Dritter Abschnitt.

Lehre von den gemeinen Brüchen.

§. 39.

Wesen und Behandlungen der gemeinen Brüche überhaupt.

Die Schüler haben schon im Anschlusse an den Zahlenraum bis 100 die einfachsten Brüche kennen, leichte Beispiele über diese Brüche ausführen gelernt, sind auch auf die Behandlung der Divisionsreste aufmerksam gemacht, und hierdurch für das Bruchrechnen vorbereitet worden.

Der Lehrer bringe hier in Erinnerung, dass jedes Ding, welchem nichts weggenommen wurde, ein Ganzes, was man vom Ganzen wegnimmt und was dann noch übrig bleibt, einen Theil nennt, dass man ein Ganzes (eine Einheit) entweder in ungleiche oder in gleiche Theile theilen kann.

Wenn man ein Ganzes, z. B. ein Meter, ein Kilogramm, einen Gulden, einen Strich an der Tafel u. s. w. in zwei oder mehrere gleiche Theile theilt und einen oder mehrere solche Theile nimmt, so heißt die hiedurch erhaltene Zahl eine gebrochene Zahl oder ein Bruch.

Einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen nennt man einen Bruch.

Der Lehrer mache mehrere gleich lange Striche an die Tafel, sage, dass jeder Strich ein Ganzes vorstellt, und theile den ersten Strich in 2, den zweiten in 3 gleiche Theile u. s. w., nehme bald von diesem, bald von jenem Striche einen und dann auch mehrere gleiche Theile und frage hierbei, z. B. In wieviele gleiche Theile wurde (hier das Ganze) dieser Strich (getheilt)? Wie nennt man einen solchen Theil, den man erhält, wenn man das Ganze in 5

gleiche Theile theilt? Er schneide durch eine Klammer 3 Theile ab, und frage: Wieviele Fünftel habe ich jetzt genommen? In wieviele gleiche Theile muss man das Ganze theilen, wenn man den Bruch $\frac{4}{8}$ haben will? Wieviele solche Theile muss man nehmen?

An den in verschiedener Anzahl von gleichen Theilen getheilten Strichen bemerken die Schüler, dass die Theile umsokleiner werden, in je mehr gleiche Theile das Ganze getheilt wird, und an den soeben bezeichneten Übungen wird ihnen klar, dass man bei einem Bruche wissen muss, in wieviele gleiche Theile Ein Ganzes getheilt wurde oder was für Theile vom Ganzen man habe, und wieviele solche Theile es sind. Hieraus ersehen die Schüler, dass man, um einen Bruch auszudrücken, 2 Zahlen braucht, nämlich jene, welche anzeigt, in wieviele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, und somit die Art der Theile angibt, sie benennt oder nennt und daher auch der Nenner heißt, und die andere, welche anzeigt, wieviele solche Theile zu nehmen sind, also die Theile zählt, und darum auch der Zähler heißt.

Der Nenner eines Bruches ist der Name der Theile, der Zähler die Zahl derselben. Nun sage man den Schülern, dass man, um der Zahl der Theile nicht immer den Namen, durch ein Wort ausgedrückt, beisetzen zu müssen, übereingekommen sei, unter der Zahl der Theile, dem Zähler, einen Querstrich zu machen, und unter denselben den Nenner zu setzen. Um also den Bruch 5 Achtel auszudrücken, schreibt man $\frac{5}{8}$.

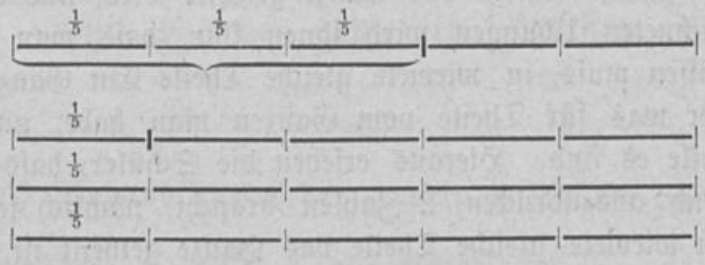
Nun lasse man mehrere ausgesprochene Brüche anschreiben, angeschriebene Brüche aussprechen und von jedem derselben die Entstehung und Bedeutung angeben.

Für die Schüler der IV. Classe ist es hinreichend, wenn sie nur die soeben angeführte Entstehungsart der Brüche kennen lernen. Die Schüler der V. Classe werden aber auch mit der zweiten Entstehungsart bekannt gemacht.

Um hierbei das Neue an etwas Bekanntes anzuknüpfen, die erste Entstehungsart versinnlichend zu wiederholen und den Unterschied beider Entstehungsarten recht auffallend zu machen, zeige er die Entstehung des Bruches $\frac{2}{3}$ an einem Papierbogen, indem er denselben in 3 gleiche Theile theilt und hiervon 2 solcher Theile nimmt. Hierauf lege er 2 Bogen genau übereinander und theile dieselben

zugleich durchschneidend in 3 gleiche Theile, und lasse die Schüler bemerken, dass hier 2 Ganze in 3 gleiche Theile getheilt wurden, dass man von 2 Ganzen den 3. Theil genommen und ebenfalls $\frac{2}{3}$ erhalten hat.

Auch durchgetheilten Linien können beide Entstehungsarten des Bruches versinnlicht werden. Z. B. Die Entstehung des Bruches $\frac{3}{5}$.



Wie die nebenstehende Figur zeigt, erhalten wir den Bruch $\frac{3}{5}$, wenn wir von 1 Ganzen den 5. Theil 3 mal nehmen, oder auch dadurch, dass wir von 3 Ganzen den 5. Theil 1 mal nehmen. Von 3 Ganzen erhalten wir aber auch den 5. Theil, wenn wir dieselben durch 5 dividieren.

Die Schüler ersehen hieraus, dass ein Bruch als angezeigte Division betrachtet werden kann, und dass $\frac{3}{5}$ auch heißt 3 : 5 d. i. 3 soll durch 5 dividiert werden, und dass man umgekehrt anstatt 3 : 5 auch $\frac{3}{5}$ schreiben kann, und dass in dieser Division der Zähler, der Dividend und der Nenner der Divisor ist. Auch durch Schlüsse können die Schüler zu diesem Resultate geführt werden. Man fragt: Wieviel ist der 5. Theil von 3 Ganzen? Wieviel ist der 5. Theil von 1 Ganzen? Wievielmal soviel ist dieses von 3 Ganzen. Wieviel ist 3 mal $\frac{1}{5}$? Daher ist $\frac{3}{5} = 3 : 5$. Drei Fünftel eines Guldens nehmen ist daher ebensoviel, als das Fünftel von drei Gulden nehmen.

