interseca, punctaq; sectionum iunge linea recta. Similiter fiant duæ intersectiones supra & infra lineam a c, aut b c, & intersectiones ut antea iunge linea recta. Hæc cum priori concurret, cōcurrat autem in puncto d, hunc dico esse centrum circuli circumscribendi triangulo a b c, Nam ab angulis ad punctum d trahe lineas rectas d b. d a. d c. hæ facile probantur esse æquales, per secundam primi capitis. Lineæ enim sectiones iungentes secant latera trianguli per media, & sūt super eas perpendiculares.

CAPVT TERTIVM

De proportione.

Proportio, est duarum quantitatum eiusdem generis, inter se habitudo.

PROportio est duplex, Rationalis & irrationalis.

PROportio rationalis, est quæ denominatur ab aliquo numero, & est inter quantitates cōmensurabiles.

PROportio irrationalis, est quæ non denominatur ab aliquo numero, & est inter quantitates incommensurabiles, ut inter costam et diametrū quadrati, q̄ asymmetræ sunt.

PROportio rationalis est dupiex, æqualitatis et inæqualitatis.

PROportio æqualitatis, est quando æquale ad æquale comparatur, ut. 4. ad. 4.

PROportio inæqualitatis, est qua inæqualia inter se conferuntur, ut 8. ad. 4.

PROportio inæqualitatis est duplex, maioris inæqualitatis, & minoris.

PROportio maioris inæqualitatis, est quãdo maior quãtitas cõparatur ad minorẽ, ut. 4. ad. 2.

HVIVS quinq; sunt species. Multiplex. superparticularis, superpartiens, Multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

MVLTIPLEX est quando maior continet minorem plus quàm semel, ut. 12. ad. 3. Hæc crescit in infinitum. Nã alia est dupla, alia tripla etc.

SVPERPARTICVLARIS est, quãdo maior cõtinet minorem, & insuper aliquam eius partem. Et hæc decrescit in infinitũ. Sunt eius species, sesquialtera quando maior continet minorem, & minoris dimidium. Quòd si ultra summam minoris maior continet eius tertiam partem, uocatur sesquitertia.

SVPERpartiens est quando maior continet minorem & aliquot eius partes, Quòd si continet duas tertias, uocatur superbipartiens tertias, ut. 5 3. Si tres quartas, supertripartiens quartas, ut 7 4.

MVLTIPLEX superparticularis est, quando maior continet minorem, plus quàm semel, et insuper aliquam eius partem. Quòd si continet eum bis & eius dimidium, dupla sesquialte-

tera uocatur, ut 5. 2. Si ter & tertiam partem, tripla sesquitertia, ut 10. 3.

MVLTIPLEX superpartiẽs est quando maior continet minorem plus quàm semel, & aliquot præterea partes. Quod si continet eum bis, et duas tertias, uocatur dupla superbipartiens tertias, ut 8. 3. Si ter, & tres quartas, tripla super tripartiens quartas, ut 15. 4.

PROportio minoris inæqualitatis, est quãdo minor quantitas comparatur ad maiorem, ut. 2. ad. 4. Et eius tot sunt species, quot maioris inæqualitatis, neq; differunt ab illis nomine, nisi q; uocabulis proportionum maioris inæqualitatis additur præpositio sub, ut sub multiplex 2. 4. Subsuperparticularis. 2. 3. &c.

DENOMINATIO proportionis, minoris quantitatis ad maiorem est pars uel partes, ut denominatio proportionis inter. 3. & 5. est 3. & inter. 2. 4. $\frac{1}{2}$ 5

DENOMINATIO proportionis, quãtitatis maioris ad minorem est totum, uel totum et pars uel totum & partes ut denominatio proportionis. 4. ad. 3. est. 1. $\frac{1}{3}$.

TERMINI proportionis, sunt minimi numeri in aliqua proportione, ut proportionis sesquialteræ termini sunt. 3. 2. quibus minores in hac proportione reperiri non possunt.

PROPOSITIO PRIMA.

Numeros datæ proportionis ad termi-
nos eius reducere.

