Die
Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche

von

Friedr. Roth.

(Mit zwei Figurentafeln).

Wissenschaftliche Beilage

zum

Jahresbericht der vollberechtigten höheren Bürgerschule zu Buxtehude.

Buxtehude,
Druck von J. Vetterli.
1882.

1882. Progr.-Nr. 294.

BUXT (1882)
1

Fehlerberichtigung.

Auf	Seite	3	Zeile	3	von oben	lies	infolge	anstatt	in Folge
			«	8	« «	«	Da, von	«	Da von
			«	14	« «	«	vor allem	«	vor Allem
			«	15	von unten	«	letztere	«	Letztere
			«	14	« «	«	jener	«	Jener
«	«	5	«	26	von oben	«	erstere	«	Erstere
			«	27	« «	«	letztere	«	Letztere
			«	28	« «	«	könne,	«	könne
			«	13	von unten	«	letztere	«	Letztere
«	«	6	«	2	von oben	«	infolge	«	in Folge
			«	11	« «	«	thätig	«	tätig
			«	23	« «	«	thun	«	tun
			«	4	von unten	«	Thatsachen	«	Tatsachen
«	«	7	«	17—18	von oben	«	Übereinstimmung	«	Uebereinstimmung
			«	22	von unten	«	in betreff	«	im Betreff
			«	16	« «	«	widerlegen, und	«	widerlegen und
			«	7	« «	«	teilnimmt	«	Teil nimmt
			«	6	« «	«	Trägheitsbahn	«	Trägh eitsbahn
«	«	9	«	1	von oben	«	übrigen	«	Übrigen
			«	11	« «	«	letztere	«	Letztere
			«	25—26	« «	«	nämliche	«	Nämliche
«	«	10	«	15	von unten	«	der letzten Glieder	«	des letzten Gliedes
			«	14	« «	«	Übereinstimmung	«	Uebereinstimmung
			«	9	« «	«	der r	«	der r und x
«	«	12	«	9	von oben	«	Scheibe,	«	Scheibe'
«	«	13	«	14	« «	«	Centrifugalkraft, überall	«	C.kraft überall
					« «	«	steht	«	stehen
«	«	16	«	3	von unten	«	des Erdhalbmessers	«	der Erdhalbmesser
«	«	18	«	16	« «	«	P_h	«	P_r
«	«	20	«	5	von oben	«	$\sqrt{D}$	«	D
			«	17—18	schalte hinter der Gleichung ein Komma ein.				
«	«	21	«	12	von unten lies Quadrat der Geschwindigkeit anstatt c				
«	«	25	«	16	von unten lies Kreis sich			anstatt	Kreis, sich

In den Figurentafeln:

ziehe bei Fig. 9 auf Tafel II. OP anstatt OP'.

Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche.

I.

Frühere Lösungen.

Es gilt in der heutigen Naturwissenschaft als ausgemacht, dafs die Bewegungen auf der Erdoberfläche durch die Drehung der Erde um ihre Achse beeinflufst werden. Nicht blofs, dafs Physiker durch Versuche beweisen, dafs in Folge der Drehung der Erde ein frei fallender Körper von dem Lote abweicht, und dass die Ebene eines schwingenden Pendels sich dreht, auch über den Lauf der Flüsse und der Meeresströmungen und über den Seitendruck der Eisenbahnzüge auf ihre Schienen haben Naturforscher und Techniker Beobachtungen angestellt, aus denen hervorgeht, dafs der Druck eines sich bewegenden irdischen Körpers nach derjenigen Seite hin am stärksten sich äufsert, welche der Richtung entgegengesetzt ist, nach der die Erde sich dreht. Da von Norden aus gesehen, die Erde sich links herum dreht, so würden demnach nördlich vom Äquator die bewegten Körper das Bestreben haben, nach rechts auszuweichen.

Wenn aber diese Ansicht richtig ist, so mufs sie weniger von den Meeresströmungen und den Flüssen gelten, die doch durch ihre Ufer vielfach beengt und gehindert werden, als von dem gewaltigen Luftmeere, welches den ganzen Erdball umgiebt, und dessen Ströme in keinerlei Bett eingeschlossen sind. Daher haben vor Allem die Witterungskundigen diesem Gegenstand ihre Aufmerksamkeit zugewandt und dadurch für verschiedene Naturerscheinungen die Erklärung aufgefunden. So hat schon Halley im Jahre 1685 die Richtung der Passatwinde aus der Umdrehung der Erde abzuleiten versucht. 150 Jahre hindurch, bis zum Auftreten H. W. Doves, geschah, wie dieser selbst sagt, nichts zur Weiterbildung der bezeichneten Theorie. Erst der Letztere hat es unternommen, das, was Jener nur für die Gegenden zwischen den Wendekreisen gelten lassen wollte, auf alle Teile der Erdoberfläche auszudehnen. Hören wir, wie der Begründer der wissenschaftlichen Witterungskunde in Norddeutschland in seinen 1837 erschienenen »meteorologischen Untersuchungen« mit der ihm eigenen Meisterschaft der sprachlichen Darstellung seine Lehrsätze entwickelt! Er schreibt auf Seite 125:

> »Die Rotationsgeschwindigkeit der einzelnen Punkte der Oberfläche der Erde verhält sich wie die Halbmesser der Parallelkreise, unter welchen sie liegen, sie nimmt also zu von den Polen, wo sie Null ist, bis zum Aequator, wo sie am grössten ist. Im Zustande der Ruhe nimmt die Luft Theil an der Drehungsgeschwindigkeit des Ortes, über welchem sie sich befindet. Wenn sie daher durch Temperaturdifferenz oder irgend eine andere Ursache ein Bestreben erhält, in einem Parallelkreise zu fliessen, so wird die Drehung der Erde durchaus keinen Einfluss auf sie äussern, weil die Punkte der Oberfläche, zu welchen die strömende Luft gelangt, genau dieselbe Drehungsgeschwindigkeit haben, als die Punkte, welche sie verlassen hat. Wird aber Luft durch irgend eine

Ursache von den Polen nach dem Aequator getrieben, so kommt sie von Orten, deren Rotationsgeschwindigkeit gering ist, nach Orten, an welchen sie grösser ist. Die Luft dreht sich also dann mit einer geringeren Geschwindigkeit nach Osten, als die Orte, mit welchen sie in Berührung kommt, sie scheint daher nach entgegengesetzter Richtung, d. h. von Ost nach West zu fliessen. Die Ablenkung des Windes von der anfänglichen Richtung wird desto grösser sein, je mehr sich bei gleichbleibender fortrückender Bewegung die Drehungsgeschwindigkeit des Ausgangspunktes unterscheidet von der Drehungsgeschwindigkeit des Ortes, an welchem der Wind beobachtet wird, d. h. je grösser der Unterschied der geographischen Breite beider Orte ist.

Daraus folgt:

1) auf der nördlichen Halbkugel gehen Winde, welche als Nordwinde entstehen, bei dem allmäligen Fortrücken durch NO. immer mehr in Ost über;
2) auf der südlichen Halbkugel gehen Winde, welche als Südwinde entstehen, bei dem allmäligen Fortschreiten durch SO. immer mehr in Ostwinde über.«

Und weiter auf S. 127:

»Luft, welche von dem Aequator nach den Polen abfliesst, kommt von Orten mit grösserer Drehungsgeschwindigkeit nach Orten hin, welche sich langsamer nach Ost bewegen. Daraus folgt:

3) auf der nördlichen Erdhälfte geht ein südlicher Wind bei seinem Fortschreiten allmälig immer mehr durch SW. in West über;
4) auf der südlichen Erdhälfte geht ein nördlicher Wind bei seinem Fortschreiten allmälig immer mehr durch NW. in West über.«

Welchen Einflufs Dove auf die deutsche Wissenschaft ausübte, erkennt man daraus, dafs später drei Abhandlungen erschienen, in denen der Versuch gemacht wurde, die soeben von uns wiedergegebenen Sätze mathematisch zu begründen. Die erste derselben veröffentlichte 1858 Generalmajor von Baeyer im 104. Bande von Poggendorffs Annalen unter der Überschrift: »Ueber die Bahnlinien der Winde auf der sphäroidalen Erdoberfläche.« Er geht von der Behauptung aus, dafs ein Luftteilchen, welches auf der ruhenden Erdoberfläche ohne Widerstand sich nur unter dem Einflufs der allgemeinen Schwere bewegt, eine »kürzeste Linie« beschreibe. Ein Beweis dafür wird nicht erbracht, auch wird nicht weiter ausgeführt, was er unter der kürzesten Linie verstehe. Jedenfalls meint er die geodätische Linie, d. h. diejenige Kurve, deren Schmiegungsebene überall lotrecht zum Horizont der Orte steht, welche von ihr getroffen werden. Die kürzeste Linie auf jeder durch Umdrehung entstandenen Oberfläche hat aber nach Baeyer die Eigenschaft, dafs auf allen Punkten derselben der Abstand von der Drehungsachse multipliciert in den Sinus des von Norden aus gezählten Azimuts, eine unveränderliche Gröfse giebt. Nun nimmt der Abstand von der Drehungsachse vom Äquator nach den Polen zu beständig ab und ist hier null. Daraus folgert der Verfasser für die kürzeste Linie die Eigenschaft, dafs sie den Pol niemals erreichen kann, sondern sich bei fortgesetzter Verlängerung spiralförmig um denselben herumwindet, ausgenommen den Fall, dafs die Bewegung von Norden nach Süden oder umgekehrt erfolgt.

Wird nun das Erdsphäroid in Umdrehung versetzt, so kann das bewegte Teilchen in Beziehung zu der sich drehenden Oberfläche nicht mehr die kürzeste Linie beschreiben, »sondern sein Weg wird die Abwickelung der kürzesten Linie,« nach dem »ihm innewohnenden Rotationsverhältniss auf der sphäroidischen Oberfläche sein.« Was aber von der kürzesten Linie gilt, mufs auch von ihrer Abwickelung gelten, d. h. das bewegte Luftteilchen kann den Pol nie erreichen.

Wie nahe war der Verfasser doch der Wahrheit! Man kann wohl annehmen, dafs er die

Lösung gefunden haben würde, wenn er statt des Erdsphäroids den einfacheren Fall der kugelförmigen Oberfläche zur Voraussetzung gewählt hätte. So aber verwickelt er sich von vorn herein in den Fehler, dafs er als die Bahn auf ruhendem Ellipsoid die kürzeste Linie annimmt. Dieselbe kann nur dann beschrieben werden, wenn die Richtung der Anziehungskraft der Erde an allen Punkten zur Tangentialebene senkrecht steht, denn nur dann kann die Ebene, welche durch drei unendlich nahe Punkte der Bahn geht, die Lotrechte in sich schliefsen. Nun aber ist die Anziehungskraft der Erde, wie sie sich äufsern würde, wenn diese ruhte, nicht lotrecht gerichtet, sondern enthält eine nach dem Pol gerichtete Komponende, so dafs, wenn die Erde still stände und keine Reibung den auf ihrer Oberfläche sich bewegenden Körpern entgegensetzte, alle auf dieser befindlichen Gegenstände nach den Polen hingleiten müfsten. Allerdings wirkt die durch Erfahrung zu findende Schwerkraft senkrecht zum Horizont, aber diese setzt sich zusammen aus der Massenanziehung der Erde und dem durch die Umdrehung der Erde erzeugten Fliehbestreben, welches alle mit der Erde sich bewegenden Körper von der Drehungs-Achse zu entfernen sucht.

Aufser dieser falschen Annahme, über deren Unrichtigkeit seit der im vorigen Jahre von Sprung in derselben Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung kein Zweifel mehr sein kann, begeht von Baeyer noch den zweiten Fehler, dafs er die »Rotationsgeschwindigkeit« des Lufttheilchens, welche demselben im Ausgangspunkte bei relativer Ruhe innewohnt, für den ganzen Weg des Windes als gleichbleibend betrachtet.

Diesen Fehler hat der Verfasser mit der ganzen Dove'schen Schule gemeinsam. Der Irrtum tritt in den beiden anderen der drei genannten Abhandlungen noch deutlicher hervor, da in denselben, weil die Erde als kugelförmig vorausgesetzt wird, die räumliche Anschauung sich bedeutend vereinfacht. Die frühere dieser Schriften ist die von Ohlert in Elbing: »Zur Theorie der Strömungen des Meeres und der Atmosphäre«, abgedruckt in Poggendorffs Annalen, 110. Band. Die zweite ist ebenda 1866 im 129. Bande erschienen, mitgeteilt aus den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, unter dem Titel: »Ueber die Bewegung eines freien Theilchens auf einer sich drehenden Kugel«, von Albert Mousson. Der Erstere will die Untersuchungen von Baeyer ergänzen, indem er die Gleichung der Bahn aufstellt, was dieser unterlassen habe, der Letztere behandelt die Frage, ob der Föhn der Schweiz von den westindischen Inseln herstammen könne und verneint dieselbe, in ihrem mathematischen Teile aber sind beide Abhandlungen sich ganz gleich, und es kann nur Wunder nehmen, wie in einer in Berlin erscheinenden Zeitschrift der Aufsatz eines Ausländers Aufnahme finden konnte, ohne dafs auch nur auf die Priorität eines Angehörigen des preufsischen Staates hingewiesen worden wäre.

Sowohl Ohlert als Mousson gehen von der Voraussetzung aus, dafs die Geschwindigkeit des bewegten Teilchens in der Richtung des Meridians sich nicht verändere, weil, wie der Letztere sagt, »dieselbe von der Drehung nicht afficirt« werde. Ebenso bleibt seine Geschwindigkeitskomponende längs des Breitenkreises, auf ein stillstehendes Koordinatensystem bezogen, im ganzen Verlauf der Bahn dieselbe wie im Ausgangspunkte, während diejenige der Orte der Erdoberfläche nach den Polen zu mit dem Cosinus der geographischen Breite abnimmt. Bedeutet nun, wie bei Ohlert, der sich in seinen Bezeichnungen möglichst an Baeyer anschliefst, M die Geschwindigkeit in der Richtung Süd-Nord, A die ostwestliche absolute Geschwindigkeit des Ausgangspunktes, c dasselbe für einen Punkt des Äquators, λ die geographische Länge des bewegten Teilchens, β dessen geographische Breite und λ_0, β_0 dasselbe im Anfange der Zeit, so folgt aus der Bedingung

$$d\,\lambda \cos \beta = (A - c \cos \beta)\, d\,t$$

unter der Voraussetzung, dafs A und M sich nicht mit t ändern, die Gleichung der Bahn

$$M\,(\lambda - \lambda_0) = A \log.\,\text{nat.} \left[\frac{\operatorname{tg}\,(45^0 + {}^1/_2\,\beta)}{\operatorname{tg}\,(45^0 + {}^1/_2\,\beta_0)}\right] - c\,(\beta - \beta_0).$$

Mousson verschlechtert diese Formel noch dadurch, dafs er aus einer Gleichung einsetzt, die er in Folge seiner fehlerhaften Annahme der Unveränderlichkeit der süd-nördlichen Geschwindigkeit erhalten hat.

