

Wenn ein Staat durch bedeutendere allgemeine Unglücksfälle, Kriege oder durch Unterstützung oder Ausführung großartiger Staats-

bauten 2c. genöthigt ist, größere Summen in kürzerer Zeit herbeizuschaffen als dies durch die Steuern geschehen kann, oder wenn diese Ausgaben überhaupt durch die laufenden Einkünfte nicht gedeckt werden können, so macht er ein Anlehen, d. h. er sucht von Besitzern bedeutender Geldmittel die erforderliche Summe gegen künftige allmälige Rückzahlung vorgestreckt zu erhalten. Damit aber auch kleinere Capitalisten sich am Anlehen betheiligen können, so wird Anlehenssumme in kleinere Beträge zu 100 fl., 500 fl., 1000 fl. getheilt, und die Darleiher erhalten hierüber vom Staate ausgestellte Schuldverschreibungen, welche Staatspapiere, Staatsobligationen oder öffentliche Landespapiere heißen.

Staatspapiere werden auch Schuldverschreibungen über solche öffentliche Darleihen genannt, welche mit Bewilligung des Staates von einzelnen Ländern, von größeren gesellschaftlichen Unternehmungen und selbst von einzelnen größeren Güterbesitzern ausgegeben werden.

Der Capitalsbetrag, auf welchen ein Staatspapier lautet, heißt der Nominal- oder Nennwert desselben.

Die Staatspapiere sind entweder verzinsliche Obligationen oder Lose.

Für die verzinslichen Obligationen werden die Zinsen in bestimmten Terminen nach einem bestimmten Zinsfuße ausgezahlt, und gewöhnlich mittelst gedruckter Zinsanweisungen, Coupons genannt, behoben, welche auf einem eigenen Bogen (Couponsbogen) den Obligationen beigegeben werden.

Das Erträgnis der Lose besteht in bestimmten Gewinnsten, die in eigenen nach einem bestimmten Plane vor sich gehenden Ziehungen entfallen. Manche Lose tragen auch regelmäßige Zinsen.

Eisenbahnbauten, Assecuranzen und andere großartige Unternehmungen können, da sie sehr hohe Capitalien erfordern, nicht von einzelnen Personen ausgeführt werden; daher bilden sich Gesellschaften, welche das erforderliche Capital dadurch zu erhalten suchen, dass sie die Capitalssumme in kleinere gleiche Theile vertheilt von vielen Geldbesitzern aufnehmen. Dem Geldgeber wird über seine Capitalseinlage ein Schein ausgestellt, welchen man eine Actie nennt. Die Gesellschaft selbst heißt Actiengesellschaft, und die Person, die sich im Besitze einer Actie befindet, und dadurch berechtigt ist an dem Gewinne des Unternehmens entsprechenden Antheil zu nehmen, heißt Actionär.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der auf eine Actie entfallende, gewöhnlich alljährlich ausgemittelte Betrag am Gewinne wird Dividende genannt. Es gibt aber auch Actiengesellschaften, bei welchen ein nach Procenten des Actiencapitales bemessener Antheil regelmäßig, gewöhnlich halbjährig, unter dem Namen „Zinsen“ oder „ordentliche Dividende“, zur Vertheilung kommt, und auch der aus dem Abschluss der Jahresrechnung für eine Actie sich herausstellende Mehrgewinn als außerordentliche Dividende den Actionären ausgezahlt wird.

Oft werden Actiengesellschaften durch unvermeidliche größere Auslagen genöthigt, Anleihen zu machen, um nicht durch Vermehrung der Actien oder durch Aufzahlung auf dieselben diese Auslagen bestreiten zu müssen. In einem solchen Falle geben sie dann Schuldverschreibungen aus, welche zwar keine Berechtigung auf einen Antheil des Gewinnes geben, aber deren Zinsen noch vor jenen der Actien gedeckt werden müssen, weshalb dieselben Prioritäts-Obligationen oder Prioritäten genannt werden.

Banken und Creditanstalten geben als Darlehen an Grundbesitzer gegen Verpfändung von Grundeigenthum Schuldscheine hinaus, deren Zinserträgnis von der betreffenden Anstalt garantiert ist. Diese Schuldscheine werden Pfandbriefe genannt.

Die Actien, Prioritäten, Pfandbriefe und öffentliche Fonds haben dem gemeinschaftlichen Namen Effecten.

Die Effecten kann der Capitalist als ein bequemes Mittel benützen sein Geld auf den Genuss von Zinsen anzulegen. Sie werden daher als Ware behandelt und haben einen sehr veränderlichen Wert, welcher Curs heißt.