Diuidatur maior numerus per minorē, & minor per residuum diuisionis prioris, et residuum primæ diuisionis per residuum secundæ diuisionis, fiatq; talis reciproca diuisio, donec occurrat aliquis numerus qui diuidendum totum consumat. Deinde per hunc numerum ultimo occurrentem, diuide utrosq; numeros proportionis datæ, qui exeunt sunt minimi numeri, hoc est, termini eius proportionis. Vt numeri proportionis q̄ est inter 30. & 18. sic rediguntur ad terminos proportionis. Triginta diuidantur per 18. & relinquentur 12. per quæ diuidantur. 18. & relinquentur. 6. per quæ rursus diuidantur 12. & consumē tur, Per hunc ergo senarium diuidantur numeri dicti scilicet 30. & 18. exibuntq; 5. 3. termini scilicet proportionis datorum numerorum.

Hic animaduertendum, quòd si in tali reciproca diuisione ad unitatem peruenirentur, ipsos datos numeros esse terminos neque posse minores reperiri.

SECVNDA PROPOSITIO.

Cuiuscunq; proportionis datæ denominationem inuenire.

Si proportio data fuerit maioris inæqualitatis, diuide maiorem numerum per minorem, & numerus qui exit, denominatio est proportionis

dae

datæ. Si uero proportio data fuerit minoris inæqualitatis, superpone minorem maiori interiecta uirgula, more minutiarum uulgarium, et habebis denominationem, reducendi tamen sunt numeri ad terminos per præcedentem, sicubi opus (fuerit.

TERTIA PROPOSITIO.

Si unus numerus duos multiplicet, erit multiplicatorum & productorũ una proportio.

Vt 3. & 2. multiplicẽtur senario, & proueniẽt 18. & 12. eandẽ custodientes proportionẽ quã 3. & 2. Similiter ediuerso, Si unus numerus, duos diuidendo utruq; consumat, erit diuisorũ & quotientũ una proportio, ut 6. consumit. 18. & 12 exeunt quotientes 3 & 2 in eadẽ proportione.

QVARTA PROPOSITIO.

Proportionem proportioni addere.

Multiplicẽtur antecedẽtes proportionũ datarũ in se, & deĩde consequẽtes in se, producti numeri custodiẽt proportionẽ cõpositã ex duabus datis, ut proportio 3. ad 2. sit addenda proportioni 4. ad 3. Multiplico prĩo 3. & 4. antecedentes in se & proueniunt 12. deinde 2. & 3. id est, consequẽtes in se, & proueniũt 6. Inter 12. igitur & 6. est proportio cõposita ex duabus datis proportionibus. s. 3. ad. 2. & 4. ad 3. Nã multiplicetur antecedens unius proportiõis in cõsequentẽ alterius, ut 3 in 3 proueniunt 9, qui statuantur inter 12 & 6. hoc modo 1296.

In his itaq; tribus numeris uides dictas duas proportiones. Nam. 12. ad. 9. est proportio, sicut. 4. ad. 3. & 9. ad. 6. sicut. 3. ad. 2. quod patet reducendo eos ad terminos per primam huius.

QVINTA PROPOSITIO.

Proportionem à proportione subtrahere.

Antecedens maioris proportionis multiplicetur in consequentem minoris, deinde consequens maioris in antecedentē minoris, duo numeri producti, custodient proportionem residuam, ut. 4. ad. 3. proportio sit subtrahenda à proportione. 3 ad. 2. facio ergo ut dictum est, & reliquitur proportio. 9. ad. 8. Nam multiplicetur antecedēs maioris in antecedentem minoris, & productū status ante dictos numeros hoc modo. 12. 9. 8. Nonne 12. ad. 8. proportio est sicut. 3. ad. 2. à qua si abiecceris proportionem. 12. ad. 9. id est. 4. ad. 3. relinquitur proportio. 9. ad. 8.

SEXTA PROPOSITIO.

Quotlibet proportiones eiusdem denominationis continuare.