Der Irrtum, in welchem Dove selbst und seine Anhänger befangen waren, springt nun in die Augen. Dieselben betrachten die Kugelkoordinaten der Länge und Breite gerade so, als ob es rechtwinkelige Grundrichtungen in einer Ebene wären. Habe ich zwei rechtwinkelige Koordinaten in einer Ebene, dann allerdings mufs nach dem Gesetze der Beharrung die Projektion der Geschwindigkeit auf jede der beiden Achsen konstant bleiben, aber für die unfreie Bewegung auf der Kugel oder auf dem Sphäroid kann dies nicht mehr gelten. Wenn ein Körper gezwungen wird, sich auf der Oberfläche einer ruhenden Kugel zu bewegen, während in der Richtung der Tangente seiner Bahn keinerlei Beschleunigung noch Widerstand tätig ist, so mufs die Resultante der wirkenden Kräfte nach dem Mittelpunkt der Kugel gerichtet sein. Dann aber bewegt er sich in dem Umfange des gröfsten Kugelkreises, dessen Ebene durch die anfänglich gegebene Richtung der Geschwindigkeit bestimmt ist. Derselbe wird mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen. Denn da die anziehenden Kräfte nach einem Punkte gerichtet sind, so gilt auch hier wie bei jeder Centralbewegung der Satz, dafs der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchläuft. Nun ist aber der Winkel, welchen die Berührende eines beliebigen Hauptkreises mit einer bestimmten Himmelsrichtung bildet, keine unveränderliche Gröfse, es gilt vielmehr für ihn als kürzeste Linie der von Baeyer in anderer Form ausgesprochene Satz, dafs der Sinus seines von Norden her gezählten Azimuts sich umgekehrt verhalte wie der Cosinus der geographischen Breite. Dasselbe steigt in gröfster Nähe des Pols auf einen Rechten und ist am kleinsten am Äquator. Ausgenommen sind der Äquator selbst und die Längenkreise. Wenn aber das Azimut der Bewegungsrichtung sich verändert, so tun dies auch die beiden Seitengeschwindigkeiten längs des Meridians und längs der Linie Ost-West, und es ist daher nicht statthaft, wenn in den oben angeführten Formeln, wie es von Öhlert und Mousson geschehen ist, M und A wie konstante Gröfsen behandelt werden.

Den Dove'schen Behauptungen liegt der Gedanke zu Grunde, dafs auf einer ruhenden Kugel ein Körper, der sich von Ost nach West oder umgekehrt bewegt, kein Bestreben habe, aus dem Breitenkreise herauszutreten. Wie aus dem Gesagten hervorgeht, mufs diese Anschauung verlassen werden, da auch in diesem Falle der bewegte Körper um so viel aus dem Parallelkreis abbiegt, als die Abweichung des gröfsten Kugelkreises beträgt, welcher jenen Kreis im Ausgangspunkte berührt. Man kann es daher wohl als einen Fortschritt bezeichnen, wenn in der neueren Zeit viele Meteorologen sich der Ansicht zuneigen, dafs die ablenkende Kraft der Erdumdrehung sich stets geltend mache, nach welcher Himmelsrichtung hin auch der Wind wehe. So lesen wir in einem der besten in unserer Zeit erschienenen Lehrbücher der Witterungskunde, in der 1879 gedruckten 2. Auflage der »Grundzüge der Meteorologie« von Mohn S. 151 und 152:

> »In Folge der Umdrehung der Erde und ihrer Kugelgestalt zeigt nämlich jeder Körper, welcher sich frei längs der Oberfläche der Erde bewegt, ein Bestreben, die Richtung seiner Bewegung zu ändern, und zwar in der Art, dass er auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen nach links abweicht.« . . . . . »Die ursprüngliche Richtung des bewegten Körpers hat auf dieses Drehungsbestreben keinen Einfluss, es ist, an einem bestimmten Orte, gleich stark, mag der Körper sich nach Süd oder Nord oder Ost oder West bewegen.«

Doch giebt es Tatsachen, welche sich dieser Ansicht nicht fügen. So haben schon 1867 Oberst Wiegrebe und Major Darapsky in Berlin Beobachtungen über den Einflufs der Erddrehung auf die Abweichung der aus gezogenen Rohren abgeschossenen Projektile veröffentlicht, welche das merkwürdige Ergebnis zeigen, dafs diese Abweichung nach Osten stärker ist als im

Westen, und zwar dergestalt, dafs sie im östlichen Quadranten fortwährend steigt, je mehr man sich dem Ostpunkte nähert, dagegen auf der Westseite in eben der Weise nach dem Westpunkte zu abnimmt. Für diese Erscheinung hat Finger die Erklärung in einer Abhandlung zu geben versucht, die 1877 im Junihefte der Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien mitgeteilt worden ist. Derselbe betrachtet die Erde als ein Sphäroid und findet so, dafs die Formel für die Ablenkungskraft der Erdumdrehung, wie sie durch die französischen Akademiker für eine kugelförmige Erde in die Wissenschaft eingeführt worden war, eine Veränderung erfahren müsse. Der Verfasser bezeichnet mit m die Masse des bewegten Punktes, mit s ein Stück von dessen Weg, mit a den Halbmesser des Äquators, mit φ die Polhöhe des Punktes der Bahn, mit ε die Excentricität des Erdsphäroids, mit ϑ das von Norden über Osten gezählte Azimut und findet die Ablenkungskraft der sphäroidalen Erde ausgedrückt durch die Formel

$$2\ m \frac{ds}{dt} w \sin\varphi - m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{a} \operatorname{tang}\varphi \sin\vartheta \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi},$$

während dieselbe vorher nur dem ersten Teil dieses Binoms gleich gesetzt wurde. Da nun $\sin\vartheta$ bei einer nach Osten gerichteten Bewegung gleich $+1$, bei einer nach Westen gerichtete -1, so erhält man im ersten Falle eine Vergröfserung, im zweiten eine Verringerung des für die Kugel gültigen Wertes um den Koefficienten von $\sin\vartheta$ im zweiten Summanden, in vollständiger Uebereinstimmung mit den angezeigten Beobachtungen über die Abweichung der Geschosse.

II.

Die wagerechte Ebene am Pol.

In seinem berühmten Werke über den Golfstrom bemerkt der verstorbene Geograph Petermann im Betreff der vorangegangenen Litteratur, dafs dieselbe wenig Erfolge aufzuweisen habe, weil über den Gegenstand bisher zu viel geschrieben, aber zu wenig gezeichnet worden sei. An diese Worte wurde ich erinnert, als mir der Aufsatz in die Hände fiel, den der Beamte der deutschen Seewarte in Hamburg, Herr A. Sprung, 1880 im Januarheft der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie unter dem Titel veröffentlicht hat: »Die Trägheitscurven auf rotirenden Oberflächen als ein Hilfsmittel beim Studium der Luftbewegung.« Bemüht, die Dove'schen Lehrsätze zu widerlegen und von der Meinung ausgehend, dafs dieselben wegen ihrer Anschaulichkeit so weiten Eingang gefunden haben, versucht er die Bahn des Windes zunächst für den einfachen Fall, dass die Bewegung ohne Reibung und ohne Luftwiderstand auf einer wagerechten Ebene nahe am Pol erfolgt, auf möglichst augenfällige Weise darzustellen. Für eine solche Ebene kann man eine Scheibe setzen, welche sich um eine zu ihr senkrechte Achse mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in demselben Sinne wie die Erde dreht. Wie wird sich ein Körper auf ihr bewegen, wenn er ohne irgend welche Kraft nur durch einen einmaligen Anstofs fortgetrieben wird? Offenbar mufs derselbe dem Gesetze der Trägheit folgen und eine gerade Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen. Für einen auf der Scheibe selbst befindlichen Beobachter aber, welcher an der Umdrehung derselben Teil nimmt, wird die von dem Körper relativ beschriebene Kurve, die sogenannte Trägheitsbahn, von der geraden Linie wesentlich verschieden sein. Doch kann man sie durch Zeichnung leicht darstellen, indem man sich die Stellen anmerkt, an denen der bewegte Körper sich auf der geraden Linie in bestimmten Zeitabschnitten befindet, und ebenso die Winkel, um welche sich der Beobachter mit der Scheibe zu derselben Zeit gedreht hat, dann durch jene Stellen vom Drehungsmittelpunkte aus Kreise beschreibt und auf ihnen die zu den entsprechenden Winkeln gehörigen Bögen nach der der wirklichen Drehung

entgegengesetzten Seite abträgt. Auf diese Weise führt der Genannte eine punktweise Konstruktion der fraglichen Linie aus. Für den Fall, dafs die Bewegung durch den Pol selbst geht, hat er ihre Gleichung aufgestellt und sie als die Archimedeische Spirale erkannt. Der Beweis dafür ist leicht. Denn da sowohl die absolute Bewegung als auch die Drehung gleichmäfsig sind, so stehen die auf der Geraden absolut zurückgelegten Strecken und ebenso die Winkel, um welche sich ein Punkt der Scheibe dreht, im geraden Verhältnis zu der abgelaufenen Zeit, folglich verhalten sich auch die Strecken wie die Winkel. Für den angenommenen Fall werden aber diese Strecken zu den Leitstrahlen, die Winkel zu den Winkelabscissen der Kurvenpunkte, mithin erhalten wir die Bedingung für die Polargleichung der bezeichneten Spirale.

Beim Durchlesen dieser Abhandlung kam mir der Gedanke, ob es nicht möglich sei, die Eigenschaften der von dem Verfasser gesuchten, aber nur punktweise gezeichneten Krummen auf analytischem Wege abzuleiten und ihre Natur für alle Fälle zu ergründen. Ich stellte mir daher die Aufgabe:

»Welches ist die Bahn eines schweren Teilchens, das sich auf einer wagerechten Ebene am Nordpol der Erde ohne Reibung nur unter dem Einflusse seiner Trägheit bewegt, wenn dabei auf die Umdrehung der Erde um ihre Achse unter der Vorraussetzung Rücksicht genommen wird, dafs die absolute Anziehung der Erdmasse — aber nicht die aus Beobachtungen zu findende Schwerkraft — an allen Stellen der Ebene senkrecht zu ihr sei.«

Zu dieser letzteren Annahme drängt der Umstand, dafs der Körper für einen aufserhalb der Erde stehenden Beobachter eine gerade Linie gleichmäfsig durchlaufen soll. Dadurch ist jede längs der Ebene wirkende Kraftkomponende ausgeschlossen.

Die vollständige Lösung dieser Aufgabe ist von mir im Juliheft des vorjährigen Bandes der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie S. 283—286 veröffentlicht worden unter dem Titel: »Beitrag zur Sprung'schen Trägheitskurve.« Leider ist dieselbe nicht frei von Druckfehlern, vor denen sich der eine auf die Schreibung meines Namens bezieht.

Die gesuchte Bahn ist für den Fall, dafs der bewegte Körper in irgend einem Punkte in Beziehung zur Erde ruht, die Evolvente desjenigen Kreises, der vom Pole aus durch jenen Punkt beschrieben ist, und zwar entsteht dieselbe, indem der Faden auf den Kreis rechts herum aufgewickelt und ebenso von ihm abgewickelt wird. Ist dagegen der Körper an derjenigen Stelle seiner Bahn, welche dem Pole am nächsten liegt, in Beziehung zur Erde mit einer gewissen Geschwindigkeit begabt, so wickele man den Kreis ab, der durch diese Stelle geht, lasse aber auf dem gespannten Faden einen Punkt gleiten mit derselben Geschwindigkeit und in demselben Sinne, als die gegebene relative Gröfse der Bewegung in der gröfsten Nähe des Drehungsmittelpunktes beträgt. In der genannten Abhandlung habe ich diesen Ort der gröfsten Nähe als den Fufspunkt des Lotes bezeichnet, das man vom Pol aus auf die gerade Linie der absoluten Bewegung fällen kann.

Der Beweis hierfür läfst sich am einfachsten durch blofse Anschauung erbringen.

Ein Massenteilchen bewege sich vermöge seiner Trägheit gleichmäfsig auf der Geraden AB (in Fig. 1), während sich unter ihm eine Scheibe um N umgekehrt wie der Zeiger der Uhr herumdreht. Soll nun das Teilchen in Beziehung zur Scheibe in Ruhe sein, so kann dies nur dadurch geschehen, dafs im Fufspunkte P des Lotes aus N seine Geschwindigkeit mit der Drehbewegung des auf der Scheibe mit NP um N beschriebenen Kreises übereinstimmt. Ist dies aber der Fall, so können wir die bewegte Masse auch als den Endpunkt eines Fadens ansehen, der um den Kreis um N aufgerollt ist und gespannt diesen entweder dreht, oder durch den sich drehenden Kreis herangezogen wird. Für den mit der Rolle sich drehenden Beobachter scheint diese still zu stehen und der Berührungspunkt von Schnur und Rolle schraubenrecht auf dem Umfange herum zu rücken; im

Übrigen können wir auch für ihn unsere Anschauung fest halten. Mithin ist die Bahn des bewegten Teilchens relativ zu der sich drehenden Scheibe diejenige Linie, welche von dem Endpunkte eines sich auf den Kreis mit NP aufwickelnden und von dem Punkte, wo das Ende den Kreis trifft, wieder rechts herum sich abwickelnden Fadens beschreibt, das sind aber zwei entsprechende Äste einer Kreisevolvente.

Stimmt dagegen die geradlinige Bewegung auf der Berührenden AB in P nicht mit derjenigen des Kreises um N überein, so denke man sich, dafs längs AB ein Faden gezogen werde, welcher den Kreis dreht, dafs aber gleichzeitig auf dem Faden ein Körper, etwa eine durchbohrte Perle, in Beziehung zum Faden mit der für P gegebenen relativen Bewegungsgröfse gleite.

Nehmen wir nun wieder unsern Standpunkt auf der sich drehenden Scheibe, so können wir die gleitende Perle auf dem Faden beibehalten, nur mufs wiederum der Letztere von der feststehenden Rolle abgewickelt, bezw. auf sie aufgewickelt werden. Die Ausführung der Zeichnung ergiebt dann die verschiedenen Arten der Bahn, wie ich sie an dem genannten Orte auf S. 286 unterschieden habe.

