e æquale esse quadrato sinistro h a c E, ductis lineis a e & b E. Totum ergo quadratum b d c e, æquale est duobus quadratis a b f g, & a h c E, quod erat demonstrandum.

CAPVT SECVNDVM
de Circulis.

DEFINITIONES.

Circulus est figura plana, una linea contenta, in cuius medio punctus est, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam exeuntes, sibi inuicem sunt æquales.

Circumferentia, est linea continens circulum.

Centrũ, est medius ille punctus in circulo.

Diameter circuli, est linea recta quæ per eius cẽtrum transiens, extremitatesq; suas circunferentiæ applicans, circulum in duo media diuidit.

Semicirculus est figura plana, diametro circuli & medietate circumferentiæ contenta.

Portio circuli, est figura plana, recta linea & parte circumferentiæ contenta, semicirculo aut maior aut minor.

Circulum linea contingere dicitur, quæ cum circulum tangat, in utramq; partem eiecta cum non secat.

Chorda, est recta linea, portionẽ circuli cõtinẽs.

Angulus supra arcum consistere dicitur, qui à quo

quolibet puncto arcus, ad terminos chordæ duabus lineis rectis exeuntibus, continetur.

Angulus consistere supra centrum dicitur, qui à duabus lineis rectis à centro ad circumferentiam protractis continetur.

PRIMA PROPOSITIO.

Angulus rectilineus, in semicirculo supra arcum consistens rectus est. In portione uero minore semicirculo, consistens, obtusus. Et in portione, semicirculo maiore acutus est.

Sit circulus a b c, cuius diameter a d c, & in semicirculo a b c consistat angulus rectilineus a b c, dico eum esse rectum. Nam ducatur b d, et protrahatur c b ad e. Et quia lineæ d b & d a per definitionem circuli sunt æquales, erit per quartã primi capitis angulus d b a æqualis angulo d a b. Similiter propter æqualitatem linearum d b & d c, angulus d b c æqualis est angulo d c b. Totus itaq; angulus a b c æqualis est duobus angulis d a b & d c b. At eisdem æquatur per. 23. primi cap. angulus extrinsecus e b a, ergo per primam communem sententiam angulus e b a æqualis est angulo a b c, ergo per definitionem anguli recti, uterq; est rectus, patet igitur propositum. Rursus in portione c b a minore semicirculo, consistat angulus rectilineus c b a, dico eum esse obtusum.

Ducatur per centrum circuli quod sit d linea a d c, & iungatur b e. Et quia angulus a b e consistit in semicirculo, ideo per primam huius propositi onis est rectus, sed angulus a b c est maior eo, per definitionem igitur obtusus est. Porrò in portione a b c semicirculo maiore consistat angulus rectilineus a b c, dico eum esse acutũ. Ducatur per centrum linea a d e & linea b e. Et quia angulus a b e in semicirculo consistit, igitur est rectus, angulus uero a b c, est minor eo, ergo per definitionem est acutus.

SECVNDA PROPOSITIO.

Circuli propositi centrum inuenire.

Sit circulus a b c, eius centrum sic inueniemus. Protrahatur ut lubet chorda a b, & super alteram eius extremitatem constituatur angulus rectus, uerbi gratia, super terminum b, sit locatus a b c angulus rectus ducta linea b c usq; ad circumferentiam circuli. Deinde ducatur linea a c, eaq; per medium diuidatur in puncto d, hunc dico esse centrum circuli. Nam per hypothesim angulus a b c est rectus, ergo per conuersam præcedentis, portio a b c in qua consistit est semicirculus, linea itaq; a c diameter, punctusq; eius medius d centrum.

TERTIA PROPOSITIO.

Si linea à centro exiens, chordam per æqualia secuerit, ad eã erit perpẽdicularis.

