Zweiter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 35.

Einige besondere Eigenschaften der Zahlen.

Strehl und andere Methodiker empfehlen, die Theilbarkeit der Zahlen erst dann vorzunehmen, wenn man zum Abkürzen der Brüche kommt, also gleich eine Anwendung von den erkannten Gesetzen machen kann, sonst schwebt diese Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen in der Luft, und wenn man dann zur Lehre von den Brüchen und dem Abkürzen derselben kommt, so haben die Schüler die Kennzeichen der Theilbarkeit vergessen.

Dem letzteren läſst sich wohl durch Wiederholen und auch dadurch vorbeugen, wenn man die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen unmittelbar vor dem Bruchrechnen vornimmt. Hierdurch wird vermieden, den Zusammenhang im Bruchrechnen stören zu müssen.

Der Lehrer gebe den Schülern mehrere Zahlen, welche sich durch eine andere Zahl ohne Rest dividieren lassen und führe sie hierdurch auf die Erklärung: Eine Zahl ist durch eine andere theilbar, wenn sie sich durch dieselbe ohne Rest dividieren läſst.

Er frage: durch welche Zahl ist die Zahl 4 theilbar? Durch welche Zahl die Zahl 9?

Diejenige Zahl, durch welche eine andere Zahl theilbar ist, nennt das Maß dieser Zahl.

Welches Maß habt ihr für die Zahl 4, welches für die Zahl 9 gefunden? Suchet nun auch ein Maß für die Zahl 6, für 12., 15 u. s. w.

Das Wievielfache ist 6 von 2 und von 3? das Wievielfache ist 12 von 3? u. s. w.

Gebt Zahlen an, welche durch 2, 3, 4 u. s. w. theilbar sind.

Diejenige Zahl, welche durch eine andere Zahl theilbar ist, nennt man ein **Vielfaches** der letzteren. Gebt auch Zahlen an, welche durch 1 theilbar sind. Suchet eine Zahl, welche nicht durch 1 theilbar ist.

Durch 1 sind alle Zahlen theilbar.

Dividiert die Zahl 2 durch 2; 5 durch 5; u. s. w., bleibt hierbei ein Rest?

Jede Zahl ist durch sich selbst theilbar.

Durch welche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 u. s. w. theilbar?

Jene Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind, nennt man Primzahlen.

Suchet alle Primzahlen von 1 bis 100.

Durch welche Zahlen ist die Zahl 12 theilbar?

Solche Zahlen, welche nicht nur durch sich selbst und durch 1, sondern auch noch durch eine andere Zahl theilbar sind, nennt man **zusammengesetzte** Zahlen.

Gebet zusammengesetzte Zahlen an.

Durch welche Zahl ist sowohl die Zahl 25 als auch 10 theilbar?

Wie oft ist 5 in 25 enthalten? Wie oft in 15? Wie oft also in beiden Zahlen $25 + 15 = 40$ zusammen? (Mehrere solche Beispiele.)

Wenn zwei Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar sind, so ist auch ihre Summe durch diese Zahl theilbar.

Um wievielmal weniger ist die Zahl 5 in 15 als in 25 enthalten? Wie oft daher in $25 - 15 = 10$? Also 5 mal weniger, 3 mal d. i. 2 mal. (Mehrere Beispiele.)

Wenn zwei Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar sind, so ist auch ihr Unterschied durch diese Zahl theilbar.

Wie oft ist 5 in 15 enthalten? Wie oft ist in 2 mal 15, 3 mal 15 u. s. w. enthalten?

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist es auch jedes Vielfache derselben.

V. Rechenbuch M. S. 19.

§. 36.

Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen und Zerlegung in ihre Primfactoren.

Der Lehrer lasse die Zahl 10 durch 2 dividieren, um die Schüler zu überzeugen, dass 10 durch 2 theilbar ist. Da nun 10 durch 2 theilbar ist, so muss auch jedes Vielfache von 10, also 20, 30, . . . 100, 200, 300, 1000, 2000 u. s. w. durch 2 theilbar sein. Jede ganze Zahl, die an der Einerstelle 0 hat, ist ein Vielfaches von 10 und daher durch 2 theilbar.

$5732 = 5730 + 2$, $5734 = 5730 + 4$, $5736 = 5730 + 6$.

