Zweiter Abschnitt.

Die Decimalzahlen.

§. 15.

Wesen und Numeration der Decimalzahlen.

Der Begriff der Decimalzahlen, so wie das Rechnen mit denselben läßt eine zweifache Auffassung und Behandlungsweise zu. Man betrachtet nämlich die Decimalzahlen bloß als eine Erweiterung des dekadischen Systems und rechnet mit ihnen nach denselben Regeln, wie mit ganzen Zahlen, oder man fasst sie als Brüche auf.

Für die erste Behandlungsweise sprechen mehrere triftige Gründe.

Führt man den Schülern die Decimalzahlen als Brüche vor, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass ihr Nenner 10, 100, 1000 ꝛc., kurz eine Potenz von 10 ist, und lehrt darauf sogleich die eigenthümliche Behandlungsweise dieser Brüche; so entzieht man den Schülern gleich im Anfange, was ihnen zum Voraus nicht vorenthalten bleiben sollte; die concrete und praktische Grundlage dieser besonderen Brüche. Erhält aber der Schüler auch hier eine recht lebendige Anschauung von der dekadischen Abstufung der Bruchtheile, und fasst er den Zusammenhang mit den dekadisch eingetheilten Maßen, Gewichten ꝛc. schon von Anfang an auf; so wird bei ihm der ganze Unterricht weit wirksamer sein. Dieser Vorgang ist auch natürlicher, indem der Zusam menhang zwischen den ganzen Zahlen und den Decimalzahlen sogleich ersichtlich ist. Auch der pädagogische Grundsatz: Knüpfe das Neue an etwas schon Bekanntes, spricht hierfür, da ja das Rechnen mit Decimalzahlen aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen abgeleitet wird, so wiederholen sie das letztere während sie zugleich etwas Neues lernen. Bei der zweiten Auffassung müsste das Rechnen mit gemeinen Brüchen vorausgehen, welches nach unserem Lehrplane erst später vorkommt.

Um die Schüler mit den Decimalzahlen bekannt zu machen, schreibe der Lehrer eine Zahl, welche aus lauter gleichen Ziffern besteht, an die Tafel, z. B. 3333 und frage: Was gilt die Ziffer 3 an der 1. Stelle rechts? Was gilt sie an der 2. Stelle? Wievielmal so viel sind 3 Z. als 3 E.? Was gilt die Ziffer 3 an der 3. Stelle? Wievielmal so viel sind aber 3 H. als 3. Z. u. s. f. Man wiederholt also hier, was die Schüler schon bei der Numeration gelernt haben: Eine Ziffer gilt in der nächstfolgenden Stelle gegen links 10 mal so viel als an der nächst vorangehenden rechts.

Was gilt die Ziffer 3 an der 4. Stelle? Was an der 3. Stelle? Der wievielte Theil von 3 T. sind 3 H.? Was gilt sie an der 2. Stelle? Der wievielte Theil sind 3 Z. von 3 H.? Was gilt die Ziffer 3 an der 1. Stelle? Der wievielte Theil sind 3 E. von 3 Z.

Eine Ziffer gilt an jeder folgenden Stelle gegen die Rechte den 10. Theil von dem, was sie an der nächst vorhergehenden links gilt.

Wenn wir aber zur Zahl 3333 nach den Einern noch eine Ziffer rechts hinzusetzen, den wievielten Theil von den Einern müsste diese Ziffer gelten? Wieviel ist der 10. Theil von 1 E.? Wieviel von 2 E.? Wieviel ist der 10. Theil von 3 E.?

Wir haben bis jetzt die Ziffern an der 1. Stelle rechts immer als Einer angesehen.

Wenn wir aber nach den Einern rechts noch weitere Ziffern setzen, so müssen wir durch ein bestimmtes Zeichen anzeigen, wo sich die Einerstelle befindet; man ist übereingekommen, dieses durch einen Punkt zu bezeichnen, den man oben rechts nach den Einern setzt, und wir lesen daher die Zahl 3333·3 3333 Ganze 3 Zehntel.

Den wievielten Theil von 3 Zehnteln wird aber die Ziffer 3 bedeuten, die wir nach den Zehnteln hinzufügen?

Wieviel ist der 10. Theil von 1 Zehntel? Von 2 Zehnteln? Wieviel ist daher der 10. Theil von 3 Zehnteln? Wie werden wir also die Zahl 3333·33 lesen?

Auf diese Art führe man die Schüler dahin, dass die Ziffer 3 an der 3. Stelle nach dem Punkte rechts Tausendtel, an der 4. Stelle Zehntausendtel, an der 5. Stelle Hunderttausendtel u. s. w. gilt.

In wieviele gleiche Theile muss man das Ganze theilen, um Zehntel zu erhalten? In wieviele gleiche Theile muss man die Zehntel theilen, um Hundertel zu bekommen? u. s. f.

Wenn man das Ganze in 10 gleiche Theile und die auf einander folgenden niedrigeren Theile wieder in 10 gleiche Theile theilt, so nennt man die hiedurch erhaltenen Theile Zehntheilchen oder Decimalen. Eine Zahl, in welcher Decimalen vorkommen, heißt Decimalzahl.