Sit

Sit circulus a b, cuius centrum c, à quo exten sa recta c d, chordam a b per æqualia secet in pun cto d, dico perpendicularem esse c d ad a b. Tra hantur c a & c b lineæ. Et quia trianguli a c d la tera æqualia sunt lateribus trianguli c d b. Est e nim per hypothesim a d æqualis d b, & per defini tionem circuli c a æqualis c b, communis autem utriq; triangulo c d. Ideo per tertiam primi, an guli c d a & c d b sunt æquales, quare uterq; rec tus, linea igitur c d perpendicularis est ad lineam a b per definitionem.

QVARTA PROPOSITIO.

Si in diametro circuli præter centrum, signetur punctus, & ab eo ad circumferen tiã plurimæ lineæ ducãtur. Quæ per centrũ transierit, erit oĩum longißima. Et quæ dia metrũ perfecerit, omniũ erit breuißima. Reliquæ quæ centro propiores fuerint, re motioribus erunt longiores.

Sit punctus k signatus in diametro a f, circu li a b c d, cuius centrum h, & ducãtur ab eo ad circumferentiam lineæ k b, k c, k d, k e, Dico a h k quæ per cẽtrum transit, omnium esse longißimã, k f, quæ diametrum perficit, omnium breuißimã, k b longiorem eße k c, q̃ centro propinquior sit. Et eadem ratione c k longiorem esse d k, atq; de a lijs similiter. Connectantur h b, h c, h d. Quoniã per decimã primi ca. in triangulo k h b, duo late=

ta k h, & h b sunt maiora latere k b, & a h & h b per definitionem circuli sunt æquales. Ideo per secundam conceptionem, a h k æqualis est duabus b h & h k, quare & a h k maior est b k. Rursus quoniã b h æqualis est c h, & h k est cõmunis. Ideo per secundam conceptõem b h & h k lineæ sunt æquales c h & h k lineis, et angulus b h k maior est per nonam cõmunem sententiã, angulo c h k. Ideo per decimã octauam primi capitis basis b k maior est basi c k. Et ob eandem rationem c k maior est d k, & d k maior e k. Cõstat ergo eam quæ per centrũ transit, omnium esse longißimam, & propinquiores centro, remotioribus longiores esse. Rursus d k & h k per decimam quartam primi capitis maiores sunt d h. at d h per definitõem circuli æqualis est f h, igitur d k & k h maiores sunt h f, ergo per quartã communẽ sententiã, ablata utrinq; k h communi, reliqua d k maior erit f k. Eadem ratione f k minor esse ostẽderetur quàm e k, si protracta esset è centro h e. Manifestum est ergo f k quæ diametrum perficit omnium esse minimam.

QVINTA PROPOSITIO.

Si extra circulum signetur punctus, & ab eo ad circumferẽtiam, secantes eam, plurimæ ducantur lineæ. Quæ per centrum transierit, omnium erit longißima. Centro autem propiores, remotioribus longiores. Particularum autem quæ

ex-

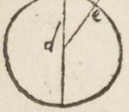
extrinsecus circumferentiæ applicantur, breuissima erit quæ diametro continuatur. & ei propinquiores remotioribus breuiores.

Sit extra circulum k e d c b, cuius centrũ n pũctus a signatus, & ab eo ad circumferentiam, ipsam secando trahantur plurimæ lineæ, ut a n b, a h c, a g d, a f e. Dico inter eas, a n b quæ per centrum transit, omnium esse longissimam, reliquas uero quo centro propinquiores, eo lõgiores. Præterea dico inter particulas dictarũ linearũ exteriores, a k q̃ diametro cõtinuatur, breuissimã esse, & reliquas tãto minores, quãto huic breuissimæ uiciniores. Prima pars ostenditur, ducantur n c, n d, n e. Et quia a n & n c æquales sunt lineæ a n b, maiores autem per decimamquartam quàm a c, erit a n b quoq; maior a c. Simili modo a n b maior ostenditur cæteris ex puncto a ductis. Secunda pars sic astruitur. Et quia a n, & n c sunt æquales a n, & n d lineis, ãgulus uero a n c maior est angulo a n d. Ideo per decimãoctauã primi a c basis maior ẽ a d basi. Haud aliter docebis a d maiorẽ esse a e. Tertia pars probatur protactis lineis n h, n g, n f. Nam a h, & h n, sunt per decimamquartam primi capitis maiores a n, ideo per quartam cõem sententiam. Si ab eis æqualia auferantur n k, & n h, erit a h residua maior a k. Eodẽ modo omnes aliæ exteriores particulæ