Jede Zahl läßt sich in zwei solche Theile zerlegen, von welchen der eine ein Vielfaches von 10, also durch 2 theilbar ist und der andere aus den Einern besteht. Es kommt daher nur darauf an, was für eine Ziffer an der Stelle der Einer steht. Steht an der Einerstelle 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl, die Summe zweier durch 2 theilbarer Zahlen, daher selbst durch 2 theilbar.

Durch 2 ist jede ganze Zahl theilbar, die an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6, 8 hat.

Der Lehrer lasse nun die Zahl 100 durch 4 dividieren, um den Schülern zu zeigen, dass 100 durch 4 theilbar ist. Da 100 durch 4 theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache von 100, also: 200, 300, . . 1000, 2000, 3000, 1200, . . . durch 4 theilbar. Jede Zahl, die an der Stelle der Zehner und Einer Nullen hat, ist ein Vielfaches von 100 und daher durch 4 theilbar.

$6548 = 6500 + 48$, $3712 = 3700 + 12$.

Jede ganze Zahl läßt sich in 2 Addenden zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, also durch 4 theilbar ist, und der andere durch die Ziffern an der Stelle der Zehner und Einer ausgedrückt ist. Ist nun diese Zahl durch 4 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

Durch 4 sind alle Zahlen theilbar, deren zwei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind.

Um das Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahl 8 zu finden, läſst man 1000 durch 8 dividieren, geht dann in derselben Weise vor wie bei 2 und 4, und findet schließlich:

Durch 8 sind alle Zahlen theilbar, deren drei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 8 theilbar sind.

Da 10 durch 5 theilbar ist, so muſs auch jedes Vielfache von 10 durch 5 theilbar sein. Es folgt hieraus, daſs es bei der Theilbarkeit der Zahlen durch 5 nur auf die Einer ankommt, indem jeder höhere Bestandtheil, für sich allein genommen, als ein Vielfaches der durch 5 theilbaren Zahl 10, also ebenfalls durch 5 theilbar sein muſs.

Durch 5 sind alle Zahlen theilbar, welche an der Einerstelle 5 oder 0 haben.

Um die Schüler auf das Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen durch 3 zu führen, lasse er die Zahlen 10, 100, 1000 . . . durch ihre zunächst kleineren Vielfachen von 3 nebst ihren Resten ausdrücken, als:

$$10 = 3 \times 3 + 1$$
$$100 = 3 \times 33 + 1$$
$$1000 = 3 \times 333 + 1$$
$$10000 = 3 \times 3333 + 1 \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in einer Zahl, welche man untersuchen will, ob sie durch 3 theilbar ist, diese Werte statt 10, 100, 1000 u. s. w., z. B. in der Zahl 7254, so findet man, weil:

$$7254 = 7000 + 200 + 50 + 4$$
$$= 7.1000 + 2.100 + 5.10 + 4$$
$$= 7.(3.333 + 1) + 2.(3.33 + 1) + 5.(3.3 + 1) + 4^{*)}$$

Verrichtet man die angezeigten Multiplicationen wirklich, so erhält man:

$$7254 = 3.2331 + 7 + 3.66 + 2 + 3.15 + 5 + 4.$$

Ordnet man diese Ausdrücke so, daſs zuerst alle angezeigten Producte, welche den Factor 3 haben, zu stehen kommen, dann aber die noch übrigen Zahlen, so erhält man:

$$7254 = 3.2331 + 3.66 + 3.15 + (7 + 2 + 5 + 4)$$

---

*) Hier können die zu Obigem nöthigen Erklärungen bezüglich der Klammern gegeben werden.

Da nun die drei ersten Ausdrücke, weil sie Vielfache von 3 sind, durch 3 theilbar sind, so kommt es nur auf die noch übrigen $7 + 2 + 5 + 4$, d. i. auf die Summe der Ziffern der Zahl 7254 an, ob diese Zahl durch 3 theilbar ist. Da man nun diese Zerlegung bei jeder anderen Zahl machen kann, so können wir sagen:

Durch 3 sind alle Zahlen theilbar, deren Ziffersumme durch 3 theilbar ist.

Wenn eine Zahl durch 2 und auch durch 3 theilbar ist, so muss sie auch durch 2×3, d. i. durch 6 theilbar sein. Welche Zahlen sind aber durch 2 theilbar? Welche durch 3?

Durch 6 sind alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffersumme durch 3 theilbar ist.

