bigens quin pro tua in me beneuolentia, errata re prehendas, & commode dicta alacriter suscipias, meq; ut soles, perpetuo prosequaris amore. Vale, Viennæ ex ciuium Collegio, pridiè Calendas Martias. An. 1528.

ELEMENTALIS GEOMETRICI CAPVT .I.

DEFINITIONES.

1 Punctus, est cuius pars nulla est.

2 Linea, est longitudo sine latitudine. Cuius quidem extremitates sunt duo puncta.

3 Linea recta, est ab uno puncto ad alium breuissima extensio, in extremitates suas utrũque eorum recipiens.

4 Superficies, est quæ longitudinem & latitudinem tantum habet. Cuius quidem termini sunt lineæ.

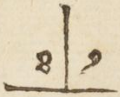
5 Superficies plana, est ab una linea ad aliã breuissima extensio, illas recipiens in suas extremitates.

6 Angulus planus, est duarum linearum alternus contactus, quarum expansio est super superficiem planam, applicatioq; non directa.

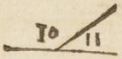
7 Angulus rectilineus, est quem cõtinent duæ

lineæ rectæ.

8 Angulus rectus, est uterlibet eorum qui fiunt, dum recta linea super rectam steterit, duosq; angulos ex utraq; parte fecerit æquales.



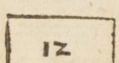
9 Linea perpendicularis, est recta linea, rectæ insistens, duosq; circum se angulos rectos faciens.



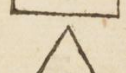
10 Angulus obtusus, est qui recto maior est.

11 Angulus acutus, est qui recto minor est.

13 Terminus, est quod uniuscuiusq; finis est.



12 Figura est, quæ termino uel terminis clauditur.

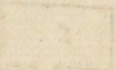


14 Rectilineæ figuræ, sunt quæ rectis lineis continentur.

Rectiliniarum figuranum, alia est trilatera, alia quadrilatera, alia multilatera.

Triangulorum, alius isopleuros, id est æquilaterus, alius isosceles, id est, æquicrurus, alius scalenus.

15 Aequilaterus est qui tribus æquis finitur lateribus.



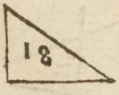
16 Isosceles, qui duo tantum habet latera æqualia.

17 Scalenus, qui tribus inæqualibus continetur lateribus.

Amplius triangulorum, alius est Orthogonius, id est, rectangulus, alius oxygonius, id

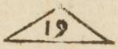
est

est, acutiangulus, alius amblygonius, id est, obtusiangulus.



18. Orthogonius est, qui unum habet rectum angulum.

19 Amblygonius, qui unum habet obtusum angulum.



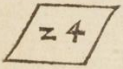
20 Oxygonius, qui cunctos tres habet acutos angulos.

21 Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod æquilaterum atq; rectangulum est.

22 Tetragonus longus, rectangulus quidem est, sed æquilaterus non est.

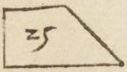
23 Rhombus est, qui æquilaterus quidem, sed rectangulus non est.

24 Rhomboides, qui neq; latera neq; angulos æquales habet, latera tamen opposita, & angulos oppositos æquales habet.

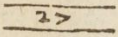


25 Trapezia, hoc est, mensulæ, omnes sunt, præter has figuræ quadrilateræ.

26 Multilateræ figuræ pluribus quàm quatuor clauduntur lineis.



27 Aequidistãtes lineæ sunt, quæ in eadem superficie collocatæ, atq; in alterutram partẽ protractæ, non concurrunt, etiam si infinitũ protrahantur.



PETITIONES.

1 Omnes rectos angulos sibi inuicem esse æquales.

2 Si linea recta super duas rectas ceciderit lineas, duosq; angulos ex una parte illius lineæ duobus rectis angulis minores fecerit,

has duas lineas in eandém partem protractas, coniunctum iri. Et econtrario.

3 Duas rectas lineas superficiem nullam claude

4 Si in aliquo triangulo, alterum duorum (re. laterum super basim stantium demittatur, alterum necessario uel breuius uel lõgius fieri. Quam nos hic quartam ponimus petitionem. Euclides septimam primi libri propositionem annotauit. Verum quia demonstratio eis difficilior uideri posset, incipienti primũ discere lemẽta, & demonstrationibus linearibus non dũ aßueto. Quòdq; ipsa petitioni proxima est: eiusq; usus admodum rarus, id propterea inter postulata eam annumerauimus.

COMMVNES SENTENTIAE.

1 Quæcumq; uni & eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia.

2 Si æqualibus æqualia addantur, aggregata

3 Si ab æqualibus æqualia aufe (fient æqualia. rantur, residua erunt æqualia.

4 Si ab inæqualibus æqualia auferantur, resi o dua erunt inæqualia.

5 Si inæqualibus æqualia addantur, aggrega ta erunt inæqualia

6 Si duæ res fuerint uni duplices, ipsæ sibi inui o cem erunt æquales.

7 Si fuerint duæ res quarum utraq; unius & e iusdem est dimidiũ, erunt sibi inuicẽ æquales.

s Si

8 Si qua res alteri superponatur applicetur q; ei, nec excedat altera alteram, hæ erunt sibi inuicem æquales. Et econtrario.