cõuincuntur maiores esse a k. Quarta pars sic ostenditur. Nam a n & n h sunt æqualia lateribus a n, & n g, angulus autem a n h minor angulo a n g, basis igitur a h per 18 primi minor est basi a g.

SEXTA PROPOSITIO.

Si circulum recta linea contingat, & à puncto cõtactus ad centrum ducatur recta linea, ipsa erit ad contingentem perpendicularis.



Sit linea a b contingens circulum c e in puncto c, à quo ad centrum d, ducatur recta linea c d, quæ si non est perpendicularis ad cõtingentem a b, sit d f perpendicularis ad eam secans circũferentiam in puncto e. Et quia angulus d f c est rectus, erit angulus f c d minor recto propter 24. primi. Latus igitur d c per 13. primi ca. maius erit latere d f, sed d e est æqualis d c per definitõem circuli, ergo & d e erit maior d f, pars suo toto, quod est impoßibile.

SEPTIMA PROPOSITIO.

A puncto dato ad circulum ducere lineam contingentem.

Sit punctus datus a, circulus b f c, centrum eius d. Ex puncto a ad circulum b f c, sic ducitur contingens. Punctum a iunge cum centro circuli d linea recta, quam per æqualia diuide in puncto c, factoq; eo centro, duc circulum occultum, qui secet circulũ datũ b f c in duob. pũctis b & c.

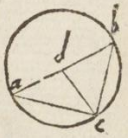
Deinde

Deinde à puncto dato d ad puncta sectionum b & c trahantur lineæ rectæ a b & a c, has dico circulum contingere. Ducantur à centro d ad puncta intersectionum lineæ d b & d c, & circulus super e cẽtro scriptus fiat manifestus. Et quia uterq; angulorum d c a & d b a consistit supra arcũ in semicirculo circuli descripti super centro e, ideo per primam huius cap. uterq; est rectus, & uterq; continetur linea ducta à centro parui circuli b f c ad punctum quo linea ex puncto a ducta circulum b f c tangit. Ideo per cõuersam præcedentis lineæ a b & a c contingunt circulum b f c, quod erat demonstrandum.

OCTAVA PROPOSITIO.

In circulo angulus consistens super centrum, duplus est eius qui super circumferẽtiam consistit, quando anguli eandem basim habuerint.

Sint in circulo a b c cuius centrum d, super unã basim, id est, arcum a c duo anguli, quorum alter a b c super arcum consistat, alter autem a d c super centrum, dico angulum a d c centralem esse duplũ ad ãgulũ a b c cicũferẽcialẽ, quod sic ostẽditur. Aut enĩ latera circũferẽtialis ãguli includunt angulum centralem, ut in prima figura, aut alterum ex lateribus angulum circumferentialem continentibus fit una linea cum altero laterũ anguli centralis ut in secunda figura. Aut unum



