I. Theil:

Die Geometrie in der Volks- und Bürgerschule.

(Mit Berücksichtigung des Lehrstoffes für das geometrische Zeichnen in der VI., resp. I. Classe).

Bearbeitet von **Eduard Bauer.**

I. Allgemeine Betrachtungen.

Die Geometrie ist keine Erfahrungswissenschaft; zu ihren Resultaten ist man nicht auf dem Wege der Beobachtung gekommen, sondern auf dem der Speculation. Die Formen, mit denen die Geometrie sich beschäftigt, sind zum Theile in der Natur vorhanden, zum Theile sind sie künstlich geschaffen worden.

Der betrachtende und speculierende Denker hat die todten Formen zu beleben gewusst, indem er das Gesetzmäßige oder Gesetzlose herauszulesen vermochte und Gleiches mit Gleichem combinierte. Die geometrischen Raumgrößen, wie wir sie heute definieren, sind von den wirklich existierenden Körpern abstrahiert; dieser Process der Abstraction hat die Geometrie zu einer Wissenschaft gemacht.

Jener Theil der Geometrie, welcher der Abstraction nicht bedarf, hat es bloß mit sichtbaren Formen und deren sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften zu thun, er heißt daher auch Formenlehre und ist Gegenstand der fünf ersten Classen der heutigen österreichischen Volksschule. Die Formenlehre soll und muss der Fassungskraft der Schüler auf dieser Stufe entsprechend ihre Wahrheiten durch die Anschauung entwickeln; von der Beweisführung eines geometrischen Lehrsatzes im Sinne Euclids kann und darf daher bei ihr nicht die Rede sein. Die Geometrie im wissenschaftlichen Sinne beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Beziehungen der Raumgrößen, welche nicht sichtbar sind, sie fördert den Geist der geometrischen Gebilde zutage und kann daher nur dem schon abstrahierenden, speculativen Verstande geboten werden, also dem schon reiferen Schüler der drei Oberclassen der achtclassigen Volks-, resp. Bürger- oder Mittelschule.

In der Geometrie gibt es kein „Nebeneinander" der Wahrheiten und Gesetze, wie in den Naturwissenschaften, sondern nur ein „Hintereinander". In der Geometrie ist jede Entdeckung die Folge einer früheren, ohne welche sie nicht hätte gemacht werden können. In den Naturwissenschaften sind schwierige, compliciertere Gesetze manchmal vor leichteren, einfacheren entdeckt worden; die Mathematik allein schreitet vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Leichteren zum Schwereren in einer ununterbrochenen Kette fort.

Deswegen bietet auch der Unterricht in der Geometrie in concentrischen Kreisen Schwierigkeiten. Der ganze Stoff hängt innig zusammen, und Wahrheiten auf einer frühern Stufe einfach weglassen und auf der nächstfolgenden behandeln, heißt noch nicht in concentrischen Kreisen lehren.

Die Geometrie erweist ihre Lehrsätze entweder direct, d. h. sie beweist z. B., dass die drei Winkel eines Dreiecks 180 Grade ausmachen müssen, oder sie geht indirect (apagogisch) vor, d. h. sie sucht zu beweisen, dass das Gegentheil von dem, was sie beweisen will, nicht möglich ist. Die erstere Art der Beweisführung ist selbstverständlich der letzteren vorzuziehen.

Die Geometrie hat es mit den Raumgrößen zu thun, mit bloß gedachten Dingen (Abstracta), die von den wirklichen Dingen (Concreta) abstrahiert werden. Der geometrische Körper ist bloß der Raum, den der betreffende physische Körper von derselben Gestalt einnimmt; die geometrischen Flächen sind bloß die Grenzen eines physischen Körpers, die geometrischen Linien sind bloß die Grenzen physischer Flächen und die geometrischen Punkte sind die Grenzen physischer Linien. Der geometrische Körper, wenn auch ein bloßes Gedankending, hat die drei Dimensionen, die Länge, Breite und Dicke; er ist ein dreidimensionaler Raum. Die geometrische Fläche hat zwei Dimensionen, sie hat keine Dicke; die geometrische Linie hat eine Dimension, die Länge, und der geometrische Punkt ist raumlos, also dimensionslos. Es ist klar, dass man die Raumgrößen auf der Unterstufe d. h. von der ersten bis zur 6. Classe nicht in der Weise definiert; eben so klar ist es, dass man dort nicht von einem geometrischen Körper, von einer geometrischen Fläche u. s. w. sprechen wird, weil dies dem kindlichen Geiste nicht fasbar wäre. Der kindliche Geist kann nur fassen, was

ihm durch die Sinne direct vermittelt wird. Das Kind wird begreifen, wenn man ihm einen Würfel zeigt, dass derselbe einen Raum — einen Platz — einnimmt und daher ein Körper sein muss. Das Kind begreift ferner, dass der Würfel von Flächen umgeben ist, weil es die Flächen sehen kann, und weil es von einer Tisch- und Bodenfläche weiß, und man kann ihm auch anschaulich machen, dass es ebene und krumme Flächen gibt.

Die geometrischen Raumgrößen in ihrer richtigen Auffassung müssen jedoch Gegenstand einer höheren Stufe sein.

Aus dem Anschauen der Körper hat man den Begriff „Fläche", aus dem Betrachten der Fläche den Begriff „Linie" und von dem der Linie hat man den Begriff „Punkt" abgenommen. Es ist daher naturgemäß, wenn der Volksschulpädagoge mit der Demonstration eines Körpers und zwar des allereinfachsten, des Würfels, seinen Unterricht in der Formenlehre beginnt.

In der Volksschule und auch in deren weiterem Ausbaue, der Bürgerschule, sollen wo möglich die geometrischen Lehrsätze durch die Anschauung direct erwiesen werden; natürlich kann man nur veranschaulichen, was sich veranschaulichen lässt, sehr oft kann man wohl nur einen Gedankenprocess anregen, der zum richtigen Schlusse, zur Erkenntnis der Wahrheit führen soll.

Die mathematische Beweisführung geht auch vom Anschauen aus, denn es muss ihr eine richtige Zeichnung zur Grundlage dienen, aus welcher sie herausliest, nur dass sie das nach und nach Herausgelesene durch Buchstaben ausdrückt und den gewonnenen Schluss in eine Formel kleidet; es ist aber immer derselbe Gedankenprocess.

Es ist daher nicht nothwendig, einer einfachen mathematischen Beweisführung ängstlich aus dem Wege zu gehen, wenn eine gute Zeichnung vorliegt; denn endlich muss ja doch einmal der Schüler von dem Concreten zum Abstracten geführt werden.

Wenn man also beispielsweise in der 6. Classe durch das Nebeneinanderlegen der drei aus Pappe geschnittenen Winkel eines bestimmten Dreieckes gezeigt hat, dass sie einen gestreckten Winkel, also 180° ausmachen, so wird es kein Verstoß gegen die Didaktik sein, wenn man auch auf die bekannte, einfach mathematische Weise lehrt, dass nicht nur die Winkel dieses Dreieckes, sondern die drei Winkel eines jeden Dreieckes 180 Grade betragen.

Man darf die Hinüberleitung von der unmittelbaren Anschauung zum Begriff allerdings nicht verfrühen; nachtheilig ist es aber auch, sie unnützer Weise zu verlangsamen.

II. Zweck und Ziel des geometr. Unterrichtes in der Volks- und Bürgerschule.

Die Lehrpläne für Volks- und Bürgerschulen, welche auf Grund des Reichsvolksschulgesetzes ausgearbeitet wurden, stellen Geometrie und geometrisches Zeichnen als eine selbständige Unterrichtsdisciplin auf. Da sich aber das geometrische Zeichnen nicht immer mit dem vorgenommenen Lehrstoff aus der Geometrie in Verbindung bringen läßt, da es sich auch mit der Darstellung einfacher technischer Objecte zu befassen hat, welche in den Rahmen des geometrischen Lehrstoffes selten hineinpassen, so ist es angezeigt, mindestens von der 7. Classe an beide Gegenstände gesondert zu behandeln.

Die Geometrie wurde als selbständiger Lehrgegenstand in den Unterrichtsplan aufgenommen, weil die durch das Volksschulgesetz geforderte höhere Volksbildung ohne eine größere Vertiefung überhaupt nicht denkbar wäre. Die eingehende Behandlung dieser Unterrichtsmaterie ist von eminent praktischer Bedeutung. Unsere Zeit verlangt vom Handwerker und gewerbetreibenden Bürger, vom Arbeiter mehr, als dass er wisse: das ist ein Würfel, das ein Kegel, das eine gerade oder krumme Fläche. Unsere Gewerbetreibenden sollen Entfernungen und Flächen beurtheilen und gegenseitig in ein Verhältnis bringen können, sie sollen geschickt Längen messen, Flächen und Körper berechnen können und einige sogenannte „höhere Gewerbe" verlangen sogar ein gutes Hantieren mit dem Cirkel, eine genaue Wiedergabe des Vorgestellten und Berechneten.

Damit ist auch das Ziel des Unterrichtes in der Geometrie gegeben. Leistet der geometrische Unterricht in der Volks- und Bürgerschule das oben Ausgesprochene, so hat er sein Ziel erreicht und seinem Zwecke entsprochen.

Bei der verhältnismäßig knapp bemessenen Zeit für diesen Unterrichtsgegenstand wird der Lehrer auf außerordentliche Auskunftsmittel bedacht sein müssen.

Da die Schulzeit zu Excursionen nicht verwendet werden darf, und im Lehrplane, in richtiger Weise, nach Thunlichkeit Feldmessübungen mit Kette und Stäben gefordert werden und endlich praktische Geometrie auch thatsächlich nur im Freien, durch wirkliche Vermessungen, betrieben werden kann, so wird es unerläßlich sein, im Sommer an freien Tagen bei günstiger Witterung mit den Schülern Ausflüge in plane Gegenden zu machen, sie dort lehren, Felder abzustecken, im Umfange auszumessen, im verkleinerten Maßstabe auf das Papier zu bringen und zu berechnen.

III. Der Lehrstoff der V. Classe.

Der geometrische Lehrstoff für die V. Classe wird ganz treffend mit dem Collectivnamen „Formenlehre" bezeichnet, weil die einfachsten eckigen und krummen Körper bloß ihrer Form und den zutage tretenden Eigenschaften nach betrachtet werden sollen. An den verschiedenen einfachen Körpern: dem Würfel, dem Prisma, der Pyramide, dem Pyramidalstutz, dem Kreiscylinder, dem Kreiskegel, der Kugel und dem Ellipsoid — sollen die verschiedenen Flächen, Winkel und Linien durch Anschauung (Erklärung und darauffolgende Zeichnung) zur Kenntnis gebracht werden.

In Nachfolgendem soll der Vorgang, wie er beim Vorzeigen jedes Körpers eingehalten werden soll, am Würfel gezeigt werden. (Demonstrieren.)

Der Würfel ist ein Körper, weil er einen Raum einnimmt. Beim Würfel ist die Länge gleich der Breite und gleich der Dicke. Der Würfel ist von sechs gleich großen viereckigen Flächen begrenzt, welche Seiten heißen, und weil diese Flächen durchaus eben sind, heißen sie Ebenen. Die Grenzen dieser sechs gleich großen Ebenen sind gleich lange gerade Linien, in der Anzahl zwölf, sie heißen Kanten; die Endpunkte der Kanten, in der Anzahl acht, heißen Ecken des Würfels. Der Würfel ist also ein Körper mit sechs gleich großen viereckigen Seiten, zwölf gleich großen geraden Kanten und acht Ecken. Schneidet man ihn genau in zwei Hälften, so haben dieselben gleiche Gestalt und Größe, er heißt daher ein regelmäßiger Körper. Drei Seiten des Würfels bilden ein hervorspringendes Eck, ein dreiseitiges Körpereck. Die vier Kanten einer jeden Würfelseite sind

gleich groß und je zwei nebeneinander befindliche schließen einen Winkel ein, den man einen Rechten nennt. Eine Würfelfläche ist also ein Viereck von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln ein solches Viereck heißt ein Quadrat. (Hiebei wird vorläufig von der Größe des Würfels abgesehen.)

Nun wird aber der Lehrer gut thun einen Würfel von bestimmter Größe vorzuzeigen, z. B. einen Kubikdecimeter. Durch geschickte Fragen wird nun folgende Definition für den Kubikdecimeter vermittelt. „Der Kubikdecimeter ist ein Würfel, dessen Seite ein Quadratdecimeter und dessen Kante ein Meter ist.

Daran haben sich die Fragen zu knüpfen: „Was versteht man unter einem Kubikmeter, Kubikcentimeter u. s. w.?

Am Würfel wurden auf diese Weise folgende Begriffe entwickelt: Körper, ebene Fläche, Körpereck, Quadrat, gerade Linie, rechter Winkel.

Am rechtwinkeligen vierseitigen Prisma erklärt man das Rechteck, am schiefwinkeligen vierseitigen Prisma das Rhomboid, den Rhombus, den spitzen und stumpfen Winkel. An der Pyramide die verschiedenen Arten des Dreiecks; am Pyramidalstutz das Trapez und das Trapezoid. Am senkrechten Kreiscylinder den Kreis und die Ellipse. An der Kugel den Kreis und die Kugelfläche. Am regulären fünf- und sechsseitigen Prisma das regelmäßige Fünf- und Sechseck.

Es ist selbstverständlich, dass die Schüler anzuhalten sind, alle diese Körper aus ihren Netzen selbst anzufertigen. Die Körper sind auch an der Tafel vom Lehrer zu zeichnen und in ihre Netze aufzulösen. Man wirke dahin, dass sich die Schüler aus Pappe Körper- und Körpernetzsammlungen anfertigen.

IV. Der Lehrstoff der VI. Classe mit Berücksichtigung des Stoffes für das geometrische Zeichnen.

Der Lehrstoff der 6. Classe hat sich zu verbreiten über die Lagen, welche zwei, drei, vier u. s. w. Gerade zu einander einnehmen können und über die entstandenen Beziehungen derselben zu einander. In der 6. Classe braucht man die Fläche und ihre Figur (Gestalt) nicht mehr von dem engen Standpunkt der bloßen Körper-

grenze zu betrachten, sondern man kann und soll die verschiedenen planimetrischen Figuren genetisch entstehen lassen.

Zwei Gerade schneiden sich entweder, oder sie berühren sich, oder es geschieht keines von beiden; dann sind sie entweder parallel oder sie convergieren nach der einen und divergieren nach der andern Richtung. Zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden.

Wenn zwei Gerade convergieren, so kann man sie verlängern, bis sie sich treffen.

Was entsteht dann? Warum können parallele Gerade, noch so sehr verlängert, sich nie treffen? Was ist also ein Winkel? Womit wird die Größe eines Winkels gemessen? Was versteht man unter der Winkelfläche? (Die Winkelfläche ist als Theil einer Kreisfläche aufzufassen.) Welcher Art sind die Winkel, wenn zwei Gerade sich schneiden? Welcher Art sind die entstandenen Winkel, wenn zwei Gerade sich berühren? (Nicht in einem Endpunkte.) Wann steht eine Gerade auf einer andern senkrecht? Es sind die Begriffe „senkrecht" und „vertical" festzustellen.

Drei Gerade können sich in einem, in zwei und in drei Punkten schneiden. Schneiden sie sich in einem Punkte, so bilden sie ein Strahlenbüschel; die Winkel, welche sie solchergestalt einschließen, werden mit einer ganzen Kreislinie gemessen, sie bilden daher 360°. (Construction von Winkeln bestimmter Größe, Addition und Subtraction der Winkel.)

Schneiden sie sich in zwei Punkten, so kann man an ihnen die Begriffe: „Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel" zur Erklärung bringen.

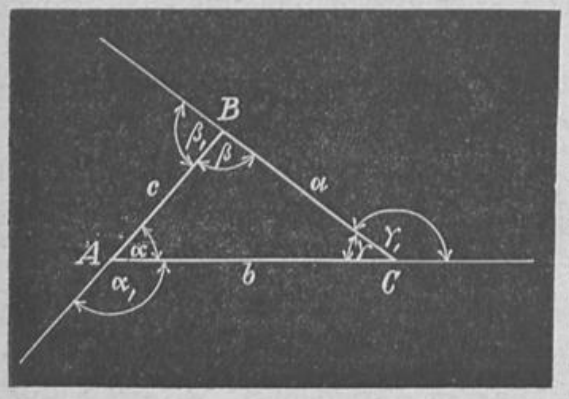
Läßt man die zwei geschnittenen Geraden parallel werden, so werden je zwei Gegen- und je zwei Wechselwinkel einander gleich und die Summe zweier Anwinkel beträgt 180°.

(Bevor man für diese Lehrsätze den Beweis erbringt, wird es gut sein, über den Unterschied zwischen Grundsätzen (Axiome) und Lehrsätzen (Theoreme) zu sprechen; es wird angezeigt sein, einige mathematische Axiome, welche später zu Beweisen unumgänglich nöthig sind, vorzuführen und zu beleuchten. Wie z. B.: Jede Größe ist sich selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addiert und subtrahiert, Gleiches mit Gleichem multipliciert oder durch Gleiches dividiert gibt wieder Gleiches. Zwei Größen einer dritten gleich sind untereinander

gleich u. s. f.) Wo es angeht, soll man freilich geometrische Beweise mit Hilfe der Anschauung machen, aber den einfachen mathematischen Beweis braucht man darüber nicht zu vernachlässigen; denn wird er begriffen, so haben die Schüler auf diesem Wege ihre Denkkraft mehr geübt, als mit Hilfe der Anschauung.

Bei mathematischen Beweisen, wie sie die Oberclassen der Volks- und Bürgerschule nothwendig haben, empfiehlt sich noch immer ganz gut die Euclid'sche Form, welche auf Grund einer vorhandenen Voraussetzung eine Behauptung aufstellt und diese mit Hilfe der Voraussetzung zu erweisen sucht. Was das Axiom: wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich, welches so oft bei den geometrischen Beweisen nothwendig ist, in seiner Anwendung auf mathematische Größen betrifft, so gebe man sich keineswegs der sichern Hoffnung hin, dass es den Schülern so ohne weiters verständlich ist; es wird sich vielmehr empfehlen, dieses Axiom durch mehrere Beispiele den Sinnen vorzuführen. Z. E. Der Schüler A ist ebenso groß, wie der Schüler B, der Schüler C ist auch so groß, wie der Schüler B, also muss — der Schüler A auch so groß sein, wie der Schüler C.

Schneiden sich drei Gerade in drei Punkten, so schließen sie ein Dreieck ein.



Am zweckmäßigsten wird es sein, die drei Ecken eines Dreieckes mit A, B und C; die drei Winkel mit α, β, γ, und die drei Seiten mit a, b und c zu bezeichnen. Dem Winkel α liegt die Seite a, dem Winkel β die Seite b und dem Winkel γ die Seite c gegenüber.

Nennen wir dieser Bezeichnung entsprechend die drei Außenwinkel zum Unterschied von den drei Innenwinkel α_1, β_1, und γ_1, so lassen sich sämmtliche Lehrsätze über das Dreieck in folgende Formeln kleiden:

$$\text{I.}\begin{cases} 1.\ \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = 2\ \text{R} \\ 2.\ \sphericalangle\alpha_1 = \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma \\ 3.\ \sphericalangle\alpha_1 + \sphericalangle\beta_1 + \sphericalangle\gamma_1 = 4\ \text{R} \end{cases}$$

II. $\begin{cases} \text{Angenommen es wäre} & a > c \\ \text{und} & b > a \\ \text{so muss bekanntlich} & \sphericalangle \alpha > \sphericalangle \gamma \\ \text{und} & \sphericalangle \beta > \sphericalangle \alpha \end{cases}$

III. $\begin{cases} \text{und: } a + c > b \\ a + b > c \\ b + c > a \text{ sein.} \end{cases}$

Man ersieht aus diesen Formeln, dass man 1. die drei kleinen Anfangsbuchstaben des griechischen Alphabets verwerten muss, um klar zu sein und dass 2. eine derartige Formel ein deutliches Bild eines geometrischen Lehrsatzes vorstellt. Wissen die Kinder, was die einzelnen Zeichen der Formel bedeuten und haben sie die Beweisführung für den ausgedrückten Lehrsatz erfasst, dann ist die Formel für sie ein verständnisvoller Ausdruck eines ganzen Ideenganges.

Nicht früh genug kann in dem angedeuteten Sinne der Schüler mit der mathematischen Formel vertraut gemacht werden; auf den höheren Stufen, beim Berechnen der Flächen- und Körperinhalte ist ja die Formel absolut nicht zu übergehen, sie soll dann aber den Schülern schon bekannt sein.

Wann ist ein Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt, und wann sind zwei Dreiecke einander congruent?

Bekanntlich sind zwei Figuren einander gleich, wenn sie gleich groß sind, oder kürzer gesagt, wenn sie inhaltsgleich sind; die Gestalt der beiden Figuren kommt dabei gar nicht in Betracht, da ein 27-Eck ebenso viele Flächeneinheiten (m^2) haben kann, wie ein Dreieck.

Die Ähnlichkeit zweier Figuren hingegen hat gar nichts mit der Größe, mit dem Flächeninhalte derselben zu schaffen, sie ist bedingt ausschließlich durch die gleiche Gestalt; die Gestalt planimetrischer Figuren aber ist abhängig von der Größe und Anordnung der Winkel. Wenn aber zwei planimetrische Figuren dieselbe Größe (dieselbe Anzahl Flächeneinheiten) und dieselbe Gestalt haben, dann decken sie sich aufeinandergelegt vollständig mit ihren Seiten und Winkeln und dann sagt man, diese Figuren seien congruent.

($\cong$) Das Zeichen $\cong$ (gleich und ähnlich) wird nicht von allen Geometern für congruent gebraucht. Schulz v. Straßnitzky und Wittstein gebrauchen das

einfachere Zeichen: $\equiv$. Euclid kannte weder das Wort congruent (einerlei), noch das Zeichen dafür; aber der Begriff, den das Wort zum Ausdruck bringt, ist von ihm klar und präcise ausgesprochen worden.

Gehen wir aber nun vom Allgemeinen zum Besonderen über. Zwei Dreiecke werden also nach dem Vorhergehenden congruent sein, wenn sie gleiche Größe und gleiche Gestalt haben oder anders gesagt, wenn sie alle drei Seiten und alle drei Winkel der Reihe nach gleich haben. Nun wäre es aber gewiss sehr umständlich, um zwei Dreiecke auf ihre Congruenz prüfen zu wollen, nachweisen zu müssen, dass sie alle Seiten und Winkel gleich haben. Das sind sechs Stücke, welche man nicht nothwendig alle zu wissen braucht, um auf Größe und Gestalt eines Dreiecks einen Schluss ziehen zu können. Man erbrachte nämlich sehr bald, nachdem der Begriff Congruenz feststand, den Beweis, dass drei von einander unabhängige, d. h. zu einander in keiner Beziehung (Relation) stehende Stücke ein Dreieck der Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmen. Zu einander in Relation stehen z. B. die drei Dreieckswinkel, da ihre Summe 2 R gibt. Die drei Winkel eines schiefwinkeligen Dreiecks werden also ein Dreieck nicht der Größe und Gestalt nach bestimmen und es ermöglichen, die drei Seiten aufzufinden.

Wenn wir, conform der schon früher gewählten Bezeichnung — und wir wollen dieselbe immer beibehalten — die drei Seiten eines Dreiecks mit a, b und c, die drei Winkel mit α, β und γ bezeichnen, so sind unter den sechs Stücken folgende Combinationen zur dritten Classe möglich:

a, b, c, α, β, γ

I. a, b, c, II. a, b, α, III. a, b, β,
IV. a, b, γ, V. b, c, α, VI. b, c, β,
VII. b, c, γ, VIII. c, α, β, IX. c, α, γ,
und X. α, β, γ.

Wenn also drei Stücke eines Dreiecks gegeben sind, so können es sein:

1. Die drei Seiten (a, b und c).

2. Zwei Seiten a und b und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α.

3. Zwei Seiten und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β.

4. Zwei Seiten (a und b) und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ.

5. Zwei Seiten (b und c) und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

6. Zwei Seiten (b und c) und der b gegenüberliegende Winkel β.

7. Zwei Seiten (b und c) und der c gegenüberliegende Winkel γ.

8. Eine Seite (c) und die derselben anliegenden Winkel α und β.

9. Eine Seite (c), der anliegende Winkel α und der gegenüberliegende Winkel γ, und endlich:

10. Alle drei Winkel.

Der 10. Fall kommt nicht in Betracht, da die drei Winkel eigentlich nur zwei Stücke des Dreiecks repräsentieren; die neun ersten Fälle aber können, wie man leicht begreift, allgemein in fünf Sätze zusammengefasst werden, welche angeben, wodurch ein Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt ist, oder — anders gesagt — was man wissen muss, um es construieren zu können. Es müssen gegeben sein:

1. Die drei Seiten

oder 2. Zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel,

oder 3. Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,

oder 4. Eine Seite und die ihr anliegenden Winkel,

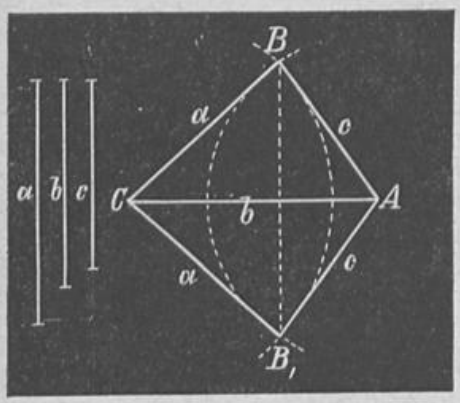
und 5. Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Nachdem durch das Bekanntsein zweier Dreieckswinkel auch der dritte gegeben ist, kann man den Fall 5 als identisch mit Fall 4 betrachten. Es bleiben also eigentlich von den 10 angeführten denkbaren Combinationen nur vier discutierbare übrig.

Wir werden uns nun überzeugen, dass ein Dreieck wirklich mit den in den Fällen 1, 3 und 4 angegebenen Stücken sich construieren lässt, dass aber der Fall 2 dahin präcisiert werden muss, dass es heißt: „Zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel.“ Ist ein ungleichseitiges Dreieck nun wirklich durch drei solche Stücke der Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt, wie sie in den obigen Fällen angeführt sind, so muss es einem zweiten Dreieck, welches dieselben Stücke enthält, congruent sein.

Die Constructionsfälle fallen also mit den Congruenzfällen zusammen.

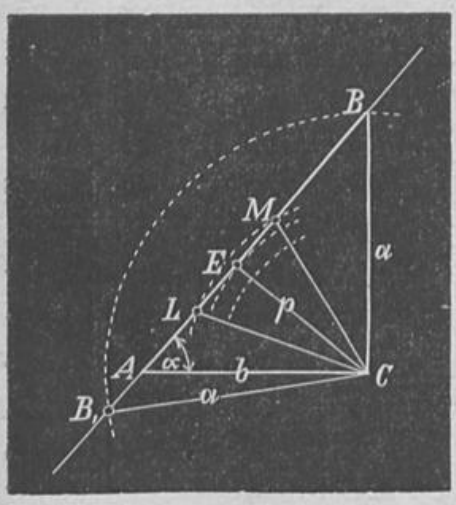
1. Congruenzfall. Es sind gegeben: a, b und c.



Es wird sich leicht zeigen lassen, dass die beiden entstandenen Dreiecke ABC und AB'C vollkommen identisch sind, dass also nur ein Dreieck den gegebenen Bedingungen entspricht. Durch die drei Seiten ist also ein ungleichseitiges Dreieck seiner Größe und Gestalt nach vollkommen bestimmt.

2. Congruenzfall. Es sind gegeben zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel. Z. B. a, b und der Winkel α. Wir wollen vorderhand nicht davon sprechen, ob Seite a größer oder kleiner als Seite b ist, sondern nur den Vorgang beleuchten, wie er bei der Construction des Dreieckes in diesem Falle einzuschlagen ist.

Da der Winkel α der Seite a gegenüber- und an der Seite b liegt, so wird das Maß der Seite b zuerst auf einer Standlinie aufgetragen und der Winkel α an dem einen Ende (A) der Seite b construiert werden müssen. Sodann nimmt man die Seite a in den Zirkel und beschreibt vom Punkte C einen Kreisbogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels α entweder nicht berührt, oder berührt oder in zwei Punkten schneidet. Der erste Specialfall kommt nicht in Betracht, weil gar kein Dreieck möglich ist. Im zweiten Falle entspricht ein rechtwinkeliges Dreieck den gegebenen Bedingungen; im dritten Falle, (wenn beide Schnittpunkte rechts vom Punkte A liegen), entsprechen zwei Dreiecke den gegebenen Bedingungen oder wenn ein Schnittpunkt rechts von A und einer links von A zu liegen kommt, entspricht ein einziges schiefwinkeliges Dreieck den gegebenen Stücken. Siehe die Zeichnung.



Aus dieser Zeichnung erhellt deutlich, dass nur in dem einen Falle, wo die Seite a > ist, als Seite b ein einziges schiefwinkeliges Dreieck den gestellten Anforderungen entspricht, d. h. die Seite a die Seite b und den Winkel α enthält und das ist das $\triangle$ ABC.

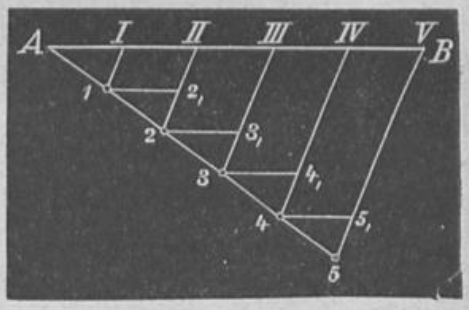
Die Congruenzfälle 3 und 4 bedürfen an dieser Stelle wohl keiner besonderen Behandlung.

Nachdem die Congruenzfälle in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen erläutert worden sind, kann man folgende Constructionsaufgaben daran reihen:

1. Eine gerade Linie von bestimmter Länge ist zu halbieren.
2. Ein gegebener Winkel ist zu halbieren.
3. Ein rechter Winkel ist in drei, vier und mehr Theile zu theilen.

Mit Hilfe der Congruenz der Dreiecke läßt sich ferner zeigen, wie eine Gerade AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Siehe beistehende Figur.



$\triangle AI1 \cong \triangle 1 1_1 2 \cong \triangle 2 3_1 3 \cong \triangle 3 4_1 4 \cong \triangle 4 5_1 5$, also $AI = 1 1_1 = 2 3_1 = 3 4_1 = 4 5_1$ und da Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind, so muss auch: A, I = I, II = II, III, = = III, IV = IV, V sein.

Aufgaben, wie z. B.

Es ist ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind:

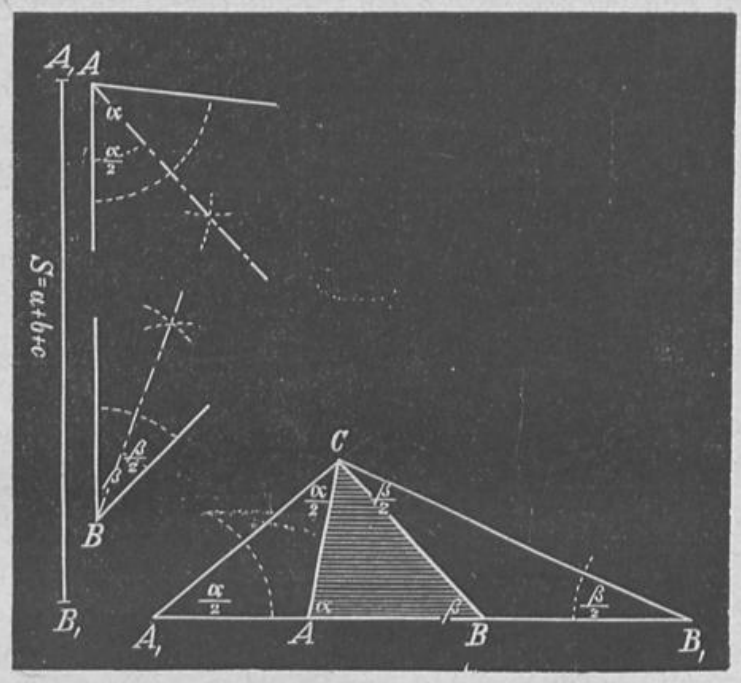
1. Die Summe dreier Seiten und die beiden Winkel an der Basis.
2. Die Grundlinie, die Winkel an der Grundlinie und die Summe der beiden übrigen Seiten; — oder:

Es ist ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, 1. wenn die Grundlinie und die Höhe und 2. wenn die Grundlinie und die Winkel an der Spitze gegeben sind,

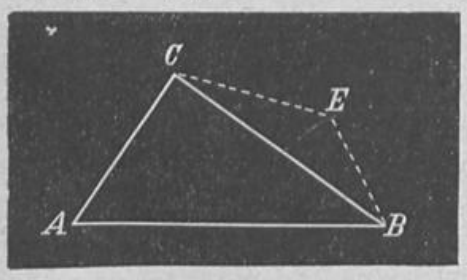
kann der Lehrer dem häuslichen Fleiße der Schüler überlassen, oder zu ihrer Lösung anregen. Solche Aufgaben reizen zum Nachdenken und üben die Vorstellungskraft der Schüler.

Schließlich möge Aufgabe 1 hier ihre Lösung finden.

Die Richtigkeit dieser Construction basiert auf dem Satze, dass ein Außenwinkel eines Dreiecks gleich ist der Summe der beiden inneren ihm gegenüberliegenden Dreieckwinkel.



An die Besprechung und Construction des Dreiecks schließt sich logisch die Besprechung und Construction der verschiedenen Arten der Vierecke. Es ist leicht zu zeigen, nachdem man den Schülern begreiflich gemacht hat, dass zur Construction eines schiefwinkeligen Dreiecks drei von einander unabhängige Stücke nothwendig sind, dass ein Viereck durch fünf Stücke bestimmt ist und zwar durch eine einfache Reflexion:



Setzen wir auf die Seite CB des Dreiecks ABC den Winkel CEB, so entsteht das Viereck ABEC, welches durch fünf Stücke bestimmt sein muss, da die Seite CB beiden Dreiecken gemein ist.

Für ein Dreieck sind $(2 \times 3) - 3 = 3$ Stücke nothwendig, für ein Viereck sind $(2 \times 4) - 3 = 5$ Stücke nothwendig; also nach demselben Gedankenvorgange für ein Fünfeck $(2 \times 5) - 3$ und für ein n Eck $(2 \times n) - 3$ Stücke zur Construction erforderlich.

Daraus ergibt sich die Regel: Wenn man die Seitenzahl eines Vieleckes um eins vermehrt, so bedarf es zweier weiterer Stücke zur Construction des neuen Vieleckes.

Es ist einleuchtend, dass zur Construction eines Trapezes nur vier Bestandtheile nothwendig sind, dass man, um ein Rhomboid zu construieren, nur drei, um einen Rhombus und ein Rechteck zu construieren, nur zwei Bestandtheile zu wissen braucht. Das Quadrat ist durch seine Seitenlänge bestimmt.

Auf diesen Platz gehören folgende Constructionsaufgaben.

1. Es ist ein Trapezoid zu construieren, von welchem die vier Seiten und ein Winkel gegeben sind.

2. Es ist ein Rhomboid zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

3. Es ist ein Rhombus zu zeichnen, von dem die Seite und ein Winkel gegeben sind.

4. Man zeichne ein Trapez, von dem man die vier Seiten kennt. und 5. Es ist ein Trapez zu zeichnen, von welchem man die beiden parallelen Seiten und die Winkel an einer derselben kennt.

In der 5. Classe haben die Schüler die verschiedenen Arten der Vierecke (als Begrenzungsflächen vorgezeigter Körper) mit ihren wichtigsten Eigenschaften kennen gelernt. In der 6. Classe kann man die verschiedenen Vierecke entstehen lassen, indem man vier Gerade sich schneiden läßt.

1. Von den vier sich schneidenden Geraden sei keine zu einer andern parallel und dann entsteht ein Trapezoid.

2. Es seien zwei zu einander parallel und die andern nicht, dann entsteht ein Trapez.

3. Es seien je zwei zu einander parallel und dann entsteht ein Parallelogramm, welches ein Quadrat oder Rechteck, ein Rhombus oder Rhomboid sein kann.

Die ersten beiden heißen „rechtwinkelige", die letzteren beiden „schiefwinkelige Parallelogramme".

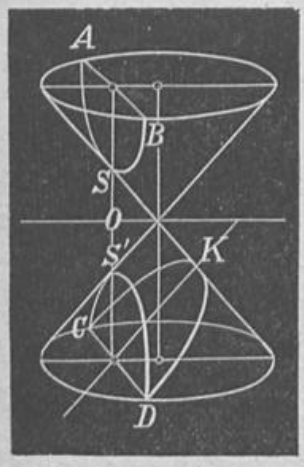
Nun hat die Construction des regelmäßigen Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn- und Zwölfeckes zu folgen.

An die Constructionsaufgaben über die regelmäßigen Polygone wird man einige Aufgaben über Flächenverwandlungen mit Erfolg anreihen können, nachdem man zuvor den Schülern einleuchtend

gemacht hat, dass zwei Dreiecke gleich groß sein müssen, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben, da sich die meisten dieser Constructionen auf diesen Satz stützen.

Den Abschluss des geometrischen Unterrichtes in der VI. Classe bilden die Kegelschnittslinien, welche aber nur in ihren wichtigsten Eigenschaften besprochen und sodann construiert werden müssen. Zur Anschauung sollen die Kegelschnittslinien an zwei mit der Spitze sich berührenden senkrechten gleichen Kreiskegeln gebracht werden.

Wird ein Kreiskegel parallel zur Basis durch eine Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein Kreis; erfolgt der Schnitt schief zur Basis, so ist die Schnittfläche eine Ellipse; wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Kegels geführt, so zeigt die Schnittfläche eine Parabel, und wenn er parallel zur Höhe geführt wird, so werden durch die Ebene beide Kegel geschnitten und die beiden an den Schnittflächen sich zeigenden Curven bilden eine Hyperbel. Siehe die Zeichnung.



Curve CKD ist die entstandene Parabel. ASB und CS'D sind die beiden Hyperbelcurven und O ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Natürlich muss der Lehrer bei seinen Auseinandersetzungen bemerken, dass man sich die beiden Kegel unendlich groß denken muss, da die Parabel und Hyperbel eigentlich unendlich lange Schenkel besitzen. Constructionsaufgaben über die Kegelschnittslinien.

1. Es ist ein Kreis zu zeichnen, dessen Radius gegeben ist und in 4, 6, 8, 10 gleiche Theile zu theilen.

2. An einen Punkt eines Kreises ist eine Tangente zu construieren.

3. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises sind zwei Tangenten an denselben zu construieren.

4. Es sind zwei ungleich große Kreise in den verschiedenen Lagen zu zeichnen, die sie zu einander einnehmen können.

5. Es sind einem Kreise 3, 4, 5 und mehr berührende Kreise einzuschreiben.

6. Es ist eine Ellipse zu construieren, deren Axen gegeben sind.

7. Einem gegebenen Rechteck ist eine Ellipse einzuschreiben.

8. Es ist eine Ellipse zu construieren, wenn man ein paar conjugierter Durchmesser derselben kennt.

9. Es ist eine Parabel zu construieren, deren Brennweite gegeben ist.

10. Es ist eine Parabel zu zeichnen, deren Parameter bekannt ist.

11. Es ist eine Hyperbel mit Hilfe der beiden Axen (reelle und imaginäre) zu construieren.

Sodann empfiehlt es sich, vom Würfel ausgehend, die Netze der wichtigsten geometrischen Körpergestalten zu entwickeln und mit einigen einfachen technischen Objecten zu schließen.

Im Voranstehenden ist gezeigt worden, wie leicht man den Unterricht im geometrischen Zeichnen in der VI. Classe an den Unterricht in der Geometrie anschließen kann, und es ist daher kein Grund vorhanden, auf dieser Stufe beide Disciplinen gesondert zu behandeln oder gar zwei verschiedenen Lehrkräften zu übergeben.

V. Der Lehrstoff der VII. Classe.

In der VII. Classe soll die aus dem Gebiete der Planimetrie in der VI. Classe gelehrte Materie wiederholt und durch die Ähnlichkeitssätze und die Flächeninhalts-Berechnungen vermehrt werden.

Da bei der Ähnlichkeit zweier Dreiecke oder zweier anderer planimetrischen Figuren die Proportionalität der homologen Seiten eine bedeutende Rolle spielt, so sind selbstverständlich auch alle wichtigen planimetrischen Lehrsätze, welche mit Hilfe der Proportionalität der Seiten erwiesen werden können, zu behandeln.

Zwischen die Behandlung der Ähnlichkeitssätze und die Berechnung der Flächeninhalte ist zweckmäßig das Capitel über den „pythagoräischen Lehrsatz" am besten einzufügen, insbesondere deswegen, weil ja eine Beweisführung desselben mit Hilfe eines Ähnlichkeitssatzes geführt wird und auch deshalb, weil man den pythagoräischen Satz in der rechnenden Geometrie (die sich ja hauptsächlich mit der Flächen- und Körperinhalts-Berechnung beschäftigt), nöthig hat.

Den Satz des Pythagoras schon in der VI. Classe abzuhandeln, ist wohl verfrüht, da er auf dieser Stelle nur mit Hilfe der An-

schauung erwiesen werden kann und keine Nutzanwendung deswegen zuläßt, weil erst in der VII. Classe das Quadrieren und Wurzelausziehen vorgenommen werden darf.

In nachfolgenden Fragen soll vorderhand der Lehrstoff der VII. Classe seine Skizzierung finden:

1. Wann sind zwei planimetrische Figuren im allgemeinen und zwei Dreiecke im besondern einander ähnlich?

2. Warum sind in ähnlichen Dreiecken die homologen, d. h. die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, zu einander proportional? und welche Nutzanwendung findet dieser Satz in der praktischen Geometrie?

3. Warum ist die Senkrechte, welche man von der Spitze des rechten Winkels, in einem rechtwinkeligen Dreieck, auf die Hypothenuse fällen kann, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusensegmenten?

4. Wie kann man mit Hilfe des vorigen Satzes die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei gegebenen Geraden construieren und aus einer Zahl zwischen 1 und 10, welche eine Länge repräsentiert, graphisch die Wurzel ausziehen?

5. Warum ist eine Kathete in einem rechtwinkeligen Dreieck die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypothenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt?

6. Wie kann man mit Anwendung des Satzes 5 den pythagoräischen Satz beweisen?

7. Wie kann man den pythagoräischen Lehrsatz durch die Anschauung erweisen?

8. Wie kann man den Satz des Pythagoras durch Flächenvergleichung nachweisen?

9. Wie kann man ein Rechteck in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln, und auf welchen der früher erwähnten Sätze stützt sich die Beweisführung dafür?

10. Wie berechnet man den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Parallelogramms? (Durch die Anschauung zu erweisen.)

11. Wie berechnet man den Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelogrammes?

12. Wie berechnet man den Inhalt eines schiefwinkeligen Dreiecks?

13. Wie berechnet man den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen und gleichseitigen Dreiecks, wenn die Höhe nicht gemessen werden kann?

14. Wie findet man den Flächeninhalt eines Trapezes?

15. Wie verhält sich in einem Kreise der Durchmesser zum Umfange?

16. Wie findet man den Umfang eines Kreises, wenn der Radius oder Diameter desselben gegeben ist?

17. Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreises aus dem Durchmesser, oder den Radius aus dem Flächeninhalte?

18. Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreisringes, eines Kreisaus- und Kreisabschnittes?

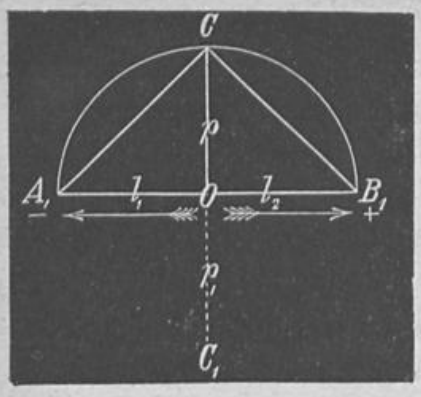
19. Wie findet man den Umfang und Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes und Achteckes?

20. Wie findet man den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Polygons?

21. Wie findet man den Flächeninhalt einer Ellipse?

Die Besprechung und Beantwortung dieser Fragen dürfte mit Inbegriff der für die Wiederholung nothwendigen Zeit, die vierzig bis zweiundvierzig Geometriestunden, welche in der VII. Classe auf das Schuljahr entfallen, vollauf in Anspruch nehmen.

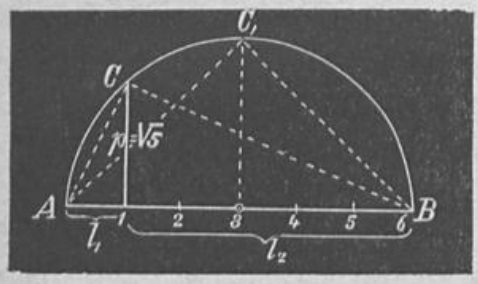
Näheres zur Frage 4. Da die Kenntnis des graphischen Wurzelausziehens noch nicht in weitere Kreise gedrungen ist, so soll an dieser Stelle des Näheren davon gesprochen werden, und zwar in einer Weise, welche der Volks- und Bürgerschule entsprechen dürfte. Es gründet sich auf den Satz, dass in jedem rechtwinkeligen Dreieck das Perpendikel, d. i. die von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Senkrechte, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusenabschnitten ist. Beschreiben wir nun mit dem Radius I einen Halbkreis (siehe die nächste Fig.) und errichten über dem Durchmesser ein Dreieck, dessen Spitze in der Peripherie des Halbkreises liegt, so ist dieses (nach dem Lehrsatze des Thales) ein rechtwinkeliges; es verhält sich also nach dem obigen Satz der linke Hypothenusenabschnitt zum Perpendikel wie sich das Perpendikel zum rechten Segment verhält; das Quadrat der Längenzahl des Perpendikels ist somit gleich dem Producte der Längenzahlen der beiden Segmente und die Länge des Perpendikels selbst ist die Wurzel aus diesem Producte.



$$l_1 : p = p : l_2$$
$$p^2 = l_1 \times l_2$$
$$p = \sqrt{l_1 \times l_2}$$

Setzen wir für $l_2 = +1$ und für $l_1 = -1$, so erhalten wir für p den Wert $[+\sqrt{(-1) \times (+1)}] = = +\sqrt{-1}$. Das entgegengesetzte Perpendikel (p_1) hat somit den Wert: $-\sqrt{-1}$.

Sei beispielsweise aus der Zahl 5 graphisch die Wurzel zu ziehen, (durch Rechnung läßt sich bekanntlich der Wert dieser Wurzel nur annähernd bestimmen), so wird man auf einer Geraden 6 Einheiten auftragen und darüber einen Halbkreis errichten. Das Perpendikel vom Punkte 1 zur Peripherie gezogen, ist nach dem Vorigen die Wurzel aus 5. (Siehe die Figur.)



$$l_1 = 1 \text{ Einheit}$$
$$l_2 = 5 \text{ Einheiten}$$
$$p^2 = 1 \times 5 = 5$$
$$p = \sqrt{5}$$

In diesem Falle wurde der Mittelpunkt des Kreises natürlich nicht wie früher als der Nullpunkt angenommen, sondern der Punkt A.

Auf ähnliche Weise wird man aus 2, 3, 7 u. s. w. graphisch die Wurzel ziehen.

Zur Frage 17. Die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises ($F = \frac{1}{2} . U . r = r^2 . \pi$) kann bekanntlich auf zweierlei Weise gefunden werden. Man kann sich nämlich 1. auf die Formel, welche den Flächeninhalt eines regelmäßigen, dem Kreise umschriebenen Vieleckes angibt ($F = \frac{1}{2} U . r$), berufen, vorausgesetzt, daß man sie früher entwickelt hat, und sagen, daß ein Kreis nichts anderes ist, als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten oder 2. sich den Kreis in unendlich viele congruente Dreieckchen zerlegt denken, wovon man eines berechnet und mit der Anzahl der Dreiecke multipliciert.

Trotzdem die zweite Art den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, vom logischen Standpunkte etwas anfechtbar ist, wenn sie auch zum richtigen Resultate führt, so ist sie doch der ersteren in der Volks- und Bürgerschule vorzuziehen, weil die Auffindung der Formel für den Flächeninhalt der umschriebenen Vielecke mathematische Transformationen erfordert, die man nicht gut auf dieser Stufe vornehmen kann.

Aus der Formel: $\frac{1}{2} U . r = \frac{U . r}{2}$ ersieht man, dass der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Flächeninhalte eines Dreieckes, welches zur Basis den Kreisumfang und zur Höhe den Kreisradius hat. Da man aber ein Dreieck in ein inhaltsgleiches Rechteck und dieses in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln kann, so lässt sich die Seite eines Quadrates finden, welches mit einem Kreise inhaltsgleich ist. Diese Aufgabe nennt man die Quadratur des Kreises. Ist a die Seite dieses Quadrates, so folgt: $a^2 = r^2 . \pi$ und $a = r . \sqrt{\pi}$.

Nachdem sich aber die Länge der Kreisperipherie nur durch Rechnung finden lässt, ist es natürlich, dass alle Geometer der Vergangenheit sich vergeblich bemüht haben, diese Aufgabe mit dem Cirkel lösen zu wollen.

VI. Methodisch geordneter Lehrstoff für die VIII. Classe.

Der geometrische Lehrstoff der VIII. Classe beschäftigt sich mit jenem Theil der Geometrie des Raumes, den man Stereometrie zu nennen pflegt. Die Stereometrie zieht nicht nur Punkte und Linien, die in der Ebene liegen, (wie die Planimetrie), sondern sämmtliche Raumgrößen in den Kreis ihrer Betrachtungen. Da der Stereometer im Raume operiert, so kann er seine Constructionen und Gebilde nur mit Hilfe perspectivischer Bilder auf dem Papiere zur Anschauung bringen und er bedient sich dabei je nach Bedarf der Freien- oder Parallelperspective. (Siehe Methodik des Zeichenunterrichts von Grandauer.)

Wir wollen wieder den Lehrstoff in Form von Fragen, methodisch geordnet vorführen und zum Schlusse an die eine oder andere Frage Erörterungen knüpfen.

1. Wie entsteht eine ebene Fläche?

2. Wie entsteht eine krumme Fläche?

3. Wie entsteht eine Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche?

4. Wodurch ist eine Ebene im Raume ihrer Lage nach bestimmt?

5. Wann steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht?

6. Was versteht man unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene?

7. Wie findet man den Neigungswinkel zweier Ebenen?

8. Wann sind zwei Ebenen zu einander parallel?

9. Was versteht man unter „sich kreuzenden Geraden", und wann sind sich kreuzende Gerade parallel?

10. Was versteht man unter einem Körperwinkel oder Körpereck?

11. Was ist ein regelmäßiges Körpereck?

12. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Kantenwinkeln einer Körperecke?

13. Was versteht man unter einer Supplementarecke?

14. Was ist ein geometrischer Körper?

15. Wie theilt man die geometrischen Körper ein?

16. Wie heißen die wichtigsten ebenflächigen geometrischen Körper?

17. Welche Beziehung besteht zwischen den Ecken, Flächen und Kanten eines ebenflächigen Körpers oder Polyëders? ($E + F = K + 2$).

18. Welche Eigenschaften hat der Würfel, das Tetraëder, Octaëder, Dodekaëder und Ikositetraëder?

19. Wann sind zwei Prismen und zwei Pyramiden congruent, wann sind sie ähnlich und wie verhalten sich die Grundflächen ähnlicher Pyramiden zu einander?

20. Wie verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Prismen und ähnlicher Pyramiden zu einander?

21. Wann sind zwei Prismen und wann zwei Pyramiden einander inhaltsgleich?

Auf welche Weise kann man zeigen, dass eine dreiseitige Pyramide der dritte Theil eines dreiseitigen Prismas ist, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat?

23. Wie berechnet man den Körperinhalt und die Oberfläche eines Parallelepipeds und wie eines Würfels. (Beweisführung durch Anschauung)?

24. Wie berechnet man die Oberfläche und den Körperinhalt der verschiedenen Prismen?

25. Wie berechnet man den Körperinhalt und die Oberfläche einer Pyramide und eines Pyramidenstutzes?

26. Wie berechnet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kreis- und elliptischen Cylinders?

27. Wie findet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kreis- und elliptischen Kegels?

28. Wie findet man den Inhalt und die Oberfläche eines Kegelstutzes?

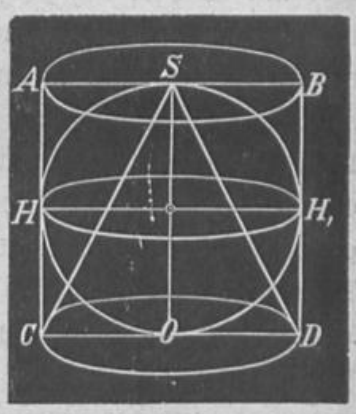
29. Wie entsteht eine Kugel?

30. Was versteht man unter einem größten Kreis an der Kugel?

31. Was ist ein sphärisches Zwei- und Dreieck?

32. Wie findet man die Oberfläche und den Kubikinhalt einer Kugel?

33. Wie verhalten sich die Körperinhalte eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders, von gleicher Höhe zu einander, wenn ein größter Kreis der Kugel gleichen Flächeninhalt mit der Basis des Kegels und Cylinders hat? (Siehe beistehende Zeichnung.)



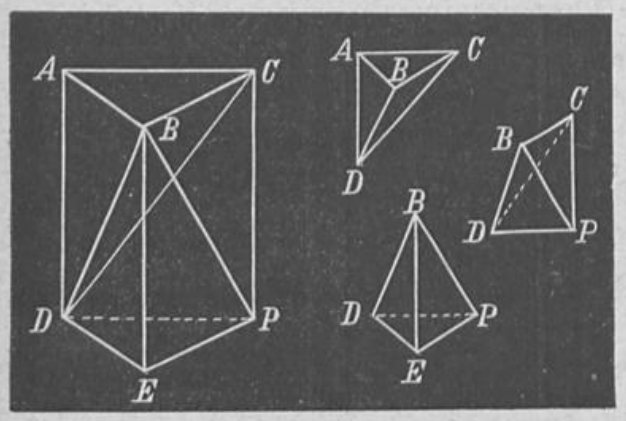
$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{SO}$$

34. Wie berechnet man den kubischen Inhalt und die Oberfläche eines Kugelsectors, eines Kugelabschnittes und einer Kugelschichte?

Für die Zeit von 40 Stunden, welche ungefähr auf diesen Gegenstand in der VIII. Classe entfallen, erscheint das angeführte Materiale sehr umfangreich und fast nicht zu bewältigen. Es reduciert sich aber bedeutend, wenn man bedenkt, dass die Fragen 1 bis 11 schon in der VI. Classe — um in das Gebiet der Perspective einzuführen — ihre Beantwortung fanden, und dass manche der folgenden Fragen auch schon früher theilweise berührt wurden.

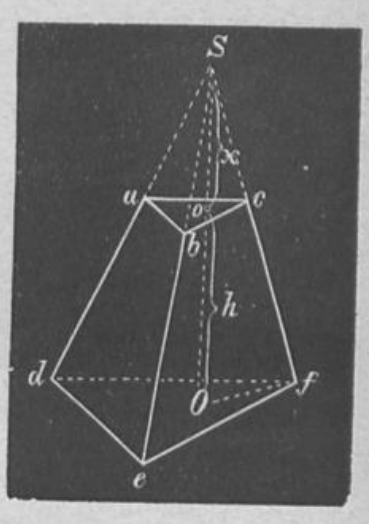
Zur Frage 22. Schneiden wir das dreiseitige Prisma (siehe umstehende Fig.) (ABCDEF) durch die Ebene BPD, so erhalten wir eine dreiseitige Pyramide DEPB mit der Spitze in B und eine vierseitige Pyramide ACDPB ebenfalls mit der Spitze in B; die

vierseitige Pyramide läſst sich durch den Schnitt BCD in zwei dreiseitige zerlegen, (Pyramide ACDB und Pyramide CDPB) welche gleiche Grundflächen und eine gleiche Höhe haben, also gleichen Körperinhalt besitzen; da aber auch Pyramide ACDB, wenn wir als ihre Basis das Dreieck ABC annehmen, mit der Pyramide DEPB gleiche Grundfläche und Höhe hat, also inhaltsgleich ist, so muſs auch Pyramide CDPB mit der Pyramide DEPB identisch sein. Wir haben also gezeigt, daſs ein jedes dreiseitige Prisma in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden kann. Da zwei Pyramiden (nach Beantwortung der Frage 21) inhaltsgleich sind, wenn sie gleiche Grundfläche und Höhe haben und jedes Polygon sich in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandeln läſst, so kann man auch jede vier- und mehrseitige Pyramide in eine inhaltsgleiche dreiseitige verwandeln. Man kann also den allgemeinen Satz aufstellen: Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat. Der Lehrer der Geometrie wird sehr gut thun, wenn er sich ein dreiseitiges Prisma, welches in obiger Weise geschnitten ist, aus Holz anfertigt, um der Vorstellungskraft der Schüler zuhilfe zu kommen.



Zur Frage 25. Es ist selbstverständlich, daſs man die Formel für den Pyramidalstutz: $K = \frac{1}{3} h (B + \sqrt{B . b} + b)$, in der h die Höhe des Stutzes, B die groſse und b die kleine Basis vorstellt, in der Volks- und Bürgerschule nicht auf die allgemeine mathematische Weise entwickeln darf, sondern sie durch mehrere einfache Beispiele, in denen für h, B und b kleine, bestimmte Zahlen angegeben sind, in ihrer Richtigkeit erweisen wird. Es ist dies der entgegengesetzte Weg, den die Mittelschule einschlägt; diese geht vom Allgemeinen zum Besonderen über, während in der Volksschule meist der inductive Weg eingeschlagen werden muſs, welcher darin besteht, aus den speciellen, aber zusammengehörigen Fällen das allgemeine Gesetz, die allgemeine Formel zu finden.

a b c d e f sei der Pyramidalstutz, dessen Körperinhalt zu berechnen ist; $h = 2\,cm$ wäre seine Höhe; $b = 2\,dm^2$ seine obere Basis und $B = 4\,cm^2$ seine untere Basis; (wir nehmen an, dass es einen solchen Pyramidalstutz gibt). Denken wir uns den Stutz zu einer ganzen Pyramide ergänzt; nennen wir den Körperinhalt der ganzen Pyramide K und den der kleinen k und ihre Höhe, da diese unbekannt ist, x, so ist der Körperinhalt K des Stutzes = K—k.



Setzen wir für K und k die Werte, so erhalten wir:

$$K = K - k = \frac{1}{3}(h + x) \,.\, B - \frac{1}{3} x \,.\, b = \frac{1}{3}(2 + x) \,.\, 4 - \frac{1}{3} \,.\, x \,.\, 2$$

und daraus

$$K = \frac{8}{3} + \frac{x}{3} \,.\, 4 - \frac{2x}{3} = \frac{8}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{8 + 2x}{3}$$

$$K = \frac{1}{3}(8 + 2x) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha.$$

Da nun x unbekannt ist, so müssen wir es aus den bekannten Größen suchen.