Die Rücksicht auf den Herausgeber jener Zeitschrift, Herrn Prof. Hann, der allzu geometrische Untersuchungen vermieden sehen wollte, zwang mich, die analytische Entwickelung der mathematischen Formeln mehr abzukürzen, als für meine Sache gut war. Da nun mir gegenüber der Wunsch laut geworden ist, ich möchte die benutzten Grundformeln ausführlich begründen, so ergreife ich die sich mir bietende Gelegenheit, um diese Lücke meiner frühern Arbeit auszufüllen und gleichzeitig noch einige andere Betrachtungen hinzuzufügen, welche für die anschauliche Vorstellung der untersuchten Kurve von Wichtigkeit sind.

Handelt es sich um die Bewegung auf einer geradlinigen Strecke s, so kann nach dem Gesetze der Beharrung eine Änderung der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ nur durch eine Kraft erfolgen, es ist daher für die Masse m die Kraft ausgedrückt durch $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Das Nämliche gilt für parallele Projektionen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, so dafs auch für die drei Achsen x, y, z die zweiten Ableitungen der Koordinaten, genommen nach der Zeit, die Beschleunigungen der Kräfte bezeichnen. Anders wird es für die Polarkoordinaten. Liegen der Radius vector r und die Winkelabscisse u eines feststehenden Achsensystems in der Ebene der x, y, so geben uns die Lehrbücher der analytischen Mechanik den Ausdruck der Kräfte längs r und längs einer auf r in dessen Endpunkte senkrechten Richtung n, die nach der Seite des wachsenden u positiv zu nehmen ist. Bezeichnen wir mit $P = mp$ die für ein solches Achsensystem vorhandene Kraft und durch Anfügung eines Buchstabens an einen anderen (wie p, r) den Winkel zwischen den beiden Richtungen, welche durch die Buchstaben ausgedrückt sind, so gilt

$$1 \qquad \begin{cases} P\cos(P,r) = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right], \\ P\cos(P,n) = m\left[r\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{du}{dt}\right], \\ P\cos(P,z) = m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Nehmen wir nun bewegliche Polarkoordinaten von derselben Art und mit demselben z, bei welchen sich aber die Anfangslage der r mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit w um die z-Achse nach der Seite der positiven u herumdreht, so bleibt der Abstand r des bewegten

Punktes von der Drehungsachse unverändert, aber seine Winkelabscisse ϑ wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = w + \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Bezeichnen wir nun die Beschleunigungen, welche vorhanden sein müssen, um die Bewegung in Beziehung zu dem beweglichen Koordinatensystem hervorzubringen, mit k, so ist klar, dafs m k genau so durch bewegliche Koordinaten ausgedrückt sein mufs, als oben in 1) es P durch feste ist. Denn die Formel 1) ist eben weiter nichts als der mathematische Begriff einer Kraft in Beziehung zu Koordinaten, die, mögen sie sonst eine Bewegung haben, welche sie wollen, von uns im Vergleich mit dem betrachteten Massenteilchen als ruhend gedacht werden. Setzt man nun die Gleichung von $\frac{du}{dt}$ in 1) ein, löst auf und schafft die zusammengehörigen Glieder auf eine Seite, so kommt:

$$2 \quad \begin{cases} k\cos(k,r) = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = p\cos(p,r) + r w^2 + 2 r w \frac{d\vartheta}{dt}, \\ k\cos(k,n) = r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} = p\cos(p,n) - 2 w \frac{dr}{dt}. \\ k\cos(k,z) = \frac{d^2 z}{dt^2} = p\cos(p,z). \end{cases}$$

Sind nun die rechtwinkeligen Koordinaten x und y, wie in meiner Abhandlung, so gewählt, dafs $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, so erhalten wir, wenn wir die Cosinus der Winkel k, x und k, y durch die Cosinus derjenigen Winkel ausdrücken, die ihre Schenkel mit den rechtwinkeligen Grundrichtungen r, n, z bilden, mit k beiderseits multiplicieren, dann $k\cos(k,r)$, sowie $k\cos(k,n)$ aus 2) einsetzen und $\frac{d^2 x}{dt^2}$ für $k\cos(k,x)$, sowie $\frac{d^2 y}{dt^2}$ für $k\cos(k,y)$ schreiben,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p\cos(p,r)\cos(x,r) + p\cos(p,n)\cos(x,n) + r\cos(x,r).w^2 + 2 r w \frac{d\vartheta}{dt}\cos(x,r) - 2 w \frac{dr}{dt}\cos(x,n),$$

$\frac{d^2 y}{dt^2}$ dem ganz entsprechend, nur für x überall y gesetzt.

Nun geben die beiden ersten Glieder je $p\cos(p,x)$ und $p\cos(p,y)$, die dritten je $x w^2$ und $y w^2$, dem Vorzeichen nach alles positiv, zur Umformung des letzten Gliedes führen wir für die auf die Ebene x y projicierte Geschwindigkeit des bewegten Teilchens in Uebereinstimmung mit meiner früheren Bezeichnung den Buchstaben v ein. Dann sind die fraglichen Summanden auszudrücken durch

$$2 w v [\cos(v,n)\cos(x,r) - \cos(v,r)\cos(x,n)],$$

und für die Projektion der Beschleunigung auf die y-Achse durch dasselbe, nur y statt x. Nun ist in Figur 2, wo AH die Anfangslage der r und x bedeutet, und wo die Pfeile die Richtung angeben, nach welcher die Gröfsen gezählt werden, $\sphericalangle$ DAB = $\sphericalangle$ EDG, also (x, r) gleich (y, n), zweitens $\sphericalangle$ DCH = 180° — GDF, d. h. (x, n) gleich 180° — (y, r), folglich

$$\cos(x,r) = \cos(y,n);\ \cos(x,n) = -\cos(y,r).$$

Setzen wir dies in die oben stehende eckige Klammer ein, so wird der ganze Ausdruck zu

bei $\frac{d^2 x}{dt^2}$ $\quad 2 w v [\cos(v,n)\cos(y,n) + \cos(v,r)\cos(y,r)] = 2 w v \cos(v,y) = +2 w \frac{dy}{dt}$,

bei $\frac{d^2 y}{dt^2}$ $\quad 2 w v [-\cos(v,n)\cos(x,n) - \cos(v,r)\cos(x,r)] = -2 w v \cos(v,x) = -2 w \frac{dx}{dt}$.

Mit Hülfe der umgewandelten Ausdrücke nehmen die zweiten Ableitungen der Koordinaten die Gestalt an:

$$3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = p\cos(p,x) + x w^2 + 2 w \frac{dy}{dt},$$

$$4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = p\cos(p,y) + y w^2 - 2 w \frac{dx}{dt},$$

$$5)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = p\cos(p,z).$$

Betrachten wir nun die Achse der z als die Erdachse, nach Norden zu positiv, legen den Anfangspunkt der Koordinaten an den Nordpol und zählen ϑ links herum für den Bewohner der Nordhalbkugel, und demgemäfs die positiven y nach der linken Seite von x für denjenigen, welcher dem wachsenden x nachsieht, so geben unsere Gleichungen die Bedingungen für die Bewegung auf der Erdoberfläche, und, wenn z gleich null genommen wird, für diejenige auf einer am Nordpol wagerechten Ebene. Um die von Herrn Sprung im Januar 1880 behandelte Trägheitskurve zu erhalten, haben wir nur die wirklich bewegende Kraft P, also auch $\frac{P}{m}$, d. i. p gleich null und $\frac{d^2z}{dt^2}$ gleich der Beschleunigung der Anziehungskraft der Erde zu setzen. Dies aber giebt die von mir auf S. 284 zu Grunde gelegten Gleichungen. Die Integration führt zu den Ausdrücken

$$x = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt + t\,(C_3 \cos wt + C_4 \sin wt),$$
$$y = C_2 \cos wt - C_1 \sin wt + t\,(C_4 \cos wt - C_3 \sin wt),$$

von denen ich an jenem Orte nachgewiesen habe, dafs es die Gleichungen der Krummen sind, deren Natur wir oben auf dem Wege räumlicher Anschauung erkannt haben.

Aufserdem füge ich zur Ergänzung meiner Arbeit vom Juli vorigen Jahres noch hinzu, dafs man auch für den ganz allgemeinen Fall, wo die Bahn sich nicht durch einfache Abwickelung darstellen läfst, eine mechanische Entstehung sich denken kann, die zu einer bequemen Zeichnung führt. Wenn (in Fig. 1) die wirkliche Bewegung längs der Geraden AB in P mit der Geschwindigkeit des sich drehenden Kreises und N nicht übereinstimmt, so können wir uns den Faden etwas hart vorstellen und den kurvenerzeugenden Punkt als den Ort auffassen, in welchem ein am Faden entlang rollender zweiter Kreis aufliegt (Kr. um C in Fig. 1). Setzen wir fest, derselbe solle sich nur in demselben Sinne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie Kreis um N drehen, so können wir doch, indem wir ihn verschieden grofs machen und ihn bald rechts, bald links von AB anbringen, alle möglichen Geschwindigkeitsunterschiede des bewegten Teilchens gegen den Umfang des ursprünglichen Kreises erzeugen. Überholt der längs AB gleitende Körper einen mit dem Umfange des ursprünglichen Kreises sich drehenden Punkt, so mufs der zweite Kreis auf der dem ersten entgegengesetzten Seite der Geraden liegen, ist aber die gleitende Geschwindigkeit geringer als die der Drehung oder ihr entgegengesetzt, so mufs die sich wälzende Scheibe auf der inneren, dem Drehungsmittelpunkte zugewandten Seite angebracht werden (C' in Fig. 1). Ihr Durchmesser mufs in beiden Fällen sich verhalten zu demjenigen des festen Kreises, wie der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit der gleitenden Bewegung auf AB und der drehenden des Umfanges des Kreises N sich verhält zu dieser letzteren Geschwindigkeit allein.

Nehmen wir nun unsern Standpunkt auf der sich drehenden Ebene, so werden uns die Kreise, die sich alle mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in demselben Sinne mit uns drehen, ohne Drehung erscheinen, den Punkt, wo der Faden auf der festen Rolle aufliegt, sehen wir rechts herum rücken, und der zur Bestimmung der Gröfse des Durchmessers der vom Ort beweglichen Rollen gebrauchte Bewegungsunterschied wird zur relativen Geschwindigkeit in der Polnähe, d. i. an derjenigen Stelle, wo die Bahn eine westöstliche Richtung hat. Deshalb denken wir uns wiederum

den Kreis um N fest und um ihn eine Schnur aufgerollt, aber ihr Ende gleichzeitig auf den beweglichen Kreis um C oder C' aufgewickelt. Indem wir nun dieselbe, wie vorher, auf- oder abwickeln, lassen wir den zweiten Kreis sich so verschieben, dafs ein gegebener Halbmesser desselben immer eine mit sich parallele Richtung im Raume beibehält. Dann beschreibt der Punkt, wo der Faden den Umfang des zweiten Kreises berührt, die gesuchte krumme Linie. Dieses Mittel liefert nur eine punktweise Konstruktion; zu einem anderen Verfahren, welches erlaubt, die Bahn in ihrer allgemeinen Gestalt in einem Zuge zu zeichnen, führt uns der folgende Gedankengang:

Der Beobachter befinde sich zunächst aufserhalb der sich um N drehenden Scheibe; ihre Winkelgeschwindigkeit sei w, und AB wie vorhin die Linie der absoluten Trägheitsbahn (Fig. 3). Man fälle das Lot NP und suche auf ihm denjenigen Punkt D der Scheibe, welchem infolge der Umdrehung dieselbe lineare Geschwindigkeit zukommt als dem bewegten Massenteilchen auf AB. Ist diese letztere Geschwindigkeit gröfser als die der Scheibe in P, so ist D auf der Verlängerung von NP über P zu suchen in D', ist sie entgegengesetzt gerichtet, so liegt er jenseits N. Darauf verlängere man PD über D hinaus um sich selbst bis Q, beschreibe mit Q einen zweiten concentrischen Kreis, den wir uns mit dem ursprünglichen fest verbunden, also auch um N drehbar denken. Wird nun um jeden der Kreise je ein Ende eines Fadens geschlungen, der dieselben in P und Q berührt, und zwischen denselben das Rechteck EFGK eingeschoben, dessen Breite EF gleich PQ, so wird ein jeder Punkt dieses letzteren, wenn es längs AB gleitend parallel zu sich fortgezogen wird, während dabei die Kreise durch die Fäden mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit gedreht werden, die Bewegungsgröfse des die Kurve erzeugenden Teilchens besitzen, mithin die auf AB aufliegende Ecke F die auf ruhende Achsen bezogene Bahn beschreiben. Denn die Geschwindigkeit, mit welcher das Rechteck fortrückt, mufs sein $(NP + NQ) . \frac{w}{2} = ND . w$.

Werden nun die beiden Rollen um N auf der Fläche des Papiers befestigt, und die beiden Fäden so auf- und abgewickelt, dafs man sie von dem Rechteck EFGK aus anzieht, aber derart, dafs die Seiten KE und GF immer in der Verlängerung der Fäden bleiben, so beschreibt ein in F befindlicher Stift die verlangte relative Bahn. Für die Ausführung wird es notwendig, zur Vermeidung der Reibung die von N abgewandte Seite KG halbkreisförmig abzurunden.

Dies zur Ergänzung meiner letzten Abhandlung. Wohl weifs ich, dafs gegen dieselbe der Einwand erhoben wird, sie entspreche wenig den wirklichen Verhältnissen, unter denen sich die Luft auf der Erdoberfläche bewege, weil einerseits nicht allein das Gesetz der Beharrung zur Geltung käme, sondern die verschiedenartigsten Kräfte wirkten, und weil andererseits nicht die Anziehung der Erdmasse, sondern die durch Erfahrung zu findende Schwerkraft senkrecht zum Horizonte sei.

Dem gegenüber habe ich zu erwidern, dafs ich gar keinen Anspruch darauf mache, in der von mir gelösten Aufgabe einen Fall behandelt zu haben, wie er in allen Einzelheiten in der Natur vorkommt. Mir kam es nur darauf an, den von Sprung in seiner Schrift vom Januar 1880 begonnenen Gedankengang zu Ende zu führen und auf Grund der dort gewählten Voraussetzung die Bahn zu konstruieren. Diese Annahme hat aber den grofsen Vorzug, dafs die schwierigen Verhältnisse auf der Erdoberfläche mit den einfacheren einer sich drehenden Scheibe verglichen werden können, wodurch uns ein leichtes Mittel zur anschaulichen Darstellung gegeben wird, das in einer Frage, in welcher die Meinungen noch heftig wider einander streiten, von nicht zu unterschätzendem Werte ist. Und aufserdem, entsprechen überhaupt bei mathematischer Behandlung physikalischer Fragen die von dem Mathematiker willkürlich angenommenen Bedingungen jemals genau der

Wirklichkeit? Gewisse Umstände werden immer vernachlässigt, um die Schwierigkeiten der Aufgabe so weit zu vermindern, dafs sie mit den Hülfsmitteln der Mathematik überwunden werden können. So verhält es sich auch in unserem Falle. Die Trägheitsbahn auf dem Erdellipsoid ist noch nicht gefunden, und wo man durch Behandlung von beschränkten Fällen der Lösung nahe zu kommen gesucht hat, sind die zur Vereinfachung der Formeln notwendigen Vernachlässigungen der Art, dafs sie der Ungenauigkeit der von uns gemachten Voraussetzung gleich kommen. Aufserdem besitzt meine Auflösung noch den Vorzug einer Leichtigkeit der graphischen Darstellung, die nur von der Konstruktion eines Kreises durch den Zirkel übertroffen wird.