Quærantur per primam, datæ proportionis termini. Et pro duabus continuandis, ducatur antecedens datæ proportionis primo in se, deīde in consequentem, postremo consequens in se tres numeri producti duas custodiunt proportiones similes datæ Verbi gratia. Sint duæ sesquialteræ continuandæ. Proportionis sesquialteræ termi-

ni

ni sunt 3 & 2. Multiplico igitur 3 in se, deinde in 2. Postremo 2. in se, & nascuntur numeri. 9. 6. 4. custodientes duas sesquialteras. Si tres sesquialteræ fuerint continuandæ, ducatur maior terminorum in tres modo inuentos, et minor terminus in ultimum, et exorientur 4 numeri tres sesquialteras seruantes, ut 3 multiplicati in 9, 6, 4. generant. 27. 18. 12. & binarius in 4 ductus procreat 8. sicq; sũt producti quatuor numeri 27, 18, 12, 8. custodientes tres sesquialteras, Si quatuor sesquialteras continuare placuerit, ducatur maior terminus in quatuor iam nunc inuẽtos, & minor terminus in postremum, et habebis quinq; numeros, quatuor sesquialteras continuatas retinentes, ut 81, 54, 36, 24, 16.

CAPVT QVARTVM.

De Proportionalitate.

PROPOrtionalitas est proportionũ similitudo.

QVANtitates dicuntur proportionales, quarum una est proportio.

Proportionalitas est duplex, continua & discontinua.

CONtinua est quando omnes quantitates sunt antecedentes & consequentes, præter primam quæ est antecedens tantum, & ultimam q̃ est consequens tantum. Et hæc reperitur ad minimum in tribus terminis, ut 4, 2, 1.

DIScontinua est quando nulla quantitas simul et

antecedens est, & consequens, ut 12. 6. 8. 4. Et hæc ad minimum in quatuor reperitur terminis.

SEX sunt species proportionalitatis, Conuersa, Permutata, Coniuncta, Disiuncta, Euersa, & Aequa.

CONVERSA est, quando est prima ad secundam, sicut tertia ad quartam, & ex hoc infertur secunda esse ad primam sicut quarta ad tertiam, ut si est 8 ad 4. sicut 6 ad 3. erit econuerso 4. ad 8. sicut 3 ad 6.

PERMVTATA est, quando prima est ad secundam, sicut tertia ad quartam, et ex hoc cõcluditur prima esse ad tertiam, sicut secunda ad quartã, ut si est 8 ad 4. sicut 6. ad 3. erit permutatim 8 ad 6. sicut 4 ad 3.

CONIVNCTA est, quando est prima ad secundam, sicut tertia ad quartam. & ex hoc infertur prima cum secunda esse ad secũdam, sicut tertia cũ quarta ad quartam, ut si est 8 ad 4. sicut 6 ad 3. erit coniunctim 12 ad 4. sicut 9 ad 3.

DISIVNCTA est, quando est prima ad secundã, sicut tertia ad quartam, & ex hoc infertur, excessus primæ super secundam esse ad secundam, sicut excessus tertiæ super quartam ad quartam, ut si est 18 ad 6. sicut 9 ad 3. erit disiũctim 12 ad 6. sicut 6 ad 3.

EVERSA est, quando est prima ad secundam, sicut

cut tertia ad quartam, et ex hoc infertur pri
ma esse ad excessum eius super secundam, si=
cut tertia ad excessum suum super quartam,
ut si est 12 ad 4. sicut 9 ad 3. erit euersim 12 ad 8
sicut 9 ad 6.

AEQVA proportionalitas, est quando sunt du
o ordines proportionum, & proportiones hu
ius ordinis sunt æquales proportionibus illi=
us ordinis, intermißis q; æquali numero inter=
medijs in utroq; ordine, infertur eadem esse
proportio extremorum, ut sint duo ordines æqualium proporti onum, & intermittantur utrobi q; duo intermedij, cernes extre morum eandem esse proportionem.

24	48
8	16
6	12
3	6

PRIMA PROPOSITIO.

Si fuerint tres numeri proportionales, quod continetur sub extremis, æquum est quadrato medij.

Sint tres numeri continuati in proportione sesq altera 9.6.4. ducantur extremi 9 & 4 in se, pro=ducunt 36. quibus æquale est quadratum medij se narij.