Um die Schüler auf das Kennzeichen für Theilbarkeit der Zahlen durch 9 zu führen, lassen wir die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. durch ihre zunächst kleineren Vielfachen von 9 nebst ihren Resten ausdrücken, als:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 \times 1 + 1 \\ 100 &= 9 \times 11 + 1 \\ 1000 &= 9 \times 111 + 1 \\ 10000 &= 9 \times 1111 + 1 \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in einer Zahl, welche man untersuchen will, ob sie durch 9 theilbar ist, anstatt 10, 100, 1000 u. s. w. z. B. in der Zahl 7263, so findet man, weil:

$$\begin{aligned} 7263 &= 7000 + 200 + 60 + 3 \\ &= 7.1000 + 2.100 + 6.10 + 3 \\ &= 7.(9.111 + 1) + 2.(9.11 + 1) + 6.(9.1 + 1) + 3 \end{aligned}$$

Verrichtet man die angezeigte Multiplication wirklich, so erhält man:

$$9.777 + 7 + 9.22 + 2 + 9.6 + 6 + 3$$

Ordnet man diese Ausdrücke so, dass zuerst alle angezeigten Producte, welche den Factor 9 haben, zu stehen kommen, so erhält man:

$$7263 = 9.777 + 9.22 + 9.6 + (7 + 2 + 6 + 3)$$

Da nun die drei ersten Ausdrücke, als Vielfache von 9, durch 9 theilbar sind, so kommt es nur auf die noch übrigen $(7 + 2 + 6 + 3)$ auf die Summe der Ziffern der Zahl 7263 an, ob

diese Zahl durch 9 theilbar ist. Da man diese Zerlegung mit jeder anderen Zahl vornehmen kann, so können wir sagen:

Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffersumme durch 9 theilbar ist.

Da jede Zahl, welche in der Einerstelle 0 hat, ein Vielfaches von 10 ist, so sind durch 10 alle Zahlen theilbar, welche keine Einer haben.

Die Regeln für die Theilbarkeit der übrigen Zahlen, wie 7, 11, 13, 17, 19 u. s. w. sind sehr zusammengesetzt und haben keinen praktischen Wert.

Sind die Schüler in den Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen bis zur Geläufigkeit an Beispielen geübt worden, so geht man auf das Zerlegen der Zahlen in Primfactoren über.

Als Vorbereitung gebe man zusammengesetzte Zahlen an, als: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 24 u. s. w. und lasse von den Schülern im Kopfe aufsuchen, welche Primzahlen miteinander multipliciert die gegebene Zahl als Product geben.

Hierauf leite man sie auf das schriftliche Verfahren, welches in Folgendem besteht:

Will man eine Zahl in Primfactoren zerlegen, so dividiere man sie durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist (1 ausgenommen); den Quotienten dividiert man wieder durch die kleinste Primzahl, durch welche er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen und setze dieses Verfahren solange fort, bis man zum Quotienten eine Primzahl erhält. Die hiebei in Anwendung gebrachten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren der gegebenen Zahl. Es soll z. B. die Zahl 1260 in Primfactoren zerlegt werden. Man erhält:

1260 : 2 = 630 oder	1260	2
630 : 2 = 315	630	2
315 : 3 = 105	315	3
105 : 3 = 35	105	3
35 : 5 = 7	35	5
	7	7

Die Primfactoren der Zahl 1260 sind die nach und nach angewendeten Divisoren 2, 2, 3, 3, 5 und der letzte Quotient 7; denn

$$1260 = 2 \times 630 = 2 \times 2 \times 315 = 2 \times 2 \times 3 \times 105$$
$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 35 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Übungsaufgaben im V. R. M. S. 21. A. K. S. 30 u. 31.

§. 37.

Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes.

Der Lehrer gebe den Schülern mehrere Zahlen an. Z. B. 12, 15, 21, welche eine und dieselbe Zahl als Maß haben, und lasse sie im Kopfe aufsuchen, durch welche Zahl diese Zahlen theilbar sind, und sage:

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere Zahlen theilbar sind, heißt ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen.

Hierauf gebe er mehrere Zahlen an, welche zwei oder mehrere Zahlen als gemeinschaftliches Maß haben, z. B. 24, 36, 48 und lasse die Schüler beachten, welches unter den gemeinschaftlichen Maßen (2, 3, 4, 6, 12) das größte sei, und lasse sie untersuchen, ob es nicht ein noch größeres gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen gebe und sage:

Die größte unter denjenigen Zahlen, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, nennt man das größte gemeinschaftliche Maß derselben.