Der Punkt, welcher die Ganzen von Decimalen trennt, heißt Decimalpunkt.*) Die Stellen rechts von demselben heißen Decimalstellen. Es bedeutet jede Ziffer in der ersten Stelle nach dem Decimalpunkte Zehntel, in der zweiten Hundertel, in der dritten Tausendtel u. s. w.

Wir wollen nun die Decimalstellen mit den Stellen der ganzen Zahlen übersichtlich darstellen:

Ganze:							Decimalen:					
3	3	3	3	3	3	.	3	3	3	3	3	3
Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderter	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Millionteil

Aus diesem Schema zeigt sich, dass die Decimalzahlen nur eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems sind, ferner, dass die Zehner und Zehntel, Hunderter und Hundertel Tausender und Tausendtel u. s. w. immer gleichweit von den Einern entfernt sind.

1 Ganzes = 10 Zehntel,
1 Zehntel = 10 Hundertel,
1 Hundertel = 10 Tausendtel,
1 Tausendtel = 10 Zehntausendtel,
1 Zehntausendtel = 10 Hunderttausendtel u. s. w., daher ist:
1 Ganzes = 10 Zehntel = 100 Hundertel = 1000 Tausendteln.

*) In Deutschland macht man ein Komma; daher sagt man statt Decimalpunkt auch Decimalzeichen oder noch besser Einerzeichen.

1 Zehntel = 10 Hundertel = 100 Tausendtel = 1000 Zehntausendtel.

1 Hundertel = 10 Tausendtel = 100 Zehntausendtel = 1000 Hunderttausendtel u. s. w.

Nun lehre man die Schüler das Anschreiben und Lesen der Decimalzahlen. Man zeigt ihnen, dass man zuerst die Ganzen anschreibt, nach denselben den Decimalpunkt setzt und diesem die Zehntel, Hundertel u. s. w. folgen lässt. Enthält die Decimalzahl keine Ganzen, so setzt man an deren Stelle eine Null. Z. B. 5 Zehntel, 2 Hundertel schreibt man 0·52. Auch wenn Zehntel, Hundertel u. s. w. fehlen, so werden an diese Stellen Nullen gesetzt. Z. B. 6 Tausendtel, 8 Zehntausendtel wird geschrieben 0·0068. (Übungen im Anschreiben der Decimalzahlen IV. Rechb. M. S. 30 bis 32).

Beim Lesen der Decimalzahlen spricht man zuerst die Ganzen aus und dann jede Decimale einzeln mit oder ohne Angabe des Stellenwertes, oder auch alle Decimalen als Zahl mit Angabe des Stellenwertes der letzten Decimale. Z. B. 37·308 wird gelesen:

37 Ganze, 3 Zehntel, keine Hundertel, 8 Tausendtel, oder 37 Ganze mit den Decimalen 3, 0, 8, oder 37 Ganze, 308 Tausendtel.

Was die letzte Leseart betrifft, so muss diese den Schülern erst recht klar gemacht werden. Wir lassen Decimalzahlen z. B. 0·25, 0·375 u. s w. zuerst nach der ersten Art lesen und fragen dann: Wieviel Hundertel sind 2 Zehntel? Wieviel Hundertel sind noch angegeben? Wieviel Hundertel macht dieses zusammen? Wie können wir also statt 2 Zehntel, 5 Hundertel sagen? Wieviel Hundertel sind 3 Zehntel, 7 Hundertel zusammen? Wieviel Tausendtel sind 37 Hundertel? Wieviel Tausendtel sind schon angegeben? Wieviel Tausendtel sind dieses zusammen? Wie können wir also statt 3 Zehntel, 7 Hundertel, 5 Tausendtel sagen? u. s. w. *)

Übungen im IV. Rechenbuche M. S. 32 und 33.

---

*) Über diese Art Decimalen zu lesen sagt der berühmte österreichische Mathematiker Dr. L. C. Schulz v. Straßnitzki: Unsere Schulen legen ganz mit Unrecht darauf einen Wert, dass der Decimalbruch auf diese Art ausgesprochen werde, während gerade die erste Art die einfachste ist, und den Vortheil hat, dass man Ziffer für Ziffer, wie sie ausgesprochen wurde, anschreiben

§. 16.

Einfluss des Decimalpunktes auf den Wert der Decimalen.

Obgleich diese Betrachtung erst bei der Multiplication und Division der Decimalen vorgenommen werden sollte, so findet sie doch beim Elementar-Unterrichte auch hier ihre Rechtfertigung dadurch, da sie das Wesen der Decimalzahlen noch besser erfassen lehrt.

a) Der Lehrer lasse einer gegebenen Decimalzahl rechts eine und hierauf mehrere Nullen anhängen und hierauf den Stellenwert der Ziffern der dadurch entstandenen Decimalzahlen angeben. Z. B. 7·83, 7·830, 7·8300, 7·83000. Die Schüler ersehen, dass dadurch die Ziffern in diesen Zahlen ihre Stelle nicht verändern, weshalb auch die ganze Zahl ihren Wert beibehält.