9 Omne totum maius est sua parte.

10 Totum æquale est suis omnibus partibus simul sumptis.

PROPOSITIO PRIMA.

Supra datam rectam lineam triangulum æquilaterum collocare.

Sit data linea a b, sic super eam constituemus triangulum æquilaterum. Posito pede circini immobili in a, alter extendatur secundum spacium lineæ a b, & circunductus scribat arcum occultum. Deinde circino non uariato pedem eius immobilem ponamus in b, & alter circũductns priorem arcum secet in puncto c. Punctus ille sectionis c iungatur lineis rectis cum a & b punctis & factus erit triangulus æquilaterus. Nam omnes hæ lineæ sunt uni æquales, ei scilicet, quæ est inter extremitates pedum circini, quare per primam communem sententiam, inter se sunt æquales. Aequicrurum haud aliter datæ lineæ superpones, nisi quòd circinus amplius quàm est datæ lineæ spacium, uel minus extendendus est. Scalemus tum fiet, si circinus primo amplius, deinde minus extenditur quàm est data linea.

SECVNDA PROPOSITIO.

Quorumcunq; duorum triangulorum duo latera unius, duobus lateribus alterius fuerint æqualia, & anguli his æquis lateribus contenti æquales, erit basis basi, & reliqui anguli æquis lateribus contenti, alter alteri, & totus triangulus toti triangulo æqualis.

Sint duo trianguli a b c, d e f, sitq; latus a b æquale lateri d e. Et latus a c æquale lateri d f, & angulus a æqualis angulo d. Dico basim b c æqualem esse basi e f, & angulum b angulo e, & angulum c angulo f, & totam trianguli a b c superficiem, superficici trianguli d e f æqualem. Nam finge lineam d e superponi & accommodari a b lineæ, neutra igitur alteram excedet per conuersionem octauæ conceptionis, positæ enim sunt æquales, & punctus d cadet super a pũctum, & similiter e punctus super b. Quia uero angulus a positus est æqualis angulo d, necessario cadet linea d f super lineam a c, & propter præstructam æqualitatem earum, incidet f punctus puncto c, & erit cum eo unus punctus, quapropter basis e f cadet super basin b c, ita ut fiat cum ea, linea una, alioqui duæ rectæ lineæ clauderent superficiem, quod est contra petitionem tertiam, & quia neutra alteram excedit, terminantur enim ijsdem pũctis, sunt igitur æquales. Rursus angulus e superpositus est angulo b et

cum

cum non excedit, neq; ab eo exceditur, est ergo ei æqualis. Haud aliter ãgulus f æqualis probatur angulo c. Præterea totus triangulus d e f toti triangulo a b c superpositus est, ipsum neq; excedẽs, neq; ab eo superatus, quapropter concluditur ei æqualis propter octauam communẽ sententiam.

TERTIA PROPOSITIO.

Si tria latera unius trianguli fuerint æqualia tribus lateribus alterius trianguli, qui continentur æquis lateribus anguli æquales erunt.

Sint duo triãguli a b c, d e f, sitq; latus a c æquale lateri d f, & b c æquale e f & a b æquale d e. Dico angulum c esse æqualem angulo f & angulum a angulo d, & angulum b angulo e, hi enim lateribus relatiuis et æqualibus continentur. Nã superponatur basis d e basi a b, neutra itaq;, quoniam positæ sunt æquales, alteram longitudine uincet. Punctus igitur f non cadet aliò quàm super punctum c. Nam si aliò caderet, tunc alterutra linearum aut d f aut e f demitteretur, quare per ultimam petitionem altera breuior fieret. Verbi gratia, si linea d f demitteretur, ita quidẽ ut maneret æqualis lineæ a c, tunc e f linea decresceret necessario & minor fieret quàm b c linea, quod est contra hypothesim, sunt enim positæ æquales. Igitur non potest punctus f alibi quàm in c cadere, postquã d e superposita fuerit a b lineæ. Necessario etiam cadet d f linea super a c lineam,

et f c ſuper c b, aliter enĩ duæ rectæ lineæ claderent ſuperficiem. Ea propter erunt oẽs anguli relatiui, hoc eſt, æquis lateribus contenti inter ſe æquales per octauam conceptionem. Nam ſibi inuicem ſuperpoſiti prorſus congruũt ac quadrãt.

QVARTA PROPOSITIO.

Trianguli æquicruri, qui ſupra baſim ſunt anguli, ſibi inuicem æquales ſunt. Quòd ſi latera æqualia protrahantur, anguli quoq; ſub baſi erunt æquales.

Sit triangulus a b c, cuius latus a b ſit æquale lateri a c. Dico angulum a b c eſſe æqualem angulo a c b. Nam ſuper baſim b c in alterã partem conſtruatur triangulus ſiue æquilaterus ſiue æq crurus, idq; per primã propoſitionẽ huius capiatis qui ſit b d c, & puncta a d iungantur linea recta, quæ ſecet baſim in pũcto f. Intelligo itaq; duos triangulos a b d & a c d, quorum latera unius ſunt æqualia lateribus alterius. Eſt enĩ a b æquale a c per hypotheſi, b d uero æquale ipſi c d per primam huius, & a d eſt utriq; triangulo commune, ergo per præcedentem angulus b a d eſt æqualis angulo c a d, quod memori ſerua mente. Rurſus alios duos triangulos intelligo ſcilicet a b f, & a c f, quorum duo latera unius, ſunt æqualia duobus lateribus alterius. Nam b a eſt æquale a c per hypotheſim, et a f utriq; cõmune, anguli præterea contenti his æquis lateribus ſunt æquales,

ut

ut modo ostendimus, ergo per secundam huius angulus a b f, æquatur angulo a c f quod erat demõstrandũ. Secũda pars patebit demõstrata decima propositõe.