Um die Schüler auf den Begriff eines echten und unechten Bruches zu führen, schreibe er mehrere echte und unechte Brüche an die Tafel, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{3}$, frage nach der Bedeutung und Entstehung derselben und lasse sie hierbei bemerken, dass es solche Brüche gibt, die weniger enthalten, als das Ganze, und die daher kleiner sind, als ein Ganzes, und dass es hingegen Brüche gibt, die ebenso viele Theile als ein Ganzes enthalten, und die daher dem Ganzen gleich sind, und endlich solche, welche mehr

Theile enthalten, als zu einem Ganzen gehören, und die daher größer sind als ein Ganzes.

Brüche, welche kleiner sind als ein Ganzes, nennt man **echte Brüche.** Bei den echten Brüchen ist der Zähler kleiner als der Nenner.

Brüche, welche einem Ganzen gleich oder größer sind, als ein Ganzes, nennt man **unechte Brüche.** Bei den unechten Brüchen ist der Zähler dem Nenner gleich oder größer als der Nenner. Nun lege man den Schülern allerlei echte und unechte Brüche vor, und übe sie in Erkennen und Unterscheiden und verhalte sie überall den Grund anzugeben. Auch frage man, wieviel bei jedem der ihnen vorgelegten echten Brüche zum Ganzen fehlt, lasse mehrere Guldenbrüche durch Kreuzer ausdrücken und auch auf die Art untersuchen, ob sie kleiner, einem Gulden gleich oder größer als ein ganzer Gulden sind, z. B. $\frac{3}{4}$ fl. = 75 kr.; $\frac{5}{5}$ fl. = 100 kr; $\frac{6}{5}$ fl. = 120 kr. Schließlich sage der Lehrer, dass man eine ganze Zahl mit einem beigesetzten Bruche eine gemischte Zahl nennt. Z. B. $5\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{8}$.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S.

Nach dem Vorausgegangenen wird es den Schülern leicht werden, unechte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln und umgekehrt.

Es soll z. B. untersucht werden, wieviel Ganze in dem Bruche $\frac{37}{8}$ enthalten sind. Der Lehrer lasse dies zuerst durch das Kopfrechnen suchen und frage: Wieviel Achtel sind ein Ganzes? Wievielmal 1 Ganzes sind daher $\frac{37}{8}$? Wie oft sind $\frac{8}{8}$ in $\frac{37}{8}$ enthalten? Wieviel sind 4 mal $\frac{8}{8}$? Wieviel Achtel bleiben noch übrig? Es sind also $\frac{37}{8}$ = 4 Ganze und $\frac{5}{8}$. Schon aus dieser Darstellung sehen die Schüler, dass sie, um einen unechten Bruch in eine ganze oder eine gemischte Zahl zu verwandeln, den Zähler durch den Nenner zu dividieren haben. Dasselbe ergibt sich auch aus der zweiten Entstehungsart des Bruches, denn $\frac{37}{8} = 37 : 8 = 4\frac{5}{8}$.

Es soll 6 Ganze in Achtel verwandelt werden. Der Lehrer frage: Wieviel Achtel hat ein Ganzes? Wie oftmal 8 Achtel haben daher 6 Ganze? Also ist $6 = \frac{48}{8}$.

Es soll die gemischte Zahl $4\frac{3}{5}$ in einen unechten Bruch verwandelt werden

Wieviel Fünftel hat 1 Ganzes. Wie oftmal $\frac{5}{5}$ sind daher 4 Ganze? Wieviel sind 4 mal $\frac{5}{5}$? Wieviele Fünftel haben wir noch zu den $\frac{20}{5}$ hinzuzählen? Folglich sind $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$. Wir haben hier, um die gemischte Zahl in einen unechten Bruch zu verwandeln, zuerst die Ganzen in solche Bruchtheile verwandelt, welche der gegebene Bruch enthält, daher die ganze Zahl mit dem Nenner multipliciert, und hierzu die schon vorhandenen Bruchtheile, d. i. den Zähler addiert, kurz:

Eine gemischte Zahl wird in einen unechten Bruch verwandelt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliciert, dem Producte den Zähler addiert und dieser Summe den Nenner des Bruches gibt. Z. B. $7\frac{4}{5} = \frac{39}{5}$.

Verwandle $54\frac{13}{35}$ in einen unechten Bruch.

$$\begin{array}{r} 54 \times 35 \\ \hline 270 \\ 162 \\ \hline 1890 \\ +\ 13 \\ \hline 1903 \end{array} \qquad 54\frac{13}{35} = \frac{1903}{35}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche M. S. 28.

Es werden nun mehrere Brüche von gleichem Nenner aber von ungleichem Zähler an die Tafel geschrieben, z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{7}{8}$, und um ihre Bedeutung gefragt; die Schüler sehen leicht ein, dass $\frac{7}{8}$ der größte unter diesen Brüchen ist, denn sie wissen ja, dass 7 Theile eines Ganzen größer sind als 6, 5 oder eben so große Theile, und können daher leicht den Satz ableiten:

Von mehreren Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist derjenige unter ihnen der größte, der den größten Zähler hat.

Sodann lasse man den Zähler eines Bruches z. B. von $\frac{2}{3}$ mit 2, 3, 4, 5 . . . multiplicieren und den Wert der erhaltenen Brüche: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$ untersuchen. Die Schüler werden leicht finden, dass der Wert eines Bruches zwei-, drei-, viermal u. s. w. so groß wird, wenn man den Zähler desselben mit 2, 3, 4, 5 . . . . multipliciert.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert, den Nenner aber unverändert läſst. Z. B. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Der Lehrer laſse dann den Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$ durch 2, 3, 4 dividieren und die nun vorliegenden Brüche $\frac{12}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ bezüglich ihres Wertes vergleichen, und die Schüler werden finden, daſs der Zähler des Bruches $\frac{6}{5}$ nur halb so groß ist, als der Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$, und daſs auch der Wert des Buches $\frac{6}{5}$ nur die Hälfte des Bruches $\frac{12}{5}$ beträgt; der Zähler des Bruches $\frac{4}{5}$ ist nur der 3. Theil von dem Zähler des Bruches $\frac{12}{5}$ und der Wert des Bruches $\frac{4}{5}$ ist auch nur der 3. Theil vom Werte des Bruches $\frac{12}{5}$ u. ſ. w. Dividiert man also den Zähler eines Bruches durch 2, 3, 4 . . ., so wird auch der Wert des Bruches durch 2, 3, 4 . . dividiert, also:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert, den Nenner aber unverändert läſst. Z. B. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

Es werden nun einige Brüche an die Tafel geschrieben, welche gleiche Zähler aber verschiedene Nenner haben; man laſse die Schüler beurtheilen, welcher von diesen Brüchen der größte ist. Z. B. $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{5}$. Die Schüler wissen aus der Erfahrung, daſs die Theile um so kleiner werden, in je mehr gleiche Theile das Ganze getheilt wird, daſs also $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{6}$ ist, so wie auch, daſs $\frac{3}{4}$ größer sein müssen als $\frac{3}{5}$, indem $\frac{1}{4}$ größer ist als $\frac{1}{5}$, müssen ja auch 3 mal $\frac{1}{4}$ d. i. $\frac{3}{4}$ größer sein als 3 mal $\frac{1}{5}$, d. i. $\frac{3}{5}$. Die schließen hieraus:

Wenn mehrere Brüche gleiche Zähler haben, so ist derjenige Bruch unter ihnen der größte, der den kleinsten Nenner hat.