Der Wert einer Decimalzahl wird nicht geändert, wenn man derselben rechts eine, zwei oder mehrere Nullen anhängt.

b) Man schreibe die Zahlen 3·785 und 37·85 an die Tafel, und lasse sie mit einander vergleichen. Die Schüler sehen, dass man die zweite Zahl aus der ersten dadurch erhält, dass man das Decimalzeichen um eine Stelle weiter nach rechts setzt und dass dadurch jede Ziffer um eine Stelle nach links rückt; hiebei wurden aus den 3 Einern 3 Zehner, aus den 7 Zehnteln 7 Einer, aus den 8 Hunderteln 8 Zehntel und aus den 5 Tausendteln 5 Hundertel. Jede Ziffer gilt also 10 mal so viel als vorher, es ist also die ganze Zahl 10 mal so groß geworden.

Setzt man das Decimalzeichen um 2 Stellen weiter nach rechts, so rückt jede Ziffer der Zahl 3·785 um 2 Stellen weiter nach links, und jede Ziffer der neuen Decimalzahl 378·5, und daher die Zahl selbst, gilt 100 mal soviel als vorher. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man:

Eine Decimalzahl wird mit 10, 100, 1000 ... multipliciert, wenn man das Decimalzeichen um 1, 2, 3 ... Stellen weiter nach rechts rückt.

---

kann, während man nach der zweiten Art erst dann zu schreiben anfangen kann, wenn der Wert der letzten Ziffer ausgesprochen wurde, man muss also die ganze Zahl im Gedächtnisse behalten, was, wenn die Zahl etwas größer ist, zu vielen Irrungen Veranlassung geben kann.

Hat der Multiplicand nicht so viele Decimalstellen als zur Weiterrückung des Decimalzeichens erfordert werden, so füllt man die links vom Decimalzeichen leergewordenen Stellen durch Nullen aus. Z. B. 3·2 × 100. Hier müssen die 3 Einer an die Stelle der Hunderter und die 2 Zehntel an die Stelle der Zehner kommen, dadurch wird die Einerstelle leer, welche mit 0 ausgefüllt wird. 3·2 × 100 = 320.

24·7 × 1000 = 24700. Hier kommen die 2 Zehner an die Stelle der Zehntausender, die 4 Einer an die Stelle der Tausender und die 7 Zehntel an die Stelle der Hunderter, daher werden an die Einer- und Zehnerstelle Nullen gesetzt.

Oder: man hängt der Decimalzahl so viele Nullen an, als zur Verrückung des Decimalzeichens nöthig sind, da man ja einer Decimalzahl durch Anhängung von Nullen jede beliebige Anzahl von Decimalstellen geben kann, ohne dass der Wert derselben geändert wird.

$$3{\cdot}2 \times 100 = 3{\cdot}20 \times 100 = 320$$
$$24{\cdot}7 \times 1000 = 24{\cdot}700 \times 1000 = 24700.$$

c) Der Lehrer schreibe die Zahlen 67·25 und 6·725 an die Tafel und lasse sie wieder mit einander vergleichen. Die Schüler sehen, dass man die Zahl 6·725 aus der Zahl 67·25 erhält, indem man das Decimalzeichen um eine Stelle weiter nach links rückt. Hiedurch wird aber jede Ziffer um eine Stelle weiter nach rechts gerückt, aus 6 Zehnern werden 6 Einer, aus 7 Einern 7 Zehntel, aus 2 Zehnteln 2 Hundertel, aus 5 Hunderteln 5 Tausendtel; jede Ziffer der zweiten Zahl gilt also nur den 10. Theil, von dem, was sie in der ersten Zahl gilt, die Zahl 6·725 ist daher nur der 10. Theil von der Zahl 67·25. Auf dieselbe Weise ersieht man, dass die Zahl 0·6725 den 100. Theil und die Zahl 0·06725 nur den 1000. Theil der Zahl 67·25 beträgt. Wenn man daher das Decimalzeichen um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter nach links schiebt, so rückt jede Ziffer der Zahl um 1, 2, 3 . . . Stellen nach rechts, und der Wert der Zahl beträgt nur den 10., 100., 1000. . . . Theil von dem der ursprünglich gegebenen Zahl. Eine Decimalzahl wird durch 10, 100, 1000 . . . . dividiert, wenn man das Decimalzeichen um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter nach links rückt.

§. 17.

Addition der Decimalzahlen.

Die Schüler wissen, dass man bei der Addition der ganzen Zahlen nur Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s. w. addieren kann, und dass man zur Erleichterung des Addierens die Posten so untereinander schreibt, dass die Ziffern an den gleichnamigen Stellen untereinander zu stehen kommen. Es ist ihnen daher auch einleuchtend, dass auch bei der Addition der Decimalzahlen Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. gesetzt werden.