Jedoch hat Herr Sprung neuerdings seine frühere Auffassung selbst verlassen. In einer im vorigen Jahre in Poggendorffs Annalen S. 128 ff. abgedruckten Abhandlung: »Ueber die Bahnlinien eines freien Theilchens auf der rotirenden Erdoberfläche und deren Bedeutung für die Meteorologie« betrachtet er die Erde als Sphäroid, dessen Gestalt dadurch bedingt ist, dafs die Schwerkraft, d. i. die Resultierende aus der Massenanziehung der Erde und der durch ihre Umdrehung entstehenden Centrifugalkraft überall senkrecht auf ihrer Oberfläche stehen. Denken wir uns das Sphäroid ruhend, so würde dasselbe eine Art schiefer Ebene sein, auf welcher alle Körper mit einer der Centrifugalkraft gleichen, aber entgegengesetzten Kraft nach dem Pole zu gleiten müfsten. Für die unter dem Einflusse einer solchen Beschleunigung stattfindende Bewegung werden die Differentialgleichungen aufgestellt, wobei die Gültigkeit des Satzes angenommen wird, dafs der Abstand des Massenteilchens von der Umdrehungsachse in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibe in seiner Projektion auf den Äquator, oder was dasselbe heifst, dafs die absolute west-östliche Geschwindigkeit multipliciert mit dem Abstande von der Erdachse eine unveränderliche Gröfse sei. Da aber die Differentialgleichungen nicht integriert werden, sondern nur die Gröfse der Kurvengeschwindigkeit, welche nach dem Verfasser konstant sein soll, abgeleitet wird, so geht uns hier mehr der besondere Fall einer angenäherten Lösung an, in welchem derselbe die relative Bahn entwickelt und konstruiert. Dieser besondere Fall betrifft wieder die Bewegung nahe einem Pole innerhalb der Grenzen, in denen man die Erdoberfläche als eine Ebene betrachten kann, die im Pol das Erdsphäroid berührt. Im Gegensatz zu seiner früheren Arbeit sagt jetzt der Verfasser, dafs ein nur der Schwere und dem Gesetze der Beharrung folgendes Teilchen auf der ruhenden Ebene keine gerade Linie beschreiben könne, weil es durch die dem Fliehbestreben entgegengesetzte Kraft mit der Beschleunigung rw^2 nach dem Drehungsmittelpunkte hingetrieben werde. Diese Annahme ist insofern nicht der Wirklichkeit entsprechend, als hierbei die auf der krummen Oberfläche geltenden Verhältnisse auf die ganze Tangentialebene angewandt werden, während dies streng genommen nur für den Berührungspunkt erlaubt ist. Doch folgen wir der Entwickelung weiter, indem wir die von uns bei der Untersuchung der früheren Sprung'schen Trägheitsbahn gewählte Bezeichnungsweise festhalten. Sind die auf ruhende Achsen bezogenen rechtwinkeligen Koordinaten ξ und η, so erhält man als Bedingungsgleichungen der absoluten Bewegung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -w^2\xi, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -w^2\eta.$$

Dies sind die bekannten Formeln für die Bewegung eines Körpers, der nach einem festen Punkte im geraden Verhältnis der Entfernung angezogen wird. Die Bahn ist eine Ellipse, in deren Mittelpunkt der anziehende Punkt steht, und die in derselben Zeit einmal durchlaufen wird, in welcher die Erde eine volle Umdrehung macht.

Um nun diejenigen Punkte der rotierenden Fläche zu finden, welche nach beliebiger Zeit mit dem bewegten Teilchen in Berührung kommen, hat man nach dem Verfasser nur nötig, um die Kreisbögen rwt, welche die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit der Punkte der Ebene im

Abstande r bezeichnen, von den Ellipsenpunkten nach rückwärts, der Drehbewegung der Scheibe entgegen zu gehen. »Dabei ergibt sich nun in augenfälliger Weise das wichtige Resultat, dafs die relative Trägheitsbahn aus einem Kreise besteht, welcher in der absoluten Umlaufszeit zweimal, und zwar in solcher Weise durchlaufen wird, dafs der Sinn der Drehung der entgegengesetzte ist von demjenigen der Rotation der Fläche.« Die Überleitung von der absoluten Bahn zu der, wie sie einem mit der Ebene sich Drehenden erscheint, wird dann in analytischer Entwickelung gegeben. Hierbei findet sich, wenn a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten, die Länge des Halbmessers als $\frac{1}{2}(a-b)$ und der Abstand des Kreismittelpunktes vom Pole als $\frac{1}{2}(a+b)$. Besitzt der die Bahn beschreibende Körper im Anfange der Zeit keine relative Geschwindigkeit, so verwandelt sich der Kreis in einen Punkt, der Körper bleibt also in Beziehung zur Erdoberfläche in Ruhe.

Da den Ansichten, welche Herr Sprung in der angeregten Frage vertritt, tief eingewurzelte Irrtümer entgegenstehen, so füge ich hier noch einen zweiten Beweis seiner Behauptung hinzu, der, streng analytisch und direkt, das zwar geistreiche, aber künstliche Verfahren vermeidet, das ich soeben auszugsweise mitgeteilt habe.

Wenn die Richtung der Schwerkraft innerhalb der sich drehenden Scheibe überall lotrecht sein soll, so heifst das doch nichts anderes, als dafs wir die letztere als ein Stück der wirklichen Erdoberfläche betrachten, gleichsam als sei diese zur Ebene ausgestreckt. Die wirkliche Oberfläche unsers Planeten aber ist eine Gleichgewichtsfigur, deren Begriff dadurch bestimmt ist, dafs ein freies Teilchen, das an der Oberfläche in Beziehung zu ihr ruht, durch sein Beharrungsvermögen in Beziehung zu der sich drehenden Rotationsfläche nicht von seinem Orte bewegt wird. Wir können die Sache so auffassen, als hätten wir es mit einer nach dem Äquator zu aufsteigenden schiefen Ebene zu thun, längs welcher die Fliehkraft jeden Körper mit derselben Beschleunigung in die Höhe treibt, als ihn die Anziehung der Erde nach unten zu bewegen strebt. Da nach dem, was wir unter Trägheitskurve verstehen, in Beziehung zur bewegten Erdoberfläche aufserdem alle solche Beschleunigungen fehlen sollen, welche imstande wären, den ruhenden Körper von seiner Stelle zu bewegen, so erhalten wir die Bedingungen der Aufgabe, wenn wir oben in 3) und 4) sowohl die Projektionen der Geschwindigkeiten als die links stehenden relativen Seitenbeschleunigungen null setzen. Dann aber wird

$$p\cos(p,x) = -x w^2, \quad p\cos(p,y) = -y w^2,$$

wodurch wir als Differentialgleichungen erhalten

$$6) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = +2w\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2w\frac{dx}{dt}.$$

Wenn wir intregrieren und die dabei auftretenden unveränderlichen Gröfsen der Reihe nach mit M, N, Q und R bezeichnen, ergiebt sich

$$\frac{dx}{dt} = 2wy + M, \quad \frac{dy}{dt} = -2wx + N,$$

und durch Einsetzung der letzten Gleichung in die erste von 6)

$$7) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -4w^2x + 2wN,$$

wofür wir bei Beachtung der in den Lehrbüchern der Differentialrechnung gegebenen Vorschriften die Auflösung finden

$$x = Q\cos 2wt + R\sin 2wt + \frac{N}{2w}.$$

Auf dieselbe Weise läfst sich y ableiten, doch ist es bequemer, die integrierte erste Gleichung von 6) zu benutzen, nachdem man sich aus dem Gefundenen $\frac{dx}{dt}$ ausgerechnet hat. So erhalten wir

$$y = -Q \sin 2wt + R \cos 2wt - \frac{M}{2w}.$$

Die Konstanten bestimmt man dadurch, dafs man in den Ausdrücken für x und y, sowie in denen für ihre ersten Differentialquotienten die Zeit null werden läfst. Bezeichnen wir der Kürze halber die anfänglich vorhandenen Seitengeschwindigkeiten nach der x- und y-Achse mit k und m, so ergiebt sich:

8) $$x - x_0 = \frac{m}{2w}(1 - \cos 2wt) + \frac{k}{2w} \sin 2wt,$$

9) $$y - y_0 = \frac{m}{2w} \sin 2wt - \frac{k}{2w}(1 - \cos 2wt).$$

Zunächst sieht man leicht ein, dafs

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4w^2(Q^2 + R^2) = k^2 + m^2;$$

und ferner folgt aus 8) und 9)

$$\left(x - x_0 - \frac{m}{2w}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{k}{2w}\right)^2 = \frac{k^2 + m^2}{4w^2}.$$

Die Bahn ist demnach ein Kreis, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Der Mittelpunkt desselben liegt von der Stelle, wo die Bewegung anfängt, in der Richtung der x um $\frac{m}{2w}$, in derjenigen der y um $-\frac{k}{2w}$ entfernt.

Um die volle Übereinstimmung unserer Folgerungen mit den Behauptungen der beurteilten Schrift einzusehen, haben wir nur nötig, die Gleichungen jener elliptischen Bewegung, welche nach Sprung die absolute Bahn kennzeichnet, in ganz allgemeiner Form aufzustellen. Ist c die absolute Anfangsgeschwindigkeit, A der Winkel derselben mit der positiven Richtung der ξ, und liegt der Koordinatenanfang im anziehenden Punkte, so lauten dieselben:

$$\xi = \frac{c \cos A}{w} \sin wt + \xi_0 \cos wt, \quad \eta = \frac{c \sin A}{w} \sin wt + \eta_0 \cos wt.$$

In der zu besprechenden Abhandlung steht Seite 133 (in unsere Bezeichnungsweise umgewandelt)

$$\xi = a \sin wt, \quad \eta = b \cos wt.$$

Die Vergleichung lehrt, dafs man, um von unseren Gleichungen auf die letzteren zu kommen, den Ausgangspunkt in die Achse der η zu setzen und c rechtwinkelig zu dieser zu nehmem hat. Es wird dadurch $\frac{c}{w}$ gleich a, η_0 gleich b. Weil nun der Nullpunkt der Koordinaten mit dem Pole zusammenfällt, so ist die relative Anfangsgeschwindigkeit $c - \eta_0 w$; folglich können wir den von uns entwickelten Ausdruck für den Halbmesser des Kreises so umformen:

$$\frac{1}{2w}\sqrt{k^2 + m^2} = \frac{c - \eta_0 w}{2w} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{w} - \eta_0\right) = \frac{1}{2}(a - b),$$

wodurch wir auf den von dem Verfasser angegebenen Wert gekommen sind.

Welche von den beiden Auffassungsweisen der Verhältnisse auf einer am Pol berührenden Ebene ist nun die richtigere, und welche der beiden für sie aufgestellten Trägheitsbahnen schliefst sich der Wirklichkeit mehr an, die ältere oder die neuere? Wir können es nicht entscheiden, so lange nicht die Aufgabe für das Erdsphäroid vollständig gelöst ist. So wie die Anwendung der

Differentialrechnung auf krumme Linien zum Teil darauf beruht, dafs man von der Tangente ausgeht, für deren ganzen Verlauf man die Eigenschaften als gültig annimmt, welche die Krumme im Berührungspunkte besitzt, ebenso suchten wir bisher der Bewegung eines Körpers auf der sich drehenden Erde dadurch näher zu kommen, dafs wir zunächst die Tangentialebene betrachteten, auf deren ganze Ausdehnung wir die Verhältnisse am Berührungspunkte übertrugen. An dem Pole selbst aber ist sowohl die Anziehung der Erdmasse als die wirkliche Schwerkraft lotrecht, also sind wir in gleicher Weise berechtigt, die eine wie die andere Kraft innerhalb der ganzen Ebene senkrecht zu dieser vorauszusetzen.

III.

Die Trägheitsbahn auf der Kugel.

Wenn ich es jetzt unternehme, die in den vorigen Abschnitten behandelte Aufgabe für die ganze Erdoberfläche zu lösen, so schicke ich voraus, dafs ich mir nicht anmafse, damit die Sache zum Abschlufs gebracht zu haben. Denn wir werden von der Annahme ausgehen, dafs die Erde eine Kugel sei. Die Abweichung von der wirklichen Gestalt ist allerdings unbedeutend und würde für die Witterungskunde gar nicht in Betracht kommen, wenn es nicht gälte, den Weg zu erforschen, den ein freies Teilchen auf der sich drehenden Erde einschlagen mufs. Für die Beantwortung dieser Frage ist es von wesentlicher Bedeutung, dafs die wirkliche Gestalt unseres Planeten eine Gleichgewichtsfigur ist, die dem Widerstreite zwischen der Fliehkraft und der Anziehung der Erdmasse ihre Entstehung verdankt, und dafs die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit seiner Oberfläche im Verhältnis zu der dadurch erzeugten centrifugalen Beschleunigung sehr grofs ist. So mufs z. B., wie im folgenden gezeigt werden wird, ein Luftteilchen, das über Petersburg ruht, auf der glatten kugelförmigen Erde nach Verlauf eines halben Tages am Äquator angelangt sein, dagegen wird es über Petersburg bleiben, wenn wir die wirkliche Gestalt unseres Planeten in Rechnung setzen.