Nun laſse der Lehrer den Nenner eines Bruches z. B. $\frac{7}{60}$ durch 2, 3, 4 . . . dividieren, und den Wert der nun vorliegenden Brüche $\frac{7}{60}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{7}{15}$ u. ſ. w. beurtheilen. Der Nenner von $\frac{7}{30}$ ist nur halb so groß als von $\frac{7}{60}$; $\frac{1}{30}$ ist aber 2 mal so groß als $\frac{1}{60}$, daher sind auch $\frac{7}{30}$ 2 mal so groß als $\frac{7}{60}$ u. ſ. w.

Der Wert eines Bruches wird also mit 2, 3, 4 . . . multipliciert, wenn man den Nenner des Bruches durch 2, 3, 4 . . . dividiert. Hieraus folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler unverändert läßt und den Nenner durch die ganze Zahl dividiert. Z. B. $\frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Hierauf lasse der Lehrer den Nenner eines Bruches z. B. $\frac{5}{6}$ mit 2, 3, 4 . . . multiplicieren, und den Wert der nun vorliegenden Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{5}{24}$ . . . beurtheilen. Der Nenner des Bruches $\frac{5}{12}$ ist 2mal so groß, als der von $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$ ist aber nur die Hälfte von $\frac{1}{6}$, daher ist auch 5mal $\frac{1}{12}$ d. i. $\frac{5}{12}$ die Hälfte von $\frac{5}{6}$ u. s. w. Hieraus folgt:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler unverändert läßt und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert. Z. B. $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{24}$.

Ein Bruch wird also mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multipliciert und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividiert und den Zähler unverändert läßt. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4 : 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert und den Zähler unverändert läßt. Z. B.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 : 2}{5} = \frac{2}{5}; \frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Wird also der Zähler eines Bruches multipliciert oder dividiert, so geschieht das nämliche mit dem Bruche. Z. B.

$$\frac{4}{5} \times 2 = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}; \frac{4 : 2}{5} = \frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}.$$

Wird der Nenner eines Bruches multipliciert oder dividiert, so ist dieses am Bruche die entgegengesetzte Rechnung. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}; \quad \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 29 und 30.

§. 40.

Formveränderung der Brüche mit gleichbleibendem Werte.

Nun lasse der Lehrer den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicieren, und frage wievielmal so groß der Wert des Bruches geworden sei; dann lasse er den Nenner des dadurch erhaltenen Bruches mit derselben Zahl multiplicieren, und frage wievielmal so klein jetzt dieser Bruch wieder sei.

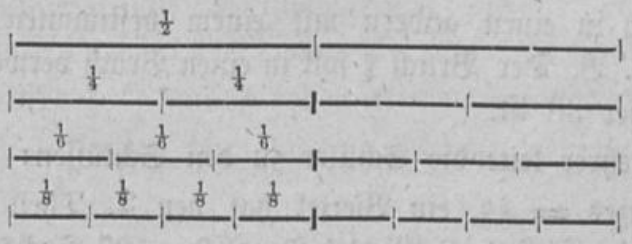
$$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{2} \times 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Wird also der Zähler und der Nenner eines Bruches mit einer und derselben Zahl multipliciert, so wird der Bruch durch Multiplication des Zählers eben so vielmal vergrößert, als er durch die Multiplication des Nenners verkleinert wird, folglich bleibt der Wert des Bruches ungeändert.

Zu demselben Resultate kann der Lehrer die Schüler auch auf anschauliche Weise durch getheilte Linien führen*); die Schüler sehen hier:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$



*) Vergleiche §. 6.

Um den Satz noch eindringlicher zu machen, lasse er die Guldenbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{25}{50}$ in Kreuzer auflösen.

Auf dieselbe Art überzeuge man die Schüler, dass der Wert eines Bruches sich auch nicht ändert, wenn man den Zähler und den Nenner desselben durch eine und dieselbe Zahl dividiert, und lasse dann zusammenfassen:

Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Auf diesem wichtigen Satze beruht die Formveränderung der Brüche, mit gleichbleibendem Werte. Hierzu gehört: das Erweitern, Gleichnamigmachen und Abkürzen der Brüche.

§. 41.

Erweitern der Brüche.

Das Erweitern des Bruches geschieht dadurch, dass man Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliciert. Der Lehrer lasse die Schüler bemerken, dass man hiedurch einen Bruch erhält, der durch größere Zahlen ausgedrückt wird, dass also nur die Form geändert wird, nicht aber der Wert. Die Zahl, mit welcher man Zähler und Nenner multipliciert, heißt Erweiterungszahl.

Man lasse nun einen Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$ durch verschiedene Zahlen erweitern, als 2, 3, 5, 10 ... und bemerken, dass man hiedurch einen Bruch mit sehr verschiedenem Nenner ohne Veränderung seines Wertes ausdrücken könne, und dass aber hiebei die neuen Nenner Vielfache des ursprünglichen Nenners sind. Hierauf lasse man sie einen gegebenen Bruch in einen andern mit einem bestimmten Nenner verwandeln. Z. B. Der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 36 ist.

Der Lehrer leite die Schüler zu den Schlüssen:

1 Ganzes $= \frac{36}{36}$, ein Viertel hat den 4. Theil von $\frac{36}{36}$, d. i. 9 Sechsunddreißigstel, 3 Viertel 3 mal $9 = 27$ Sechsunddreißigstel, also $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$. Schriftlich: $1 = \frac{36}{36}$, $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$, $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$.

Oder: Wievielmal so groß ist der neue Nenner 36 als der ursprüngliche? Mit welcher Zahl muss man den Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ multiplicieren, um den Nenner 36 zu erhalten? Da wir den früheren Nenner 4 mit 9 multiplicieren müssen, um den Nenner 36 zu bekommen, was muss auch mit dem Zähler geschehen, wenn der Wert des Bruches ungeändert bleiben soll?

$36 : 4 = 9$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{36}.$$

Die Schüler ersehen hieraus, dass man untersuchen muss, wie oft der Nenner des Bruches in dem Nenner, welchen man dem Bruche geben soll, enthalten ist, und dass man den Zähler mit diesem Quotienten, d. i. mit der Erweiterungszahl multiplicieren muss.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 31. A. K. S. 32 und 33.

§. 42.

Gleichnamigmachen der Brüche.

Zwei oder mehrere Brüche gleichnamig machen, heißt dieselben unter gleichen Nenner bringen.

Die Schüler haben bemerkt, dass der gegebene Nenner, den ein Bruch beim Erweitern erhalten soll, ein Vielfaches des früheren ist, sie werden daher nun leicht einsehen, dass zwei oder mehrere Brüche den gleichen Nenner erhalten können, wenn dieser ein Vielfaches aller Nenner der gegebenen Brüche ist.