Der Curs wird bei allen Staatspapieren, Grundentlastungs-Obligationen, Pfandbriefen und den meisten Prioritäts-Obligationen in Procenten, d. i. für 100 fl. des Nennwertes, bei sämmtlichen Actien und Privatlosen pr. Stück angegeben, und hierbei an den österr. Börsen in Gulden ö. W. Bankvaluta ausgedrückt.

Mit Ausnahme der Actien müssen beim Einkaufe verzinslicher Effecten dem Verkäufer nebst dem Curswerte des Capitals die noch nicht behobenen Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Verkaufstag entrichtet werden. Ist der Curs der Effecten in Procenten gegeben, so findet man den Curswert, wenn man den Nominalwert mit dem Curse multipliciert und das Product durch 100 dividiert. Kauft

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

z. B. jemand am 17. Juni eine 1200 fl. einheitliche Staatsschuld in Papierrente à 76·40 fl., so hat er dafür zu zahlen:

1200 fl. Papierrente à 76·40 fl.	916 fl. 80 kr.
Zinsen seit 1. Mai, 46 Tg. à $4\frac{1}{5}$%	6 „ 44 „
	923 fl. 24 kr.

Bei den Actien ist die außerordentliche Dividende schon beim Curse eingerechnet.

Die Zinsen werden vom Nennwerte, daher in unserer früheren Aufgabe von 1200 fl. berechnet; der Monat wird hiebei zu 30 Tagen angenommen und der Kauftag nicht hinzugerechnet.

Aufgaben in Močniks Arith. f. Bsch. S. 59 und 60.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anhang.

Da beim Erscheinen der nachstehenden Verordnung der Druck der „Methodik des Rechenunterrichts“ fast beendet war, so lassen wir sie hier folgen:

Neue Abkürzungszeichen für die metrischen Maß- und Gewichtsgrößen. Vom Minister für Cultus und Unterricht ist an sämmtliche Landesschulbehörden unterm 26. März d. J., Zahl 5485, folgender Erlaß, betreffend die Einführung gleicher Abkürzungszeichen für die metrischen Maß- und Gewichtsgrößen in den Schulen, ergangen:

Das k. k. Handelsministerium hat auf Antrag der Normal-Aichungs-Commission die in dem beigeschlossenen Verzeichnisse angeführten Abkürzungszeichen für metrischen Maß- und Gewichtsgrößen *) im eigenen Ressort und namentlich im Aichdienste zur Anwendung vorgeschrieben und das Ansuchen anher gerichtet, den Gebrauch dieser Abbreviaturen auch beim Unterrichte an Volks- und Mittelschulen einzuführen.

Indem ich auf dieses Ansuchen einzugehen finde, ersuche ich die k. k. Landesschulbehörde, behufs Einführung der in diesem Verzeichnisse angeführten Abkürzungszeichen beim Unterrichte an Volks- und Mittelschulen, sowie in den Lehrerbildungsanstalten das Erforderliche zu verfügen.

Abkürzungszeichen für die metrischen Maß- und Gewichtsgrößen.

1. Längenmaße.		2. Flächenmaße.	
Kilometer	*km*	Quadrat-Kilometer	km^2
Meter	*m*	Quadrat-Meter	m^2
Decimeter	*dm*	Quadrat-Decimeter	dm^2
Centimeter	*cm*	Quadrat-Centimeter	cm^2
Millimeter	*mm*	Quadrat-Millimeter	mm^2
		Hektar	*ha*
		Ar	*a*

*) Keines dieser Zeichen weicht von jenem ab, welches das „Comité international des poids et mesures“ für dieselbe Größe angenommen hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Raummaße.		4. Hohlmaße.	
Cubik-Kilometer	km^3	Hektoliter	*hl*
Cubik-Meter	m^3	Liter	*l*
Cubik-Decimeter	dm^3	Deciliter	*dl*
Cubik-Centimeter	cm^3	Centiliter	*cl*
Cubik-Millimeter	mm^3		

5. Gewichte.

Tonne	*t*	Gramm	*g*
Metrischer Centner	*q*	Decigramm	*dg*
Kilogramm	*kg*	Centigramm	*cg*
Dekagramm	*dkg*	Milligramm	*mg*

Anmerkung. 1. Zu den Abkürzungszeichen wird in Schrift und Druck lateinische Cursivschrift verwendet. — 2. Den Zeichen ist rechts kein Punkt beizusetzen. — 3. Die Zeichen werden der Zahl rechts in gleicher Zeile beigefügt; bei Zahlen mit Decimalstellen nach der letzten Decimalstelle.

Conrad Eybesfeld.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis.

I. Abtheilung.

Seite

Das Rechnen im Zahlenraume von 1 bis 100 3
Elemente des Bruchrechnens 19
Preisberechnungen 24

II. Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume über Hundert.