SECVNDA PROPOSITIO.

Quemlibet ex tribus proportionalibus ignotum inuenire.

Si alter extremorum ignotus fuerit, quadre=tur medius, & productũ diuidatur per extremũ

notum, prodibit extremus ignotus. Si medius ignoretur, ducantur extremi in se, & producti radix quadrata erit medius.

TERTIA PROPOSITIO.

Si fuerint quatuor numeri proportionales quod cõtinetur sub extremis, æquũ est ei quod sub intermedijs continetur.

Sint quatuor numeri proportionales 6.3.4.2. extremi ducti in se producũt 12. cui æquale est quod conficitur ex medijs 3. & 4. in se ductis.

QVARTA PROPOSITIO.

Quemlibet ex quatuor proportionalibus ignotum inuenire.

Si quis extremorum ignoretur, ducãtur medij in se, et productũ diuidatur per extremũ notũ, et prodibit extremus ignotus. Quòd si quis intermediorum ignotus fuerit, multiplicẽtur in se extremi & productus per medium notum distribuatur, prodibit medius ignotus.

QVINTA PROPOSITIO.

Quando productum ex duob. nũeris est æquale producto ex alijs quibuslibet duobus numeris tunc si hi posteriores duo, prioribus duobus interponantur, aut è contrario, erũt hi quatuor numeri proportionales, ut productum ex 12. & 3. hoc est 36. æquatur producto ex 9 & 4. Quare si 9 & 4 interserantur 12 & 3 hoc modo 12.9.4.3. erũt proportionales, Aut si inter 9. & 4. ponantur 12

&

& 3. nihilominus erunt proportionales, ut 9. 12. 3. 4.

SEXTA PROPOSITIO.

Si totius ad totum est proportio quæ detracti ad detractum, erit residui etiam ad residuum proportio, quæ totius ad totum.

Vt 12 & 8. habent proportionem sesquialteram. Detrahantur itaq; ab eis duo numeri qui eãdem habeant proportionem, ex 12 quidem detrahatur 9. et ex 8 auferantur 6. Dico residuos similiiunctos proportione. Nã subtractis 9. de 12 relinquuntur 3. At 6 de 8 abiectis, remanent 2. 3 aũt respiciunt 2. sesquialtera proportione.

CAPVT QVINTVM.

De Triangulis.

Si duo trianguli ponantur inter lineas æquidistantes, erit ipsorum triangulorum proportio, quæ est basium, qbus insistunt.

Sint duo trianguli a b c & d e f, inter lineas æqdistãtes b e & a f, dico ipsorum esse proportionẽ quæ est basium. Nam si positi fuerint super bases æquales trianguli, sunt æquales, si uero super bases inæquales, & ipsi inæquales per 26. & 27. Quia uero talium triangulorum æqualitas & ĩæqualitas, concomitatur æqualitatẽ & inæqualitatem basium, necessario erit triangulorũ proportio quæ est basium.

SECVNDA PROPOSITIO.

Si linea recta duo trianguli latera secet, tertio æquidistans, erunt segmenta laterũ proportionalia.

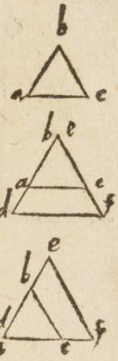
Sit triangulus a b c, cuius latera a b & c b secet linea d e æquidistãter basi a c, dico a d ad d b proportionem esse, sicut c e ad e b. Trahantur enim lineæ d c & e a, Erunt itaq; duo trianguli d e a & d e c æquales. Nam ponuntur super eandem basim d e, ĩter lineas d e et a c æqdistantes, quapropter habet ad triangulum d e b, eandem proportionem. Sed proportio trianguli a d e ad triangulum d e b, est per præcedentem sicut basis a d ad basim d b. Nam trianguli a d e, & d b e ponuntur inter lineas æquidistantes, quod pateret si duceretur à puncto e æquidistans lineæ a b. Similiter per præmissam proportio trianguli d e c ad triangulum d e b est sicut proportio basis c e ad basim e b. Nam trianguli d e c & d e b ponuntur inter lineas æquidistantes, quod pateret si duceretur à puncto d linea æquidistans lineæ b c. Cũ ergo triangulorum est eadem proportio, ut modo ostensum, erit per conceptionem primam, & basium eadem proportio, quæ sunt segmẽta, in quæ latera triãguli a b c disiecta sunt, ergo patet propositum.