QVINTA PROPOSITIO.

Si cuius trianguli, anguli supra basim fuerint æquales, latera seu crura illius trianguli erunt æqualia.

Sit triangulus a b c, cuius anguli supra basim b & c sint æquales, dico latera eius a b & a c esse æqualia. Quia si non sunt æqualia, erit alterum eorum longius, & sit illud a b. Resecetur ergo ad æqualitatẽ in puncto d, ut d b sit æqualis a c, & trahatur linea d c. Intelligo itaq; duos triangulos a b c totalẽ, & d b c partialẽ, Et quia duo latera unius ponuntur æqualia duobus laterib. alterius, latus scilicet d b æquale lateri a c, ipso b c existente communi, anguli etiã his æquis laterib. contenti, sunt positi æquales, per secundam itaq; huius, trianguli ipsi erunt inter se æquales, ut a b c triãgulus totus, triãgulo d b c partiali, quod ẽ impossibile.

SEXTA PROPOSITIO.

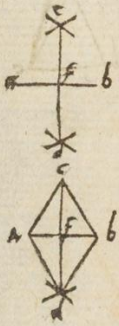
Datum angulum per æqualia diuidere.

Sit datus angulus ĩ duo æqualia secãdus. a. Lineæ ipsum cõtinẽtes si fuerĩt ĩæquales, resecentur ad æqualitatẽ, sint a b & a c. Et trahatur linea b c, super qua cõstituatur triãgulus siue æqlaterus siue æqcrurus b d c, et continuẽtur pũcta a d linea recta, q̃ angulũ datum diuidet. Intelligo enĩ duos

triangulos b a d & c a d quorũ latera unius sunt æqualia lateribus alterius. Nam a b æquale est a c per hypothesim, & b d æquale c d per primam huius, & a d utriq; triangulo commune. Per tertiam itaq; angulus b a d æquatur angulo c a d, cõtinentur enim lateribus æqualibus. Quare patet propositum.

SEPTIMA PROPOSITIO.

Datam lineam rectam per æqualia secare.



Sit linea diuidenda a b. Pone pedem immobilem circini ut libet diducti primo in a, & altero pede circumducto, fac duos arcus occultos, alterum supra lineam, alterum infra. Deinde circino non uariato pes immobilis ponatur in b, & alter circũductus intersecet arcus modo signatos, superiorem quidem in puncto c, inferiorẽ uero in d. Has sectiones iunge linea recta c d, quæ secet lineam a b in puncto f. Dico itaq; lineam a b datam, in puncto f diuisam per æqualia. Propter demonstrationis euidentiam fac triangulos manifestos, continuans utramq; sectionem cum extremitatibus datæ lineæ. Intelligo enim duos triangulos c a d & c b d, quorum latera unius sunt æqualia laterib. alterius, quare per tertiam angulus c unius est æqualis angulo c alterius. Rursus intelligo alios duos triangulos c a f, & c b f, quorum duo unius latera sunt æqualia duobus lateribus alterius. Nam a c est æquale c b, eadem enim circini exten

sio-

ſtione facta ſunt. Et c f utriq; triangulo communc, anguli quoq; his æquis lateribus contēti ſunt æquales, ut modo oſtenſum eſt, ergo per ſecundā baſis a f, eſt æqualis baſi f b, quod erat demonſtrā dum.

OCTAVA PROPOSITIO.

A puncto in linea ſignato perpendicularem educere.

Sit data linea a b, à cuius puncto c ſit educenda perpendicularis. Signa itaq; in linea data officio circini duo puncta æquali interuallo à puncto c diſsita, ſintq; a & b. Poſtea pone pedem immobilē circini ut cunq; extenſi in a, & altero circumgirato occultum fac arcum. Deinde circino non uariato & pede eius immobili poſito in b, prior arcus ſecetur in pūcto d, à quo ad c deijciatur linea recta. Hanc dico eſſe ad a b perpendicularē. Propter demonſtrationem fac triangulum manifeſtum coniuncto d puncto cum a & b punctis, Intelige ergo duos triangulos a d c, & b d c, qui ſunt omnium inter ſe laterum æqualium, eſt enim a d, æqualis b d, ut quæ eadem circini diſtenſione deliniatæ ſunt, latus quoq; a c ex hypotheſi eſt æquale c b lineæ, & d c utriq; eſt communis, quapropter per tertiam huius angulus c unius eſt æqualis angulo c alterius, uterq; igitur per diffinitionem anguli recti, eſt rectus. Linea itaq; d c perpendicularis eſt ad lineam a b per diffinitionem lineæ perpendicularis. Animaducrteudum eſt, operæ

precium esse, spacio plani in quo trahēda est perpendicularis permittente, si duæ fierent decussationes seu intersectiones, altera supra lineam, altera infra, modo quo usi sumus in propositione septima. Sic enim exactius trahetur perpēdicularis.