Allein ein jeder, der aus der Geschichte der Wissenschaft gelernt hat, weifs, dafs die Wahrheit selten mit einem Male durch den Flug des Genies erreicht wird, sondern, dafs unser Erkennen in den meisten Fällen den Weg der allmähligen Näherung gehen mufs. Und wer sich eingehender mit dem vorliegenden Gegenstand beschäftigt hat, wird zu der Einsicht gelangt sein, dafs wir nicht eher vorwärts kommen können, bis über den einfacheren Fall, den wir uns im Nachstehenden zum Vorwurfe gewählt haben, vollständige Klarheit verbreitet ist. Derselbe Gedankengang hat bereits Ohlert veranlafst, nach der resultatlosen Arbeit von Baeyer die Trägheitsbahn auf der Kugel aufzusuchen. Auch haben sich thatsächlich mehrere Mathematiker mit dieser Aufgabe beschäftigt, so dafs es schon um deswillen der Mühe lohnen mufs, dieselbe ihrer endgültigen Lösung entgegen zu führen. Wir sprechen sie folgendermafsen aus:

»Welches ist die Bahn eines schweren Teilchens in Beziehung zu der sich drehenden Erdkugel, wenn es gezwungen ist, auf deren Oberfläche zu bleiben, aber ohne Reibung auf derselben hingleitet, und ohne dafs innerhalb der jeweiligen berührenden Ebene solche Kräfte wirken, welche auch bestehen bleiben würden, wenn die Bewegung auf feststehende Achsen bezogen würde?«

a) Aufstellung der Gleichungen der Bahn.

Die Länge der Erdhalbmesser sei eins, ebenso gebe der bewegte Körper die Einheit für die Masse ab, so dafs alle Kräfte gleich ihren Beschleunigungen werden. Die mit der beweglichen Kugel fest verbundenen Koordinaten seien die östliche geographische Länge l und das Komplement

der Breite h, d. i. der Bogenabstand vom Nordpol. Um für solche Koordinaten diejenigen mathematischen Ausdrücke zu finden, welche zu den gewöhnlichen für die Kräfte-Projektionen geltenden Formeln hinzugenommen werden müssen, um der Beweglichkeit der Anfangslage der geographischen Länge zu genügen, haben wir erst die Funktionen aufzusuchen, durch welche die Seitenkräfte für ein ähnliches, aber ruhendes Achsensystem bezeichnet werden.

Es bleibe für diesen Zweck h wie vorher, dagegen bedeute L den Neigungswinkel des Längenkreises, in dem sich das bewegte Teilchen befindet, gegen einen andern, der eine unveränderliche Richtung im Raume beibehält. Dieser Winkel werde ebenfalls im Sinne der Erdumdrehung gezählt. Zur Hülfe führen wir rechtwinkelige Raumkoordinaten ein dergestalt, dafs x und y in der Ebene des Äquators liegen, y von der positiven Achse der x aus für den von Norden her Sehenden nach links, während diese Seite der x-Achse mit der Anfangslage der L (L = 0) zusammenfällt. z werde nach Norden zu positiv genommen. Fig. 4 ist eine perspektivische Zeichnung der Erdkugel, Fig. 5 die Ebene des Äquators, 6 die Ebene desjenigen Längenkreises, welcher durch den Punkt O der Bahn gelegt ist. Die Betrachtung der bei Q rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke OQA und OQB lehrt unmittelbar, dafs

$$x = \cos L \,.\, \sin h\,, \quad y = \sin L \,.\, \sin h\,, \quad z = \cos h\,.$$

Durch zweimalige Differentiation folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos L \,.\, \cos h \frac{d^2h}{dt^2} - \cos L \,.\, \sin h \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - 2 \sin L \,.\, \cos h \frac{dL}{dt} \cdot \frac{dh}{dt} - \sin L \,.\, \sin h \frac{d^2L}{dt^2} - \cos L \,.\, \sin h \left(\frac{dL}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin L \,.\, \cos h \frac{d^2h}{dt^2} - \sin L \,.\, \sin h \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + 2 \cos L \,.\, \cos h \frac{dL}{dt} \cdot \frac{dh}{dt} + \cos L \,.\, \sin h \frac{d^2L}{dt^2} - \sin L \,.\, \sin h \left(\frac{dL}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\sin h \frac{d^2h}{dt^2} - \cos h \left(\frac{dh}{dt}\right)^2.$$

Es sei nun P_h die Kraftkomponende, welche auf der Erdoberfläche an dem bewegten Teilchen angreifend von Norden nach Süden, in der Richtung der wachsenden h wirkt, P_l diejenige, welche auf der Kugeloberfläche den bewegten Punkt von Westen nach Osten mit den wachsenden l forttreibt, P_r drittens diejenige Kraft, welche senkrecht zur Kugeloberfläche das Massenteilchen vom Mittelpunkte zu entfernen strebt, so würde nach dem Satze vom Cosinus des Winkels zweier Geraden im Raume die Gleichung gelten

$$P_r = \frac{d^2x}{dt^2} \cos(x, r) + \frac{d^2y}{dt^2} \cos(y, r) + \frac{d^2z}{dt^2} \cos(z, r)\,,$$

und entsprechend für die andern Richtungen der Seitenkräfte. Die Cosinus der Winkel, die in dem Ausdruck für P_r vorkommen, sind aber oben in den Formeln für x, y und z schon enthalten, mithin ist

a) $$P_r = \frac{d^2x}{dt^2} \sin h \cos L + \frac{d^2y}{dt^2} \sin h \sin L + \frac{d^2z}{dt^2} \cos h\,.$$

Die Richtung der P_l ist in Fig. 5 durch den zu MQ senkrechten Pfeil vorgestellt. Lege ich MR zu ihm gleichlaufend, so ist der Winkel zwischen der Richtung von P_l und der positiven Seite der x-Achse, die ich mit l,x bezeichnen will, der ∢ AMR der Figur. Sollen die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen allgemein gelten, so mufs Q im ersten Quadranten liegen; dann aber ist AMR ein stumpfer Winkel, gleich 90°+L, der Winkel l,y dagegen ist BMR oder L, folglich, da cos(l,z) gleich null wird,

b) $$P_l = -\frac{d^2x}{dt^2} \sin L + \frac{d^2y}{dt^2} \cos L\,.$$

Bezeichnen wir ferner die Winkel zwischen den Koordinatenachsen und der Richtung, nach welcher h wächst, auf dieselbe Weise wie bei l, so ist der Winkel h,x, weil der Halbmesser der Kugel als Einheit genommen worden, gleich der Hypotenuse des rechtwinkeligen sphärischen

Dreiecks, dessen eine Kathete durch den ∢ DMQ (s. Fig. 6), und dessen andere durch ∢ QMA (Fig. 5) gemessen wird. Der Winkel h,y ist ebenso auszudrücken, nur hätten wir BMQ für AMQ zu setzen, d. i. 90^0—L für L. Da nun endlich (h,z) gleich ∢ NMD in Fig. 6 ist, dessen Gröfse sich zu 90^0+h bestimmt, so kommt:

c) $$P_h = \frac{d^2x}{dt^2}\cos h \,.\, \cos L + \frac{d^2y}{dt^2}\cos h \,.\, \sin L - \frac{d^2z}{dt^2}\sin h\,.$$

Die Gleichungen a), b), c) verbindet man nun mit den obenstehenden Formeln für die Seitenbeschleunigungen nach x, y und z. Als Ergebnis erhält man die Ausdrücke

d) $$P_l = \sin h \,.\, \frac{d^2L}{dt^2} + 2\cos h \,.\, \frac{dL}{dt}\cdot\frac{dh}{dt},$$

e) $$P_h = \frac{d^2h}{dt^2} - \cos h \,.\, \sin h \left(\frac{dL}{dt}\right)^2,$$

f) $$P_r = -\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - \sin^2 h \left(\frac{dL}{dt}\right)^2.$$

Um nun die Bahn auf bewegliche Koordinaten beziehen zu können, nennen wir die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, wie in den vorhergehenden Abschnitten, w, wodurch wir erhalten

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dl}{dt} + w, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{d^2L}{dt^2} = \frac{d^2l}{dt^2},$$

und durch Einsetzung in d), e) und f)

g) $$\sin h \frac{d^2l}{dt^2} + 2\cos h \,.\, \frac{dh}{dt}\cdot\frac{dl}{dt} = P_l - 2w\cos h \frac{dh}{dt},$$

h) $$\frac{d^2h}{dt^2} - \cos h \,.\, \sin h \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = P_h + w\sin 2h \frac{dl}{dt} + \frac{1}{2}w^2 \sin 2h,$$

i) $$-\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - \sin^2 h \,.\, \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = P_r + 2w\sin^2 h \frac{dl}{dt} + w^2 \sin^2 h\,.$$

Das links Stehende sind die Projektionen derjenigen Kräfte, welche die Beschleunigungen nach den von uns gewählten beweglichen Richtungen geben, wenn dieselben als fest gedacht werden. Dem Begriffe der Trägheitsbahn zufolge, wie wir ihn oben bei der Fassung des Wortlautes unserer Aufgabe für den vorliegenden Fall festgestellt haben, und nach dem im Abschnitt I auf Seite 6 Gesagten müssen die absoluten Kräfte P_l und P_r gleich null gesetzt werden. Dadurch gewinnen wir die bedingenden Differentialgleichungen

1) $$\sin h \frac{d^2l}{dt^2} + 2\cos h \frac{dh}{dt}\cdot\frac{dl}{dt} = -2w\cos h \frac{dh}{dt},$$

2) $$\frac{d^2h}{dt^2} - \frac{1}{2}\sin 2h \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = w\sin 2h \frac{dl}{dt} + \frac{1}{2}w^2 \sin 2h\,.$$

Multipliciert man die Gleichung 1) mit sin h, so erhält man links eine vollständige Ableitung, und man kann für dieselbe schreiben

3) $$\frac{d\left(\sin^2 h \frac{dl}{dt}\right)}{dt} = -\frac{d(w \,.\, \sin^2 h)}{dt}$$

Nach der von uns über die Gröfse des Kugelhalbmessers gemachten Annahme ist sin h der Abstand des bewegten Punktes von der Erdachse, $\sin^2 h \frac{dl}{dt}$ also das Doppelte des Differentials der von der Projektion in der Ebene des Äquators beschriebenen Fläche, das links Stehende ist mithin die projicierte Flächenbeschleunigung, so dafs wir aus der letzten Gleichung den Schlufs ziehen können: Die Zunahme des Differentials der vom Polabstand (h) in seiner Projektion auf

die Ebene eines Breitenkreises beschriebenen Fläche ist entgegengesetzt dem Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der beweglichen Achse in das Quadrat des projicierten Polabstandes. Es ist dies ein besonderer Fall des von Coriolis im »Journal de l'école polytechnique«, 15. Band, 24. Heft, S. 154 für ein System von Körpern aufgestellten Satzes: »Wenn die Umdrehungsachse eine unveränderliche Richtung im Raume beibehält, und wenn die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung der beweglichen Koordinaten gleichförmig ist, und aufserdem die Resultierende der wirklichen Kräfte durch den Koordinatenanfang geht, so wachsen die Differentiale der bei den relativen Bewegungen vorkommenden Flächen, wenn sie auf eine zur Umdrehungsachse senkrechte Ebene projiciert werden, wie die Trägheitsmomente.« (...»les différentielles des aires dans les mouvemens relatifs, lorsqu' elles sont projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, croissent comme les momens d'inertie«.)

Unsere letzte Gleichung erlaubt die Integration, deren Konstanten wir mit C, D, E, F und G bezeichnen werden. Wir bekommen

$$4)\qquad \sin^2 h \frac{dl}{dt} = C - w \sin^2 h\,, \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{C}{\sin^2 h} - w\,.$$

Dies in 2) eingesetzt, giebt:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} - \frac{1}{2}\sin 2h \left[\frac{C^2}{\sin^4 h} - \frac{2wC}{\sin^2 h} + w^2\right] = w \sin 2h \left(\frac{C}{\sin^2 h} - w\right) + \frac{1}{2} w^2 \sin 2h\,.$$

Löst man hier auf beiden Seiten die Klammern auf, zieht dann die beiden letzten Glieder rechts zusammen und hebt sie gegen das letzte links, streicht ferner die Summanden, welche C in der ersten Potenz enthalten, und schreibt für $\frac{\sin 2h}{2\sin^4 h}$ das Gleiche $\frac{\cos h}{\sin^3 h}$, so kommt

$$\frac{d\left(\frac{dh}{dt}\right)}{dt} = \frac{C^2 \cos h}{\sin^3 h} = -\frac{1}{2}\frac{d(C^2 : \sin^2 h)}{dh}\,.$$

Erweitert mit dh, und das Doppelte integriert:

$$5)\qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{\sin^2 h} + D\,,$$

woraus durch Wurzelausziehung, Vereinigung der Nenner und Umkehrung des Bruches folgt

$$dt = \frac{\sin h \,.\, dh}{\sqrt{D - C^2 - D\cos^2 h}}\,.$$

Setzt man zur Vermeidung von Fehlern E für C^2 und bringt das letzte Differential auf die übliche Form, so ist sein Aussehen

$$dt = \frac{1}{\sqrt{D-E}} \cdot \frac{\sin h \,.\, dh}{\sqrt{1 - [D : (D-E)] \cos^2 h}}\,,$$

und sein Integral ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{D}} \,.\, \mathrm{Arc.}\left(\cos = \sqrt{\frac{D}{D-E}} \cos h\right) + F \,.\, \frac{1}{\sqrt{D}}\,.$$

Umgekehrt h als f(t):

$$\cos h = \sqrt{(D-E) : D} \,.\, \cos(\sqrt{D} \,.\, t - F)\,.$$

Um die Beziehung zwischen der andern Koordinate und t aufzufinden, schreiben wir für $\sqrt{(D-E) : D}$ B und führen für $\sqrt{D}\, t - F$ die Hülfsgröfse T ein; dann wird die Gleichung 4) unter Benutzung der letzten Formel für cos h zu

$$dl = \frac{C \,.\, dt}{1 - B^2 \cos^2 T} - w\, dt\,.$$

Nun ist gemäfs der Bedeutung von T dessen Differential gleich $\sqrt{D}.dt$, $dT:\sqrt{D}$ also gleich dt. Setzt man dies in die ersten Summanden von dl ein, benutzt die trigonometrische Formel, welche den Cosinus als Funktion der Tangente ausdrückt, und bedenkt, dafs $1-B^2$ gleich $E:D$ sein mufs, so nimmt das erste Glied von dl die Gestalt an

$$\frac{C.D}{E}\cdot\frac{1}{\cos^2 T}\cdot\frac{dT}{1+(D:E)\,tg^2 T}.$$

Hier braucht man nur für $(D:E)\,tg^2T$ das Quadrat der Tangente eines Hülfswinkels einzuführen, um schliefslich das Ergebnis zu erhalten

$$l = \text{Arc.}\,[tg = \sqrt{D:E}\;tg(\sqrt{D}\;t - F)] - wt + G.$$

Wir schreiten zur Bestimmung der Konstanten. Bezeichnen wir, wie früher, durch eine angehängte Null den Zustand der Gröfsen im Anfange der Bewegung (bei t gleich 0), so ist

$$C = \sin^2 h_0\left(w + \frac{dl}{dt}{}_0\right),$$

d. i. das Doppelte vom Differentialquotienten der auf den Äquator projicierten Fläche, welche der zu h gehörige Bogen auf der Kugeloberfläche beschreibt, wenn die Bewegung auf ein ruhendes Achsensystem bezogen wird. Mit Benutzung des Gefundenen giebt 5)

$$D = \left(\frac{dh}{dt}{}_0\right)^2 + \sin^2 h_0\left(w + \frac{dl}{dt}{}_0\right)^2$$

d. i. das Quadrat der absoluten Geschwindigkeit beim Beginne der Bewegung.