Will man nun zwei oder mehrere Brüche auf gleichen Nenner bringen, so sucht man ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Nenner, und um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, wählt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner wird Hauptnenner oder Generalnenner genannt.

Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Halbe und Drittel kann man in Sechstel verwandeln. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Die schriftliche Form ist aus nachstehender Rechnung zu ersehen:

Der Hauptnenner ist 6.

$1 = \frac{6}{6}$
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

oder:

	6	
$\frac{1}{2}$	3	3
$\frac{2}{3}$	2	4
$\frac{5}{6}$	1	5

Die Zahlen in der ersten Spalte sind die Erweiterungszahlen, die man erhält, indem man den Hauptnenner durch die Nenner der gegebenen Brüche dividiert, und mit denen man die Zähler der gegebenen Brüche multipliciert, um die Zahlen der zweiten Reihe, die Zähler zu dem Hauptnenner, zu erhalten.

Die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ sollen auf gleichen Nenner gebracht werden.

2, 3, 4, 5, 6, 8	
5, 3, 4	2

Der Hauptnenner ist
$5 \times 3 \times 4 \times 2 = 120.$

$1 = \frac{120}{120}$
$\frac{1}{2} = \frac{6}{120}$
$\frac{1}{3} = \frac{40}{120}, \frac{2}{3} = \frac{80}{120}$
$\frac{1}{4} = \frac{30}{120}, \frac{3}{4} = \frac{90}{120}$
$\frac{1}{5} = \frac{24}{120}, \frac{4}{5} = \frac{96}{120}$
$\frac{1}{6} = \frac{20}{120}, \frac{5}{6} = \frac{100}{120}$
$\frac{1}{8} = \frac{15}{120}, \frac{7}{8} = \frac{105}{120}$

oder:

	120	
$\frac{1}{2}$	60	60
$\frac{2}{3}$	40	80
$\frac{3}{4}$	30	90
$\frac{4}{5}$	24	96
$\frac{5}{6}$	20	100
$\frac{7}{8}$	15	105

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M., S. 31 bis 33. A. K. S. 35.

§. 43.

Abkürzen der Brüche.

Einen Bruch abkürzen oder reducieren heißt, ihn ohne Änderung seines Wertes durch kleinere Zahlen darstellen. Das Abkürzen der Brüche bringt die Vortheile, dass man mit kleineren Zahlen zu rechnen hat, und dass man sich vom Werte der Brüche viel leichter eine richtige Vorstellung machen kann, wenn im Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, als wenn größere Zahlen vorhanden wären.

Das Abkürzen der Brüche geschieht, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Ein Bruch läßt sich nur kürzen, wenn Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben.

Zur Versinnlichung beim Unterrichte benütze der Lehrer getheilte Linien und Theile eines Guldens.

Übungsaufgaben V. Rechenbuch M., S. 33.

§. 44.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

Wir haben bis jetzt Brüche behandelt, deren Zähler und Nenner beliebige ganze Zahlen sind; solche Brüche nennt man gemeine Brüche. Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 .... also 1 mit darauf folgenden Nullen ist, nennt man Decimalbrüche. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{37}{1000}$.

Bei den Decimalbrüchen wird blos der Zähler angeschrieben, und um dieselben von den dabei befindlichen Ganzen zu unterscheiden, werden sie von den Einheiten durch das Decimalzeichen gesondert, durch welches so viele Ziffern als Decimalen abgeschnitten werden, als der Nenner Nullen hat. Z. B.

$$\frac{3}{10} = 0{\cdot}3, \quad \frac{25}{100} = 0{\cdot}25, \quad \frac{135}{1000} = 0{\cdot}135.$$

Umgekehrt ist:

$$\begin{aligned} 35{\cdot}3658 &= 35 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000} \\ &= 35 + \frac{3000}{10000} + \frac{600}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{8}{10000} \\ &= 35 + \frac{3658}{10000} = \frac{353658}{10000}. \end{aligned}$$

Die Schüler wissen bereits, dass ein Bruch eine angezeigte Division ist, daher werden sie sehr leicht auf die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch geführt, wenn man sie die durch den Bruch angezeigte Division ausführen lässt, indem sie wirklich den Zähler durch den Nenner dividieren. Werden hierbei die Reste resolviert, was beim schriftlichen Rechnen durch Anhängung einer Null geschieht, so erhält man der Ordnung nach Zehntel, Hundertel u. s. w.

Z. B. $\frac{7}{8}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden.

$\frac{7}{8} = 7_0 : 8 = 0{\cdot}875.$
60
40

Wir sagen : 8 ist in 7 0 mal enthalten, gibt also 0 Ganze, wir schreiben daher 0 in den Quotienten und setzen da das Decimalzeichen; wir lösen nun die 7 Ganzen in Zehntel auf, 7 Ganze sind 70 Zehntel;

diese durch 8 dividiert, gibt 8 Zehntel und es bleiben 6 Zehntel als Rest; 6 Zehntel = 60 Hundertel. Diese durch 8 dividiert, erhält man 7 Hundertel im Quotienten und 4 Hundertel als Rest; 4 Hundertel = 40 Tausendtel durch 8 dividiert, gibt 5 Tausendtel.

Auf dieselbe Art, wie bei den echten Brüchen, verfährt man auch bei den unechten. Z. B. Der unechte Bruch $\frac{9}{8}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden.

$$\frac{9}{8} = 9 : 8 = 1{\cdot}125, \quad \frac{9}{8} = 1{\cdot}125.$$
$$10$$
$$20$$
$$40$$

Die Schüler werden bald die Erfahrung machen, dass bei der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche die Division manchmal endlich, manchmal aber auch unendlich ist, dass also nicht jeder gemeine Bruch genau in einen Decimalbruch verwandelt werden kann. Der Lehrer lasse bei diesen Aufgaben die Nenner der gemeinen Brüche in Primfactoren zerlegen, und dann erst die Aufgabe ausführen; hieraus ersehen die Schüler, dass nur jene gemeinen Brüche genau in Decimalbrüche verwandelt werden können, deren Nenner nur die Primfactoren 2 und 5 enthalten. Daher können die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{19}{32}$, u. s. w. ferner die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{29}{125}$ u. s. w., so wie die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{39}{40}$, $\frac{111}{800}$ u. s. w. genau in Decimalbrüche verwandelt werden.

Lässt man die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ in Decimalbrüche verwandeln, so ersehen die Schüler, dass bei Brüchen, die sich nicht genau in Decimalbrüche verwandeln lassen, bei fortgesetzter Division im Quotienten die nämlichen Ziffern wiederkehren. Bei den ersten zwei Brüchen erscheint immer wieder dieselbe Ziffer, beim dritten wiederholt sich eine ganze Reihe von Ziffern (714285).

$$\frac{1}{3} = 0{\cdot}33\ldots, \quad \frac{2}{3} = 0.66\ldots$$
$$\frac{5}{7} = 0{\cdot}714285|714285$$

Man sagt den Schülern, dass solche Decimalbrüche **periodische Decimalbrüche** heißen. Die Reihe von Ziffern, die beständig wiederkehrt, heißt Periode, dieselbe kann ein- und mehrzifferig sein.