Man lasse anfangs Posten von gleich viel Decimalstellen addieren. Z. B.:

34·278
694·634
87·432
6·375
822·719

Man lasse die Tausendtel addieren und frage: Wieviel beträgt die Summe der Tausendtel? Wieviel Hundertel sind in 19 Tausendteln enthalten? Wieviel Tausendtel enthält diese Summe außer dem einen Hundertel noch? Die Schüler begreifen leicht, dass man die 9 Tausendtel unter die Tausendtel schreiben und das eine Hundertel zu den Hunderteln weiter zählen muss. Ebenso verfahre man bei der Addition der Hundertel und Zehntel. Bei letztern erhalten sie 17 Zehntel, welche aus 1 Ganzen und 7 Zehnteln bestehen; auch hier begreifen sie leicht, dass die 7 Zehntel unter die Zehntel geschrieben und 1 Ganzes zu den Ganzen gezählt wird. Kürzer: 5 und 2 ist 7 und 4 ist 11 und 8 ist 19, 9 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 7 ist 8 und 3 ist 11 und 3 ist 14 und 7 ist 21, 1 angeschrieben, bleibt 2 u. s. w.

Die Schüler sehen nun, dass die Decimalzahlen gerade so addiert werden wie die ganzen Zahlen, dass man jedoch das Decimalzeichen setzen muss, wenn man von den Zehnteln zu den Ganzen übergeht, und dass dasselbe in der Summe genau unter das Decimalzeichen der Posten zu stehen kommt. Der Lehrer dulde aber nie, dass die Schüler erst nach vollendeter Addition das Decimalzeichen setzen.

Hierauf werden Posten mit ungleich vielen Decimalstellen gegeben. Z. B. 24·3, 6·475, 136·25. Aus dem Vorhergehenden wissen die Schüler, dass 24·3 = 24·300, 136·25 = 136·250 ist. Nun haben

sie Posten mit gleich vielen Decimalstellen, und können daher die Addition wie früher verrichten. Sie überzeugen sich jedoch sehr bald, dass die angehängten Nullen auf die Summe keinen Einfluss haben, und dass man sie deshalb wegläßt und die Posten sogleich nach der 2. Art schreibt.

1. Art.		2. Art.
24·300		24·3
6·475	oder	6·475
136·250		136·25
167·025		167·025

Nun lasse man noch solche Posten addieren, bei welchen keine Ganzen vorkommen. Z. B.: 0·34, 0·375, 0·5, 0·0062.

0·34
0·375
0·5
0·0062
1·2212

2 Zehntausendtel schreibt man, da die übrigen Posten keine Tausendtel enthalten, sogleich in die Summe.

Das weitere Verfahren ist wie früher.

Übungsaufgaben IV. R. M. S. 34.

Anwendungen IV. R. M. S. 35. A. K. S. 15 bis 19.

§. 18.

Subtraction der Decimalen.

Der Lehrer gebe zuerst Beispiele, in welchen Minuend und Subtrahend gleich viele Decimalstellen haben, z. B.: Von 87·26 sollen 54·84 subtrahiert werden. Die Schüler werden kaum im Zweifel sein, dass sie den Subtrahend so unter den Minuend zu setzen haben, dass die Ganzen unter die Ganzen, die Zehntel unter die Zehntel und die Hundertel unter die Hundertel zu stehen kommen. Der Lehrer frage:

87·26
54·84
32·42

Wieviel Hundertel muss man auf 4 Hundertel zählen, um auf 6 Hundertel zu kommen? (Die Hundertel werden angeschrieben.) Was muss man thun, da man 8 Zehntel von 2 Zehnteln nicht wegnehmen kann? Wieviel Zehntel hat man, wenn man zu 2 Zehnteln einen Einer hinzugibt? Wieviel Zehntel muss man zu 8 Zehnteln geben, um auf 12 Zehntel

zu kommen? Da man jetzt zum Subtrahieren der Ganzen kommt, und der Rest auch Ganze enthält, so muss das Decimalzeichen gesetzt werden. Wieviel Einer haben wir zum Minuend gegeben, um die 8 Zehntel subtrahieren zu können? Was müssen wir daher auch zum Subtrahend hinzugeben? Wieviel sind 4 E. und 1 E.? Wieviel müssen wir zu den 5 E. zählen, um auf 7 E. zu kommen? Wieviel müssen wir zu den 5 Z. zählen, um auf 8 Z. zu kommen? Der Rest ist also 32·42.

Die Schüler ersehen aus diesem Vorgange, dass man bei der Subtraction der Decimalzahlen eben so verfährt wie mit ganzen Zahlen; dass man jedoch das Decimalzeichen setzen muss, wenn man von den Zehnteln zu den Ganzen übergeht. Man kann daher kurz sagen: 4 und **2** ist 6; 8 und **4** ist 12, bleibt 1 (hier wird das Decimalzeichen gesetzt); 1 und 4 ist 5 und **2** ist 7; 5 und **3** ist 8.

Wenn Minuend und Subtrahend nicht gleich viele Decimalstellen haben, so setzt man so viele Nullen zu, dass die Anzahl der Decimalstellen die gleiche wird, oder man schreibt diese Nullen nicht an, sondern stellt sich dieselben nur vor, und verfährt wie früher. Z. B.: 26·275 — 14·3, 12·7 — 4·378, 15 — 3·1785.

26·275		26·275	12·700		12·7
14·300	oder	14·3	4·378	oder	4·378
11·975		11·975	8·322		8·322

15·0000		15
3·1785	oder	3·1785
11·8215		11·8215.

Übungsaufgaben IV. Rechenbuch M. S. 35 und 36. A. K. S. 20 bis 21.