ex lateribus anguli circumferentialis secat alte
rum ex lateribus anguli centralis ut in tertia fi-
gura. Includant ergo primo latera anguli ad cir
cumferentiam b a, & b c, angulum a d c centra-
lem, & trahatur linea b d e. Et quia angulus a d
e extrinsecus per 23. primi cap. est æqualis duob.
angulis intrinsecis & oppositis, d b a, d a b, & hi
sunt æquales, per quartã primi cap. est enim d b
æqualis d a per definitionẽ circuli, ideo angulus
a d e duplus erit anguli d b a, propter eandẽ caus
sam angulus e d c duplus est ad angulũ d b c, to-
tus igitur a d c centralis duplus est ad a b c angu
lũ circumferentialem. Secundo sit latus a b angu
li ad circũferentiã una linea cum latere a d angu
li ad centrum ut in secunda figura. Et quia angu
lus a d c æqualis est per 23. primi capitis duobus ĩ
trinsecis angulis d b c & d c b. Hi autẽ sunt æqua
les per quartam primi. Ideo ad unum eorum, hoc
est, angulum a b c circumferentialem, duplus est
angulus a d c centralis. Tertio latus a b ãguli ad
circumferentiam secet latus d c anguli ad cen-
trum ut in tertia figura. Producatur linea b d us
que ad e. Per 23. igitur primi erit angulus e d c æ
qualis duobus angulis d b c & d c b, hi autem sũt
æquales per. 4. primi capitis. Ideo angulus e d c
duplus est ad angulum d b c. Præterea angulus e
d a per eandem 23. primi duplus est ad angulum d
b a. Dempto igitur hinc duplo e d a, illinc simplo

d b

d b a, erit residuus a d c centralis duplus ad residuum a b c circumferentialem, quod erat demonstrandum,

NONA PROPOSITIO.

In eadem portione quotlibet anguli super arcum consistentes æquales sunt.

Quod uniuersaliter proponitur de angulis consistentibus super circumferentiam, demõstratur tantum de his angulis qui super arcum maiorem semicirculo consistunt. Non attinet enim id demonstrare de angulis super semicirculum consistentibus, quos omnes prima propositio huius capitis docuit esse rectos, & ea propter æquales prima petitione astipulante. De ăgulis autem ad arcum minorem semicirculo, non potest ostendi eos esse æquales, nisi prius sequens propositio demonstretur. In portione igitur a c d e b maiore semicirculo consistant super arcum anguli a c b, a d b, a e b, dico eos esse æquales. Nam à centro circuli f ducantur lineæ f a & f b. Et quia angulus a f b centralis super ea stat basi super qua angulus a c b, circumferentialis igitur ad eum duplus propter præcedentem, & eadem ratione erit duplus ad angulum a d b & angulum a e b, ergo per septimam communẽ sententiam sunt inter se æquales.

DECIMA PROPOSITIO.

In circulis quadrilaterorum existentium anguli oppositi, duobus rectis sunt æquales.

Sit circulus a b c d, et in eo quadrilaterũ a b c d, dico quoslibet duos eius angulos oppositos simul duobus rectis æquari, Nam ex prima huius perspicuum est unum angulum rectũ à semicirculo suscipi, quapropter duo recti anguli à toto suscipiuntur circulo, Sed quicunq; duo anguli oppositi in quadrilatero a b c d à toto suscipiuntur circulo, ergo æquales sunt duobus rectis, ut angulus b a d suscipitur ab arcu b a d & angulus b c d suscipitur ab arcu b c d, arcus autem b a d & b c d totum circulum integrant, ergo patet propositum. Quòd si angulos a d c & a b c consyderes, idem experieris. Ex hac propositione liquidum est, quotlibet angulos consistentes super arcũ in portione minore semicirculo esse æquales. Nam singuli eorum cum angulo consistente in reliqua portione faciunt quadrilaterum, et propter hãc propositionem singuli eorum cum angulo reliquæ portionis æquales sunt duobus rectis, per primam ergo petitionem, singuli cũ angulo portionis reliquæ sunt æquales singulis cum eodem angulo, ablato ergo undiq; communi angulo, cõsistente scilicet in reliqua portione, relinquen-

tur

tur inter se æquales anguli consistentes in portione minore semicirculo.

VNDECIMA PROPOSITIO.