Durch Verwandlung der Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{13}{14}$ in Decimalen ersieht man, dass die Periode entweder gleich mit der ersten

$\frac{2}{3} = 0{\cdot}66\ldots$, $\frac{5}{6} = 0{\cdot}833\ldots$ oder erst mit einer späteren Decimale beginnt.
$\frac{2}{7} = 0{\cdot}285714$, $\frac{13}{14} = 0{\cdot}9285714$

Erstere nennt man rein periodische und letztere gemischt periodische Decimalbrüche.

Wiederholt sich nur eine Ziffer, so schreibt man diese nur einmal und setzt über dieselbe einen Punkt; bei einer mehrzifferigen Periode setzt man über die erste und letzte Ziffer derselben einen Punkt. Z. B.

$$\tfrac{1}{3} = 0{\cdot}\dot{3},\ \tfrac{13}{14} = 0{\cdot}9\dot{2}8571\dot{4}.$$

Nun sage man auch den Schülern, dass man sich in den meisten Fällen mit 3 oder 4 Decimalstellen begnügt, nur nimmt man die niedrigste noch beibehaltene Decimale um 1 größer an, wenn bei fortgesetzter Division auf sie 5 oder eine höhere Ziffer als 5 folgt. So nimmt man z. B. 0·844 anstatt 0·84362 an.

Bei Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch, hat man zunächst zu sehen, ob der Decimalbruch ein endlicher oder ein periodischer sei.

Ist der Decimalbruch ein endlicher, so braucht man ihn nur mit Angabe der Benennung seiner letzten Decimalstelle (also nach der 3. Leseart, Seite 81) auszusprechen und den ausgesprochenen Decimalbruch in der Form eines gemeinen Bruches anzuschreiben, und wenn eine Abkürzung möglich ist, dieselbe auszuführen. Z. B.

$0{\cdot}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{\cdot}375 = \frac{375}{1000} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$.

Es sei ein rein periodischer Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Wir multiplicieren den Bruch mit 10, 100, 1000 .. je nachdem die Periode 1, 2, 3 .. Ziffern hat, um sie vor das Decimalzeichen zu bringen, ziehen hievon den einfachen Bruch ab, und erhalten so den 9-fachen, 99-fachen, 999-fachen Wert und hieraus durch Division den gesuchten Bruch. Z. B. $0{\cdot}7\dot{2}\dot{9}$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Wir multiplicieren den Bruch mit 1000, um die ganze Periode vor das Decimalzeichen zu bringen, und wir haben:

$$\begin{array}{rl} \text{1000facher Bruch} = & 729{\cdot}7\dot{2}\dot{9} \\ \text{1facher Bruch} = & 0{\cdot}729 \\ \hline \text{bleibt 999facher Bruch} = & 729 \end{array}$$

$$\text{also einfacher Bruch} = \frac{729}{999} = \frac{81}{111} = \frac{27}{37}.$$

Aus mehreren solchen Beispielen wird ersichtlich:

Ein reinperiodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Periode einmal als Zähler, und als Nenner soviel 9 schreibt, als die Periode Ziffern hat.

Ist der Bruch ein gemischtperiodischer, so multiplicieren wir denselben zuerst mit einer solchen Zahl, dass die der Periode vorangehenden Decimalen und die ganze erste Periode vor das Decimalzeichen kommen, also mit 100, 1000, 10000 . . , je nachdem die Periode und die ihr vorangehenden Decimalen 2, 3, 4 . . . Ziffern enthalten, dann noch mit einer Zahl, dass bloß die der Periode vorangehenden Ziffern vor das Decimalzeichen kommen, also mit 10, 100, 1000 . . . je nachdem der Periode 1, 2, 3 . . . Ziffern vorausgehen, ziehen dann das zweite Product vom ersten ab, wodurch man ein Vielfaches des Decimalbruches erhält, aus welchem sich durch die Division der Bruch selbst berechnen läßt. Z. B. Der Bruch $0{\cdot}3\dot{8}4$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

$$\begin{array}{rl} \text{1000facher Bruch} & = 384{\cdot}84 \\ \text{davon 10facher Bruch} & = 3{\cdot}84 \\ \hline \text{bleibt 990facher Bruch} & = 381 \\ \text{1facher Bruch} & = \frac{381}{990} = \frac{127}{330} \end{array}$$

Aus mehreren Beispielen ersieht man:

Man verwandelt einen gemischtperiodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch, indem man die der Periode vorausgehenden Decimalen und einmal die Periode anschreibt, hiervon die der Periode vorausgehenden Decimalen als ganze Zahl betrachtet subtrahiert, den Rest als Zähler des gemeinen Bruches nimmt, und als Nenner soviele 9 als die Periode und so viele rechts folgenden Nullen schreibt als der Periode Ziffern vorausgehen.

Übungsaufgaben V. Rechenbuch M., S. 34 und 35.

§. 45.

Addition der Brüche.

Die Schüler wissen, dass man nur Gleichnamiges addieren kann und dass die Summe den Namen der Posten haben muss. Man erinnere hier auch, dass bei einem Bruche der Zähler die eigentliche Zahl, der Nenner aber der Name der Bruchtheile ist. Die gleichnamigen Brüche $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, und $\frac{5}{8}$, können wir ja auch darstellen als 1 Achtel, 3 Achtel, 5 Achtel, und so wie 1 Gulden 3 Gulden und 5 Gulden zusammen 9 Gulden sind, so sind auch 1 Achtel, 3 Achtel und 5 Achtel zusammen 9 Achtel oder $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und unter ihre Summe den Nenner setzt. Wenn die Summe ein unechter Bruch ist, so verwandelt man denselben in eine gemischte Zahl.

Die Schüler sehen auch leicht ein, dass Brüche von ungleichen Nennern zuerst auf gleichen Nenner gebracht werden müssen, um die Addition verrichten zu können. Z. B. Wieviel ist $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$?

Mündlich: Kann man Viertel und Fünftel als solche addieren? Wie müssen die Brüche beschaffen sein, damit man sie addieren kann? Sucht, welchen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner wir den beiden Brüchen geben können. Wieviel Zwanzigstel sind $\frac{1}{4}$? Wieviel $\frac{3}{4}$? Wieviel Zwanzigstel sind $\frac{1}{5}$? Wieviel $\frac{4}{5}$?

$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; $\frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$.

Schriftlich:

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$
$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$
$\frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$

oder:

	20	
$\frac{3}{4}$	5	15
$\frac{4}{5}$	4	16
		$31 : 20 = 1\frac{11}{20}$

Die Schüler sehen auch ein, dass man bei der Addition gemischter Zahlen zuerst die Summe der Brüche und dann die Summe der ganzen Zahlen sucht. Z. B. $5\frac{2}{3} + 18\frac{4}{5} + 24\frac{3}{8} + 9\frac{2}{3} = ?$

		120		
5	$\frac{2}{3}$	40	80	3, 5, 8. Der kl. g. Nenner ist $3 \times 5 \times 8 = 120$.
18	$\frac{4}{5}$	24	96	
24	$\frac{3}{8}$	15	45	
9	$\frac{3}{4}$	30	90	
58	$\frac{71}{120}$		311 : 120 = $2\frac{71}{120}$	
			71	

Man gebe als Aufgaben gemeine Brüche zu addieren, und fordere, dass diese Aufgabe auch in Decimalbrüchen ausgeführt wird, und umgekehrt.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuch M., S. 35 und 36. A. K. S. 36 und 37.

§. 46.

Subtraction der Brüche.

Wenn die Schüler die Addition der Brüche gründlich aufgefasst haben, so macht ihnen auch die Subtraction keine Schwierigkeiten. Der Lehrer beobachte folgenden Stufengang.

1. Es werde ein Bruch von einem gleichnamigen Bruch subtrahiert, z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$. Die Schüler werden hierbei zur Einsicht geführt: Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

2. Eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl, wo die Brüche gleichnamig sind, und der Bruch des Minuends größer ist, als der des Subtrahends, z. B. $28\frac{4}{5} - 17\frac{2}{5} = 11\frac{2}{5}$.

3. Einen Bruch von einer ganzen Zahl, z. B. $8 - \frac{3}{4}$. Hiebei leite man die Schüler an, 1 Ganzes in einen Bruch von dem im Subtrahend gegebenen Nenner aufzulösen.

$8 = 7\frac{4}{4}$ oder

$7\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$

8	4
$\frac{3}{4}$	3
$7\frac{1}{4}$	1

4. Eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl mit gleichnamigen Brüchen, wovon jedoch der Bruch des Subtrahends größer ist als der des Minuends, z. B. $75\frac{1}{4} - 24\frac{3}{4}$.

Im Kopfe: Nimmt von $75\frac{1}{4}$ zuerst 24 weg, so bleiben $51\frac{1}{4}$ oder $50\frac{5}{4}$; hiervon $\frac{3}{4}$ weg, bleiben $50\frac{2}{4}$ oder $50\frac{1}{2}$.

Schriftlich:

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ 75\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 24\frac{3}{4} & 3 \\ \hline 50\frac{1}{2} & \frac{2}{4}=\frac{1}{2}. \end{array}$$

5. Ungleichnamige Brüche; die Schüler begreifen nach dem Vorhergehenden sehr leicht, dass diese gleichnamig gemacht werden müssen. Z. B.

$\frac{7}{8} - \frac{4}{5}$. Hier ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner $5 \times 8 = 40$.

$\frac{1}{8} = \frac{5}{40}$, $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$
$\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$, $\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$
$\frac{3}{40}$

oder:

$$\begin{array}{c|c|c} & & 40 \\ \hline \frac{7}{8} & 5 & 35 \\ \frac{4}{5} & 8 & 32 \\ \hline \frac{3}{40} & & 3 \end{array}$$

6. Gemischte Zahlen von gemischten Zahlen mit ungleichnamigen Brüche. Z. B.

1. $487\frac{11}{12} - 94\frac{7}{8}$.

$$\begin{array}{r|c|c} & 24 & \\ \hline 487\frac{11}{12} & 2 & 22 \\ 94\frac{7}{8} & 3 & 21 \\ \hline 393\frac{1}{24} & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 12, 8 & \\ \hline 3, 4 & 2 \end{array}$$

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist $3 . 4 . 2 = 24$.

2. $2876\frac{17}{30} - 979\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r|c|c} & 30 & \\ \hline 2876\frac{11}{30} & 1 & 17 \\ & & 47 \\ 979\frac{5}{6} & 5 & 25 \\ \hline 1896\frac{11}{15} & & \frac{22}{30}=\frac{11}{15} \end{array}$$

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 30.

Übungsaufgaben V. R. M., S. 37—39. A. K. S. 37 u. 38.

§. 47.

Multiplication der Brüche.

Die Schüler wissen bereits, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciert wird. Hier werden Wiederholungsübungen ange-

stellt, bei welchen die Schüler zu Einsicht gelangen, dass die Division des Nenners durch die ganze Zahl sich nicht häufig anwenden lässt.

Indem der Lehrer mehrere Brüche mit ihrem Nenner multiplicieren lässt, kommen die Schüler auch darauf, dass ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert, den Zähler zum Producte gibt.

Z. B. $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} = 3$. Oder: $\frac{7}{8} \times 8 = \frac{7}{1} = 7$.

Nun lasse der Lehrer eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplicieren. Er leite sie an, dass sie beim Kopfrechnen zuerst die ganze Zahl, und dann erst den Bruch der gemischten Zahl multiplicieren, und die bei letzterer Multiplication sich ergebenden Ganzen zum früheren Producte addieren. Z. B. Wieviel ist $5\frac{2}{3} \times 7$? 7 mal 5 ist 35. 7 mal $\frac{2}{3}$ ist $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; $35 + 4\frac{2}{3} = 39\frac{2}{3}$.

Beim Zifferrechnen multipliciert man zuerst den Bruch und dann die Ganzen oder man verwandelt die gemischte Zahl in einen unechten Bruch, welcher sodann mit der ganzen Zahl multipliciert wird. Z. B.

$5\frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3} + 35 = 4\frac{2}{3} + 35 = 39\frac{2}{3}$, oder $5\frac{2}{3} \times 7 = \frac{17}{3} \times 7 = \frac{112}{3} = 39\frac{2}{3}$.

Bei der Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruche könnte man zeigen, dass man dasselbe Product erhält, wenn man die Factoren verwechselt, z. B. $\frac{3}{4} \times 4 = 4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$. Es ist jedoch nothwendig, diesen Fall näher zu betrachten.

Zu diesem Behufe wollen wir eine Aufgabe mit benannten Zahlen ins Auge fassen. Z. B. Was kostet $\frac{1}{2}$ Kilogramm, wenn 1 Kilogramm 36 Kreuzer kostet?

Was müsste man wohl thun, wenn man wissen wollte, was 4 Kilogramme kosten? Wir müssten 36 Kreuzer mit 4 multiplicieren? Womit muss man daher 36 kr. multiplicieren um zu erfahren, was $\frac{1}{2}$ Kilogramm kostet? Der wievielte Theil ist $\frac{1}{2}$ Kilogramm von 1 Kilogramm? Den wievielten Theil von 36 kr. wird daher $\frac{1}{2}$ Kg. kosten? Wie findet man aber die Hälfte von 36 kr.? Daher ist $36 \times \frac{1}{2} = 36 : 2 = 18$ kr. Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$ multiplicieren ist daher soviel, als diese Zahl durch 2 dividieren.