Jemehr Decimalstellen vorkommen, desto geringer ist der Wert der niedrigsten Stellen. Sehr niedrige Decimalstellen sind aber im praktischen Leben wertlos. So ist z. B. 0·001 Gulden, der 10. Theil eines Kreuzers, eine fast wertlose Größe; daher können solche überflüssige Stellen weggelassen werden. Hiedurch entsteht zwar ein Fehler, den man dadurch möglichst zu vermindern sucht, indem man bei der letzten der beibehaltenen Decimalen eine Correctur vornimmt. Setzt man z. B. für die Decimalzahl 3·7843 die Zahl 3·784, so

beträgt der Fehler 3·7843 — 3·784 = 0·0003. Wenn man für die Zahl 5·2838 die Zahl 5·283 setzt, so ist letztere Zahl um 0·0008 zu wenig; setzt aber statt der Zahl 5·2836 die Zahl 5·284, so ist diese um 5·284 — 52838 = 0·0002 zu groß. Hieraus sieht man, dass im zweiten Falle, wo die letzte beibehaltene, Decimale um 1 vermehrt wurde, der Fehler geringer ist, als im ersten Falle. Man überzeugt sich auf dem angezeigten Wege leicht, dass der Fehler für den zweiten Fall größer wird, wenn die letzte beibehaltene Decimale kleiner ist als 5.

Durch diese Betrachtung sehen die Schüler ein, dass bei Abkürzung einer Decimalzahl die letzte beibehaltene Decimale um 1 vermehrt wird, wenn die höchste wegzulassende Decimale 5 oder größer ist als 5; dass hingegen die überflüssigen Decimalen ohne weiteres weggelassen werden, wenn die höchste wegzulassende Decimale kleiner ist als 5.

Angewandte Aufgaben IV. Rechenbuch M. S. 36, b.

§. 19.

Multiplication der Decimalzahlen.

Bei der Multiplication der Decimalzahlen wird den Schülern zuerst gezeigt, wie eine Decimalzahl mit einer ganzen Zahl multipliciert wird.

Die Multiplication der Decimalzahlen mit 10, 100, 1000 u. s. w. wurde schon oben gezeigt, und wir haben hier nur mehrere Übungen zur Wiederholung vorzunehmen. Wir gehen hierauf zur Multiplication mit einer andern ganzen Zahl über. Z. B.

4·75 × 7
33·25

Wir sagen: 7 mal 5 Hundertel sind 35 Hundertel = 3 Zehntel und 5 Hundertel; 5 Hundertel werden angeschrieben; 3 Zehntel gemerkt und dann zum Producte der Zehntel addiert. 7 mal 7 Zehntel sind 49 Zehntel und die früher gebliebenen 3 Zehntel dazu sind 52 Zehntel = 5 Einer und 2 Zehntel; 2 Zehntel werden angeschrieben und 5 Einer weitergezählt. 7 mal 4 Einer sind 28 Einer und 5 Einer sind 33 Einer.

Zweite Art der Erklärung:

Multipliciert man das 100fache der Zahl 4·75 d. i. 475 mit 7, so erhält man 3325, dieses Product ist aber nicht das gesuchte

Product, sondern das 100fache desselben. Das wahre Product findet man, wenn von 3325 den 100. Theil nimmt, der 100. Theil von 3325 sind 3325 Hundertel oder 33·25.

Aus mehreren auf diese Art durchgeführten Beispielen versehen die Schüler:

Eine Decimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man dieselbe so mit der ganzen Zahl multipliciert, als ob sie auch eine ganze Zahl wäre, aber im Producte so viele Decimalen abschneidet, als ihrer im Multiplicand vorkommen.

Da man nach §. 13 S. 55 Multiplicand und Multiplicator mit einander verwechseln kann, so wird die Multiplication einer ganzen Zahl mit einer Decimalzahl auf dieselbe Art durchgeführt. Z. B.

$$\begin{array}{r} 432 \times 0{\cdot}2 \\ \hline 86{\cdot}4 \end{array}$$

Nun haben wir zu erfahren, wie eine Decimalzahl mit einer Decimalzahl multipliciert wird. Z. B. 36·346 × 3·47.

Wir wollen im Multiplicator das Decimalzeichen weglassen. Welche Zahl erhalten wir dann? Wie wird die Zahl 36·346 mit 347 multipliciert? Man läßt diese Multiplication wirklich verrichten, und erhält die Zahl 12612·062.

Der wievielte Theil ist aber die Decimalzahl 3·47 von der Zahl 347? Wenn man nun die Zahl 36·346 mit dem 100. Theil von 347 multipliciert, so wird man auch nur den 100. Theil von 12612·062 erhalten. Wie erhält man den 100. Theil von 12612·062? Also ist 36·346 × 3·47 = 126·12062.

Wieviele Decimalen haben beide Factoren zusammen? Wieviele das Product? Die Schüler abstrahieren hieraus die Regel: Decimalzahlen werden multipliciert, indem man sie so multipliciert, als ob sie ganze Zahlen wären, und dann vom Producte so viele Decimalen abschneidet, als beide Factoren zusammen haben.