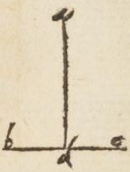
NONA PROPOSITIO.

A puncto extra lineam datam signato, ad eam demittere perpendicularem.

Sit punctus a, & linea ad quam deducēda est à puncto a perpendicularis sit b c. Ponatur ergo circini pes immobilis in puncto a, & altero pede notētur duo pūcta in linea data, quæ sint b c. Deinde circino nō uariato pedē īmobilem primo in b pone, & altero scribe arcum occultum. Deinde eodem immobili pede in c posito priorem arcum interseca in puncto f. Hunc cū puncto a continua linea recta a f quæ secet datā lineā b c in pūcto d, Ea perpendicularis est super lineam datā. Propter demonstrationem, trahe à punctis a & f ad puncta b c lineas rectas. Ex processu itaq; propositionis septīæ patet lineam b c diuisam esse in pūcto d per æqualia. Intellige ergo duos triangulos a b d & a d c qui sunt omnium laterum æqualium ut patet. Quare per tertiam angulus d unius est æqualis angulo d alterius, ergo uterq; rectus per diffinitionem anguli recti, linea itaq; a d perpendicularis est ad lineam b c per diffinitionē lineæ perpendicularis. DECIMA propositio.

Lie

Linea recta ſuper rectã ſtans, facit cũ ea duos ãgulos aut rectos aut duobus rectis æquales.



Sit linea a d ſtans ſuper lineã rectam b c, dico angulos quos cum ea facit aut eſſe rectos aut duobus rectis æquales. Nam ſi linea ſuperſtans eſt ad eã cui ſuperſtat perpendicularis ut in priori figura, patet propoſitũ per diffinitionẽ lineæ perpendicularis. Si uero non fuerit perpẽdicularis ut in ſecũda figura, emittatur per octauã, ex pũcto d perpẽdicularis q̃ ſit d e. Clarũ igitur eſt angulos rectos q̃ fiũt à linea perpẽdiculari, ſcilicet e d b, & e d c tantum occupare ſpacij quantũ tenẽt duo anguli, quos facit linea non perpendicularis d a, hoc eſt anguli a d b & a d c, quare hi duo illis duobus ſunt æquales per octauam communẽ ſententiam. Ex hac propoſitione liquet ueritas ſecũdæ partis quartæ propoſitionis. Si trianguli æqcruri æqualia latera protrahantur angulos ſub baſi eſſe æquales. Sit enim triangulus æquicrurus a b c, & protrahantur latera eius æqualia a b & a c uſq; ad d & f. Dico angulos ſub baſi ſcilicet d b c, & f c b eſſe æquales. Nam prima pars eiuſdẽ quartæ demõſtrauit angulos ſupra baſim ſcilicet a b c et a c b eſſe æquales, Præsẽs uero docet angulos a b c & d b c ſimul æquari duobus rectis, ſimiliter duos a c b et b c f duob. rectis æquales. Per primã itaq; petitionẽ duo ãguli a b c et c b d ſimul æquãtur duob. pariter ãgulis a c b et b c f

Si ergo ab æqualibus demantur æqualia, scilicet anguli super basim, relinquentur per tertiam cõmunem sententia, anguli sub basi æquales, quod erat demonstrandum.

VNDECIMA PROPOSITIO.

Si duæ rectæ lineæ se secent, angulos contrà positos facient æquales.

Sint duæ lineæ rectæ a b & c d secantes se in pũcto e. Dico angulos contrapositos, hoc est, a e c et d e b uel c e b & d e a esse æquales. Vocamus autẽ angulos contrapositos, qui nullo communicãt latere. Per præcedentem enim duo anguli a e c & c e b æquantur duobus rectis, similiter duo anguli d e b & b e c rectis duobus pares sunt. Quapropter per primam petitionem duo anguli a e c & c e b aggregati, æquales sunt duobus angulis d e b & b e c simul sumptis. Ergo ab æqualibus ablato angulo c e b communi, erunt per tertiam communem sententiam residui a e c & b e d inter se æquales. Non aliter probabis duos angulos c e b & d e a inter se æquales esse.

DVODECIMA PROPOSITIO.

Omnis trianguli uno latere producto, extrinsecus angulus utrolibet intrinseco sibi opposito maior erit.

Sit triangulus b a c et protrahatur latus b a in directum usq; ad f. Dico angulum f a c extrinsecum, maiorem esse utrolibet angulo sibi intrinse-

trinsecus opposito scilicet uel angulo b uel angulo c. Namper decimam angulus f a c cum angulo c a b æquatur duobus rectis. Sed angulus c b a cũ angulo c a b minores sunt duobus rectis. Linea enim f b cadit super duas lineas a c & b c concurrentes in puncto c, ergo per conuersionem secundæ petitionis facit ad partem concursus duos angulos minores duobus rectis. Constat igitur duos angulos f a c & c a b simul esse maiores duob. angulis c b a & c a b simul sumptis. Dempto ergo ab inæqualibus eodem communi scilicet angulo c a b, remanebunt per communem scientiam residua inæqualia scilicet ãgulus extrinsecus f a c maior angulo c b a intrinsecus sibi opposito. Similimodo probabis angulum f a c maiorem esse angulo a c b.