Bei ähnlichen Pyramiden verhalten sich (und die kleine Pyramide ist doch der großen ähnlich) bekanntlich die Grundflächen, wie die Quadrate der Höhen, also besteht die Proportion:

$$B : b = (h + x)^2 : x^2 \text{ oder: } 4 : 2 = (2 + x)^2 : x^2.$$

Die Differenz der beiden Glieder des ersten Verhältnisses verhält sich aber zum Hinterglied desselben, wie sich die Differenz der beiden Glieder des zweiten Verhältnisses zum Hinterglied desselben verhält. (Siehe die Lehre von den Proportionen.) Nach diesem Satze bekommen wir die neue Proportion:

$$(4-2) : 2 = (2 + x)^2 - x^2 : x^2$$

Daraus folgt: $2 : 2 = 4 + 4x + x^2 - x^2 : x^2$

oder $2 : 2 = 4 + 4x : x^2$

oder $2x^2 = 8 + 8x$

$$\text{oder } 2x^2 - 8x = 8$$
$$\text{oder } x^2 - 4x = 4$$
$$\text{oder } x^2 - 4x + 2^2 = 4 + 2^2 = 8$$

oder endlich, weil $x^2 - 4x + 2^2 = (x - 2)^2$, so folgt:

$$x - 2 = \sqrt{8}$$
$$\text{und } x = 2 + \sqrt{8}$$

Den Wert für x brauchen wir nur in Gleichung α) zu setzen und wir erhalten: $K = \frac{1}{3}\left[8 + 2\,(2 + \sqrt{8})\right] =$

$$= \tfrac{1}{3}\left[8 + 4 + 2\sqrt{8}\right] = 2 \times \tfrac{1}{3}\left[4 + 2 + \sqrt{8}\right].$$

Setzen wir für $2 = h$, für $4 = B$, für $2 = b$ und für $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{B \,.\, b}$, so erhalten wir die Formel:

$$K = h \times \tfrac{1}{3}(B + b + \sqrt{B \,.\, b}).$$

Es ist einleuchtend, dass, wenn man auf diese Weise durch mehrere specielle Beispiele die Richtigkeit der Formel erwiesen hat, dieselbe auch allgemeine Richtigkeit haben muss, nach dem in der Mathematik ganz gewiss geltenden Satz: „Weil das Erst und Zweite so ist, muss das Dritt und Vierte auch so sein."

Noch sollen die Gründe dafür angegeben werden, warum der größte Kreis und das sphärische Zwei- und Dreieck mit seinen Eigenschaften in das Lehrmateriale aufgenommen wurden. Die größten Kreise an der Erdkugel und die sphärischen Zwei- und Dreiecke spielen nämlich in der mathematischen Geographie, in der Astronomie und Nautik eine so große Rolle, dass man diese Wissenschaften ohne Kenntnis der wichtigsten Linien und Flächen an der Kugeloberfläche nicht studieren kann; aus diesem Grunde ist die Behandlung der in Rede stehenden Materie wohl wünschenswert.

VII. Die Hilfsmittel beim Unterricht in der Geometrie.

Mehr vielleicht als bei jeder andern Disciplin (mit Ausnahme der Naturgeschichte) muss beim Unterrichte in der Geometrie, auf dem Boden der Volksschule dem Principe der Anschauung Rechnung getragen werden; denn was nicht am Modelle zur Vorstellung und

Erklärung gebracht werden kann, soll wenigstens durch eine deutliche, lebendige Zeichnung vor die Sinne der Schüler treten, um sofort durch die Erläuterung des Lehrers Eigenthum der Vorstellungskraft und des Verstandes derselben zu werden.

In Nachfolgendem sollen die leicht anschaffbaren und nothwendigsten Anschauungsmittel für den geometrischen Unterricht und deren Gebrauch kurz besprochen werden.

1. Das Bleiloth. Es dient dazu, den Schülern den Begriff „vertical" d. i. die Richtung nach dem Erdmittelpunkt, zu demonstrieren. „Vertical" ist nicht zu verwechseln mit „senkrecht". Eine verticale Linie steht nur auf einer „wasserrechten oder horizontalen" senkrecht, d. h. auf einer solchen, welche in der Ebene des ruhig stehenden Wassers oder in einer dazu parallelen Ebene liegt.

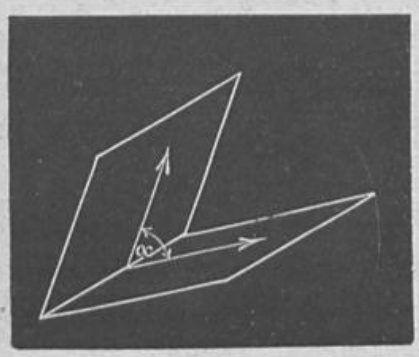
2. Die Schrotwage. Sie besteht aus einem hölzernen gleichschenkeligen oder gleichseitigen Dreieck, an dessen Spitze ein Bleiloth hängt. Setzt man die Basis des Dreieckes auf eine Fläche, welche horizontal ist, so fällt die Kugel des Lothes in ein Grübchen, welches im Mittelpunkte der hölzernen Basis ausgeschnitten ist. Ist die Ebene, welche auf ihre Horizontalität geprüft wird, nicht horizontal, so fällt die Kugel nicht in die Höhlung.

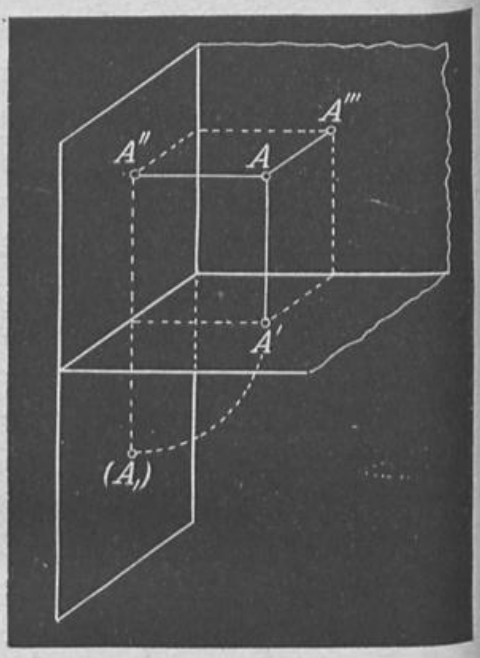
3. Die Wasserwage oder Libelle. Sie dient ebenfalls dazu, um eine Linie oder Ebene auf ihre Horizontalität zu prüfen. Steht die Luftblase, nachdem man das Instrument in mehreren Richtungen auf die Ebene gestellt hat, immer in der Mitte, so kann man annehmen, dass die Fläche „horizontal" und vollständig „eben" ist.

4. Eine in 360 oder wenigstens in 72 gleiche Theile getheilte Scheibe (ein Theil ist dann gleich 5 Grade), welche zwei gleiche im Mittelpunkte angebrachte Zeiger hat, um den Schülern die Winkel, deren Addition, Subtraction und Theilung zeigen zu können.

5. Zwei Holzebenen, welche an der Berührungslinie durch Charniere verbunden sind, so dass man die eine oder beide drehen kann. Sie sollen dazu dienen, den Schülern den Neigungswinkel zweier Ebenen, den Begriff von einem Perpendikel auf eine Ebene gefällt und die Projection eines Punktes und einer Linie auf zwei

auf einander senkrecht stehende Ebenen zu versinnlichen. (Siehe die beigegebenen Figuren.)





6. Die Längeneinheit (das Meter), die Flächeneinheit (das Quadratmeter) und die Körpereinheit (das Kubikmeter). Nie wird sich der Schüler beispielsweise eine deutliche Vorstellung von einem Quadrat- und Kubikmeter machen können, wenn er sie in Wirklichkeit nicht gesehen hat.

7. Die verschiedenen Körperecken aus Pappe oder Holz.

8. Die fünf regelmäßigen Körper aus Holz oder Pappe (das Tetraëder, Octaëder, Ikosaëder, Hexaëder und Dodekaëder.)

9. Soll jeder Lehrer der Geometrie einen Kreis- und elliptischen Cylinder und Kegel, die verschiedensten Parallelepipeda, Prismen und Pyramiden, und endlich die Kugel aus Holz besitzen. Der Kreiskegel soll solche Schnitte aufweisen, dass man den Kreis, die Ellipse, die Parabel und Hyperbel zeigen kann. Die Kugel soll so geschnitten sein, dass man einen Kugelabschnitt, einen Kugelausschnitt und eine Kugelzone zur Anschauung bringen kann. Sphärische Zwei- und Dreiecke sollen durch farbige Linien auf der Kugeloberfläche gezeichnet sein.

10. Die Körpernetze aus Pappe.

11. Messband, Messkette, Pflöcke, Messlatte und Winkelkreuz, zum Zwecke der Aufnahme einer Figur auf freiem Felde.

12. Die Nivellierlatte und Canalwage dienen dazu, zu bestimmen, wie tief ein Punkt unter der angenommenen Horizontebene liegt.

VIII. Abriss der Entwicklungsgeschichte der geometrischen Wissenschaft.

„Geometrie" heißt Erdmesskunst. Bei den Ägyptern stand sie in Übung. Von den Ägyptern lernten die Griechen das Vermessen der Felder, welche Kunst sich später zu dem entwickelte, was wir heute „praktische Geometrie" nennen.

Die Überschwemmungen des Nil verwischten nämlich alljährlich die Grenzen der Felder, oder rissen Theile des Erdreichs weg, so dass eine neue Vertheilung, beziehungsweise eine neue Vermessung des Grundbesitzes nothwendig wurde. Die erste ordentliche Vermessung und quadratische Vertheilung der Grundstücke in der Umgebung des Nil wurde — nach Herodot — unter dem König Sesostris vorgenommen. Zu des Sesostris Zeit konnte man nur quadratische und rechteckige Flächen vermessen und berechnen; das Bestreben und die Noth lehrte aber bald auch dreiseitige, fünfseitige und mehrseitige unregelmäßige Grundstücke ausmessen und berechnen. Sicher ist, dass schon Archimedes und Appollonius alle gerad- und krummlinigen planimetrischen Figuren berechnen konnten.

Wie überhaupt die meisten Wissenschaften ihren Ursprung zu jenen dunklen Tempeln der ägyptischen Priester zurückleiten, welche zu Saïs, Memphis und Heliopolis standen, in deren geheimnisvollem Innern „Gott" und der „Wahrheit" von den „Eingeweihten" gehuldigt wurde, so ist wohl auch hier die erste Pflege der Geometrie zu suchen. Das zweite Volk des Alterthums, welches „Feldmesser" und „tüchtige Werkmeister" aufweist, ist das phönicische, am östlichen Gestade des Mittelmeers. Zu den Phöniciern scheinen die nachbarlichen jonischen Griechen in die Schule gegangen zu sein, denn der erste bedeutende Geometer, welcher in das Licht der Geschichte tritt, ist der weise Thales von Milet. Thales wurde ungefähr um die Mitte des 7. Jahrhunderts v. Ch. geboren. Er war der erste, welcher als Maß für den Winkel den Kreisbogen hinstellte; er kannte schon die Ähnlichkeitssätze der Dreiecke, denn er

berechnete die Höhe der ägyptischen Pyramiden aus dem Schatten, den sie warfen; er entdeckte ferner den Satz, dass jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel ist. Er soll auch zum erstenmale eine Sonnenfinsternis vorherberechnet haben, welche die beiden Heere des Meders Cyaxares und des Lydiers Alyattes während einer Schlacht von einander trennte. (28. Mai 584 v. Ch. G.) Der Satz, dass ein jeder Winkel im Halbkreise ein Rechter sein muss, gab wahrscheinlich Veranlassung zur Auffindung der beiden Sätze:

1. dass Peripheriewinkel, welche über derselben Sehne stehen, einander gleich sind und dass

2. in jedem rechtwinkeligen Dreieck das Perpendikel die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Hypothenusensegmenten ist. Wie dieser Satz zum graphischen Wurzelausziehen führte, haben wir schon gesehen.

Zur Zeit, als Thales schon im Zenithe seines Lebens stand, wurde auf der Insel Samos im Jahre 580 v. Ch. G. ein Mann geboren, welcher einen Lehrsatz erwies, der für die rechnende Geometrie von der größten Bedeutung wurde. Wie Thales, holte sich auch Pythagoras die Anfangsgründe seines Wissens in Ägypten (auch Moses, Solon und Plato) und gründete am Abende seines Lebens zu Kroton in Unteritalien eine Philosophenschule. Den nach ihm benannten Satz scheint er nicht allgemein bewiesen zu haben, sondern nur durch Anschauung für die sogenannten pythagoräischen Zahlen. (3, 4, 5, 6, 8, 10 u. s. f.) In Indien lernte er auch unsere neun Ziffer kennen und verwertete sie bei seinen Rechnungen. Von ihm stammt auch die bekannte quadratförmige Anordnung des Ein-mal-Eins. Er war es ferner, der zuerst zeigte, dass die Kugel unter allen Körpern, mit denen sie gleiche Oberfläche hat, den größten Kubikinhalt besitzt. Die Jünger des Pythagoras wurden, da sie auch Vertreter der socialen Ansichten des Meisters waren, in dem politisch zerrissenen Kroton zu sehr in Streitigkeiten verwickelt, als dass sie hätten die geometrische Wissenschaft weiter ausbilden können. Erst die platonische Schule (gegründet von dem um 430 v. Ch. G. geborenen Plato) bereicherte die geometrische Wissenschaft durch die Entdeckung der Kegelschnitte.

Der Geometer Euclid, geboren am Anfange des 3. Jahrhunderts v. Ch, ist der wissenschaftliche Begründer der sogenannten alexandri-

nischen Schule, welche sich der großen Gunst der Ptolemäer erfreute, einer Schule, aus welcher die herrlichsten geometrischen Errungenschaften hervorgiengen. Euclid schrieb in griechischer Sprache 13 Bücher über Geometrie. Hauptsächlich beschäftigte er sich mit der Theorie der von den Platonikern entdeckten Kegelschnittslinien. Euclid und dessen Epigone Archimedes brauchten jedoch drei Kegel, um die verschiedenen Kegelschnittslinien zu erzeugen, einen rechtwinkeligen, einen stumpfwinkeligen und einen spitzwinkeligen; sie schnitten den Kegel immer senkrecht auf eine Seite desselben.

Die bedeutendsten Vertreter der alexandrinischen Schule sind: Archimedes, Appollonius, Papus und Ptolemäus.

Archimedes und Appollonius beschäftigten sich hauptsächlich damit, den Flächeninhalt aller planimetrischen und den Körperinhalt aller stereometrischen Gestalten zu finden und die Gesetze für die Kegelschnittslinien aufzustellen. Archimedes definierte die gerade Linie, als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Er ist der Entdecker des π, kannte es jedoch nur auf zwei Decimalziffern genau. Er bewies, dass sich der Körperinhalt eines gleichseitigen Kegels zu dem eines gleichseitigen Cylinders von derselben Höhe, wie 1 : 2 und zu dem einer Kugel, deren Durchmesser gleich ist der Kegelseite, wie 1 : 3 verhält. Als des (im Jahre 212 v. Ch. bei der Erstürmung von Syrakus gemordeten) Archimedes Leiche begraben war, legte man auf den Grabstein einen Kegel, einen Cylinder und eine Kugel.

Ptolemäus schrieb um 150 n. Ch. ein für seine Zeit höchst verdienstvolles Buch, Almagest genannt. Der Lehrsatz, nach welchem in jedem Sehnenviereck das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten, wurde von ihm zuerst aufgestellt und bewiesen. Der Lehrsatz des Ptolemäus ist eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen, denn lässt man ein schiefwinkeliges Sehnenviereck in ein Sehnenrechteck übergehen, so erhält man den pythagoräischen Satz. Ptolemäus erfand trigonometrische Functionen, welche jedoch anderer Art waren, wie unsere heutigen. Er nahm nämlich die einem bestimmten Centriwinkel zugehörige Sehne als Einheit an und berechnete danach die Sehnen aller andern Winkel. Seine Sehnentafel geht von 0 bis 180° in Intervallen von einem halben Grad.

Der Astronom und Mathematiker Ptolemäus war das letzte aufleuchtende Gestirn am Himmel der alexandrinischen Schule. Nach der Besitzergreifung Ägyptens durch die Araber versank das Pharaonenland in die Nacht der Barbarei. Und doch waren es die Araber, welche, nachdem sie ihre Eroberungslust befriedigt hatten, wieder die Wissenschaft, in erster Reihe die Algebra, in zweiter Reihe die Geometrie hegten und pflegten. Der Kalif Almansor ließ im Jahre 772 das alte indische Werk Surya-Siddhanta, welches schon vom „sinus", dessen Berechnung und der Methode Sinustabellen zu machen, spricht, von dem Mathematiker Alphazari ins Arabische übersetzen. Diese Übersetzung führt den Namen Sendhend und wurde später vom Araber Alkorezmi umgearbeitet und verbessert. In diesem Werke figuriert der „sinus" unter dem Namen „el geib". Um 900 n. Ch. wurde die Trigonometrie durch den arabischen Astronomen Albategnius bedeutend vervollkommnet.

In der Periode von 900 bis ungefähr 1500 ist kein bedeutender Fortschritt in der Geometrie zu verzeichnen. Erst der große Schwabe Johannes Kepler (geb. zu Weilerstadt im Jahre 1571) brachte die geometrische Wissenschaft wieder um vieles vorwärts. Zur Zeit, als er am Gymnasium in Linz Lehrer der Mathematik war, ließ er (1612) die berühmte „Stereometria doliorum" erscheinen, in welchem Werke er den Gebrauch „des Unendlichen" zeigte und dadurch den stereometrischen Rechnungen eine größere Allgemeinheit gab. Der Mathematiker Viéta (1540—1608) war der erste, welcher die quadratischen und kubischen Gleichungen zu construieren suchte. Er erweiterte auch das Gebiet der Geometrie der Kugel. (Sphärische Trigonometrie.)

Der Philosoph Cavalleri (1598—1647) schrieb 1635 eine „Geometrie des Untheilbaren", in welcher er die Oberfläche, das Volumen und den Schwerpunkt sämmtlicher Körper zu bestimmen sucht. Fermat (1590—1663) zeigte, wie man den Kubikinhalt der parabolischen Körper findet. Der bedeutende Denker Descartes oder Cartesius ist der Erfinder der analytischen Geometrie der Ebene, welche die Rechnung mit der Construction verbindend zeigt, wie man die Form und den Verlauf einer gesetzmäßigen Curve durch eine Gleichung zum Ausdruck bringen kann. Jede Gerade, jeder Kreis, jede Ellipse, jede Parabel und Hyperbel läßt sich nämlich in

ihrer Lage und Gestalt durch eine Gleichung in das Gebiet der Algebra übertragen. Das Buch, welches Cartesius über diesen Gegenstand schrieb, erschien im Jahre 1637 zu Leyden. Descartes bewies, dass einer jeden Kegelschnittslinie eine Gleichung des zweiten Grades (quadratische) entspricht, weswegen man auch diese Linien, Linien der zweiten Ordnung nennt. Der deutsche Mathematiker Euler (1707—1783), welcher sich auch um die Entwickelung der Stereometrie sehr verdient gemacht hatte, knüpfte an die Untersuchungen des Descartes an und zeigte, dass sämmtliche Kegelschnittslinien sich durch eine einzige Gleichung des zweiten Grades mit zwei Veränderlichen (x und y) zum Ausdrucke bringen lassen. Auch Leibnitz, welcher den Calcul des Unendlich-Kleinen aufstellte und der Engländer Taylor bereicherten die Theorie der Kegelschnittslinien, indem sie die Art ihrer Krümmung bestimmten.

Die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes ist das Feld, auf dem sich die bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit mit großer Vorliebe versuchten. Es ist dies sehr begreiflich, da kein anderer Theil der Geometrie den philosophischen Geist so sehr befriedigt und anregt.

Als große Anhänger und Pfleger der analytischen Geometrie sind ferner zu nennen: Huygens (1629—1695) und De la Hire (1640—1718). Letzterer beschäftigte sich auch in hervorragender Weise mit der Geometrie der Alten und zeigte, wie weit es diese schon gebracht hatten.

Fünfzig Jahre nach Descartes erfanden Newton und Leibnitz die Infinitesimalrechnung (Rechnung mit dem Unendlich-Kleinen und dem Unendlich-Großen) und schufen damit eine neue Epoche in der Geometrie insofern, als jetzt die geometrischen Untersuchungen mit der größten Allgemeinheit betrieben werden konnten.

Der Mathematiker und Nautiker John Napier (1550—1614) unterscheidet sich von Cartesius und den Vertretern der cartesianischen Richtung durch die weniger philosophische und mehr praktische Tendenz seiner Bestrebungen. Er ist der Erfinder der Logarithmen und der sogenannten Napier'schen Gleichungen, mit deren Hilfe man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die andern Stücke eines sphärischen Dreieckes finden kann. Die Napier'schen Logarithmen eigneten sich jedoch noch nicht vollkommen zum Gebrauche; erst

Heinrich Briggs entwarf im Jahre 1618 vollkommen entsprechende fünfstellige logarithmische Tafeln für die Basis 10. Vega und später Dr. Bremiker benützten dieselben und arbeiteten siebenstellige für die Basis 10 aus, welche noch heute zu den subtilsten Rechnungen verwendet werden.

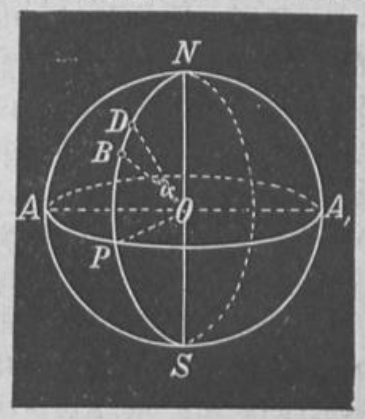
Die bedeutendsten Geometer der zweiten Hälfte des vorigen und unseres Jahrhunderts sind:

Dr. Friedrich Karl Gauß (1777—1855), die Franzosen Delambre und Carnot, Mollweide, Steiner, Schulz v. Straßnitzky, Theodor Wittstein, Hechel in Dorpat, Bretschneider in Gotha, Grunert (Herausgeber des Archivs für Mathematik) in Greifswalde und Karl Koppe. Friedrich Karl Gauß wurde am 30. April 1777 zu Braunschweig geboren, studierte von 1795—1798 an der Universität in Göttingen, wo er als Jüngling von achtzehn Jahren schon seine Methode der kleinsten Quadrate aufstellte, durch welche Arbeit er die Aufmerksamkeit aller Mathematiker seiner Zeit auf sich lenkte. Im Jahre 1807 ernannte ihn der Herzog Karl Wilhelm Ferdinand zum ordentlichen Professor der Mathematik und zum Director der Sternwarte in Göttingen. Im Jahre 1799 bewies er in einer kleinen Schrift, dass jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln, jede kubische drei und jede Gleichung des n^{ten} Grades n Wurzeln haben müsse. 1801 erschienen seine „arithmetischen Untersuchungen" (Disquisitiones arithmeticae), welchem Werke er seine Professur verdankte. In dem Werke: Theoria motus corporum coelestium (Theorie der Bewegung der Himmelskörper) veröffentlichte er die sogenannten Gauß'schen Analogien, mit deren Hilfe man ebenfalls — wie dies von den früher erwähnten Napierschen Gleichungen gilt — aus den zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die andern Stücke eines sphärischen Dreieckes finden kann.

Gauß starb am 23. Februar 1855 in Göttingen; sein Gehirn war, wenn auch nicht das größte, so doch das schwerste unter allen gewogenen menschlichen Denkorganen.

Delambre wurde 1749 in Amiens geboren, er ist derjenige der Geometer, welcher die Gauß'schen Formeln zuerst angewendet hat und derselbe, welcher im Auftrage der französischen Republik die berühmte Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcelona vornahm. Aus der Bogenweite Dünkirchen — Barcelona wurde der

Erdmeridianquadrant gerechnet, dessen zehnmilliontelster Theil „ein Meter" genannt wurde, die Maßeinheit unseres jetzigen „natürlichen Maßes". (Siehe untenstehende Fig.)



arc BD und $\sphericalangle \alpha$ sind gegebene Größen.

Es verhält sich nun:

$$\text{arc } \widehat{BD} : \text{arc } \widehat{PN} = \alpha^0 : 90^0$$

$$\text{Daraus: arc PN} = \frac{\text{arc. } \widehat{BD} \times 90^0}{\alpha^0}$$

$$\text{und 1 Mtr.} = \frac{\text{arc } \widehat{BD} \times 90^0}{10{,}000.000 \times \alpha^0}$$

Der Geometer Carnot, welcher zu Anfang unseres Jahrhunderts lebte, ist der Erfinder des Carnotschen Lehrsatzes, der für die Trigonometrie der Ebene eine ähnliche Bedeutung hat, wie der „pythagoräische" für die Planimetrie. Er dient bekanntlich dazu, nachdem man ihn zur logarithmischen Rechnung geeignet umgestaltet hat, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreieckes die dritte Seite zu finden.

Gleichwie das rechtwinkelige Dreieck eine Specialität des schiefwinkeligen ist, so ist der pythagoräische Satz eine Specialität des Carnotschen.