Wir führen den Hülfswinkel q ein, so dafs $E:D = \sin^2 q$, wodurch $(D-E):D = \cos^2 q$ wird. Für den Fall, dafs die relative Anfangsgeschwindigkeit v_0 null ist, bestimmt sich q sehr einfach. Weil nämlich dann $D = w^2\sin^2 h_0$, $E = w^2\sin^4 h_0$, so ergiebt sich: $(D-E):D = \cos^2 h_0$, woraus folgt: $\cos q = \pm\cos h_0$, $q = h_0$ oder gleich $180^0 - h_0$. Unter ganz allgemeinen Verhältnissen finden wir weiter

$$F = -\text{Arc.}(\cos = \sqrt{D:(D-E)}\,.\cos h_0) = -\text{Arc.}(\cos = \cos h_0 : \cos q).$$

Verwandele ich dies in einen Arc. tang., bringe auf einen Nenner und wende auf den entstehenden Unterschied der Quadrate der Cosinus die Formeln für die Summe und für den Unterschied der Cosinus zweier Winkel an, so erhalte ich einen neuen Ausdruck für F, welcher in der Gleichung der nächsten Konstanten eine Vereinfachung ermöglicht, indem ich folgendermafsen umformen kann:

$$G = l_0 - \text{Arc.}\left[tg = \frac{1}{\sin q}tg\,.\,\text{Arc.}\left(\cos = \frac{\cos h_0}{\cos q}\right)\right] = l_0 - \text{Arc.}\left[tg = \frac{\sqrt{-\sin(q+h_0)\sin(q-h_0)}}{\sin q\cos h_0}\right].$$

Für den Hülfswinkel q findet sich eine einfache geometrische Darstellung. Bedeutet c die anfängliche auf ein ruhendes Achsensystem bezogene lineare Geschwindigkeit, so folgt aus der Begriffsbestimmung von q unter Anwendung der Werte von D und E

$$\sin q = \frac{\sin^2 h_0}{c}\left(w + \frac{dl}{dt}{}_0\right) = \sin h_0\,.\,\frac{\sin h_0\left(w + \frac{dl}{dt}{}_0\right)}{c}.$$

Da der Zähler des letzten Bruches dieser Gleichung die west-östliche Komponende der absoluten Anfangsgeschwindigkeit vorstellt, so bedeutet der ganze Bruch den Sinus des Winkels, welchen eben diese Geschwindigkeit mit der Nordlinie bildet, d. h. den Sinus des absoluten Azimuts A', so dafs $\sin q = \sin h_0\,.\sin A'$.

Legen wir nun durch P (in Fig. 7), wo sich das bewegte Teilchen bei $t = 0$ befindet, die Ebene eines gröfsten Kugelkreises längs der Richtung von c und lassen dann durch die Erdachse SN eine zweite zur ersteren senkrechte Ebene gehen, so ist der Punkt Q, in dem beide Ebenen auf der Oberfläche der nördlichen Halbkugel sich treffen, derjenige, wo der durch P gehende Hauptkreis dem Nordpole am nächsten ist. Gleichzeitig bildet er den Scheitel des rechten Winkels

des rechtwinkeligen Kugeldreiecks, in welchem h_0, in der Zeichnung NP, die Hypotenuse, NPQ, d. i. A', der eine spitze Winkel ist, während NQ die diesem gegenüberliegende Kathete vorstellt. Da nun bekanntlich $\sin NQ = \sin h_0 \,.\, \sin A'$, so folgt $q = NQ$. Nennen wir den Mittelpunkt des Breitenkreises, dessen Umfange Q angehört, O, so ist OQ gleich $\sin q$. Es ist daher q der Neigungswinkel (NMQ) der Erdachse gegen diejenige Ebene, welche längs der Anfangsrichtung der absoluten Bewegung und durch den Mittelpunkt der Erde gelegt wird, oder der Bogenabstand des Poles von der Ebene des gröfsten Kugelkreises, der jene Richtung als Tangente enthält, $\sin q$ der Halbmesser desjenigen Parallels, welcher durch den dem Pole zunächstliegenden Punkt dieses Hauptkreises hindurchgeht. Wir wollen den mit $\sin q$ beschriebenen Breitenkreis künftighin bei der absoluten Bewegung den »richtenden«, bei der relativen den »begrenzenden« Breitenkreis nennen.

Unter Benutzung der für die nicht veränderlichen Gröfsen gefundenen Werte gestalten sich die Beziehungen zwischen den Veränderlichen schliefslich folgendermafsen:

$$6) \qquad \cos h = \cos q \,.\, \cos\left[ct + \mathrm{Arc.}\left(\cos = \frac{\cos h_0}{\cos q}\right)\right],$$

$$7) \qquad l - l_0 = \mathrm{Arc.}\left\{\mathrm{tg} = \frac{1}{\sin q} \,.\, \mathrm{tg}\left(ct + \mathrm{arc.}\cos\frac{\cos h_0}{\cos q}\right)\right\} - \mathrm{Arc.}\left\{\mathrm{tg} = \frac{1}{\sin q} \,.\, \mathrm{tg}\,\mathrm{arc.}\cos\frac{\cos h_0}{\cos q}\right\} - wt\,.$$

Entwickelt man sich das in der eckigen Klammer der ersten Gleichung Stehende als Funktion von h, setzt in die zweite Gleichung ein und macht Gebrauch von der umgewandelten Form von G, so erhält man:

$$8) \qquad wt + l - l_0 = \mathrm{Arc.}\left(\mathrm{tg} = \frac{1}{\sin q} \,.\, \mathrm{tg}\,\mathrm{arc.}\cos\frac{\cos h}{\cos q}\right) - \mathrm{Arc.}\left(\mathrm{tg} = \frac{\sqrt{-\sin(q+h_0)\sin(q-h_0)}}{\cos h_0 \sin q}\right).$$

b) Untersuchung der Eigenschaften der Bahn.

Wir hatten schon oben im Abschnitt I auf S. 6 gefolgert, dafs ein Körper, der ohne Reibung und ohne tangential wirkende Kräfte auf der Oberfläche einer Kugel gleitet, einen gröfsten Kugelkreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft; wir können jetzt aus unseren Formeln streng analytisch die Richtigkeit dieser Behauptung in sofern nachweisen, als wir darthun, dafs die auf ruhende Achsen bezogene Anfangsgeschwindigkeit c für den ganzen Verlauf der Bewegung dieselbe bleibt.

Erweitert man nämlich die zweite Gleichung von 4) (S. 19) durch $\sin h$ und zählt $w \sin h$ hinzu, so verwandelt sich die linke Seite in die west-östliche Komponende von c, nämlich in $\sin h\left(w + \frac{dl}{dt}\right)$, während rechts $w \sin h$ wegfällt. Erhebt man auf's Quadrat und zählt 5) dazu, so hebt sich rechts $C^2 : \sin^2 h$, und es ergiebt sich: c gleich D.

Dies gilt aber keineswegs von der relativen Geschwindigkeit v. Multiplicieren wir wiederum beide Seiten der zweiten Gleichung von 4) mit $\sin h$, erheben das Entstehende auf das Quadrat, so erhalten wir durch Addition von 5), da die Summe der links stehenden Quadrate die zweite Potenz von v ergiebt, und sich $C^2 : \sin^2 h$ weghebt,

$$v^2 = D - 2Cw + w^2 \sin^2 h\,.$$

Nun ist nach dem auf S. 20 Gefundenen

$$D = \left(\frac{dh}{dt}^0\right)^2 + \sin^2 h_0 \left[w^2 + 2w\frac{dl}{dt}^0 + \left(\frac{dl}{dt}^0\right)^2\right],$$

$$2Cw = +\sin^2 h_0 \left[2w^2 + 2w\frac{dl}{dt}^0\right],$$

woraus durch Abziehen für $D - 2Cw$ eine Gleichung entsteht, welche rechts aufser $-w^2 \sin^2 h_0$ noch

das Quadrat der im Anfange der Zeit gegebenen relativen Geschwindigkeit enthält. Führen wir ihr Zeichen v_0 ein, so kommen wir zu dem Schlusse

$$v^2 = v_0^2 + w^2(\sin^2 h - \sin^2 h_0).$$

Die Geschwindigkeit, die wir suchen, ist also unabhängig von der geographischen Länge des Ortes, an dem sich das Massenteilchen befindet, und verändert sich nur mit dem Abstand vom Pole dergestalt, dafs sie bei der Annäherung an den Äquator gröfser wird.

Über das Wesen der zu untersuchenden Bahn erhalten wir am schnellsten Aufschlufs, wenn wir den einfachen Fall betrachten, wo der Körper bei $t = 0$ in Beziehung zu der sich drehenden Erde ruht. Abgesehen von dem auf S. 20 gegebenen Beweise ist in diesem Falle schon deshalb, weil die anfängliche Bewegung nach Osten gerichtet ist, und mithin, gemäfs der auf derselben Seite stehenden Formel, $\sin q$ gleich $\sin h_0$ wird, q gleich h_0, wenn wir den Ausgangspunkt auf der Nordhalbkugel wählen. Folglich ist F als $-\mathrm{Arc.}(\cos = 1)$ null, der zweite Summand im Ausdrucke für $l - l_0$ in 7) mufs dann $\mathrm{Arc.}(\mathrm{tg} = 0)$ sein, er fällt also ebenso weg, so dafs die Gleichungen der gesuchten krummen Linie, weil auch $\frac{dh}{dt}$° und $\frac{dl}{dt}$° verschwinden, sich vereinfachen zu

$$9\left\{\begin{aligned} \cos h &= \cos h_0 \cos ct = \cos h_0 \cos(wt \,.\, \sin h_0), \\ \mathrm{tg}(wt + l - l_0) &= \frac{1}{\sin h_0}\,\mathrm{tg}(wt \sin h_0) = \frac{1}{\sin h_0}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{Arc.}\left(\cos = \frac{\cos h}{\cos h_0}\right). \end{aligned}\right.$$

Nun wird l nach derselben Seite gezählt, nach welcher die Umdrehung der Erde erfolgt. Danach bezeichnet $wt + l - l_0$ die relative Länge, vermehrt um die auf feste Anfangsrichtung bezogene Länge des beweglichen Achsensystems. Ferner ist in Fig. 7, die für einen aufserhalb der Erde stehenden Beobachter gezeichnet ist, nach dem oben Gesagten Bogen NQ jetzt h_0. Stellt der Bogen NV h vor, so ist in dem Kugeldreiecke NQV die andere Kathete QV gleich $\cos h : \cos h_0$, sodafs die letzte Gleichung von 9) auch die Form annehmen kann

$$\sin h_0 = \mathrm{tg}\,QV \,.\, \mathrm{cotg}(wt + l - l_0),$$

woraus nach der Neper'schen Regel vom rechtwinkeligen Kugeldreiecke folgt, dafs $wt + l - l_0$ der sphärische Dreieckswinkel VNQ ist. In dem vorliegenden Falle ist aber die absolute Geschwindigkeit gleich der durch die Drehbewegung hervorgerufenen Geschwindigkeit eines Punktes im Umfange des richtenden Parallelkreises. Da nun ein Faden, der über die Oberfläche einer Kugel ausgespannt wird, ohne dafs eine seitliche Reibung vorhanden ist, sich in diejenige Linie einstellen mufs, deren Schmiegungsebene überall senkrecht zur Oberfläche steht, so wird er sich an den Umfang eines gröfsten Kugelkreises anlegen. Daher kann ein aufserhalb der Erde befindlicher Beobachter sich die fragliche Bahn auch so beschrieben denken, dafs auf den Umfang des richtenden Parallels ein Faden gewickelt ist, der, indem er sich im Ausgangspunkte der Bewegung von diesem Kreise abhebt, innerhalb der Ebene eines Hauptkreises auf der Kugeloberfläche weiter gezogen wird und dadurch jenen Breitenkreis entweder links herum dreht, wenn das Ende des Fadens sich vom Berührungspunkte entfernt, oder von der sich drehenden Rolle gezogen wird, wenn es sich demselben nähert. In Fig. 7 z. B. würde der Faden im ersten Falle von Q über P nach V gehen, im zweiten von D nach T und auf der Rückseite der Kugel mit dem Pfeil in der punktierten Linie nach Q, während der Breitenkreis um O sich von Westen nach Osten herumdreht.

Derjenige aber, welcher mit dem Umfange dieses Breitenkreises selbst sich herum bewegt, wird den Eindruck erhalten, als sei derselbe unbeweglich, und er mufs deshalb den Punkt, wo der Faden aufliegt, im umgekehrten Sinne der Drehung herumwandern sehen. Deshalb ist die relative Bahn in dem Falle, dafs das bewegte Teilchen zu irgend einer Zeit in Beziehung zur Erde ruht, diejenige krumme Linie, welche ein längs der Kugeloberfläche gespannter Faden mit seinem Ende beschreibt, während er, ohne

Reibung gleitend, rechts herum von dem Umfange desjenigen Parallelkreises abgewickelt wird, dem der Punkt der relativen Ruhe zugehört. Ein zweiter Ast der Krummen entsteht dadurch, dafs ein zweiter Faden nach der Stelle hin, wo der erste Ast sich von dem Breitenkreise abhob, in derselben Drehungsrichtung aufgewickelt wird. Nach dem in der Mathematik üblichen Sprachgebrauche könnte man die Kurve die Kreisevolvente auf der Kugel oder genauer die »sphärische Evolvente des begrenzenden Breitenkreises« nennen.

Zu einer anderen Auffassung führt uns folgende Betrachtung: Für den Fall, dafs die auf bewegliche Koordinaten bezogene Anfangsgeschwindigkeit null ist, stimmen die beiden Kreise, um die es sich hier handelt, in ihrem Berührungspunkte in Richtung und Gröfse der wirklichen Bewegung überein; aufserdem entfernen sich diejenigen Punkte beider Linien, die sich am Orte der relativen Ruhe trafen, ein jeder auf dem Umringe seines Kreises, mit gleicher Geschwindigkeit von dieser Stelle. Dies bleibt auch dann wahr, wenn die Koordinaten beweglich sind, der letztere Punkt also scheinbar von seiner Stelle rückt. Da nun diese Verhältnisse dieselben sind wie bei zwei auf einander sich wälzenden Kreisen, so erhalten wir zweitens die gesuchte Bahn, wenn wir den Hauptkreis der absoluten Bewegung auf dem begrenzenden Breitenkreise rollen lassen, aber so, dafs der erstere auf der Kugeloberfläche beharrt. Ist daher das Massenteilchen zu irgend einer Zeit in Beziehung zur Erde in Ruhe, so ist die Bahn die Epicykloide auf der Kugel, und zwar entsteht dieselbe dadurch, dafs ein gröfster Kugelkreis sich auf dem Umfange desjenigen Parallels fortwälzt, welchem der Ort der Ruhe zugehört.