DECIMATERTIA PROPOSITIO.

In omni triangulo, maiori angulo maius latus opponitur.

Sit in tirãgulo a b c angulus a maior ãgulo c. Dico latus b c maius esse latere a b. Nam si b a linea minori angulo subtẽta æqualis est b c lineæ, erit per quartã angulus a æqualis ãgulo c quod est contra hypothesim. Quod si dicatur a b maior esse quàm b c, resecetur ad æqualitatem in pũcto d, ita ut b d sit æqualis b c. Et quia per quartam angulus b c d æquaretur angulo b d c, angulus uero b d c per præcedentem maior est angu-

lo b a c angulus, igitur b c d maior esset angulo a quare multo magis angulus b c a superaret angulum a, quod idem est contra hypothesim.

DECIMAQVARTA PROPOSITIO.

Omnis trianguli, duo quælibet latera simul sumpta sunt tertio maiora.

Sit triangulus a b c, dico duo latera a b & a c simul iuncta, longiora esse latere b c. Si enim essent aut æqualia aut minora eo, non possent concurrere in angulum a. Nam si essent æqualia lateri b c, tunc se contingendo iacerent supra lineam b c, et fierent cum ea linea una. Si uero breuiora essent, non possent se contingere, neq; in angulum concurrere.

DECIMAQVINTA PROPOSITIO.

Si in uno quolibet triãguli latere à finib. eius duæ rectæ lineæ interius concurrant, angulum facient maiorem eo qui à reliquis eiusdem trianguli lateribus continetur.

Sit triangulus b a c super cuius latere b c duæ rectæ constitutæ angulũ faciant b d c, dico eũ maiorẽ esse angulo b a c contento à reliquis duobus lateribus. Nã protrahatur linea b d usq; dũ secet latus a c in pũcto e. Erit igitur angulus b d c per duodecimã huius maior ãgulo b e c & per eandẽ angulus b e c maior angulo b a c, multo igitur maior erit angulus b d c angulo b a c quod fuit demonstrandũ.

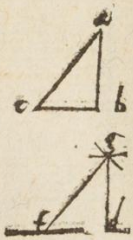
Ex

Ex tribus datis lineis triangulum constituere.

Sint tres lineæ datæ a b c, ita ut q̃libet duæ simul iunctæ sint tertia maiores. Id enĩ necessariũ est per decimamquartã. Pone pedem immobilem circini extensi spacio lineæ b in altero termino lineæ a, uerbi gratia in d & altero circunducto pede occultũ scribe arcũ. Deĩde circino extenso secundũ quantitatẽ lineæ c, & pedẽ eius immobili posito in termino f, priorẽ arcũ interseca in puncto g. Ab hoc ĩtersectionis pũcto trahe ad terminos lineæ a, rectas et habebis triãgulũ quẽ optabas.

DECIMASEPTIMA PROPOSITIO.

Super punctum datum in linea recta, describere angulum dato angulo æqualem.



Sit punctus d datus in linea data, & angulus a b c datus. Subtẽde eũ recta linea c a. Reseca igitur ex linea data d f lineã æqualẽ c b. Deĩde circino diducto secundum quantitatẽ lineæ a b et pede eius ĩmobili posito in d scribatur arcus occultus. Postea circinũ pro spacio lineæ c a extende, & pede eius in f posito, priorẽ interseca arcũ in puncto g. A quo ad punctũ d trahe rectã. Hæc cũ data linea continebit angulũ g d f æqualẽ angulo b dato. Nã propter demonstrationẽ ducatur linea f g. Erũt ex hypothesibus latera trianguli f g d æqualia lateribus triãguli a b c, ergo per tertiã angulus g d f æqualis est angulo a b c. Continentur enim æquis lateribus.

DECIMAOCTAVA PROPOSITIO.

Si duorum triangulorum duo latera unius, fuerit æqualia duobus laterib. alterius, & anguli contenti his æquis lateribus fuerit inæquales, erit illius basis maior, cuius lateribus angulus amplior continetur.

Sint duo trianguli a b c, e d f, & latera duo prioris a b, & a c sint æqualia duobus lateribus posterioris d e & d f, & angulus a maior angulo d. Dico basim b c maiorem esse basi e f. Nam super puncto d lineæ d e locetur per præcedentem angulus æqualis angulo b a c, sitq; is e d g & linea d g sit æqualis a c subtendaturq; basis e g, quæ necessariò erit æqualis basi b c in triangulo a b c. Quapropter si probauerimus e g maiorem esse e f, erit quoq; probatum b c eadem esse maiorem. Trahatur f g linea. Et quia d g posita est æqualis d f, igitur per quartã angulus d f g est æqualis totali angulo d g f, ergo idem angulus d f g erit maior parti ali angulo e g f, quare multo maior erit angulus e f g, ãgulo e g f. Latus igitur e g maius est per decimãtertiam latere e f, quod erat demõstrandũ.