Wenn wir die Zahl 0·062 mit 0·04 multiplicieren, so müssen im Producte 5 Decimalen abgeschnitten werden; da aber nur 3

0·062 × 0·04 Stellen vorhanden sind, so werden links
0·00248 noch 2 Nullen vorgesetzt.

Sind im Producte nicht so viele Stellen vorhanden als abgeschnitten werden sollen, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 37 und 38 a.

Anwendungen im IV. Rechenbuche M. S. 38 b. A. K. S. 21 bis 24.

§. 20.

Division der Decimalzahlen.

Wie bei der Multiplication wird auch hier wieder zuerst gezeigt, wie eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl dividiert wird.

Die Division der Decimalzahlen durch 10, 100, 1000 u. s. w. wurde schon in §. 16 gezeigt und es sind hier nur mehrere Übungen als Wiederholung vorzunehmen.

Hierauf wird zu Division der Decimalzahlen durch andere Zahlen geschritten. Z. B.

973·56 : 42 = 23·18.
133
75
336

97 Z. durch 42 E. dividiert, erhält man 2 Z. und es bleiben noch 13 Z. 13 Z. = 130 E. und 3 E. dazu sind 133 E.; 42 E. sind in 133 E. 3 mal enthalten und es bleiben noch 7 E., Da man 7 E. nicht als solche nicht durch 42 dividieren kann, so verwandelt man dieselben in Zehntel; 7 E. = 70 Zehntel geben mit den vorhandenen 5 Zehnteln 75 Zehntel; diese durch 42 dividiert, erhält man 1 Zehntel, daher muss im Quotienten, bevor man 1 Zehntel anschreibt, das Decimalzeichen gesetzt werden. 42 mal 1 Zehntel sind 42 Zehntel von 75 Zehntel bleiben 33 Zehntel = 330 Hundertel und die 6 Hundertel dazu sind 336 Hundertel. Diese durch 42 dividiert, erhält man gerade 8 Hundertel.

Die Schüler ersehen nun wieder:

Decimalzahlen werden durch ganze Zahlen ebenso dividiert wie die ganzen Zahlen, nur wird im Quo-

tienten das Decimalzeichen gesetzt, bevor man die erste Decimale des Dividendes in Rechnung zieht.

Nach mehreren ähnlichen Beispielen geht man zu solchen Beispielen über, in welchen nach Herabsetzung der letzten Decimale ein Rest bleibt, z. B.

105·7 : 8 = 13·2125
25
17
10
20
40

Hier erhält man 13 Ganze zum Quotienten und 1 zum Reste. Da man dem Dividende eine beliebige Anzahl Nullen anhängen kann, ohne dass der Wert desselben verändert wird, so kann man auch zum Reste 1 eine von diesen, dem Dividende angehängt gedachten Nullen herabsetzen und weiter dividieren. Wie sagen dann 8 in 10 ist 1 mal enthalten, 1 mal 8 und 2 ist 10. Ebenso verfahren wir auch mit dem Reste 2 und dem folgenden Reste 4.

Bleibt bei fortgesetzter Division immer wieder ein Rest, so entwickelt man im Quotienten nur so viele Decimalen als man derselben benöthiget.

Bei einzifferigem Divisor schreibt man gewöhnlich auch die Reste nicht an und setzt die Ziffern des Quotienten so unter den Dividend, dass die gleichnamigen Stellen und das Decimalzeichen des Quotienten genau unter dem des Dividendes zu stehen kommen. Z. B.:

105·7000 : 8.
13·2125

Um das Verfahren zu zeigen, wie eine Decimalzahl durch eine Decimalzahl zu dividieren ist, mache man die Schüler zuvor mit dem Satze bekannt: Der Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit einer und derselben Zahl multipliciert.

Zu diesem Behufe lasse man in einer beliebigen Division, z. B. 68 : 4 den Dividend und den Divisor mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicieren und die Division sodann jedesmal ausführen.

68 : 4 = 17, 680 : 40 = 17, 6800 : 400 = 17.

Die Aufgabe : 11·025 : 0·75 wird nun so gelöst:

11·025 : 0·75 = 1102·5 : 75 = 14·7
352
525

Die Schüler wissen, wie eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl dividiert wird. In der vorliegenden Aufgabe ist aber auch der Divisor eine Decimalzahl.

Der Lehrer fragt: Womit müsste man den Divisor multiplicieren, um eine ganze Zahl zu erhalten? Was muss aber dann auch mit dem Dividend geschehen, da der Quotient ungeändert bleiben muss? Man hat dann anstatt 11·025 durch 0·75, 1102·5 durch 75 zu dividieren.

Soll eine Decimalzahl durch eine Decimalzahl dividiert werden, so multipliciert man Dividend und Division mit 10, 100, 1000 .. je nachdem der Divisor 1, 2, 3 . . . Decimalstellen hat; dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl, durch welche man sodann dividiert.

Hängt man dem Divisor 0·75 eine Nulle an, so hat er ebensoviele Decimalstellen, wie der Divisor.

11·025 : 0·750 = 11·025 × 1000 : 0·75 × 1000 = 11025 : 750 = 14·7.

Läßt man sodann im Dividend und Divisor das Decimalzeichen weg, so hat man beide mit 1000 multipliciert und aus beiden ganze Zahlen erhalten.