TERTIA PROPOSITIO.

Duorum triangulorum, æquiangulorũ, latera æquos angulos respitiẽtia sunt proportionalia.

Sint

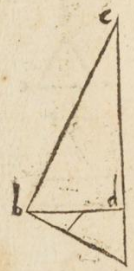
Sint duo trianguli æquianguli a b c & d e f, sitq; angulus a æqualis angulo d, & angulus b angulo e, & angulus c angulo f, dico latera æquos angulos aspicientia esse proportionalia, hoc est, proportionem lateris a b ad d e, & a c ad d f, & b c ad e f, esse unam. Nam si trianguli sunt æquilateri, habebunt latera æquis angulis opposita proportionem æqualitatis. Si uero fuerit laterũ inæqualium, superponatur primo angulus b angulo e. Et quia sunt æquales ex hypothesi, cadet propter octauam conceptionem latus b a super latus e d, & latus b c super latus e f, & quia angulus b a c est æqualis angulo e d f, erit linea a c æquidistans lineæ d f per secundam partem uicesimæ. Nam lineis a c & d f incidit e d linea faciens angulum extrinsecum e a c æqualem intrinseco sibi ex eadem parte opposito e d f, per præcedẽtem ergo d a ad a b sicut f c ad c b, & per proportionalitatem coniunctam d a e ad a b sicut f c e ad c b. Deinde angulus a congruat angulo d, & simili modo probetur f d esse ad c a sicut e d ad b a, & patebit propositum.



QVARTA PROPOSITIO.

Si ab angulo recto trianguli orthogonij, cecidẽrit ad basim perpẽdicularis, erunt tres trianguli. f. totalis & duo partiales æquianguli. Vnde perpendicularis inter segmenta basis medio loco erit proportionalis. Item utrunq; latus medio

loco proportionale erit inter totam basim & segmentum sibi conterminale.



Sit triangulus a b c, cuius angulus b rectus, à quo ad basim a c cadat perpēdicularis b d: Dico totalem triangulũ a b c, et duos partiales a b d & b d cĩter se esse æqangulos. Nã quilibet eorũ hĕt angulum rectũ, totalis quidĕ a b c, partiales uero, angulos q̃ sunt ad d, cõmunicat insuper uterq; partialiũ cum totali in uno angulo, quare tertij erũt ctiã æquales propter 24. pri. cap. Metĕto igitur angulũ b a d æqualĕ esse ãgulo d b c, & angulũ a b d æqualĕ angulo b c d. Corollarij utraq; pars facile probatur, si diligenter aduerteris, quæ latera æqualib. opponantur angulis: Cũ enim duo partiales trianguli sint æqanguli, erũt per præcedentĕ latera æquos angulos respiciĕtia proportionalia. Latus itaq; a d sinistri trianguli ad latus d b trianguli dextri, est sicut idĕ latus d b trianguli sinistri ad latus d c trianguli dextri. Hic aduerte b d lineã bis sumi, prio ut latus dextri trianguli, deinde ut latus sinistri triãguli, et ut uarie sumitur, ita uarios aspicit angulos. Rursus latus a c totalis triãguli ad latus a b sinistri sicut latus a b totalis triãguli ad latus a d sinistri. Viden latus b a medio loco esse proportionale inter totam basim a c, & partem sibi conterminalem a d. Similiter latus a c totalis trianguli ad latus b c dextri, sicut latus b c totalis ad latus d c dextri.

Quinta

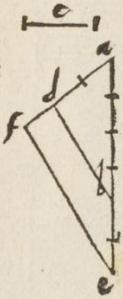
Duabus lineis propositis, tertiam inter eas in proportionalitate continua collocare.