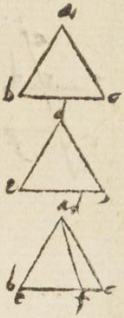
DECIMANONA PROPOSITIO.

Si super bases duorum triangulorum anguli iacentes fuerint æquales, & basis unius æqualis basi alterius, aut unum latus unius, lateri alterius se respicienti æquale, erũt reliqua latera reliquis æqualia alterũ

alte

alteri, & reliquus angulus reliquo angulo.

Sint duo trianguli a b c, d e f et angulus b sit æqualis angulo e, & angulus c angulo f. Sitq; basis b c æqualis basi e f, aut unum ex lateribus triãguli a b c æquale suo relatiuo lateri trianguli d e f. Dico reliqua latera, reliquosq; ãgulos esse æquales. Sit primo bases æquales, & intelligatur basis e f superponi basi b c, quæ cũ sint æquales, necesse est punctũ e cadere super punctũ b, et punctũ f super c. Et propter æqualitatẽ angulorũ et conuersionẽ octauæ cõceptionis, necesse est lineã e d cadere super a b, et d f super a c, nõ ergo erit possibile ut latera huius ulterius aut citerius lateribus alterius cõcurrãt, erunt igitur æqualia et anguli ab eis contẽti æquales per octauã conceptõem. Ponatur secũdo latus d e æquale lateri a b. Et alterũ alteri fingatur superponi, propter æqualitatẽ ergo eorum punctus d cadet super a punctum, & e super b, linea deniq; e f supra b c lineam cadet propter æqualitatem angulorũ, et conuersionẽ octauæ cõceptionis. Quòd si d f congruerit etiam ipsi a c, concludes per octauam conceptionem propositũ. Sin uerò d f ceciderit aut intra aut extra triangulum, semper sequetur angulum extrinsecum esse æqualem angulo intrinseco sibi opposito, cuius contrarium demonstrauit Propositõ Duodecima.



VICESIMA PROPOSITIO.

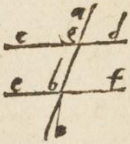
Si linea recta duas lineas rectas secando se

cerit angulos coalternos æquales, aut angulum extrinsecum angulo intrinseco ex eadem parte sumpto æqualem, aut duos intrinsecos ex eadem parte, duobus rectis æquales, lineæ sectæ æquidistabunt.

Linea a b secet c d & e f lineas, c d quidem in puncto g, e f uero in puncto h. Et faciat primo angulos coalternos sibi inuicem æquales, hoc est, angulum d g h angulo e h g, aut angulum f h g angulo c g h, sic enim sumpti coalterni dicuntur. Dico lineas c d & e f æquidistare. Si autem non, productæ concurrãt, uerbi gratia in k. Trianguli ergo g k h angulus d g h extrinsecus æqualis est angulo k h g intrinseco sibi opposito, aut angulus f h g extrinsecus angulo k g h intrinseco sibi opposito, hoc aũt per 12. propositionem impossibile est, igitur c d & e f productæ minime concurrunt, ergo per definitionem sunt æquidistantes. Secundo faciat linea a b angulum aliquem extrinsecum æqualem intrinseco sibi opposito ex eadem parte. Dico nihilo minus lineas c d & e f æquidistare. Et sit exempli caussa angulus a g d extrinsecus æqualis intrinseco g h f. Quoniam angulus a g d, æqualis est per hypothesim angulo g h f. Et per undecimam idem angulus a g d æqualis est c g h angulo, igitur per primam communem sententiam anguli e g h, & g h f inter se sunt æquales. Et hi sunt coalterni, ergo per primam huius Propositi-

sitionis partem lineæ c d, & e f, sunt æquidistantes. Tertio faciat linea a b duos angulos intrinsecos ex eadem parte, æquales duobus rectis, ut d g h et f h g, dico lineas c d & e f æquidistare, quoniam anguli d g h & f h g per hypothesim sunt æquales duobus rectis, & per decimam anguli d g h, & c g h, etiam æquantur duobus rectis, ergo per primum postulatum anguli d g h, & f h g, æquales sunt angulis d g h, & c g h, Ablato ergo communi angulo d g h, relinquitur per tertiam communem sententiam, angulus c g h, æqualis angulo f h g, sed hi sunt coalterni, ergo per primam partem huius Propositionis lineæ c d, & e f æquidistant.

VICESIMAPRIMA PROPOSITIO.



Si linea recta duas æquidistantes secuerit, faciet angulos coalternos æquales. Extrinsecum intrinseco ex eadem parte sumpto æqualem. Et duos intrinsecos ex eadem parte æquales duobus rectis.

Repetatur prior figura in qua ponantur c d & e f æquidistantes. Prima pars Propositõis sic demõstratur. Nã si anguli coalterni ut c g h et f h g nõ sunt æquales, erit alteruter corũ maior, sitq; c g h maior. Quoniã igitur c g h maior angulo f h g ponatur cõis ãgulus d g h. ãguli ergo per

quintam conceptionem c g h et d g h maiores sũt angulis d g h & f g h, sed per decimam anguli c g h & d g h æquales sunt duobus rectis, ergo anguli d g h & f h g minores sunt duobus rectis, ergo per secundam petitionem c d & e f protractæ concurrunt, non igitur sunt æquidistantes, quod est cõtra hypothesim, angulus igitur c g h æqualis est suo coalterno f g h.