Man kann also auch den beiden Decimalzahlen durch Anhängung von Nullen gleich viele Decimalstellen geben, die Decimalzeichen weglassen, wodurch man die Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl erhält. Indem man im Dividend und im Divisor, wenn beide gleich viele Decimalstellen haben, die Decimalzeichen wegläßt, verrichtet man dasselbe, als ob man beide mit 10, 100, 1000 .. multipliciert hätte.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche M. S. 39 und 40 a.)

Anwendungen im IV. Rechenbuche M. S. 40 bis 42, b.) A. K. S. 24 bis 26.

Wir wollen hier noch mit einem anderen Vorgange bei der Division der Decimalzahl bekannt machen.

Wir wissen: eine Zahl wird durch 10, 100, 1000, u. s. w. dividiert, indem man jede Ziffer um 1, 2, 3 .... Stellen weiter zur Linken

setzt. Hat man also durch eine Zahl zu dividieren, deren erste Ziffer links an der Stelle der Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. steht, so dividiert man wie gewöhnlich, setzt aber im Quotienten jede Ziffer um 1, 2, 3 . . Stellen weiter rechts. Z. B. Es sei 11764·9 durch 700 zu dividieren, so sagt man: 7 in 11 ist 1 mal enthalten, die 11 sind hier Tausender, diese um 2 Stellen weiter rechts gesetzt, gehen sie in Zehner über (100 ist in 1000 10 mal enthalten), daher schreibt man 1 im Quotienten an die Stelle der Zehner. Hat man 11764·9 : 700 = 16·809 so den Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten bestimmt, so dividiert man weiter, ohne sich ferner um den Stellenwert der einzelnen Ziffern zu kümmern, der sich von selbst ergibt.

Ist 12,207.031·25 durch 5000 zu dividieren, so sagt man: 5 in 12 ist 2 mal enthalten, da aber 12 an der Stelle der Millionen steht, so muss 2 an die Stelle der Tausender kommen (1000 ist in 1,000.000 1000 mal enthalten), man dividiert nun weiter und erhält 12,207.031·25 : 5000 = 2441·40625.

Ist 6·255 durch 50 zu dividieren, so sagt man: 5 in 6 ist 1 mal enthalten, schreibt aber die 1 an die Stelle der Zehntel (10 ist in 1 1 zehntelmal enthalten) und man erhält: 6·255 : 50 = 0·1251; ebenso: 6·255 : 500 = 0·01251 ; 6·255 : 5000 = 0·001251.

Da das Ganze 10 Zehntel enthält, so ist ein Zehntel in einem Ganzen 10 mal enthalten, daher 1 : 0·1 = 10; 2 Ganze enthalten 20 Zehntel, daher ist 0·1 in 2 Ganzen 20 mal enthalten; ebenso findet man, dass 0·1 in 3 Ganzen 30 mal enthalten ist; es ist also: 1 : 0·1 = 10; 2 : 0·1 = 20; 3 : 0·1 = 30; 4 : 0·1 = 40 u. s. w. Es hat also jede Zahl 10 mal so viel Zehntel als sie Einer hat; daher ist 19 : 0·1 = 190 ; 28 : 0·1 = 280; 678 : 0·1 = 6780; 17·8 : 0·1 = 178; denn 17 Ganze haben 170 Zehntel und die schon vorhandenen 8 Zehntel dazu sind 178 Zehntel. Durch diese mit den Schülern vorgenommene Entwickelung ersehen dieselben, dass eine Zahl durch 0·1 dividiert, genau dasselbe Resultat gibt, als wenn man sie mit 10 multipliciert hätte, d. h. jede Ziffer der Zahl wird um 1 Stelle weiter gegen links gerückt.

Da ein Ganzes 100 Hundertel enthält, so ist ein Hundertel in einem Ganzen 100 mal enthalten; daher 1 : 0·01 = 100; 2 Ganze

haben 200 Hundertel, daher ist 2 : 0·01 = 200; ebenso 3 : 0·01 = 300; 4·75 : 0·01 = 475; denn die 4 Ganzen haben 400 Hundertel, die 7 Zehntel haben 70 Hundertel; und die 5 Hundertel dazu sind 475 Hundertel; 1 Hundertel ist in 475 Hundertel 475 mal enthalten.

Eine Zahl durch 0·01 dividieren heißt so viel als sie mit 100 multiplicieren, d. h. man muss jede Ziffer der Zahl um 2 Stellen weiter nach links rücken. Ebenso ergibt sich, dass eine Zahl durch 0·001, 0·0001, 0·00001 u. s. w. dividieren gerade so viel ist, als sie mit 1000, 10.000, 100.000 u. s. w. multiplicieren, dass man also die Division verrichtet, wenn man jede Ziffer der Zahl um 3, 4, 5, u. s. w. Stellen weiter nach links rückt.

Hat man nun z. B. die Zahl 871·2 durch 0·3 zu dividieren, so muss man sie durch 3 und durch 0·1 dividieren. Die erste Division verrichtet man auf die gewöhnliche Art, die zweite, dass man jede Ziffer um eine Stelle weiter links schiebt; man sagt daher: 3 in 8 ist 2 mal enthalten, da 8 aber Hunderter sind, so muss 2 an die Stelle der Tausender kommen, und daher ist 871·2 : 0·3 = 2904.