Ist dagegen die bisherige Voraussetzung nicht erfüllt, so kann die gesuchte Bahn weder durch einfache Abwickelung entstehen noch als Epicykloide aufgefafst werden. Nehmen wir zunächst unsern Standpunkt aufserhalb der sich drehenden Kugel, so können wir uns vorstellen, dafs auf einem Hauptkreise von der Stelle der Polnähe aus gleichzeitig zwei Punkte ausgehen, der eine mit einer Schnelligkeit, welche gleich ist der dem Ausgangspunkte zukommenden Drehungsgeschwindigkeit, der andere um so viel schneller oder langsamer, als die relative für die Polnähe berechnete oder gegebene Geschwindigkeit beträgt. Der erste wird unserem bisher behandelten einfacheren Falle entsprechen, der zweite wird in Beziehung zu der sich drehenden Kugel die allgemeine Bahn durchlaufen, welche wir jetzt suchen, und es leuchtet unmittelbar ein, dafs wir uns dieselbe dadurch beschrieben denken können, dafs auf dem Faden, dessen Abwickelung die von dem ersten Punkte durchlaufene Evolvente erzeugt, ein zweiter Punkt gleitet, welchem in Beziehung zum Faden die in der Polnähe stattfindende relative Geschwindigkeit zukommt. Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man auf dem rollenden Kreise der Epicykloide einen Punkt annimmt, der auf dem Umfange desselben in Beziehung zu ihm mit jener relativen Geschwindigkeit fortrückt.

Dieses Fortrücken auf dem Umringe des rollenden Kreises können wir uns auf eine Weise entstanden denken, die es ermöglicht, die verschiedenen Fälle der gesuchten allgemeinen Kurve unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. Würde nämlich der Hauptkreis der absoluten Bewegung zu jeder Zeit in die Ebene des Breitenkreises um O (Fig. 8) nach aufsen umgeklappt, so würde die vorhin betrachtete einfachere Bahn eine ebene Epicykloide sein, bei welcher der Berührungspunkt Q auf dem Umfange des richtenden Breitenkreises mit der Winkelgeschwindigkeit w schraubenrecht herumwandert. Ist der Mittelpunkt M der rollenden Scheibe nach Verflufs der Zeit t in M' angelangt, so hat der Winkel MOM' den Wert von —wt erreicht. Die am Mittelpunkt M gemessene Winkelgeschwindigkeit dagegen, mit der ein Punkt im Umringe der rollenden Scheibe sich von der Stelle entfernt, wo diese aufliegt, wird wsinq sein, weil OQ gleich MQ sinq.

Man beschreibe um O und M zwei andere Kreise, die einander in B berühren, mit den bezüglichen Halbmessern R und R' und lasse den letzteren um den ersteren wie den Zeiger der

Uhr sich herumwälzen, aber so, dafs die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Berührungspunkt auf dem festen Kreise fortrückt, dieselbe wie vorher, also w bleibt. Dann beträgt die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich Kreis um M in Beziehung zu OB dreht, Rw : R'. Ist derselbe eine körperliche Scheibe, und befestigt man an ihre Achse eine zweite konzentrische Scheibe mit dem Halbmesser MQ, die an ihrem Rande einen zeichnenden Stift trägt, welcher im Anfange der Zeit sich in Q befindet, so wird die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich dieser um M herumdreht, die nämliche sein wie die des mit MB beschriebenen Kreises, ihr Unterschied also gegen den zuerst betrachteten einfacheren Fall der relativen Ruhe $w\left(\frac{R}{R'} - \sin q\right)$ betragen. Da nun die Längen R und R' beliebig gewählt werden können, so mufs es möglich sein, der letzteren Formel denjenigen Wert zu geben, welcher gleich ist der Gröfse der relativen Bewegung des Massenteilchens in der Polnähe, berechnet für den Kugelhalbmesser als Einheit. Da nun ferner die Lage der Punkte Q, M, oder Q' und M' immer eine solche ist, wie sie sein mufs, wenn der Hauptkreis der absoluten Bewegung aus seiner jeweiligen Stellung, die er in Beziehung zu der sich drehenden Erde in der That einnimmt, in die Ebene der Figur umgelegt würde, so brauchen wir nur die Kreise um M in Kugelhauben zu verwandeln und auf die Oberfläche der Kugel zurückzuklappen, um durch jenen, jetzt am Rande einer hohlen Halbkugel angebrachten Stift die Darstellung der gesuchten krummen Linie zu erhalten. Nennen wir noch das Komplement von q die »begrenzende Breite«, so kommen wir zu dem Schlufs:

Die Trägheitsbahn auf der Erdkugel ist diejenige krumme Linie, welche eine hohle Halbkugel mit einem Punkte ihres Randes beschreibt, während eine Kugelhaube an derselben Achse mit ihrem Rande auf dem Umfange eines Parallelkreises in der Richtung von Ost nach West sich entlang wälzt. Und zwar ist die Gröfse der auf einander rollenden Kreise, von denen der eine den Rand der Kugelkappe bildet, dadurch bestimmt, dafs der Pol des beweglichen Kugelkreises immer um die begrenzende Breite von demjenigen Erdpole absteht, welchen die Halbkugel einhüllt, und dafs zweitens der Cosinus dieser Breite vermindert um den Bruch, dessen Zähler der Halbmesser des ruhenden, und dessen Nenner derjenige des rollenden Kreises, dem Zahlenwerte nach gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein mufs dem Quotienten, den ich erhalte, wenn ich mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung in die nach Osten gezählte relative Geschwindigkeit in der Polnähe teile, den Halbmesser der Erde als Einheit genommen.

Da wir auf eine Linie gekommen sind, deren Verlauf aus ihrer Entstehungsart unmittelbar erhellt, so können wir uns mit der Schilderung der Eigenschaften der Bahn kurz fassen. Zunächst ist klar, dafs der Hauptkreis der absoluten Bewegung nirgends den Erdpolen näher kommen kann als an denjenigen Stellen, wo er die begrenzenden Breitenkreise berührt (T und Q in Fig. 7). Da durch die Beziehung auf die sich drehende Erde die Kurvenpunkte nur weiter nach Westen rücken, nie aber nördlich oder südlich, so folgt, dafs die von Baeyer für das Erdsphäroid aufgestellte Behauptung wieder zu ihrem Rechte kommt, dafs nämlich das bewegte Teilchen den Pol nie erreichen kann, ausgenommen, wenn das absolute Azimut (A') null ist oder 180°. Die Bahn windet sich zwischen den beiden begrenzenden Parallelkreisen hin und her und wiederholt sich nach der Rückkehr zu dem Ausgangspunkte. Die Windungen sind um so zahlreicher, je kleiner die absolute Geschwindigkeit im Verhältnis zu der Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, also in dem einfacheren Falle relativer Ruhe, je näher der Ruhepunkt einem der beiden Pole liegt.

Die verschiedenen durch die Richtung der scheinbaren Anfangsbewegung bedingten Gattungen der Bahn verhalten sich gerade so wie die Abteilungen der ebenen Kreisevolvente, die ich in meiner oben besprochenen Abhandlung in der Zeitschr. der österr. Ges. f. M. auf S. 286 aufgestellt habe.

Je mehr die relative Geschwindigkeit in der Polnähe in der Richtung von Ost nach West wächst, um so kleiner wird die absolute Geschwindigkeit, um so zahlreicher die Windungen, um so früher wird die Bewegung eine westliche, während ein an jener Stelle östlich sich bewegender Körper mehr in einer süd-nördlichen Linie weiter zu gehen strebt. Ist die relative Geschwindigkeit gleich, aber entgegengesetzt der der Erde innewohnenden Umdrehungsgeschwindigkeit, d. h. ist sie $-\sin q \cdot w$, so ist die Bahn ein Kreis, und die Richtung, in welcher sie durchlaufen wird, bleibt eine westliche.

Von Wichtigkeit scheint es mir, darauf hinzuweisen, dafs es bei unserer Voraussetzung für die Natur der Kurve wesentlich ist, ob an einer gegebenen Stelle die Richtung der Bewegung nach Osten oder nach Westen geht. Wenn es nun erlaubt ist, die aus mathematischen Begriffen und den reinen geometrischen Gestalten gezogenen Schlüsse auf die physikalischen Verhältnisse der Natur zu übertragen, so würde daraus folgen, dafs die alte Anschauung, wonach zur Unterscheidung der Windbahnen nur die Beantwortung der Frage, ob Süd-Nord oder Ost-West, für nötig gehalten wurde, nicht mehr genügen kann, dafs wir hingegen auf Dinge stofsen, welche vielleicht mit den Beobachtungen von Oberst Wiegrebe und Major Darapsky in Einklang zu bringen sind. Die Frage, ob Süd-Nord, oder Ost-West, ist deswegen für uns von untergeordneter Bedeutung, weil wir für die Einteilung der Bahngattungen der absoluten Anfangsgeschwindigkeit bedürfen. Diese aber setzt sich zusammen aus der relativen Geschwindigkeit und der Schnelligkeit der Bewegung, welche dem Ausgangspunkte infolge der Erdumdrehung zukommt. Diese letztere aber ist die bedeutend überwiegende Komponende, da, wie schon Baeyer hervorhebt, in unseren Breiten die stärksten Stürme noch nicht den sechsten Teil der Drehungsgeschwindigkeit der Erdoberfläche erreichen.

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs von den verschiedenen Projektionen, die man gebraucht, um die Oberfläche einer Kugel auf ebener Fläche darzustellen, die gnomonische Polarprojektion in unserem Falle vor anderen manchen Vorteil voraus hat. Man wählt bei dieser eine zur Erdachse senkrechte Ebene als Bildfläche, und zieht von dem Mittelpunkte der Kugel durch die abzubildenden Punkte Strahlen, deren Durchschnittspunkte mit jener Ebene als Projektionen betrachtet werden. Dadurch erhält man eine leidlich bequeme Art, die gefundene Bahn auf ebener Fläche in einer Zeichnung auszuführen. Die Ebene des Papiers stelle in Fig. 9 die Ebene des begrenzenden Breitenkreises vor, und der gröfste Kugelkreis der absoluten Bewegung werde in dieselbe umgeklappt, aber so, dafs beide Mittelpunkte, O und D, auf derselben Seite vom Berührungspunkte B liegen. Dann würde ich in dem zuerst behandelten einfacheren Falle als Bahn eine ebene Epicycloide erhalten, doch so, dafs ein gröfserer Kreis, sich um einen im Verhältnis von 1 zu $\sin q$ kleineren herumwälzt, indem er ihn einschliefsend berührt. Bei der gewählten Projektionsart erscheint aber jeder gröfste Kugelkreis als gerade Linie, und zwar mufs derjenige, in welchem die absolute Bewegung vor sich geht, die Berührende in dem Punkte sein, wo der rollende Kreis auf dem unbeweglichen aufliegt. Ferner finden wir die Projektion des Ortes, in welchem das Massenteilchen sich jeweilig befindet, wenn wir für BD als Halbmesser die Tangentenlinie suchen, welche demjenigen Centriwinkel zugehört, den ein durch das Teilchen gezogener Kugelhalbmesser in der absoluten Bewegung seit der Berührung mit dem richtenden Breitenkreise beschrieben hat. Wird der Anfang der Zeit in den Augenblick gesetzt, wo die bewegte Masse im Umfange des Kreises um O eintraf, und ist der Berührungspunkt A, so mufs der Winkel AOB, d. i. der Winkel, um welchen der Berührungspunkt für den mit der Erde sich Drehenden scheinbar nach rechts fortgerückt ist, in dem hier zu behandelnden Falle gleich $-wt$ sein; der zugehörige Winkel des Hauptkreises aber $wt \cdot \sin q$. Verlängern wir also BO über O, bis sie gleich $BO : \sin q$ wird, so mufs der Endpunkt der Verlängerung der Mittelpunkt des umgeklappten gröfsten Kugelkreises sein. Tragen wir dann in D an DB einen Winkel gleich $AOB \cdot \sin q$ an, so ist der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der durch B gelegten Berührenden das gesuchte Bild des Kurvenpunktes.

Fig. 9 ist für den Fall entworfen, dafs sinq gleich $\frac{1}{3}$, also wenn die begrenzende Breite 70° 31′ 43,6″ beträgt. P', D' und B' entsprechen dem Zeitpunkt, wenn wt gleich 90°, oder wenn ein Vierteltag verflossen ist.

Statt dessen kann man auch ein wirkliches Rollen der Kreise eintreten lassen, indem man den kleineren Kreis als dichte Scheibe darstellt, den gröfseren dagegen als innere Höhlung eines Ringes, in welchem man sich ein Zeichen macht für denjenigen Punkt, der beim Beginne der Bewegung auf der Scheibe aufliegt. Wenn man nun, während der Ring sich herum wälzt, an die jeweilige Lage des Berührungspunktes auf dem untergelegten Papier dieselbe Zahl hinschreibt als an die Stelle, wo sich der bezeichnete Punkt des Ringes gleichzeitig befindet, so hat man nur die zusammengehörigen Centriwinkel und Tangenten zu ziehen, um eine punktweise Darstellung der projicierten Epicycloide zu erhalten.

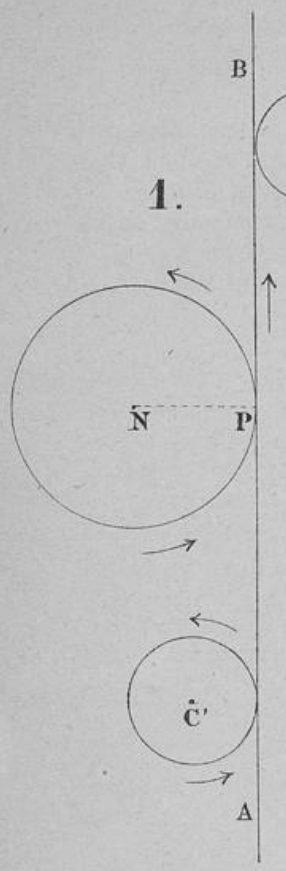
Auch ist es nicht schwer, die Gleichungen des Bildes aufzustellen, wenn man Polarkoordinaten benutzt, deren Mittelpunkt O ist (Fig. 9). Die Winkelabscisse ist, wie unmittelbar einleuchtet, die geographische Länge l und der Leitstrahl die Sekantenlinie PO. Mit Hülfe der Differentialrechnung ist es dann möglich, an dem Bilde der Bahn mehrere Eigenschaften nachzuweisen, die auch der wirklichen Kurve zukommen. So besitzt dieselbe in dem genannten einfachen Falle an derjenigen Stelle, wo sie den begrenzenden Breitenkreis berührt, einen merkwürdigen Punkt, an welchem für rechtwinkelige Koordinaten x und y, wenn AO die x-Achse, $\frac{dy}{dx}$ null, die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ dagegen unendlich wird. Es ist also ein Rückkehrpunkt der ersten Art, eine scharfe Ecke, in welcher sich zwei Äste begegnen, die auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente OA liegen.