Secunda pars ostenditur, Nam ut modo ostensum est angulus c g h æqualis est angulo f g h, & per undecimam idem angulus c g h æqualis est angulo a g d, per primam igitur conceptionem angulus a g d æqualis est angulo f g h extrisecus scilicet intrinseco ex eadem parte.

Tertia pars ostenditur. Nam angulus c g h æqualis est per primam huius partem angulo f g h posito ergo communi angulo d g h, erunt duo anguli per secundam petitionem c g h et d g h æquales duobus angulis f h g & d g h, sed per decimã duo anguli c g h, & d g h æquales sunt duobus rectis, ergo & duo anguli f g h & d g h æquales sunt duobus rectis, quod erat demonstrandum.

VICESIMASECVNDA PROPOSITIO.

A puncto extra lineam datam aßignato educere æquidistantem datæ lineæ.

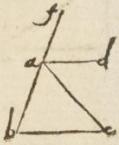
Sit linea data b c, & punctus extra eam aßignatus a. Trahe lineam occultam h a d utcunq; cõtigerit, deinde super puncto a colloca angulum

h

h a e extrinsecum protracta linea a e, æqualē an-
gulo a d c intrinseco ex eadem parte. Constat igi
tur per secundam partem uicesimæ lineam a e æq
distare lineæ b c.

VICESIMATERTIA PROPOSITIO.

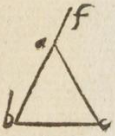
Cuiuslibet trianguli angulus extrinse-
cus æqualis est duobus angulis intrinsecis
sibi oppositis.



Sit triangulus a b c & protrahatur latus b a in
f, dico angulum f a c extrinsecum æqualem esse
duobus intrinsecis & oppositis, scilicet angulis b
& c. Ducatur per præcedentem à puncto a, linea
a d æquidistans b c lineæ. Et quia a d æquidistat b
c lineæ, & in ipsam incidit f b, erit per secundam
partem uicesimæ primæ angulus f a d extrinse-
cus æqualis intrinseco ex eadem parte angulo a
b c. Rursus quia parallelæ sunt a d & b c, & eas
secat c a, igitur, per primam partem eiusdem. 21.
angulus d a c æqualis est sibi coalterno angulo a
c b. Totus igitur f a c extrinsecus æqualis est duo
bus intrinsecis & oppositis c b a & a c b.

VICESIMAQVARTA PROPOSITIO.

Cuiuslibet trianguli tres anguli æqua
quales sunt duobus rectis.

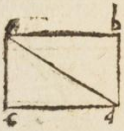


Nam per præcedentem angulus f a c extrinse-
cus æqualis est duobus angulis intrinsecis & op-
positis c b a & a c b, addito ergo utrisq; commu-
ni angulo c b a, erunt duo anguli f a c & c a b æ-

quales tribus a b c, a c b, c a b, sed per decimã duo ãguli f a c et c a b æquales sunt duob. rectis, tres igitur a b c, a c b, & c a b duob. rectis sunt æquales quod erat demonstrandum.

VICESIMAQ VINTA PROPOSITIO.

Diameter parallelogrammi, diuidit ipsum per æqualia.



Sit parallelogrammũ a b c d, cuius diameter sit a d. Dico hac diametro parallelogrammũ æqualiter secari. Quoniam a b & c d æquidistant, & super eas cadit a d, est per primam partẽ uicesimæ primæ angulus b a d suo coalterno a d c æqualis. Rursus quoniam a c & b d sunt parallelæ & eis incidit a d erit per eandem. 21. b d a suo coalterno c a d æqualis. Sunt itaq; duo trianguli a b d & a c d, & ãguli bini super cõmunẽ basim a d sunt æquales, per decimã nonã ergo reliq ãguli & latera sunt æqualia, quare per secundam propositionem triangulus triangulo æqualis. Hinc etiam diligenter intuenti patet latera cuiuscunq; parallelogrammi opposita esse æqualia.

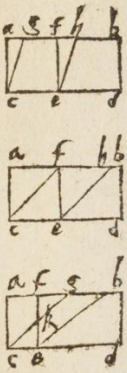
VICESIMASEXTA PROPOSITIO.

Omnia parallelogramma super eãdem basim, atq; in lineis alternis collocata, sunt æqualia.

Sint lineæ alternæ, hoc est, æquidistantes a b & c d, inter quas super eandẽ basim c e sint collocata duo parallelogramma scilicet, a c e f & g c e

b

h, dico ea esse æqualia. Et sit primo ut g cadat in ter a & f. Et quia a f est æqualis g h, cum utraq; sit æqualis c e, ergo ablata communi g f, remanebunt a g & f h æquales, & a c est æqualis f e propter æquidistantiam, angulus quoque h f e extrinsecus est æqualis angulo g a c intrinseco per secũdam partem uicesimæ primæ. Cum ergo duorum triangulorum h f e & g a c duo latera unius sũt æqualia duobus lateribus alterius, & anguli æquis lateribus contenti æquales, erit per secundam alter triangulorum alteri æqualis, addito ergo eis communi trapezio f g c e erunt aggregata, hoc est, dicta parallelogramma æqualia.