Er lasse nun untersuchen, ob die Zahlen 2, 3, 4, 5 auch ein gemeinschaftliches Maß haben, und sage dann:

Zwei oder mehrere Zahlen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, nennt man **Primenzahl unter sich** oder **relative Primzahlen.**

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, hat man zwei Methoden:

1. Man zerlegt jede derselben in ihre Primfactoren, hebt unter diesen diejenigen heraus, die in allen gegebenen Zahlen zugleich vorkommen; so ist das Product dieser Factoren ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen und zwar das größte, weil kein Factor mehr dazukommen darf, ohne dass es aufhören würde ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen zu sein.

Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 360 und 630 gesucht werden.

360	2	630	2
180	2	315	3
90	2	105	3
45	3	35	5
15	3	7	7
5	5		

Das größte gemeinschaftliche Maß besteht daher aus den Factoren 2, 3, 3, 5 und ist: $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Wenn das größte gemeinschaftliche Maß von großen Zahlen gesucht werden soll, deren Primfactoren oft mühsam zu finden sind, so zieht man nachfolgende Methode vor.

2. Um den Gang bei der Anwendung der zweiten Methode nicht unterbrechen zu müssen, ist es angezeigt, die Schüler vorher mit zwei Sätzen bekannt zu machen, worauf dieselbe gegründet ist.

Man wiederhole zunächst das, was die Schüler bei der Probe über die Division kennen gelernt haben und lasse z. B. 315 durch 36 dividieren. Wenn wir 315 durch 36 dividieren, so erhalten wir 8, 8 mal 36 ist 288, dieses vom Dividend abgezogen gibt 27 als Rest; man erhält also den Rest, wenn man vom Dividend das Product aus dem Divisor und dem Quotienten subtrahiert; daher $315 - 36 \times 8 = 27$.

$315 : 36 = 8$
27

Wenn nun der Dividend 315 und der Divisor 36 ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist hierdurch nicht nur 315 und 36×8, sondern auch $315 - 36 \times 8$, also der Rest 27 theilbar. Daher:

Wenn der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist durch dieses auch der Divisionsrest theilbar, und es ist dasselbe daher auch das gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste.

Den Dividend erhält man, wenn man zum Producte aus dem Divisor und dem Quotienten den Rest addiert, daher ist $36 \times 8 + 27 = 315$.

Haben der Divisor 36 und der Rest 27 ein gemeinschaftliches Maß, so muss hierdurch nicht nur 36×8 und 27, sondern auch die Summe $36 \times 8 + 27$ d. i. der Dividend 315 theilbar sein.

Wenn der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß haben, so muss auch der Dividend durch dasselbe theilbar sein.

Es soll nun das größte gemeinschaftliche Maß zwischen den Zahlen 1872 und 312 gesucht werden. Da dasselbe nicht größer sein kann, als die kleinere der Zahlen, so suchen wir, ob nicht die größere Zahl (1872) durch die kleinere (312) theilbar ist; ist dieses der Fall, so ist die kleinere Zahl selbst das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen; hier ist also 312 das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen.

1872 : 312 = 6

Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 630 und 72 gesucht werden.

Dividieren wir 630 durch 72, so bleibt der Rest 54. Da der Dividend 630 und der Divisor dasselbe größte gemeinschaftliche Maß haben, wie der Divisor 72 und der Rest 54, so sucht man, ob nicht 54 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen 72 und 54 sei, indem man 72 durch 54 dividiert; es bleibt hier der Rest 18. Das gr ößte gemein schaftliche Maß zwischen dem Divisor 54 und dem Reste 18, muss auch das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend 72 und dem Divisor 54, und zugleich auch zwischen dem Reste 54 und dem Divisor 72, und daher auch zwischen 630 und 72 sein.