Kenntnis dieser Zahlen 26
Addieren (mündlich und schriftlich) 39
Subtrahieren (mündlich und schriftlich) 43
Multiplicieren (mündlich und schriftlich) 52
Dividieren (mündlich und schriftlich) 62
Allgemeine Bemerkungen 76
Die Decimalzahlen (Wesen und Numeration derselben) 78
Einfluß des Decimalpunktes auf den Wert der Decimalzahlen 82
Addition der Decimalzahlen 84
Subtraction der Decimalzahlen 85
Multiplication der Decimalzahlen 87
Division der Decimalzahlen 89
Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen 96
Übersicht der Maße, Gewichte und Münzen 97
Resolvieren und Reducieren 99
Die vier Rechnungsoperationen 104
Zeitrechnung 106

III. Abtheilung.

Das Rechnen in den oberen Schulclassen.

Allgemeine Bemerkungen 117
Rechnungsvortheile bei der Multiplication 118
Rechnungsvortheile bei der Division und nachträglich bei der Multiplication 123
Theilbarkeit der Zahlen 127

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite
Das Rechnen mit gemeinen Brüchen 140
Verhältnisse und Proportionen 165
Das Rechnen mit entgegengesetzten Zahlen 180
Ziffergleichungen 194
Quadrieren, Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel . . . 206
Interessen-Discont- und Terminrechnung 225
Theilregel 233
Mischungsrechnung 236
Kettenrechnung 239
Procentrechnung und ihre Anwendung 241
Zinseszinsenrechnung 250
Berechnung der Münzen, Wechsel und Staatspapiere 253
Anhang 267

K. und k. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den Rechen-Unterricht.

a) Für Volks- und Bürgerschulen.

Ambros, Jos. und **Fr. Kopetzky,** Rechenbuch für Volksschulen.
1. Heft, 40 S. 4. Aufl. geh. 15 kr. = 30 Pf.
2. Heft, 56 S. 6. Aufl. geh. 15 kr. = 30 Pf.
3. Heft, 46 S. 6. Aufl. geh. 15 kr. = 30 Pf.
4. Heft, 62 S. 6. Aufl. geh. 15 kr = 30 Pf.
5. Heft, 52 S. 5. Aufl. geh. 15 kr. = 30 Pf.

— — Rechenbuch für Bürgerschulen.
1. Classe, 75 S. 7. Aufl. geb. 26 kr. = 52 Pf.
2. Classe, 127 S. 5. Aufl. geb. 32 kr. = 64 Pf.
3. Classe, 96 S. 4. Aufl. geb. 32 kr. = 64 Pf.

Bräutigam, Herm., Seminar-Lehrer in Bielitz, Methodik des Rechen-Unterrichts auf den ersten Stufen mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten. 1878. geh. 60 kr. = M. 1.20.

Czatschkowitsch, Andr., Bürgerschuldirector in Wien, Ziffergleichungen. Als Einleitung: Das Rechnen mit entgegengesetzten Größen. Für Bürgerschulen, die unteren Classen der Mittelschulen und Oberclassen der erweiterten Volksschule. 1871. 30 kr. = 60 Pf.

Günter, Michael, emer. Lehrer an der k. k. Lehrer-Bildungsanstalt und Prof. an der Gremial-Handelsschule in Wien, Das metrische Maß; seine Theile und deren gegenseitige Werte in ihren Beziehungen zum Wiener Maß. 2. Auflage, Wandtafel (Format 1 m — 1 m) mit 31 colorierten Abbildungen. 1873. In Mappe mit Text 80 kr. = M. 1.60; auf Leinwand mit Stäben 2 fl. = 4 M.

Klein, L., Rechenfibel. Ein Übungsbüchlein für die Elementarschüler. Übungsstoff im Zahlenraume von 1—20. 2. Ausgabe. 1873. geh. 20 kr. = 40 Pf.

Kopetzky, Franz, Rechenbuch (Aufgabensammlung) für Mädchen-Fortbildungsschulen. 1886. cart. 58 kr. = M. 1.16.

— — Rechnungen zur Einführung der Arbeiter-Unfallversicherung in Österreich, im Grunde des Gesetzes vom 28. December 1887, für Gewerbeschulen, Fortbildungsschulen, Handwerkerschulen, Bürgerschulen und Volksschulen, sowie für Arbeitgeber und Arbeitnehmer. 1890. geh. 25 kr. = 50 Pf.

Lindner, G. A., Dr., k. k. Schulrath, Professor der Pädagogik und Philosophie, Das Rechnen in Bildern. Zahlenraum 1—10. 10 Blätter in Farbendruck (Folio) mit erläuterndem Text. 1875. In Mappe fl. 1.80 = M. 3.60; auf Deckel 3 fl. = 6 M.