Secundo cadat g in ipsum punctum f, ut in secunda figura. Et quia f a est æqualis h f, cum utraq; sit æqualis c e oppositæ, & a c æqualis f e oppositæ, & angulus h f e æqualis angulo f a c intrinsecus scilicet extrinseco, per secundam itaq; erunt trianguli f a c & h f e æquales, addito ergo utriq; triangulo communi f e c, erunt per conceptionem aggregata a f c e & h f c e, hoc est, ipsa parallelogramma æqualia. Tertio cadat g extra f ut in tertia figura. Et quia a f est æqualis g h, addita ergo communi f g, erit a g æqualis f h, & erit propter prius dicta triangulus g a c æqualis triangulo h f e, Ablato ergo ab utrisque communi Triangulo f E g, quæ relinquuntur trapezia erunt æqualia, scilicet a f E c, &

g k e h. Quibus si addatur communis triangulus c k e, erunt aggregata æqualia, quod erat demonstrandum.

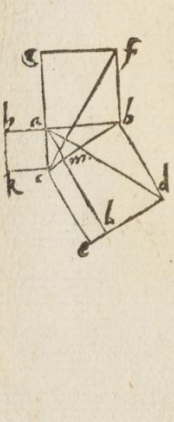
VICESIMASEPTIMA PROPOSITIO.

Si super unam basim & inter lineas æquidistantes, parallelogrammum & triangulus ponãtur, parallelogrammum triangulo duplum erit.

Sint ut prius duæ lineæ a b & c d æquidistãtes, inter quas super basim c e sit parallelogrammũ a c e f & triangulus g c e. dico parallelogrammum duplum esse triangulo. Nam ducatur à puncto e linea e h æquidistans c g. Per præmißam ergo parallelogrammum c g e h æquale est parallelogrammo a c e f. Sed per 25. e g cum sit diameter parallelogrammi c g e h, diuidit ipsum per æqualia, quapropter triangulus c g e est dimidiũ parallelogrammi c g e h, quare etiam parallelogrammi a c e f, quod est propositum.

VICESIMAOCTAVA PROPOSITIO.

In omni triangulo rectangulo, quadratum lateris oppositi angulo recto, æquale est duobus quadratis reliquorum duorum laterum.



Sit triangulus a b c, cuius ãgulus a rectus. Quadrentur tria latera, sitq; quadratum lateris b c oppositi angulo recto, b c d e, dico ipsum esse æquale reliquis duobus quadratis, scilicet a b f g,

a

a h c k, quæ sunt laterum angulum rectum conti-
nentium. Ducatur enim ab angulo recto a ad ba-
sim d e, quadrati b c d e, perpendicularis quæ se-
cet b c in m & d e in l. Hæc perpendicularis diui
dit quadratum lateris obtenti angulo recto in du
o parallelogrãma scilicet b m d l, & m l c e, quo-
rum sinistrũ dico esse æquale quadrato sinistro,
& dextrum quadrato dextro. Horũ utrunq; eo
dem modo probatur. Nam trahantur lineæ a d et
c f, & probabimus quadrangulum dextrum, sci
licet b m d l, æquale esse quadrato dextro, scili-
cet f g b a hoc modo. Nam qnadratum f g b a du-
plum est triangulo f b c per præcedentem, consti
tuuntur enim inter lineas æquidistantes g c & f
b super eandem basim f b. Similiter rectangulũ
b m d l duplum est triangulo a b d. Nam super eã
dem basim b d inter lineas æquidistantes b d & a
m l ponuntur. Sed trianguli dicti sunt æquales ut
mox probabitur, ergo rectangula ipsa ad æqua
les triangulos dupla sunt inter se æqualia per se-
xtam conceptionem. Triangulos æquales esse sic
patet, Sunt enim latera f b & c b trianguli f b c
æqualia lateribus a b, b d trianguli a b d, alterũ
alteri, anguli insuper his æquis lateribus conten
ti sunt æquales, scilicet f b c & a b d, uterq; enim
constat angulo recto & angulo communi a b c,
sunt igitur per secundam trianguli æquales. Eo-
dem modo ostendes sinistrum rectangulum c m l

e æquale esse quadrato sinistro h a c E, ductis lineis a e & b E. Totum ergo quadratum b d c e, æquale est duobus quadratis a b f g, & a h c E, quod erat demonstrandum.

CAPVT SECVNDVM
de Circulis.

DEFINITIONES.

Circulus est figura plana, una linea contenta, in cuius medio punctus est, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam exeuntes, sibi inuicem sunt æquales.

Circumferentia, est linea continens circulum.

Centrũ, est medius ille punctus in circulo.

Diameter circuli, est linea recta quæ per eius cẽtrum transiens, extremitatesq; suas circunferentiæ applicans, circulum in duo media diuidit.

Semicirculus est figura plana, diametro circuli & medietate circumferentiæ contenta.

Portio circuli, est figura plana, recta linea & parte circumferentiæ contenta, semicirculo aut maior aut minor.

Circulum linea contingere dicitur, quæ cum circulum tangat, in utramq; partem eiecta cum non secat.

Chorda, est recta linea, portionẽ circuli cõtinẽs.

Angulus supra arcum consistere dicitur, qui à quo