Auf ähnliche Weise findet man, dass eine Zahl mit $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots$ multiplicieren soviel bedeutet, als sie durch 3, 4, 5... dividieren.

Bei Lösung der Aufgabe: Was kostet $\frac{2}{3}$ Meter, wenn 1 Meter 48 kr kostet? wird man schließen? Wenn 1 Meter 48 kr. kostet, so kosten $\frac{2}{3}$ Meter $\frac{2}{3}$ mal 48 kr., d. i. man muss die 48 kr. $\frac{2}{3}$mal hingeben, und die Aufgabe fordert, die 48 kr. mit $\frac{2}{3}$ zu multiplicieren, also $48 \times \frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$ Meter kostet den 3. Theil von 48 kr. Die $\frac{2}{3}$ Meter kosten 2 mal $\frac{48}{3}$ kr. $= \frac{48}{3}$ kr. $\times$ 2; daher ist 48 kr. $\times \frac{2}{3} = \frac{48}{3}$ kr. $\times 2 = 16 \times 2 = 32$ kr. Eine Zahl mit $\frac{2}{3}$ multiplicieren, heißt daher den 3. Theil der Zahl 2 mal nehmen.

Aus diesem und mehreren ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler:

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, wenn man sie durch den Nenner des Bruches dividiert und mit dem Zähler multipliciert. Es wird daher eine ganze Zahl mit einem Bruche ebenso multipliciert, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl.

Eine Zahl mit 1 multipliciert, gibt sich selbst zum Producte; ist der Multiplicator größer oder kleiner als 1, so muss auch das Product größer oder kleiner werden als der Multiplicand. Ein echter Bruch ist aber kleiner als 1, folglich muss das Product, welches man erhält, wenn man eine Zahl mit einem echten Bruche multipliciert, kleiner werden als diese Zahl. Auch hierauf mögen die Schüler aufmerksam gemacht werden.

Um die Schüler auf die Multiplication eines Bruches mit einem Bruche zu führen, gebe man eine Aufgabe, z. B. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$.

Wie würden wir den Bruch $\frac{7}{8}$ mit 3 multiplicieren? Was erhalten wir hiedurch? Wann wäre $\frac{21}{8}$ das wahre Product? Womit haben wir aber nach unserer Aufgabe $\frac{7}{8}$ zu multiplicieren? Wievielmal so klein ist $\frac{3}{5}$ als 3? Wievielmal so klein wird also das Product werden? Den wievielten Theil von $\frac{21}{8}$ haben wir daher zu nehmen? Wie findet man den 5. Theil einer Zahl? Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert? Das ganze Verfahren hiebei schriftlich dargestellt gibt:

$$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{8} : 5 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$$

Oder: $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$ heißt, es soll von $\frac{7}{8}$ der 5. Theil 3 mal genommen werden. Wir wollen zuerst den 5. Theil von $\frac{7}{8}$ suchen. Der 5. Theil von $\frac{1}{8}$ ist $\frac{1}{40}$; der 5. Theil von $\frac{7}{8}$ ist daher $\frac{7}{40}$; $\frac{7}{40}$ 3 mal genommen ist $\frac{21}{40}$. Lassen wir dieses Product mit den beiden gegebenen Brüchen vergleichen, so ersehen

die Schüler daraus, wie bei der ersten Entwickelung, dass das Product der Zähler, als Zähler und das Product der Nenner beider Brüche als Nenner des Bruches, den man als Product gefunden hat, erscheint.

Also: $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{8 \times 5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$.

Ein Bruch wird daher mit einem Bruche multipliciert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert, und das Product der Zähler als Zähler und das Product der Nenner als Nenner des gesuchten Productes annimmt.

Um eine gemischte Zahl mit einem Bruche oder mit einer gemischten Zahl zu multiplicieren, verwandle man die gemischte Zahl zuerst in einen unechten Bruch und verrichte dann die Multiplication,

z. B. $4\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{19}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{95}{24} = 3\frac{23}{24}$,

$6\frac{3}{5} \times 7\frac{1}{3} = \frac{33}{5} \times \frac{22}{3} = \frac{726}{15} = 48\frac{6}{5}$.

Wenn sich Zähler und Nenner der beiden Brüche gegenseitig abkürzen lassen, so ist es vortheilhaft, das Product der Zähler und das der Nenner bloß anzuzeigen, abzukürzen und dann erst die Multiplication zu verrichten.

z. B. $\frac{4}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \times \underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{3}{4}$; oder $\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{3}{4}$.

$7\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{3} = \frac{39}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{\overset{13}{39} \times \overset{2}{10}}{\underset{1}{5} \times \underset{1}{3}} = 26$; oder:

$7\frac{4}{5} \times 3\frac{1}{3} = \frac{\overset{13}{39}}{\underset{1}{5}} \times \frac{\overset{2}{10}}{\underset{1}{3}} = 26$.

Sollen mehrere Brüche oder gemischte Zahlen miteinander multipliciert werden, verwandle man letztere in unechte Brüche, setze die Zähler als Factoren über und alle Nenner als Factoren unter den Bruchstrich, kurze nach Möglichkeit ab, und multipliciere sodann.

z. B. $5\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times 6\frac{1}{8} \times 1\frac{3}{5} \times \frac{9}{10} \times 3\frac{1}{3}$.

$$\frac{43 \times \overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{7}{\cancel{49}} \times \overset{1}{\cancel{8}} \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{4}{\cancel{8}} \times \underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{1}{\cancel{8}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{10}} \times \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{43 \times 7 \times 3}{4 \times 5} = \frac{903}{20} = 45\frac{3}{20}$$

oder kürzer: $\frac{43}{\cancel{8}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{7} \times \frac{\overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{5} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{10}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$

$$= \frac{43 \times 7 \times 3}{4 \times 5} = \frac{903}{20} = 45\tfrac{3}{20}.$$

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 39—44. A. K. S. 39 bis 42.

§. 48.

Division der Brüche.