Setzen wir in der Formel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\cos A$ den $\sphericalangle A = 90^0$, so wird aus dem schiefwinkeligen Dreieck ein rechtwinkeliges und da $\cos. 90^0 = 0$ ist, verwandelt sich die Formel in: $a^2 = b^2 + c^2$.

So schreitet die Wissenschaft vorwärts vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Speciellen zum Allgemeinen. Je allgemeiner die Gesetze und Formeln einer Wissenschaft sind, auf einem desto höheren Standpunkte steht dieselbe.

Der fünfte in der Reihe der früher angegebenen großen Geometer unserer Tage, Professor Steiner aus Berlin, ist der Erfinder des Prismatoids, eines Körpers, welcher in der Stereometrie das bedeutet, was das Trapez in der Planimetrie ist. In einer am 14. Februar 1842 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung zeigte er in elementarer Weise, dass dieser Körper, dessen Charakteristik wir später bringen werden, aus seinen

beiden Grundflächen, der mittleren Durchschnittsfläche und der Höhe berechnet werden kann.

Seine Erfindung und sein Vortrag geriethen aber in Vergessenheit, bis Theodor Wittstein aus Hannover, ohne von dem Steiner'schen Vortrag etwas zu wissen, mit einer Arbeit, betitelt: „das Prismatoid" die deutschen Geometer überraschte; kurze Zeit danach veröffentlichte Professor Bretschneider aus Gotha eine Schrift, in welcher er eine einfachere und gründlichere Ableitung für die Körperinhaltsformel des Prismatoids mittheilte.

Das Prismatoid ist der allgemeinste geometrische Körper, den man sich denken kann und in seiner Körperinhaltsformel sind die Formeln für die Körperinhalte aller andern Körper enthalten.

Die Grundflächen des Prismatoids sind zu einander parallel und können drei-, vier-, fünf- u. s. w. eckig sein; die Umgrenzungsflächen sind meist Dreiecke. Die Formel für das Prismatoid ist: $K = \frac{1}{3} . h \left(\frac{G + g}{2} + 2\,m \right)$, in welcher Formel h die Höhe, G die größere, g die kleinere Grundfläche und m die mittlere Durchschnittsfläche repräsentiert.

Specialisieren wir beispielsweise diese Formel für die Kugel, so haben wir: $G = g = 0$, $m = r^2 . \pi$ und $h = 2\,r$; die Formel verwandelt sich also in $K = \frac{1}{3} . 2\,r\,(0 + 2\,r^2 . \pi) = \frac{4}{3} . r^3 . \pi$.

Was Schulz v. Straßnitzky, als Professor und Pädagog für die Popularisierung der geometrischen Wissenschaft an der Wiener technischen Hochschule und in Vorträgen geleistet hat, ist zu sehr bekannt, als dass es nothwendig wäre, an dieser Stelle darüber zu reden. (Als Curiosität sei hier nur bemerkt, dass unter seiner Leitung der berühmte Kopfrechner Zacharias Dase, aus Hamburg, die Ludolfsche Zahl auf 200 Decimalziffern berechnete.)

Schließlich erübrigt, der sogenannten „neueren Geometrie" zu gedenken, welche in ihren Elementen schon von Pascal und De la Hire geschaffen wurde. Die neuere Geometrie schließt die Rechnung vollständig aus und beschäftigt sich mit den Verhältnissen geradliniger Entfernungen von einer bestimmten Art. In neuester Zeit haben für die Entwickelung dieses Zweiges der Geometrie sehr viel geleistet: Dr. Benjamin Witzschel, W. Fiedler in Leipzig und Prof. Schlesinger in Wien.

IX. Die einschlägige Literatur.

Groß ist die Anzahl der Werke, welche über „Geometrie" geschrieben wurden. Fast jeder von den großen Geometern, die im vorigen Capitel als epochale Forscher genannt wurden, hat geschriebene oder gedruckte Werke hinterlassen; noch größer ist die Zahl der Werke jener, welche sich mit der Ordnung und Sichtung des vorhandenen Stoffes und mit der Auswahl desselben für bestimmte Schulkategorien beschäftigt haben. Relativ klein ist aber die Zahl jener Werke, welche für die Volks- und Bürgerschule Österreichs geschrieben wurden, was insoferne begreiflich ist, als die Geometrie in der alten Volksschule unseres Vaterlandes noch nicht Unterrichtsgegenstand war und man der Realien nur nebensächlich beim Sprachunterrichte gedachte.

In Deutschland war es der große Pädagoge A. Diesterweg und waren es dessen Epigonen, welche auf die gehörige Beachtung der Realien hinwiesen, und dem Streben A. Diesterwegs, das Wissenswerteste aus der Geometrie in die Volksschule einzuführen, verdanken wir die Bücher: „Die Raumlehre, oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Pädagogik", mit 9 Tafeln, in Webers Verlag in Bonn erschienen, (im Jahre 1832) und: „Elementare Geometrie für Lehrer." (In der zweiten Auflage erschienen 1864.)

Diese beiden Bücher Diesterwegs verdienen von jedem Schulmanne gelesen zu werden; sie sind insoferne epochemachend, als Diesterweg der Erste war, welcher eingehend zeigte, was von der Geometrie und wie die Geometrie in der Volksschule gelehrt werden solle.

Der zweite Pädagoge, welcher sich dieses Gegenstandes in hervorragender Weise annahm, ist C. Kehr, der im Jahre 1867 zu Gotha eine praktische Geometrie für Volksschulen sammt einer Aufgabensammlung herausgab. — Im Sinne des jetzigen Lehrplanes für die österreichischen Volks- und Bürgerschulen schrieben: R. v. Močnik, Karl Schubert, Villicus, Bürgerschuldirector Hein (ein Büchlein über „Formenlehre" für die V. Classe) und der Bürgerschullehrer Napravnik (Geometrie für Mädchenbürger- und vier- bis siebenclassige Volksschulen).

Im Geiste Diesterwegs und Kehrs sind folgende Werke und Werkchen in Deutschland geschrieben worden:

Adam, R., Die Raumlehre mit Übungen im Zeichnen und Rechnen. (Langensalza 1880.)

Adam, W., Elementarer Schulbedarf aus dem Gebiete der Geometrie. (Berlin 1879.)

Adam, W., Lehrbuch der Geometrie für Seminarien, Mittelschulen und Volksschulen. (Berlin 1880.)

Adam, W., Lehr- und Handbuch der Flächen und Körperberechnung sammt vielen geometr. Rechenaufgaben.

Bartholomäi, Fr. Dr., Geometrie für die einclassige Volksschule. (Langensalza 1876.)

Brockmann, F. J., Lehrbuch der elementaren Geometrie. (Cleve 1880.)

Buttel, Paul, Raumlehre für Volks-, Mittel- und Fortbildungsschulen. (Kiel 1877.)

Cassau, Karl, Formen- und Raumlehre für Mittelschulen und Lehrerfortbildungsanstalten.

Engler, W., Die Geometrie der Fortbildungsschule. (Leipzig 1879.)

Fiedler, Die Raumlehre in populärer Darstellung.

Fischer, Dr., Leitfaden zum Unterrichte in der Elementargeometrie. (Leipzig 1877.)

Forbeiger, B., Das Wichtigste aus der Geometrie. (Leipzig 1880.)

Franke, F., Die Elemente der ebenen Geometrie. (Hannover 1860.)

Fresenius, K., Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. (Frankf. a/M. 1875.)

Friedemann, A. J., Die Geometrie als Gymnastik des Geistes. (Insterburg 1851.)

Gasser, A., Leitfaden für den praktischen Unterricht in der Raumlehre.

Grohmann, A., Kleine Geometrie für Volks- und Bürgerschulen. (Berlin 1876.)

Horn, Dr., Geometrischer Anschauungscursus für Mittel-, Bürger- und Volksschulen. (Essen 1876.)

John, J., Allgemeine Größenlehre.

Kayser, Karl, Leitfaden der Raum- und Formenlehre. (Hannover 1879.)

Kehr, C., Geometrische Rechenaufgaben für Volks- und Fortbildungsschulen.

Kehr, C., Praktische Geometrie für Volks- und Fortbildungsschulen. (Gotha 1880.)

Kretschmer, E. Dr., Geometrische Anschauungslehre mit 600 Fragen und Aufgaben.

Kuhn, E., Dr., Raumgrößenlehre. (Berlin 1880.)

Löhmann, J. H., Raumlehre für die Volksschule in drei Cursen. (Flensburg 1877.)

Lüdemann, H., Geometrie für Volks- u. Seminarlehrer. (Bremen 1863.)

Malliat, Dr., Raumlehre in der Volksschule. (Berlin 1880.)

Müller, H. Dr., Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie. (Braunschweig 1800.)

Pickel, A., Die Geometrie in der Volksschule. (Kassel 1879.)

Rauch, C., Planimetrie und Constructionslehre. (Hannover 1861.)

Roßmanith, Constantin, Geometrische Formenlehre. (Wien 1879.)

Rüegg, H. R., Die Raumlehre. Ein Leitfaden für den Unterricht in Volksschulen. (Bern, Huber und Comp.)

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. (Braunschweig 1880.)

Schneider, Martin, Elemente der Mathematik für Seminarien und Mittelschulen.

Schurig, Kurt Dr., Die Elemente der Geometrie mit einer Sammlung von Rechen- und Constructionsaufgaben.

Simon, Max Dr., Geometrie für Elementar- und Mittelschulen. (Leipzig 1876.)

Sonnenburg, Ferd., Geometrie f. Volks- u. Mittelschulen. (Berlin 1887.)

Tödter, H., Raumlehre für Volksschulen. (Hannover, Hellwing.)

Volkmann, H., Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. (Bunzlau 1879.)

Wienhold, E. F., Die Geometrie der Volksschule nebst vielen Aufgaben.

— — Commentar zur Geometrie der Volksschule. (Leipzig, 1876.)

(Der vorgenannte Verfasser redet durchwegs dem Princip der Anschauung das Wort und verwirft jede Art mathematischer Beweisführung, was ihn jedoch nicht hindert, eine unvollkommene Formel für die Körperinhaltsberechnung des Pyramidalstutzes, [die er natürlich nicht durch Anschauung erweisen kann] ganz unvermittelt zu bringen.)

Wolff, E., Vorschule der Geometrie. (Gütersloh 1879.)

Wunderlich, G., Wiederholungsbuch in der Raumlehre für die Oberclassen der Volksschulen.)

Würth, Ed., Geometrie f. Volks- u. Fortbildungsschulen. (Gießen 1877.)

Die meisten der angeführten, in Deutschland verlegten Werke, behandeln die Geometrie im Rahmen der achtclassigen Volksschule und des Lehrerseminars; viele derselben lehnen sich an Diesterweg und Kehr.

Von den Werken, welche über das Gebiet der Bürger- und Lehrerschule in Bezug auf Geometrie hinausgehen, und zum Weiterstudium empfehlenswert sind, wollen wir nennen:

Bauer, K., Anfangsgründe der praktischen Geometrie mit 5 Tafeln.
Bretschneider, Lehrgebäude der neueren Geometrie.
Fialkowsky, N., Kurz gefasste praktische Geometrie. (Pichler 1880.)
— — Construction des Kreises und der Ellipse.
— — Die geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Zeichnen für die oberen Classen der Volksschulen und höheren Töchterschulen. (Wien 1881.)
Fiedler, W., Die Elemente der neueren Geometrie und Algebra. (Leipzig 1862.)
Gruber, K., Der Unterricht in der Planimetrie, Stereometrie und ebenen Trigonometrie.
Hechel, C. Prof., Lehrbuch der Geometrie mit einer stereometrischen Aufgabensammlung. (Dorpat 1852.)
Schulz v. Straßnitzky, Handbuch der Geometrie. (Letzte Aufl. von 1880.)
Salomon, Lehrbuch der reinen Elementargeometrie.
— — Lehrbuch der niedern Geometrie.
— — Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Planimetrie.
Sonndorfer, Dr., Geometrie der Ebene und des Raumes. (Wien 1865.)
Witzschel, Dr., Grundlinien der neueren Geometrie.

Von neueren Werken, welche das Gebiet der höheren Analysis (Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes behandelt mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung) berühren, sind zu nennen:

Fort, O. u. Schlömilch O., Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.
Heger, Richard Dr., Elemente der analytischen Geometrie.