Sint duæ lineæ a b, & b c, inter quas linea medio loco proportionalis inuenitur, hoc modo. Datæ lineæ cõtinuentur in directum, & sint a b c, deinde super eas cõtinuatas ducatur semicirculus a d c, & à puncto b educatur perpendicularis d b usq; ad circumferentiam semicirculi. Hanc dico esse medio loco proportionalem inter lineas a b, & b c datas. Nam protrahantur lineæ d a & d c. Erit itaq; per primam secundi capitis angulus a d c rectus, à quo ad basim a c cadit per hypothesim perpendicularis b d, per præcedentem ergo ipsa b d est medio loco proportionalis inter segmenta basis a b & b c, hoc est, inter lineas datas,

SEXTA PROPOSITIO.

Duabus lineis datis, tertiam eis in continua proportionalitate subiungere.

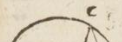
Sint dnæ lineæ datæ a b, et c, propositũ est eis subiungere tertiam, ad quam se habeat secũda, sicut prima se habet ad secundam. Coniunge ergo angulariter lineæ a b lineam a d æqualem c datæ et connectatur b d. Deinde lineam a b protrahe usq; ad e ita ut b e sit æqualis c datæ, & ex pũcto e educ æquidistantem ipsi b d, quam produc donec concurrat cum a d protracta in puncto f. Dico d f esse eam quæ quæritur. Nam ĩ triangulo a e f, linea b d secat duo eius latera a f & a e, æquidistãs



tertio, ergo per secundam huius segmenta erunt proportionalia, hoc est a b ad b e, quare etiã ad c, sunt enim positæ æquales, sicut a d, & ob id c, ad d f.

SEPTIMA PROPOSITIO.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se ad inuicem secuerint, rectangulum comprehẽsum sub sectionib unius, æquale est ei quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



In circulo a d b c secent se duæ rectæ ut cumq; contigerit a b & c d in puncto e. Dico rectangulum quod continetur sub lineis a e & e b, æquale esse ei quod continetur sub d e & e c. Trahãtur a d & c b rectæ. Et quia trianguli a e d & e c b sũt æquianguli, nam angulus a e d æquatur sibi contraposito b e c per undecimam primi capitis, & angulus d a e æqualis est angulo b c e per nonam secundi capitis, suscipiuntur enim ab eodem arcu scilicet d a c b, tertius itaq; angulus tertio æqualis est propter 24 primi capitis. Latera itaq; æquos angulos respicientia, sunt proportionalia per tertiam huius. Ergo a e ad e c sicut e d ad e b, ergo per tertiam quarti capitis, quod fit ex a e in e b æquale est ei quod fit ex e c in e d, quod est propositum.

OCTAVA PROPOSITIO.

Si

Si circulum linea contingat, & à termino contingentis trahatur linea circulum dispescens, quod continetur sub tota dispescente & parte eius exteriori, æquum est quadrato lineæ contingentis.

Sit circulus b d c, quẽ linea a b cõtingat in pũcto b, & à termino a lineæ cõtingentis utcumq; libuerit, trahatur linea circulum in duas portiones dispescens, sitq; a d c. Dico rectangulũ, quod sub tota a d c continetur, & portione exteriori a d, æquum esse quadrato lineæ contingentis a b. Trahantur à puncto contactus b ad puncta quibus linea a d c circulum secat, lineæ b d & b c. Habes duos triangulos æquiangulos, totalem, scilicet a b c, & partialem a b d. Nam angulus b c a, totalis trianguli, æqualis est per undecimam secundi cap. ãgulo a b d, partialis trianguli. Et angulus b a d utriq; est communis, tertius igitur tertio æqualis est. Et quia triãguli a b c & a b d sunt æquianguli, erũt per tertiã huius, latera æquos angulos respicientia proportionalia. Latus igitur totalis trianguli c d a, ad b a latus partialis trianguli, sicut latus b a totalis trianguli, ad latus d a partialis trianguli. Tres ergo lineæ c a, a b, d a, sunt continue proportionales, per primam ergo quarti capitis quod fit ex prima c a in tertiam d a æquũ est quadrato mediæ a b, quod erat demonstrandum.

FINIS.