Die Schüler wissen, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird. Aus mehreren zur Wiederholung gegebenen Beispielen ersehen die Schüler, dass die Division des Zählers durch die ganze Zahl nicht häufig anzuwenden ist. Der Lehrer nehme hierauf die Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl vor, und leite die Schüler an, dass sie entweder die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, und alsdann die Division verrichten, oder dass sie zuerst die Ganzen und dann den Bruch der gemischten Zahl dividieren, den bei der Division der Ganzen sich etwa ergebenden Rest mit dem angehängten Bruche als gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, und dann durch die ganze Zahl dividieren. Z. B. $56\frac{3}{4} : 15$.

$$56\tfrac{3}{4} : 15 = \frac{227}{4} : 15 = \frac{227}{60} = 3\tfrac{47}{60};$$

oder: $56\frac{3}{4} : 15 = 3\frac{47}{60}$

$$\underline{11\tfrac{3}{4}}$$

$$\frac{47}{4} : 15 = \frac{47}{60}$$

Um die Schüler zur Einsicht zu bringen, wie eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert wird, gibt es verschiedene Wege. Es soll z. B. 8 durch $\frac{2}{5}$ dividiert werden. a) Man leite die Schüler an, die Ganzen auf die Benennung des Nenners zu bringen, also hier 8 Ganze in Fünftel aufzulösen. Wieviele Fünftel sind 8 Ganze? Wie oft sind $\frac{2}{5}$ in $\frac{40}{5}$ enthalten? $8 : \frac{2}{5} = \frac{40}{5} : \frac{2}{5} = 40 : 2 = 20$.

b) $\frac{1}{5}$ ist in 1 5mal, und in 8 40mal enthalten; $\frac{2}{5}$ ist aber eine 2mal so große Zahl, ist also nur $\frac{1}{2}$ mal sooft in $\frac{40}{5}$ enthalten, als $\frac{1}{5}$

also nur 20 mal. $8 : \frac{1}{5} = \frac{40}{5} : \frac{1}{5} = 40 : 1 = 40 \frac{40}{5} : \frac{2}{5}$ $= 40 : 2 = 20$.

c) $8 : 2 = 4$; es soll aber nicht durch 2, sondern durch $\frac{2}{5}$ dividiert werden; $\frac{2}{5}$ ist aber 5 mal so klein als 2, daher ist auch $\frac{2}{5}$ in 8 5 mal so oft enthalten als 2, also $4 \times 5 = 20$ mal enthalten.

$$8 : 2 = 4$$
$$4 \times 5 = 20.$$

Wir haben im Vorstehenden die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch im Sinne des Messens behandelt; nicht so leicht ist die Auffassung im Sinne des Theilens. Zur Erleichterung wollen wir eine angewandte Aufgabe benützen. Z. B. $\frac{1}{4}$ Liter kostet 20 Kreuzer; was kostet 1 Liter? Wenn 4 Liter 20 kr. kosten würden, so würde 1 Liter den 4. Theil von 20 kr. kosten, daher müsste man 20 kr. durch 4 dividieren; deshalb wird man auch, um zu erfahren, was ein Liter kostet, wenn $\frac{1}{4}$ Liter 20 kr. kostet, auch 20 kr. durch $\frac{1}{4}$ dividieren. 1 Liter kostet also 20 kr.: $\frac{1}{4}$.

Um die Bedeutung von 20 kr.: $\frac{1}{4}$ zu erfahren, lösen wir die Aufgabe, indem wir schließen: 1 Liter kostet 4 mal soviel als $\frac{1}{4}$ Liter; man muss also 20 mit 4 multiplicieren; daher ist

$$20 \text{ kr.} : \tfrac{1}{4} = 20 \text{ kr.} \times 4 = 80 \text{ kr.}$$

Aus mehreren ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler, dass eine Zahl durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. dividieren, so viel heißt, als sie mit 2, 3, 4... multiplicieren.

Nun geben wir die Aufgabe: Was kostet 1 Meter, wenn $\frac{7}{8}$ Meter 35 kr. kosten?

Nach dem Vorigen muss man 35 kr. durch $\frac{7}{8}$ dividieren. 1 Meter kostet daher 35 kr.: $\frac{7}{8}$.

$\frac{1}{8}$ Meter kostet den 7. Theil von 35 kr. $= \frac{35}{7}$ kr. 1 Meter kostet 8 mal so viel, als $\frac{1}{8}$ Meter, daher $\frac{35}{7}$ kr. $\times 8$ $= 5$ kr. $\times 8 = 40$ kr.

Werden mehrere Beispiele nach der angegebenen Weisen behandelt, so ersehen die Schüler, dass man hierbei den Dividend durch den Zähler des Divisors dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert.

Mit einem Bruche multipliciert man aber, wenn man den Dividend durch den Nenner dividiert und den Quotienten mit dem

Zähler multipliciert. Kehrt man daher bei der Division den Divisor um, d. h. macht man den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler und multipliciert den Dividend mit dem umgekehrten Divisor, so hat man ja auch den Dividend durch den ursprünglichen Zähler des Divisor dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert.

Eine Zahl wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliciert. Z. B.

$$8 : \tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{3} \times 5 \text{ oder } 8 \times \tfrac{5}{3} = \tfrac{40}{3} = 13\tfrac{1}{3}.$$

Nun lehre man die Schüler einen Bruch durch einen Bruch dividieren. Z. B. $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$.

Nach der eben angegebenen Regel ist

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5 \times 7} \times 8 = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}, \text{ also } \frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{35}.$$

Wir wollen nun noch einen andern Entwicklungsgang einschlagen: Wäre der Bruch $\frac{3}{5}$ durch 7 zu dividieren, so erhielten wir

$$\frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5 \times 7} = \frac{3}{35}.$$

Der Divisor 7 ist aber 8 mal so groß als $\frac{7}{8}$. Wenn man denselben Dividend durch eine 8 mal so große Zahl dividiert, so wird der Quotient 8 mal so klein; $\frac{3}{35}$ ist also 8 mal so klein als der verlangte Quotient für den Divisor $\frac{7}{8}$, daher müssen wir $\frac{3}{35}$ noch mit 8 multiplicieren. $\frac{3}{35} \times 8 = \frac{3}{5 \times 7} \times 8 = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$.

$$\frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7}, \text{ daher auch } \frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{35}.$$

Ein Bruch wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man den Dividend mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.

Dass bei der Division durch einen echten Bruch eine größere Zahl erscheint, als der Dividend, obgleich die Division eine Verminderungsrechnung ist, kann man sich leicht erklären, wenn man bedenkt, dass der Quotient umso größer wird, je kleiner der Divisor ist. Eine Zahl durch 1 dividiert, gibt sich selbst zum Quotienten; da nun ein echter Bruch kleiner ist als 1, so muss ja der Quotient größer werden, als der Dividend.

Gemischte Zahlen werden, bevor man die Division verrichtet, in unechte Brüche verwandelt. Z. B.

$$5\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{7} = \tfrac{23}{4} : \tfrac{2}{7} = \tfrac{23}{4} \times \tfrac{7}{2} = \tfrac{161}{8} = 161 : 8 = 20\tfrac{1}{8}.$$

$$\tfrac{5}{6} : 8\tfrac{4}{9} = \frac{5}{6} : \frac{76}{9} = \frac{5}{\underset{2}{\cancel{6}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{76} = \frac{15}{152}$$

$$6\tfrac{2}{3} : 4\tfrac{10}{11} = \frac{20}{3} : \frac{54}{11} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{3} \times \frac{11}{\underset{27}{\cancel{54}}} = \frac{110}{81} = 110 : 81 = 1\tfrac{29}{81}.$$

Übungsaufgaben V. R. M. S. 44—48. A. K. S. 42 bis 45. Wiederholungsaufgaben V. R. M. S. 49—51. A. K. S. 45 bis 50 und VI. R. S. 1 bis 20.