630 : 72 = 8
54
72 : 54 = 1
18
54 : 18 = 3
0

oder

72	630	8
18	54	1
	0	3

Wir suchen daher wieder, ob nicht der Rest 18 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen 54 und 18 sei, indem wir wieder 54 durch 18 dividieren. Da bei dieser Division kein Rest bleibt, so ist der Divisor 18 das gemeinschaftliche Maß zwischen 54 und 18, daher auch zwischen 72 und 54 und folglich auch zwischen 630 und 72. Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren, um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Man dividiere die größere Zahl durch die kleinere; bleibt kein Rest, so ist die kleinere Zahl das verlangte größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt jedoch ein Rest, so dividiere man durch denselben den eben angewendeten Divisor; und wiederhole diese Division des zuletzt gebrauchten Divisors durch den sich ergebenden Rest so oft, bis man auf den Rest 0 kommt. Der letzte Divisor ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß. Wäre der letzte Divisor 1, so haben die beiden Zahlen kein gemeinschaftliches, sie sind daher relative Primzahlen.

Das soeben dargestellte Verfahren nennt man die Staffeldivision.

V. Rechenbuch M. S. 22 und 23.

Um das größte gemeinschaftliche Maß von mehreren gegebenen Zahlen nach dieser Methode zu erhalten, suche man dieses für zwei derselben, dann von dem gefundenen Maße und der dritten Zahl, hierauf von dem neuen Maße und der vierten gegebenen Zahl u. s. w.; das zuletzt gefundene größte gemeinschaftliche Maß ist zugleich das größte gemeinschaftliche Maß aller gegebenen Zahlen. Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 640, 512 und 144 gesucht werden.

640	512	1	144	128	1
128		4	16		8

Also ist 16 das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

§. 38.

Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

Der Lehrer gebe z. B. die Zahl 15 an, und lasse von den Schüler untersuchen, durch welche Zahlen diese Zahl theilbar ist; ebenso lasse er suchen, durch welche Zahlen die Zahl 36 theilbar ist, und sage dann:

Wenn eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar ist, so nennt man sie das **gemeinschaftliche Vielfache** dieser Zahlen.

Hierauf lasse er die für die Zahl 36 gefundenen Zahlen 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 mit einander multiplicieren und sodann das aus denselben erhaltene Product 279.756 durch jede dieser Zahlen dividieren; die Schüler ersehen hieraus, dass das Product mehrerer Zahlen, durch jede derselben theilbar, also ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen ist.

Nun lasse er die Zahlen 8 und 12 mit einander multiplicieren und bemerken, dass nicht nur das hieraus erhaltene Product 96 ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen ist, sondern dass es auch die Zahlen 72, 48 und 24 sind, dass es aber keine kleinere Zahl gibt, welche durch 8 und 12 theilbar ist, als die Zahl 24; 24 ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 8 und 12.

Zur Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen hat man 2 Methoden.

1. Es sei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen den Zahlen 48, 60 und 84 zu suchen. Zerlegen wir jede dieser Zahl in ihre Primfactoren, so erhalten wir:

$$48 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3$$
$$60 = 2 . 2 . 3 . 5$$
$$84 = 2 . 2 . 3 . 7$$

Unser zu suchendes Vielfaches muss durch 48 theilbar sein, d. h. es muss 48 als Factor enthalten, daher muss die zu suchende Zahl den Factor 2 4 mal und den Factor 3 1 mal enthalten. Schreiben wir uns daher den Factor 2 3 mal und 3 1 mal als Bestandtheile unseres zu suchenden Vielfachen auf. Das zu suchende Vielfache muss aber auch durch 60 theilbar sein, daher muss es auch die Primfactoren von 60 enthalten.

$2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$

Es soll daher den Factor 2 2 mal, 3 1 mal und 5 1 mal enthalten. Da 2 ohnehin schon 4 mal und 3 1 mal als Factor vorkommt, so braucht nur mehr der Factor 5 hinzuzukommen. Wir kommen zur Zahl 84. Da 84 den Factor 2 nur 2 mal und 3 nur 1 mal enthält, so brauchen wir wegen der Zahl 84 zu den bereits gefundenen Factoren $2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$ nur den Factor 7 hinzuzusetzen, und das Product von $2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7$ d. i. die Zahl 1680 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 48, 60 und 84. Dieses Product ist aber das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der genannten Zahlen; denn lässt man nur einen seiner Factoren weg, so ist es nicht mehr durch jede der gegebenen Zahlen theilbar.

Man findet also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen, wenn man jede derselben in Primfactoren zerlegt, aus diesen alle verschiedenen Factoren und zwar jeden so oftmal nimmt, als er in einer der gegebenen Zahlen am öftesten vorkommt und diese herausgehobenen Factoren miteinander multipliciert.