Si circulum linea recta contingat, & à contactu in Circulum, quædam cum dispescens recta linea, præter cẽtrum ducatur, angulis quos cum contingente facit, æquales sunt eis qui in alternis circuli portionibus consistunt angulis.

Sit linea a d b contingens circulum d e f h, cuius centrum g & a puncto contactus d trahatur præter centrum linea d f, quæ secet circulum in duas portiones, sinistram d e f, dextram d h f, faciatq; angulos duos cum contingente b d f sinistrum, et a d f dextrum. Dico angulum sinistrũ quem facit linea d f cum contingente, scilicet b d f, æqualem esse angulo quem suscipit dextra circuli portio d h f. Et angulum dextrum quem facit linea d f cum contingente scilicet a d æqualem esse angulo quem sinistra suscipit portio d e f. Trahatur à puncto contactus per centrum linea d g h & connectatur f h, Constituatur etiam in portione d e f angulus ut lubitum fuerit. Quicquid de his duobus angulis mõstratum fuerit, de omnibus ab his duabus portionibus, susceptis indubitanter procedet. Sunt enim omnes, qui ab eadem portione suscipiuntur anguli, æquales per nonam huius. Et quia angulus d f h in semicircu-

lo consistit, ideo per primam huius est rectus, re-
liqui ergo duo anguli, de triangulo d f h, simul u
ni recto æquantur per 24. primi capitis, angulus
quoq; totus b d h rectus est per sextam huius, per
primam itaq; petitionem duo anguli d h f & f d
h æquales sunt angulo b d h. Ablato ergo commu
ni angulo f d h, erunt residui b d f & f h d æqua-
les, quæ fuit propositi una pars. Rursus duo an-
guli f h d & f e d in quadrilatero f h d e per deci
mam huius sunt æquales duobus rectis. At per de
cimam primi capitis, duo anguli b d f & a d f æ-
que sunt duobus rectis pares, ergo per primam
postulationem duo anguli f h d & f e d sunt æqua
les duobus angulis b d f & a d f. Ablatis ergo æ-
qualibus utrinq; angulis, hinc quidem f h d, illic
autem b d f erunt per tertiam conceptionem resi
dui anguli d e f & a d f inter se æquales, quæ est
propositi altera pars.

DVODECIMA PROPO SITIO.

Cuicumq; triangulo circumscribere circulum.

Sit triangulus a b c, cui circumscribitur circu
lus hoc modo. Pes immobilis circini ut libet ex-
tenti ponatur primo in a, & altero pede fiant du
o occulti arcus, alter supra lineam a b, alter in e
fra eam. Deide circino non uariato pedem immo
bilem transfer ad angulum b, & priores arcus
in-

interseca, punctaq; sectionum iunge linea recta. Similiter fiant duæ intersectiones supra & infra lineam a c, aut b c, & intersectiones ut antea iunge linea recta. Hæc cum priori concurret, cōcurrat autem in puncto d, hunc dico esse centrum circuli circumscribendi triangulo a b c, Nam ab angulis ad punctum d trahe lineas rectas d b. d a. d c. hæ facile probantur esse æquales, per secundam primi capitis. Lineæ enim sectiones iungentes secant latera trianguli per media, & sūt super eas perpendiculares.

CAPVT TERTIVM

De proportione.

Proportio, est duarum quantitatum eiusdem generis, inter se habitudo.

PROportio est duplex, Rationalis & irrationalis.

PROportio rationalis, est quæ denominatur ab aliquo numero, & est inter quantitates cōmensurabiles.

PROportio irrationalis, est quæ non denominatur ab aliquo numero, & est inter quantitates incommensurabiles, ut inter costam et diametrū quadrati, q̄ asymmetræ sunt.

PROportio rationalis est dupiex, æqualitatis et inæqualitatis.

PROportio æqualitatis, est quando æquale ad æquale comparatur, ut. 4. ad. 4.