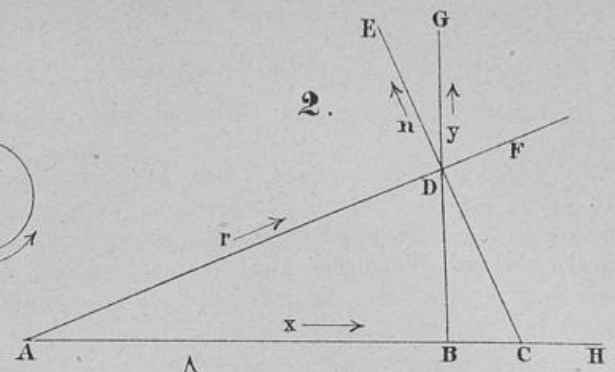
Eine besondere Beachtung verdient die in Rede stehende Projektionsart dann, wenn die begrenzende Breite 60° beträgt, z. B., wenn wir den Weg eines Luftteilchens betrachten, das über Petersburg oder Christiania sich in Ruhe befand. Weil dann sinq gleich $\frac{1}{2}$, und weil der Peripheriewinkel eines Kreises gleich der Hälfte des Centriwinkels auf gleichem Bogen ist, so durchläuft dann D den Umfang des mit OA um O beschriebenen Kreises (Fig. 10). Man erhält dadurch eine sehr bequeme Zeichnung und kann sogar auch für diesen Fall einen Kurvenzirkel verfertigen, welcher die gesuchte krumme Linie in einem Zuge darstellt. Man nehme einen rechten Winkel DBE (in Fig. 10 D_1 B_1 E), drehbar um die Mitte O des Schenkels DB, mache in dem andern Schenkel BE eine Rinne, so dafs sich eine Bleifeder in ihr verschieben kann, und bringe zweitens das um D drehbare Lineal DF (in der Fig. D_1 F) an, ebenfalls zur Schiene ausgehöhlt, so dafs es an einem in A befestigten Stift drehend hin und her gleitet; dann ist der Schnittpunkt P der Schienen DF und BE ein Punkt des Bildes der Bahn. Ein dort beweglich angebrachter Griffel mufs die gesuchte Krumme beschreiben. Fig. 10 giebt unter Gültigkeit der hier gemachten Annahmen das Bild der einfachen sphärischen Kreisevolvente. Wie man sieht, gelangt der Punkt P, wenn ∢ AOB 180° wird, in unendliche Ferne, in Wirklichkeit also würde das bewegte Teilchen schon in einem halben Tage den Äquator erreichen.

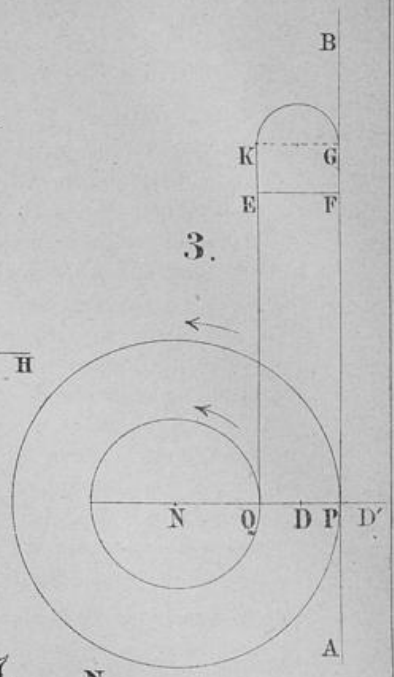
Buxtehude, im Januar 1882.

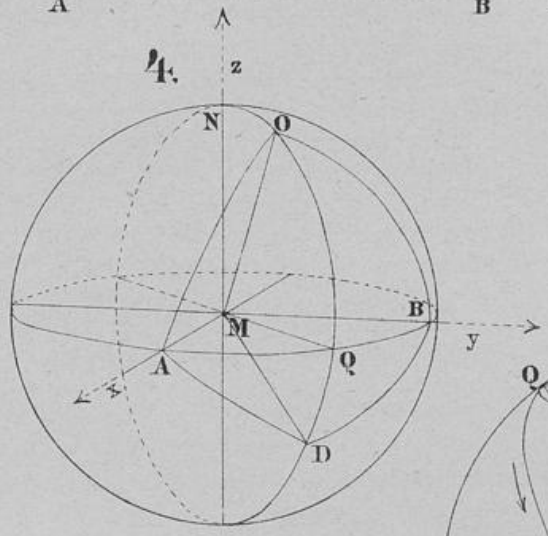
Roth.

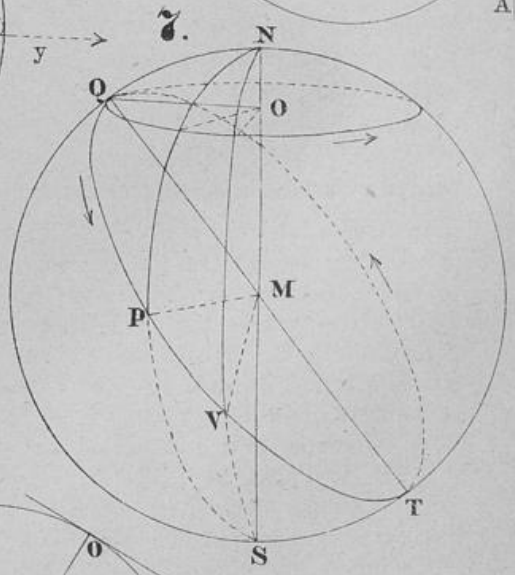
Tafel I.

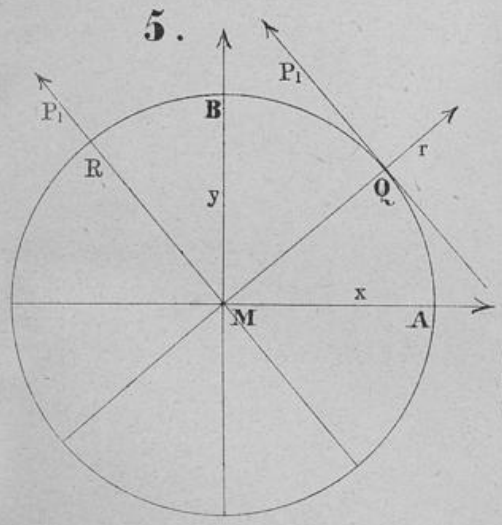

1.
B
C
N
P
C'
A

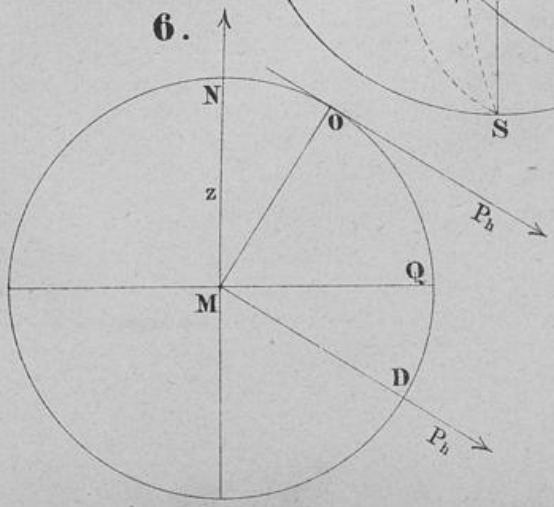

2.
E
G
n
y
F
D
r
x
A
B
C
H


3.
B
K
G
E
F
N
Q
D
P
D'
A


4.
z
N
O
M
B
y
A
Q
x
D

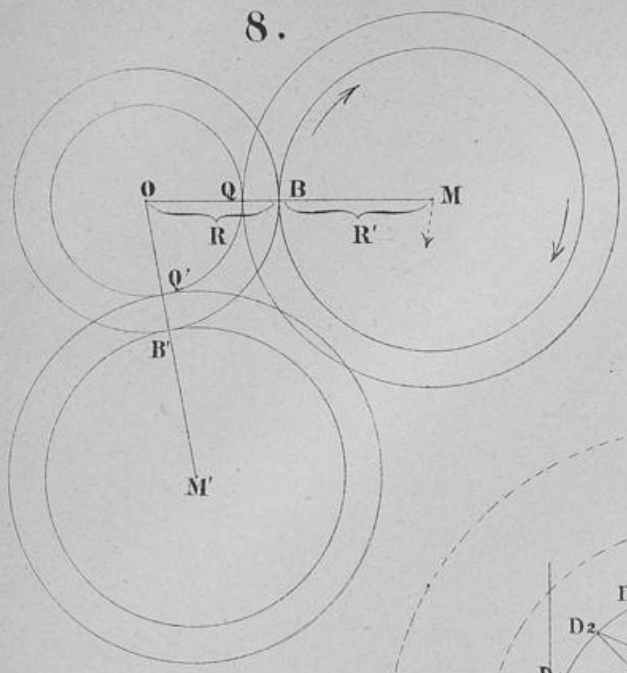

7.
N
Q
O
M
P
V
T
S


5.
P1
P1
B
r
R
y
Q
x
M
A

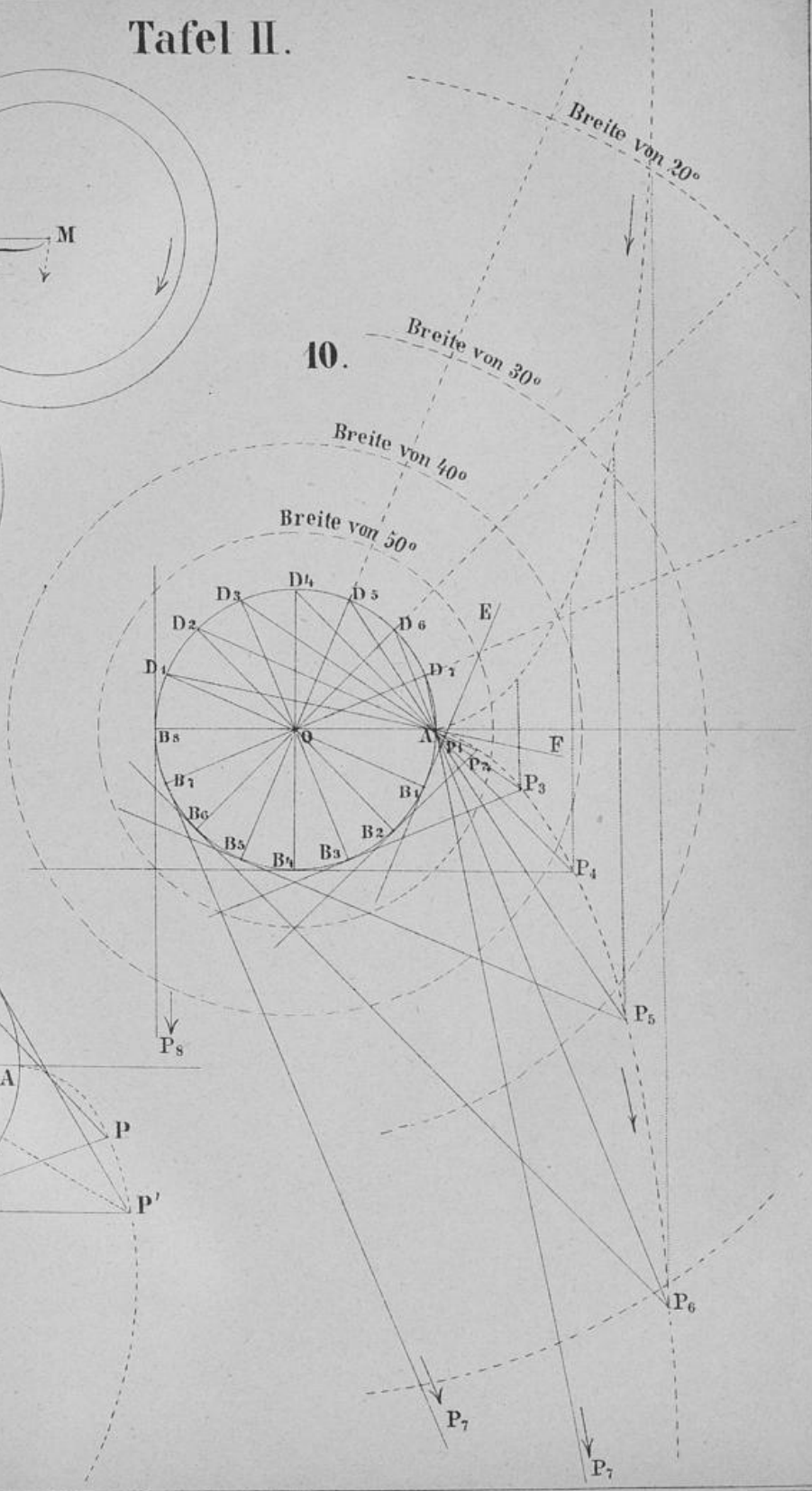

6.
N
O
z
Ph
Q
M
D
Ph

Tafel II.

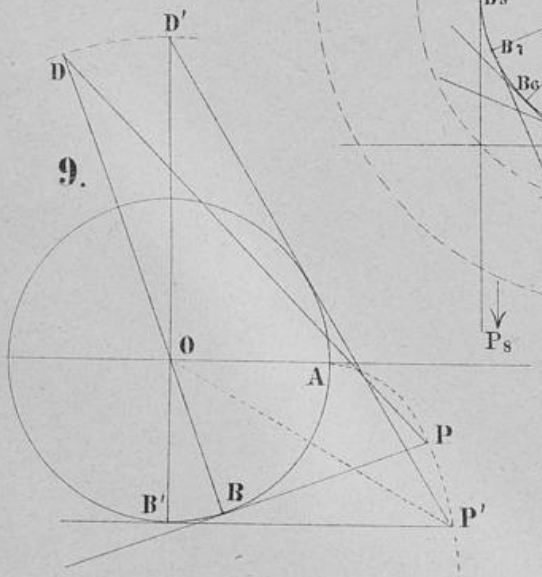
8.



10.



9.



TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19