2. Es soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 3, 4, 5, 6, 8, 10 gesucht werden.

Würden wir die gegebenen Zahlen miteinander multiplicieren, so wäre das erhaltene Product ein Vielfaches der gegebenen Zahlen,

da ja das Product durch jeden seiner Factoren theilbar ist. Wir wollen aber das kleinste gemeinschaftliche Vielfache suchen, daher stellen wir folgende Überlegung an: Eine Zahl, welche durch 6 theilbar ist, ist auch durch 3 theilbar, wenn sie durch 8 theilbar ist, so ist sie es auch durch 4, und eine durch 10 theilbare Zahl muss auch durch 5 theilbar sein. Wenn wir also die Zahlen 6, 8 und 10 mit einander multiplicieren, so erhalten wir ein Vielfaches nicht nur von den Zahlen 6, 8, 10, sondern auch der Zahlen 3, 4, 5. Wir können also diejenigen Zahlen, durch welche andere der gegebenen Zahlen theilbar sind, streichen und erhalten dann das gemeinschaftliche Vielfache $6 \times 8 \times 10 = 480$. Sehen wir weiter, ob wir nicht ein noch kleineres erhalten können. $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $10 = 2 \times 5$.

Nehmen wir nun jeden der Primfactoren so oft, als er in einer dieser Zahlen am öftesten vorkommt, so erhalten wir $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$. Dividieren wir $8 \times 6 \times 10$, durch deren gemeinschaftliches Maß 2, und multiplicieren wir die erhaltenen Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Maße, so erhalten wir ebenfalls $2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ 120 ist also ein gemeinschaftliches Vielfaches von 6, 8, 10. Da wir aber keinen der Factoren 2, 3, 4, 5 weglassen dürfen, wenn das Product ein gemeinschaftliches Vielfaches bleiben soll, so ist es das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 6, 8, 10 und daher auch von 3, 4, 5, 6, 8, 10.

Es sei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 2, 6, 7, 9 zu suchen. Da 2 in 6 ohne Rest enthalten ist, so streichen wir die 2 weg. Die Zahlen 6 und 9 haben das gemeinschaftliche Maß 3 durch dieses 6 und 9 dividiert und die Quotienten mit dem Maße 3 multipliciert, erhalten wir $3 \times 2 \times 3 = 18$, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6 und 9, da aber unser Vielfaches auch durch 7 theilbar sein muss, so müssen wir dasselbe auch noch mit 7 multiplicieren, und wir erhalten $3 \times 2 \times 3 \times 7 = 126$.

2, 6, 7, 9 Diesem Verfahren wollen wir beistehende
2 . 7 . 3 | 3 Form geben.

Ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 15, 18 und 20 zu suchen, erhalten wir zunächst: 3, 18, 4; da 3 in 18

15 , 18 , 20	
3 , 18 , 4	5
9 , 2	2

ohne Rest enthalten ist, so streichen wir 3 durch, und da 18 und 4 das gemeinschaftliche Maß 2 haben, so dividieren wir sie durch dasselbe und wir erhalten schließlich: $2 \times 2 \times 9 \times 5 = 180$.

Führt man noch mehrere Beispiele auf diese Art durch, so ersehen die Schüler:

Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden, schreibt man dieselben in eine Reihe, streicht diejenigen, welche in größeren Zahlen ohne Rest enthalten sind, durch, dividiert die übrigen, wenn zwei oder mehrere von ihnen ein gemeinschaftliches Maß haben, durch dieses, und setzt die nicht durch dieses Maß theilbaren Zahlen unverändert zu den Quotienten herab. Ist von den hieraus erhaltenen Zahlen eine in einer größeren ohne Rest enthalten, so wird jene durchgestrichen, und wenn zwei oder mehrere von ihnen ein gemeinschaftliches Maß haben, so dividiert man sie wieder durch dasselbe, und setzt dieses Verfahren solange fort, als noch zwei Zahlen erscheinen, die ein gemeinschaftliches Maß haben. Schließlich werden die zuletzt erhaltenen Zahlen und die gemeinschaftlichen Maße, durch welche man dividiert (und die man rechts neben die betreffenden Zahlenreihen gesetzt hat), mit einander multipliciert. Das hieraus erhaltene Product ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche M. S. 23 und 24.

Wiederholungsaufgaben im V. Rechenbuche M. S. 24, 25. und 26.