Es sei ferner 590·49 : 0·003. Man sagt: 3 in 5 ist 1 mal enthalten; da die 5 aber Hunderter sind, so muss 1 an die Stelle der Hunderttausender, d. i. an die 6 Stelle kommen. Man schreibt 1 an, punktiert sich zur Erleichterung die folgenden 5 Stellen und dividiert hierauf durch 3 ruhig weiter.

590·49 : 0·003 = 1 . . . . .

Man erhält dann 590·49 : 0·003 = 196830.

Weil an die Stelle der Einer keine andere Ziffer mehr kommt, so wird sie durch 0 ausgefüllt. Nach diesen Vorbereitungen wird die Division durch mehrzifferige Zahlen keine bedeutenden Schwierigkeiten machen.

Es sei 17·28 : 14·4. Man sagt: 14 in 17 ist 1 mal enthalten. da aber sowohl 14 als 17 Einer sind, so kommt die Ziffer 1 an die Einerstelle, da weder ein Vor- noch Rückwärtsrücken stattfindet. Mit 1 wird der ganze Divisor multipliciert. Da 1 ein Einer ist, so findet bei der Multiplication weder ein Vor- noch

17·28 : 14·4 = 1·2
14·4
2·88

Rückwärtsrücken statt, und wir schreiben das Theilproduct 14·4 so unter den Dividend, dass die Ziffern der gleichwertigen Stellen unter einander zu stehen kommen. Nach vollbrachter Subtraction sagt man: 14 ist in 28 2mal enthalten, welche 2 man an die Stelle der Zehntel zu schreiben hat, da ja 28 Zehntel durch 14 Einer dividiert 2 Zehntel als Quotienten geben, indem Einer sowohl als Divisoren als auch als Multiplicatoren den Stellenwert nicht verändern. Man hat somit:

17·28 : 14·4 = 1·2
14·4
2·88
2·88

denn, indem man mit 0·2 den Divisor 14·4 multipliciert, muss jede Ziffer um eine Stelle weiter rechts gerückt werden.

Es sei 0·04782969 durch 0·0059049 zu dividieren. Man sagt: 5 ist in 47 (wegen der nachfolgenden 9) 8 mal enthalten. Die 47 sind Tausendtel, aber auch die 5 sind Tausendtel, daher muss man die 8 im Quotienten um 3 Stellen weiter nach links, also an die Stelle der Einer setzen, es steht also der Anfang so:

0·04782969 : 0·0059049 = 8·

Der Divisor mit 8 multipliciert und das Theilproduct gehörig unter den Dividend geschrieben u. s. w. erhält man:

0·04782969 : 0·0059049 = 8·1
472392
59049
59049

102·1920 : 31935 = 0·0032
95·805
6·3870
6·3870

Man sagt: 3 ist in 10 3 mal enthalten, weil aber die 3 an der Stelle der Zehntausender steht, so muss man um 4 Stellen weiter rechts rücken, da 10 aber Zehner sind, die um

4 Stellen nach rechts gerückt Tausendtel geben, so kommt die 3 des Quotienten an die Stelle der Tausendtel. Wenn man nun mit 3 Tausendtel des Quotienten den Divisor multipliciert, so muss jede Ziffer des Productes um 3 Stellen weiter rechts, also die 5 (von 3 mal 5 ist 15) an die Stelle der Tausendtel d. i. unter die Decimale 2 des Dividendes kommen u. s. w.

Die ganze Darstellung zeigt:

Man dividiert den ersten Theil des Dividendes durch den ersten Theil des Divisors, wodurch man die erste Ziffer des Quotienten erhält, deren Stellenwert bestimmt werden muss, und nun dividiert man nach der gewöhnlichen Art weiter.

Der Stellenwert der ersten Ziffer im Quotienten kann auch auf folgende Weise bestimmt werden: Man denkt sich den Divisor unter den ersten Theildividend gesetzt, so ist der Stellenwert derjenigen Ziffer des Dividendes, unter welcher die Einerziffer des Divisors steht, auch der Stellenwert, der ersten Ziffer des Quotienten. Durch den Stellenwert der ersten Ziffer ist aber auch der Stellenwert aller übrigen Ziffern bestimmt, z. B.

8724·3475 : 54·6 = 1.	5·3978 : 956·3 = 0·005
546	956

Im ersten Beispiele steht die Einerziffer (4) des Divisors unter der Ziffer 7 des Dividendes, welche an der Hunderterstelle steht; folglich bedeutet auch die erste Ziffer im Quotienten ebenfalls Hunderter.

Da im zweiten Beispiele die Einerziffer (6) des Divisors unter der Ziffer 8 des Dividendes, welche an der Hundertelstelle steht, zu stehen kommt, so bedeutet auch die erste Ziffer des Quotienten Hundertel.

Es ist selbstverständlich, dass auch bei diesem Verfahren die kürzere Art des Dividierens angewendet wird. Hier wurden nur des besseren Verständnisses wegen die Producte aus dem Divisor und dem Quotienten angeschrieben.