Napravnik, Franz, Bürgerschullehrer, Geometrie und geometrisches Zeichnen für Knabenbürgerschulen. Für die 1., 2. und 3. Classe der österreichischen Bürgerschulen. 3 Theile. 4.—9. Aufl. 1890. Jeder Theil kostet 30 kr. = 60 Pf.

Schähle, Fr. G., Lehrer in München. Der erste Rechenunterricht. Praktische Darstellung des Rechenunterrichtes im Zahlenkreis von 1—100, für Schule und Haus. geh. 50 kr. = 1 M.

Schubert, Karl, Professor der k. k. Lehrerinnen-Bildungsanstalt in Wien, Das Decimalrechnen in den unteren drei Classen der Volks- und Bürgerschulen. Ein Beitrag zur Methodik des Rechenunterrichts. 1877. geh. 40 kr. = 80 Pf.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schubert, Karl, Professor der k. k. Lehrerinnen-Bildungsanstalt in Wien, Das Flächenmodell beim Unterrichte in der geometrischen Formenlehre. Ein Beitrag zur Förderung des Unterrichtes in der Elementar-Geometrie. 1879. geh. 40 kr. = 80 Pf.

Söder, Heinrich, Taubstummenlehrer in Stade, Veranschaulichung der Zeiteintheilung. Ein Lehrmittel zum Anschauungsunterrichte in Elementarschulen, Volksschulen, Taubstummen-Anstalten, Idioten-Anstalten, Schulen für Schwachbefähigte, Kindergärten 2c. 2c. Zwei color. Wandtafeln (91 + 65 cm.) mit Text. 1874. Unaufgezogen in Mappe. fl. 1.60 = M. 3.20; auf Deckel aufgezogen 3 fl. = 6 M.

Villicus, Franz, k. k. Professor, Rechenbuch für Bürgerschulen.
1. Theil für die 1. Classe. 4. Aufl. geb. 72 kr. = M. 1.44.
2. Theil für die 2. Classe. 3. Aufl. geb. 72 kr. = M. 1.44.
3. Theil für die 3. Classe. 3. Aufl. geb. 92 kr. = M. 1.84.

b) Für höhere Lehranstalten.

Fialkowski, N., Architekt und Professor der Geometrie. Die zeichnende Geometrie oder Anleitung zum Zirkelzeichnen für Ackerbauschulen. Verfaßt im Auftrage des h. k. k. Ackerbau-Ministeriums. 1879. geh. 60 kr. = M. 1.20.

— — Elemente des Situations-Zeichnens, nebst Anleitung zum Colorieren. Verfaßt im Auftrage des h. k. k. Ackerbau-Ministeriums. (Mit 9 Taf.) 1880. geh. 60 kr. = M. 1.20.

— — Kurzgefaßte praktische Geometrie. Leichtfaßliche Anleitung zum Vermessen, Höhenmessen und Nivellieren für Ackerbauschulen und andere niedere Lehranstalten. Verfaßt im Auftrage des h. k. k. Ministeriums. (Mit 180 Holzschnitten im Text.) fl. 1.20 = M. 2.40.

Glöser, Mor., k. k. Realschul-Professor in Wien. Das abgekürzte Rechnen in Decimalbrüchen. Ein Hilfsbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und verwandte Anstalten. 1876. geh. 40 kr. = 80 Pf.

— — Lehrbuch der Arithmetik, für die erste und zweite Classe der österr. Mittelschulen. 2. Aufl. 1883. geh. 80 kr. = M. 1.60.

— — Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für die dritte Classe der österr. Mittelschulen. 2. umgearb. Aufl. 1881. geh. 50 kr. = 1 M.

Roßmanith, Constantin, Geometrische Formenlehre. Eine Anleitung zur Betrachtung geometrischer Körper als Vorbereitung zur Geometrie. Zunächst für die erste Realclasse. Mit Übungsaufgaben, 55 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer Tafel. 1879. geh. 60 kr. = M. 1.20.

— — Elemente der Geometrie im constructiven Sinne. Lehr- und Übungsbuch für die II., III. und IV. Realclasse. Mit 130 Figuren, 1 Tafel und zahlreichen Constructions-Rechen-Aufgaben. 1883. geh. 1 fl. = 2 M.

Streinz, J. C., Director der k. k. Staats-Realschule am Schottenfelde in Wien. Das Kopfrechnen auf dem Gebiete der Gleichungsaufgaben und der Chablon-Rechnungen. 1878. geh. 70 kr. = M. 1.40.

Villicus, Franz, k. k. Professor, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für Unter-Realschulen.
1. Theil für die 1. Classe. 9. verb. Auflage. 1888. geb. 75 kr. = M. 1.50.
2. Theil für die 2. Classe. 8. Auflage. 1889. geb. 80 kr. = M. 1.60.
3. Theil für die 3. Classe. 6. Auflage. 1890. geb. 80 kr. = M. 1.60.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf