Entwickelung der Begriffe positiver und negativer Zahlen.

Wenn wir gleichartige Gegenstände wahrnehmen oder im Gedanken auffassen, drängt uns die Natur unseres Geistes zur Frage: wie viele sind solche? Die Antwort auf diese Frage ist die Zahl. Zahl ist also Inbegriff gleichartiger Einheiten.

Die einzelne Einheit in der Zahl ist in Rücksicht auf diese keine Zahl, sondern nur der nothwendige Ursprung der Zahl; wir werden aber bald sehen, daß man selbst diese Einheit in anderer Beziehung Zahl nennen könne. Was ist nun aber Einheit? Alles, was abgesondert von anderem Gleichartigen wirklich bestehet oder gedacht wird, es sei sinnlich wahrnehmbar oder nicht, es sei wahr oder falsch, es sei wirklich oder eingebildet, benannt oder unbenannt. Was gleichartig wiederholt zur Frage Anlaß gibt: wie oft kommt es vor? ist Einheit.

Was an der Zahl allererst als wesentlich auffällt, ist ihre Größe; die Zahl hört auf dieselbe zu sein, sobald sich ihre Größe ändert. Der Größe nach können die Zahlen als wachsend ohne Ende gedacht werden. Aber auch die Einheiten, durch deren Verbindung Zahlen entstehen, können — die unbenannten wenigst insgesammt — als in Theile auflösbar gedacht werden. Denkt man einmal das, so vermag man auch nicht einen so kleinen Theil zu denken, der nicht mehr kleiner werden könnte.

Die Zahl ist unendlicher Zunahme und Abnahme fähig.

Eben weil man die Einheit, auch die sehr kleine, als Inbegriff (Zahl) gleichartiger Theile auffassen kann, muß es erlaubt sein die Einheit selbst in solcher Beziehung Zahl zu nennen.

Die Größe der Zahlen läßt sich auf doppelte Weise auffassen: als bestimmte oder als unbestimmte. Denke ich eine Zahl so, daß ich im Gedanken festsetze, aus wie vielen Einheiten sie bestehe, so habe ich die Vorstellung einer bestimmten Zahl. Denke ich hingegen zwar eine Zahl, doch ohne im Gedanken festzusetzen, aus wie vielen Einheiten sie bestehe, so habe ich den Begriff einer unbestimmten Zahl. Als Zeichen bestimmter Zahlen bedient man sich jetzt allgemein der indischen oder arabischen Ziffern.

So lange man nur mit bestimmten Zahlen und besondern Ziffern zu rechnen pflegte, fühlte man kein Bedürfniß an der Zahl ein anderes Merkmal zu beachten, als einzig nur die Größe. Man wendete zwar die Zahlen immerwährend auf Gegensätze an, wie auf Einnahme und Ausgabe, Weg fort und zurück, Kraft und Gegenkraft, Gewicht und Gegengewicht u. dgl.; Niemanden aber fiel es ein eine ähnliche Gegensätzigkeit — man erlaube mir dieses hier unentbehrliche Wort — auf die Zahlen selbst zu übertragen.

Als man aber anfing mit unbestimmten Zahlen und allgemeinen Zahlzeichen Rechnungen zu versuchen, wurde man genöthigt Gegensätzigkeit in den Zahlen selbst aufzufassen. Man konnte nämlich ohne solche Auffassung in vielen Fällen keine Subtraktion vornehmen. Man dachte sich z. B. a größer als b, und wollte b von a subtrahiren. Das war auf dem gewohnten Wege der Auslassung hier nicht möglich; denn was sollte man als Rest übrig lassen? Das b als unbestimmte Größe konnte man aus dem ebenfalls unbestimmten a nicht herausreißen. Es erübrigte also nichts, als daß man dachte: Kraft und Gegenkraft, Gewicht und Gegengewicht, überhaupt wahre Gegensätze *) heben sich ganz oder zum Theile auf, sobald sie ihre Wirkungen oder Bedeutungen vereinigen; folglich muß

*) Möchte man einmal aufhören, Vermögen und Schulden nicht nur als reine Gegensätze zu betrachten, sondern sich ihrer bei Erläuterung der hier besprochenen Begriffe zu wesentlichem Nachtheile für die gewünschte Klarheit wenn nicht ausschließlich wenigst vorwiegend zu bedienen! Vermögen ist Besitz irgend einer werthgültigen Realität, Schuld aber ist Verpflichtung von dieser, so fern man sie hat, an jemand Andern abzutreten. Das eine ist Reales, das andere Moralisches. Guthaben und Schuld sind Gegensätze.

auch *b* als Gegensatz gefaßt und so mit *a* vereinigt — zu *a* addirt in diesem eine Größe, die = *b* ist, aufheben — für fernere Berechnung ungültig machen, und so bleibt in *a* weiter nichts mehr geltend als die Größe, um die es das kleinere *b* übertrifft.

Das Bedürfniß der Rechnung konnte ferner heischen, daß auch von diesem Gegensatze *b* ein unbestimmter Theil *c* gehoben — ungültig würde. Auch diese Wegnahme konnte man durch bloßes Weglassen nicht vollbringen. Es blieb also kein Mittel *c* im Gegensatze ungültig zu machen als dieses, daß man den Satz *a* durch Beigabe — Addition — des Satzes *c* vermehrte.

Hiemit war die Arithmetik um einen Begriff bereichert. Unabweislich müßen wir seither zwei unendliche Zahlenreihen uns vorstellen. Die Einheiten der einen Reihe sind von den Einheiten der andern, wofern beide unbenannt oder auch gleichnamig sind, an Größe nicht verschieden, so wenig als ein Schuh von einem Ziele fort und wieder zurück gemessen, oder ein Pfund Gewicht und ein Pfund Gegengewicht, ein eingenommener und wieder ausgegebener Gulden; nur haben die Einheiten der zweiten Reihe eine andere Richtung, so daß sie durch Addition mit den Einheiten der erstern verbunden sich in gleicher Anzahl wechselweise heben, der mathematischen Geltung nach vernichten. *)

Man nennt die Zahlen der erstern Reihe gewöhnlich positive die der andern negative. Eben so gut oder besser hätte man die der erstern Reihe Zahlen schlechthin die der andern Gegenzahlen nen-

---

*) Diese Vernichtung ist nicht Vernichtung des Wesens, sondern Vernichtung der Geltung in gewisser Beziehung. Bewegung fort, wird durch Bewegung zurück nicht vernichtet, wiewohl die rein mathematische Wirkung der Bewegung, die Entfernung vom Ausgangspunkte ganz oder zum Theile vernichtet wird. Ausgegebenes Geld ist nicht vernichtet an sich, wohl aber für den, welcher es zuvor besessen.

Es ist widersinnig, wenn man behauptet, alle negativen Zahlen seien kleiner als alle positiven, ja kleiner als Null — der gänzliche Abgang aller Quantität — und zwar um so kleiner, je größer sie werden, oder das zwar nicht mit Worten sagt, wohl aber durch gleichviel bedeutende Zeichen ausdrückt, wie z. B. $4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2$ u. s. f. Man kann mit gleichem Scheine der Richtigkeit auch so beginnen und fortfahren: $-4 > -3 > -2 > -1 > 0 > 1 > 2 > 3$ u. s. w.

*

nen können. In neuerer Zeit ist es in Süd- und Norddeutschland, wie ich sehe, üblich geworden die erstern Zahlen additive die andern subtraktive zu nennen. Daß diese Namen nicht der Ausdruck richtiger Begriffe seien, ist aus dem bisher Gesagten leicht abzunehmen.

Will sich der Anfänger angemessene Begriffe von den erwähnten zwei Zahlenreihen bilden, wird er zu Aehnlichkeiten Zuflucht nehmen müßen.

Er mag etwa so denken. Ich erhalte den Auftrag von der Stelle, auf der ich stehe, z. B. zehn Schritte weit fortzugehen. Was muß ich diesen Auftrag zu erfüllen thun? Nichts anderes als dieses: ich muß in gerader Richtung 10 Schritte fortsetzen; wohin ich mich wende, ist völlig gleichgültig, ob nach Nord nach Süd, nach Ost nach West oder einer dazwischen gelegenen Richtung. Nachdem ich den Auftrag erfüllt habe, wird mir befohlen, ich solle wieder zurückkehren. Was habe ich zu thun, damit ich den Befehl erfülle? Ich muß 10 neue Schritte machen aber genau in verkehrter Richtung. Die Länge des Ganges ist der ersten vollkommen gleich die Richtung aber nicht willkührlich wählbar wie zuvor, sondern so beschränkt, daß von unendlich vielen möglichen nur eine die rechte ist. Bei Erfüllung des ersten Auftrages kam es nur auf die Größe der Entfernung, bei der des zweiten kam es zwar auch auf diese, aber nebst ihr noch auf die Richtung an; die erste Erfüllung hing von einem die andere von zwei Begriffen ab.

Oder der Anfänger denke von einer beweglichen Flasche eine Schnur beiderseits niederhangend. Nun erhalte er den Auftrag ein Pfundgewicht an die Schnur zu knüpfen. Wenn er nur das richtige Gewicht wählt, ist es dann gleichgültig, ob er dieses rechts oder links an die Schnur hänge. Soll er hierauf ein Gegengewicht von bestimmter Schwere anhängen, so hat er nicht nur gehörige Wahl unter den vorräthigen Gewichten zu treffen, sondern er muß es an die Schnur so befestigen, daß es dem voran befestigten Gewichte entgegen wirke; er darf es nicht auf der Seite des vorangebrachten Pfundes neben oder an demselben befestigen.

Ganz ähnlich haben die positiven Zahlen oder Zahlen, schlechthin so genannt, nur ein Merkmal — das der Größe; ihr Begriff ist ein

einfacher. Die negativen aber oder die Gegenzahlen haben zwei Merkmale — das der Größe und das der Richtung; ihr Begriff ist ein zusammengesetzter. Dasselbe gilt auch von andern Gegensätzen in Begriffen. So sind einfache Begriffe: Satz, Gewicht, Druck, Kraft ꝛc. zusammengesetzte hingegen die entsprechenden: Gegensatz, Gegengewicht, Gegendruck, Gegenkraft u. dgl.

Soll daher eine positive Zahl schriftlich bezeichnet werden, bedarf es dazu einzig eines Größezeichens; ist hingegen eine negative schriftlich zu bezeichnen, so muß nicht allein ihre Größe sondern auch ihre Richtung Ausdruck finden. Das übliche Zeichen dieser Richtung ist eine kleine wagrechte Linie, die dem Größezeichen vorgesetzt wird: m ist eine pure Zahl — m ist eine gleich große Gegenzahl.

Untersucht man das Wesen dieser beiden Zahlenreihen noch sorgfältiger und forscht nach ihrem Ursprunge ihrem Maaße, so wird man leicht als gemeinschaftlichen Ursprung und solches Maaß die positive Einheit erkennen. Denn alle ganzen positiven Zahlen werden nur nach der Einheit abgeschätzt, d. h. ihre Größe wird daran beurtheilt; alle gebrochenen positiven Zahlen werden eben so an der Einheit gemessen und um so kleiner gefunden, je weniger und kleinere Theile der Einheit sie umfassen. Was von der positiven Reihe eben gesagt ist, gilt auch von der negativen; auch ihre ganzen und gebrochenen Zahlen haben das Maaß ihres Werthes in der negativen Einheit. Allein die Bedeutung dieser ist nur aus der positiven erklärbar; sie ist undenkbar, ohne daß die positive Einheit vorausgesetzt werde. Also ist Ursprung und Norm aller Zahlen ohne Ausnahme die positive Einheit.

Begriffe der Grundrechnungs-Arten.

Das Wesen der Zahlen bestehet in Größe und Richtung; so lange diese Merkmale einer Zahl ungeändert bleiben, so lange bleibt die Zahl unverändert, was immer für eine Veränderung an ihr sonst vorgenommen werden möge; trifft aber eine Aenderung Größe oder Richtung oder beide zugleich, so hört die Zahl auf dieselbe zu sein.

Da begegnet uns nun die Frage: wie können diese Merkmale geändert werden?

Die Größe im allgemeinen durch Zugabe oder Wegnahme die Richtung durch Umkehr. Weil aber diese Umkehr, wie sich später zeigt, durch Zugabe oder Wegnahme des Faktors (—1) richtig vollführt wird, so bleiben nur zwei Aenderungen zu untersuchen: Zugabe und Wegnahme.

Wird zu einer Zahl eine andere zugegeben, so sind beide nur als Bestandtheile einer dritten zu betrachten, welche aus ihrer Vereinigung entstehen muß.

Nun ist Vereinigung von Bestandtheilen auf zweifache Weise denkbar: entweder füllt ein Bestandtheil sammt dem andern ein Ganzes, oder der eine schafft — bildet aus dem andern ein Ganzes.

Auch in der sinnlichen Natur tritt diese doppelte Vereinigungsweise zum Vorscheine und sie wird in der Wissenschaft wohl unterschieden. Die Einigung erster Art gibt die Häufung — oft auch Conglomerat genannt, die der andern Art das chemische Erzeugniß.

Das auf Zahlen angewendet lautet so: Zahlen können sich auf zweifache Weise vereinigen: entweder so, daß eine mit — sammt der andern eine dritte füllt; oder so, daß eine aus der andern eine dritte bildet — schafft.

Die erstere Art der Verbindung ist bloßes Häufen — Aneinanderreihen; die andere ist eine kausale — schaffende Einigung — ein Hervorbringen. Man nennt die erstere Art Addition, die andere Multiplikation. Der letztere Name kann jedoch nicht immer gebraucht werden ohne Verstoß gegen die Denkgesetze. Schaffende Bindung, Schaffen, auch wohl Umschaffen wären Ausdrücke, derer man sich jederzeit ohne Fehler bedienen dürfte.

Wird von einer Zahl etwas weggenommen, so ist das Genommene nur einer der Bestandtheile jener Zahl das Uebrigbleibende der andere; die erste Zahl wird als Ganzes angesehen und in zwei Bestandtheile zerlegt. Denkt man aber eine Zahl als entstanden durch Verbindung anderer, so kann man sie als Summe oder als Produkt betrachten, folglich wieder in Summanden oder in Faktoren auflösen.

Die Zerlegung einer Zahl in zwei Summanden wird Subtraktion, die Auflösung in zwei Faktoren Division genannt.

Hieraus ergeben sich nicht mehr als vier Grnndrechnungs-Arten, und erst das genauere Eingehen in diese führt auf neue also abgeleitete Rechnungsarten.

Addition ist in der Arithmetik jene Zahlenverbindung, bei der jede dieser Zahlen — Summanden — solche und so viele Einheiten zur Füllung eines Ganzen — der Summe — beiträgt, welche und wie viele sie hat.

Bei dieser Vereinigung können Gegensätze in gleicher Größe zusammentreffen. Geschieht dieses, so läßt man beide als weiter nichts mehr geltend aus den Ausdrucke der Summe wegfallen, und es kann so wohl geschehen, daß die Summe kleiner erscheine als jeder ihrer Theile einzeln betrachtet. *)

Als Zeichen, daß Zahlen zu einer Summe gehören, gilt ein zwischen ihnen aufrecht stehendes Kreuz, das aber Kürze halber dort immer wegbleibt, wo ein negativer Summand unmittelbar einem andern Summanden folgt.

Subtraktion **) ist in der Arithmetik Zerspaltung einer Zahl in zwei Summanden, von denen einer gegeben, der andere zu suchen ist. Wäre nicht einer der Theile gegeben, so könnte man die Rechnung nie zu Ende führen; weil eine unendliche Menge von Summandenpaaren die nämliche Summe füllen können.

Damit man den unbekannten Theil finde, hat man blos die Frage zu beantworten: welcher Summand ist nöthig, um zu dem gegebenen Subtrahend addirt den Minuend zu füllen? Dieser nöthige Summand ist die Differenz.

---

*) Einleuchtend und unumstößlich ist die Wahrheit: das Ganze umfaßt alle seine Theile; wenn daher z. B. anstatt 7—4 gesetzt wird 3, so hat man allerdings ein richtiges Aequivalent der Summe in allen ihren Beziehungen zu andern Zahlen als zu ihren Theilen: es ist z. B. gleichgültig ob man a durch (7—4) oder durch 3 multiplicirt u. dgl.; aber man hat nicht den wahren Ausdruck des Ganzen seinen Theilen gegenüber.

**) Dieser Name ist wohlverstanden vollkommen angemessen, mißverstanden aber Quelle arger Mißgriffe. Was man nicht als bestehend, wenigst in in seiner Wirkung vorhanden denkt, kann man nicht subtrahiren.

Oder man denke den Minuend als eine aus dem gegebenen Subtrahende und der unbekannten Differenz entstandene Summe. Wenn, was der gegebene Subtrahend zur Füllung der Summe beigetragen hat, in derselben, es sei in ihr noch sichtbar vorfindig, oder es sei ganz oder zum Theile ausgefallen, durch Addition seines Gegensatzes zu dem Minuende aufgehoben wird; so kann von diesem nichts mehr übrig bleiben, als was der gesuchte andere Summand — die Differenz — geliefert hat. Sicher wird folglich die Differenz jederzeit erscheinen, wenn man zu dem Minuende den Gegensatz des Subtrahendes addirt.

Die Subtraktion kann sohin immer durch Addition vollführt werden, *) und man darf den Gegensatz des Subtrahendes sogleich, wie dieser diktirt oder gedacht wird, auf folgende Weise zum Minuend addiren: man schließe den Subtrahend in Klammern und addire ihn mit den Zeichen des Gegensatzes an den Minuend so: Minuend — (Subtrahend). Der eingeklammerte Ausdruck, er sei positiv oder negativ, einfach oder zusammengesetzt, hat jederzeit den Coefficienten 1; denn nicht der Klammer, sondern nur einer Größe kann das Zeichen (—) eigen sein. Wird nun, um die Klammern fortzuschaffen, die Umbildung des eingeklammerten Ausdruckes durch den Faktor — 1 wirklich vollführt, so erscheint der Gegensatz des Subtrahendes zum Minuend addirt, und die Differenz ist dargestellt. Die Methode findet freilich erst in der Lehre von der Multiplikation ihre Rechtfertigung. Die Definition der Subtraktion wird folglich so lauten müßen: Subtraktion ist Zerspaltung einer Zahl in zwei Summanden, bei welcher durch mathematische Vernichtung des gegebenen Summanden (des Subtrahendes) in dem Minuende, der andere Summand (die Differenz) erhalten wird.

Multiplikation. Der erste Begriff ist oben schon dargelegt: eine Zahl bildet aus einer andern ein Produkt. Die Zahl, welche bildet oder umbildet, heißt gewöhnlich Multiplikator, ist aber das, was der Name aussagt, sehr oft nicht. Allzeit richtig würde man sie schaffenden Faktor oder Bildner nennen dürfen.

*) sie benöthiget darum auch keines ihr eigenen Zeichens.

Jene, aus der gebildet wird, belegt man gewöhnlich mit dem Namen Multiplikand. Richtiger wäre: stofflicher Faktor, oder Stoff.

Ist der Multiplikator — der Bildner — positiv, so hat er nur ein wesentliches Merkmal — nur die Größe, kann also auch nur die Größe des Produktes bestimmen, die Größe des andern Faktors berühren oder alteriren; die Richtung desselben bleibt unberührt, und gehet sohin umgeändert in das Produkt hinüber. Die Einheit im Multiplikator wirkt kausal, d. h. sie setzt die ganze Größe des Multiplikandes so oft, als sie selbst im Multiplikator gleichsam als Schöpferin gesetzt erscheint.

Ist der Multiplikator negativ, so wirkt er mit beiden seinen Merkmalen kausal — schöpferisch: durch seine Größe eben so, wie wenn er positiv wäre, durch seine Richtung aber gegensetzend — in Gegensatz verwandelnd. Ist somit in diesem Falle der Multiplikand — der Stoff — positiv, so wird er in seinen Gegensatz verwandelt, und negativ so oft in das Produkt gesetzt, wie oft der Bildner die Einheit in sich hat. Ist hingegen der Multiplikand negativ, so wird auch er in seinen Gegensatz verwandelt, und sohin positiv in das Produkt gesetzt.

Hieraus ergibt sich erst die erschöpfende Definition der Multiplikation.

Multiplikation ist jene Verbindung von Zahlen, in welcher der Multiplikator — der Bildner aus dem Multiplikande — dem Stoffe ein Produkt gerade so hervorbringt, wie er selbst aus der positiven Einheit (dem Ursprunge aller Zahlen) hervorgebracht ist.

Division ist Auflösung eine Zahl in zwei Faktoren, von denen einer gegeben der andere zu suchen ist.

Betrachtet man den gegebenen Faktor — den Divisor als den Stoff, aus welchem das Produkt — das Dividend gebildet wurde oder gebildet werden soll, so ist der gesuchte Faktor — der Quotus leicht zu bestimmen. Ist ja oder wird, wie wir wissen, aus dem Stoffe das Produkt genau so gebildet, wie der Bildner aus der positiven Einheit. Man könnte also blos die oben gegebene Definition der Multiplikation umkehren, und sagen, der Quotus müße aus der positiven Einheit gerade so gebildet werden, wie aus dem Di-

visor das Dividend gebildet erscheint; wenn nicht diese Bestimmung für Fälle wie z. B. $a^4 : a$ unpassend wäre, indem man ihr gemäß setzen könnte $a.\ a.\ a.\ a = a^4$, also $1.\ 1.\ 1.\ 1 = 1$, welcher Quotus aber von dem wahren weit abstünde. Die genügende Definition der Division wird mithin so lauten sollen:

Division ist Auflösung einer Zahl in zwei Faktoren, in welcher aus der positiven Einheit ein solcher Faktor als Quotus gebildet wird, der den Divisor in das Dividend zu verwandeln vermag.

Wie die Differenz gefunden ist, sobald man sich die Frage beantwortet hat: welcher Summand ist nöthig, um zu dem Subtrahende addirt den Minuend zu füllen; eben so hat man den Quotus, sobald man weiß, welcher Faktor geeignet sei den gegebenen Divisor in das Dividend umzuschaffen.

Die Formel für $(a + b)^{-n}$

Als einmal Newton die Gesetze, nach welchen die Glieder jeder beliebigen Potenz einer zweitheiligen Wurzel entstehen und sich an einander reihen, zuerst entdeckt hatte, boten spätere Mathematiker großen Scharfsinn auf den Beweis zu führen, daß die entdeckte Gesetzmäßigkeit nicht blos bestehe, falls n eine ganze und positive Zahl ist, sondern unter jeder Voraussetzung, also auch, wenn n negativ, gebrochen, irrational oder wohl gar imaginär sein sollte.

Für $(a + b)^{-n}$ eine eigene Formel zu suchen, lag kein beachtenswerther Grund vor; denn $(a + b)^{-n}$ ist, wie Niemand bezweifelt, gleich $\frac{1}{(a + b)^n}$ und für den Nenner dieses Bruches war die Formel gefunden. Schien die Bruchform lästig, so war $(a + b)^{-n} = \left[(a + b)^n\right]^{-1}$

Man hat jedoch vorgezogen eine eigene Formel zu entwickeln nach folgendem Verfahren. Man stellte in der Gleichung

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots \ldots b^n$$

und zwar in der zweiten Gleichungsseite blos in den ersten Gliedern anstatt des positiven n, wo immer es vorkommt, ein negatives unter ohne eine sonstige Veränderung vorzunehmen, und erhielt so mit leichter Mühe die Formel:

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} + \binom{-n}{1} a^{-n-1} b + \binom{-n}{2} a^{-n-2} b^{2} + \binom{-n}{3} a^{-n-3} b^{3} + \ldots$$

Das ist, wie die Entwickelung zeigt:

$$a^{-n} - \binom{n}{1} a^{-n-1} b + \binom{n}{2} a^{-n-2} b^{2} - \binom{n}{3} a^{-n-3} b^{3} + \binom{n}{4} a^{-n-4} b^{4} - \ldots$$

oder auch: $= \frac{1}{a^{n}} - \binom{n}{1} \frac{b}{a^{n+1}} + \binom{n}{2} \frac{b^{2}}{a^{n+2}} - \binom{n}{3} \frac{b^{3}}{a^{n+3}} +$

$$\binom{n}{4} \frac{b^{4}}{a^{n+4}} - \binom{n}{5} \frac{b^{5}}{a^{n+5}} + \ldots$$

und so nach leicht bemerkbarer Gesetzmäßigkeit ohne Ende weiter.

Und diese Formel stehet in Lehrbüchern ohne die geringste Andeutung, daß ihr nicht allgemeine Geltung zukomme — das heißt, daß sie nicht für jeden Werth von a und b brauchbar sei.

Sie ist aber, wie die Verfasser dieser Bücher selbst wissen, nichts weniger als unbedingt und allgemein geltend; sie führt vielmehr dem richtigen Ergebnisse nur unter der Voraussetzung näher und näher, daß a größer sei als b, im Gegentheile von demselben um so rascher und weiter ab, je mehr a von b an Größe übertroffen wird, und je mehr Glieder der Reihe man entwickelt.

Woher nun diese Unvollkommenheit der entwickelten Reihe?

Erstens hat man keinen Grund schon vorhinein zu vermuthen, daß bei der Voraussetzung, n sei eine ganze Zahl, die Reihe für $(a+b)^{-n}$ eine unendliche werden müße. Kann man aber das nicht vermuthen, so darf man das letzte oder die letzten Glieder der Gleichung nicht aus dem Auge verlieren, und die Unterstellung von $(-n)$ für n muß auch in diesen geschehen, oder als geschehen gedacht und im Auge behalten werden. Das fordert die Natur der Gleichung. Es müßte sohin das letzte Glied der Gleichung b^{-n} sein oder erzielt werden. Zu solchem zu gelangen verbaut man sich aber von vorn

schon den Weg und die Möglichkeit, wenn man die Potenzen des Theiles b mit positiven Exponenten fortscheiten läßt.

Aus der newton'schen Formel kann man sich nur die Regel ableiten, daß die Potenzen des ersten Wurzeltheiles von der n^{ten} zur nullten, die des zweiten Theiles von der nullten zur n^{ten} fortschreiten, und zwar beide so, daß der Exponent in jedem folgenden Gliede von dem Exponenten im nächst vorangehenden um eine volle Einheit abstehe. Aber auch die Möglichkeit, je zu a^0 zu gelangen, hebt man sogleich im zweiten Gliede der Formel auf.

Drittens hat der negative Exponent eine Geltung seiner Qualität nur dem positiven Exponenten nicht jeder Zahl überhaupt gegenüber, und seine Bedeutung ist, wie bekannt, eine ganz eigenthümliche; er ist nicht Gegensatz jeder Zahl, sondern blos Gegensatz des positiven Exponenten; außer dem Zusammenhange mit der Wurzel hat seine Qualität keinen Sinn. Wie darf man also $(-n)$ auch zur Bestimmung der Coefficienten anwenden?

Dieses und anderes, was noch zu sagen wäre, hat man gewiß längst erkannt, jedoch zu wenig darauf geachtet, weil ja die Division der Einheit durch die Formel von $(a+b)^n$ ebenfalls zu der für $(a+b)^{-n}$ gefundenen Formel führt.

Allerdings ist das wahr; aber eben diese Divisionsmethode ist auch nicht allgemein geltend, und das sollte in allen Lehrbüchern an betreffender Stelle gesagt und erklärt werden, was man wieder in nicht wenigen vermißt. Wird nämlich z. B. a^2 durch $(a+b)$ getheilt, so ergibt sich bekanntlich eine nie abbrechende Reihe von Theilquoten nach folgender Gesetzmäßigkeit.

$$a^2 : (a+b) = a - b + \frac{b^2}{a} -$$

$$\begin{array}{l}
a^2 + ab \\
\hline
\quad - ab \\
\quad - ab - b^2 \\
\quad + \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad b^2 \\
\qquad\qquad b^2 + \frac{b^3}{a} \\
\qquad\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - \frac{b^3}{a}
\end{array}$$

u. s. w.

Jeder Anfänger sieht beim Ueberblicke dieser Formel leicht, nach welchen Gesetzen die Theilquoten sich ohne Ende an einander reihen, und welcher Divisionsrest jedes Mal bleiben müße. Setzt man jetzt $b > a$, so ist jeder der Brüche, die vom dritten Gliede des Quotus

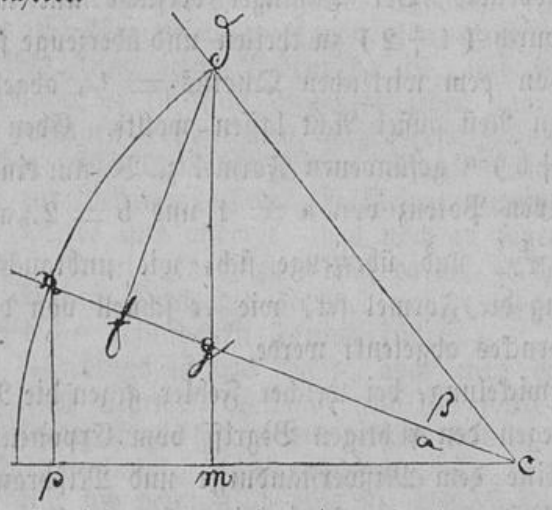
an ohne Ende erscheinen, unecht, der Zähler ist größer als der Nenner und übertrifft mehr und mehr die Größe seines Nenners, weicht sohin immer weiter von dem wahren Quotus ab. Eben so wird der Divisionsrest immer größer. Da aber der Quotus nur dann richtig ist, wenn er durch den Divisor multiplicirt nach Einzählung des Divisionsrestes dem Dividende gleich wird: so muß der Rechnungsfehler um so größer werden, mit je späterem Gliede man die Reihe der Theilquoten abbricht. Der Anfänger versuche nur nach dieser Methode z. B. 1 durch $(1+2)$ zu theilen und überzeuge sich, wie er mehr und mehr von dem wirklichen Quotus $= \frac{1}{3}$ abgeleitet würde, wenn er je den Rest außer Acht lassen wollte. Eben so bilde er nach der für $(a+b)^{-n}$ gefundenen Formel z. B. nur einige Glieder der dritten negativen Potenz von $a = 1$ und $b = 2$, also $(1+2)^{-3}$ oder $3^{-3} = \frac{1}{27}$, und überzeuge sich, wie unbrauchbar unter solcher Voraussetzung die Formel sei, wie er schnell von dem wahren Werthe des Ausdruckes abgelenkt werde.

Wenn also eine Entwickelung, bei welcher Fehler gegen die Natur der Gleichung oder gegen den richtigen Begriff vom Exponenten vermieden werden, nur eine dem Mißverständnisse und Mißbrauche sehr ausgesetzte Formel liefert; wenn somit eine eigene allgemein geltende unzweideutige Formel für $(a+b)^{-n}$ gar nicht gefunden werden kann; wenn endlich kein nur einigermaßen triftiger Grund bestehet, aus welchem eine eigene Formel wünschenswerth erschiene: warum soll in Lehrbüchern ferner von ihr, wie von einer nothwendigen, die Rede sein?

Zur Trigonometrie Gehöriges.

Ich meine nicht unklug zu handeln, indem ich eine ungewöhnliche Beweisart für die Wahrheit: wenn Sinus und Cosinus zweier Winkel bekannt sind, läßt sich aus ihnen Sinus und Cosinus der Summe sowohl als auch des Unterschiedes dieser zwei Winkel berechnen, welche ein Schüler dieses Gymnasiums bei Gelegenheit der schriftlichen Maturitätsprüfungen im Jahre 1853 der üblichen beigefügt hat, zur öffentlichen Kenntniß bringe. Ob diese Beweisführung in irgend einem Lehrbuche vorkomme, ist mir unbekannt; nur so viel weiß ich, daß der bezeichnete Schüler ein derartiges Lehrbuch

damals nicht besessen habe, und die Methode ihm gegenüber als seine Erfindung könne angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung, deren Wahrheit mir gewiß ist, kann ich in einer Bekanntmachung des Verfahrens nur ein Mittel erkennen, gegenwärtige und künftige wohlbegabte Schüler nicht blos dieses sondern auch anderer Gymnasien zur Nacheiferung zu spornen und sie aufzufordern, frühzeitig nach Selbständigkeit zu streben. Die hier dargelegte Methode weicht von der gewöhnlichen darin ab, daß in den nöthigen Figuren die Hilfslinien gänzlich wegbleiben, was jene vereinfacht und ihr Verständniß erleichtert.



df — sinus β, *cf* cosinus β, *np* sinus α, *cp* cosinus α seien bekannt, d. h. man wisse die wievielten Theile des Radius *cn* sie seien. Zu berechnen sei *dm* sinus $(\alpha + \beta)$ und *cm* cosinus $(\alpha + \beta)$.

Erstlich werden die beiden Theile der Linie *dm*, nämlich *dg* und *gm* wegen Aehnlich der Dreiecke leicht durch Proportion berechnet.

Daß die rechtwinkeligen Dreiecke *dfg* und *cgm*, folglich auch *cnp* einander ähnlich seien, ist augenfällig. Es ergeben sich also folgende Proportionen — erstlich:

cp : cn = df : dg d. h., wenn man den Radius *cn*, wie immer in allgemeinen Formeln, = 1 setzt:

cosin. α : 1 = sin. β : dg, woraus

$$dg = \frac{\sin.\ \beta}{\cos.\ \alpha}$$

ferner: cp : np = df : fg, oder

cosin. α : sin. α = sin. β : fg, woraus

$$fg = \frac{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta}{\cos.\ \alpha}$$

Nun läßt sich der Werth von cg finden, und hierauf durch Proportion auch gm.

$$cg = cf - fg,\ \text{d. h.}\ cg = \cos.\ \beta - \frac{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta}{\cos.\ \alpha},\ \text{oder}$$

$$cg = \frac{\text{cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta - \text{sin. } \alpha \text{. sin. } \beta}{\text{cosin. } \alpha}$$

Da nun cn : np = cg : gm oder

$$1 : \text{sin. } \alpha = \frac{\text{cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta - \text{sin. } \alpha \text{. sin. } \beta}{\text{cosin. } \alpha} : gm, \text{ so ist}$$

$$gm = \frac{\text{sin. } \alpha \text{. cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta - \text{sin. }^2 \alpha \text{. sin. } \beta}{\text{cosin. } \alpha}$$

Und weil $dg + gm = dm = \text{sin. } (\alpha + \beta)$, so ist

$$\text{sin } (\alpha + \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \text{. cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta + \text{sin. } \beta - \text{sin.}^2 \alpha \text{. sin. } \beta}{\text{cosin. } \alpha}$$

$$\text{oder} = \frac{\text{sin. } \alpha \text{. cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta + \text{sin. } \beta \ (1 - \text{sin.}^2 \alpha)}{\text{cosin. } \alpha}$$

Wird jetzt anstatt des eingeklammerten Faktors dessen aus der augenfälligen Gleichung $r^2 = \text{sin}^2 \alpha + \text{cosin}^2 \alpha$ oder $1 = \text{sin}^2 \alpha + \text{cosin}^2 \alpha$ sich ergebender Werth ($\text{cosin}^2 \alpha$) untergestellt, so fällt der Nenner des Bruches weg; denn man erhält:

$$\text{sin. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \text{. cosin. } \alpha \text{. cosin. } \beta + \text{cosin}^2 \alpha \text{. sin } \beta}{\text{cosin. } \alpha} \text{ u. das gibt:}$$

$$\text{sin. } (\alpha + \beta) = \text{sin. } \alpha \text{. cosin. } \beta + \text{cosin. } \alpha \text{. sin. } \beta$$

Weit schneller wird der Cosinus von $(\alpha + \beta)$ gefunden; denn cn : cp = cg : cm, oder:

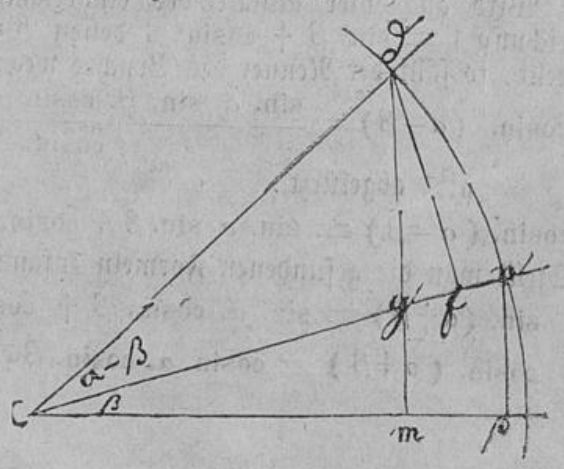
$$1 : \text{cosin. } \alpha = \frac{\text{cosin. } \alpha \text{ cosin. } \beta - \text{sin. } \alpha \text{. sin. } \beta}{\text{cosin. } \alpha} : cm$$

Daraus ist cm oder

$$\text{cosin. } (\alpha + \beta) = \text{cosin. } \alpha \text{. cosin } \beta - \text{sin. } \alpha \text{. sin. } \beta$$

Aus eben so einfacher Figur kann die Berechnungsart des Sinius und Cosinus für $(\alpha - \beta)$ abgeleitet werden.

Der große Winkel *dcp* sei durch α bezeichnet. Bekannt seien *dm* sin. α, *cm* cosin α, *np*. sin. β und *cp* cosin β. Berechnet sollen werden *df* sin. $(\alpha - \beta)$ und *cf* cosin. $(\alpha - \beta)$



Die Dreiecke *dfg*, *cgm* und *cnp* sind augenfällig einander ähnlich. Kennt man von dem Dreiecke *dfg* einmal eine Seite, so ist die Lösung der Aufgabe leicht. Gewiß ist

$$cp : np = cm : gm \text{ d. i.}$$

$$\text{cosin. } \beta : \text{sin. } \beta = \text{cosin. } \alpha : gm, \text{ folglich}$$

$$gm = \frac{\text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}{\text{cosin. } \beta}$$ Nun ist $dg = dm - gm$, oder

$$dg = \text{sin. } \alpha - \frac{\text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}{\text{cosin. } \beta} = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta - \text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}{\text{cosin. } \beta}$$

Ferner ist $cn : cp = dg : df$, das heißt:

$$1 : \text{cosin. } \beta = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta - \text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}{\text{cosin. } \beta} : df, \text{ also } df \text{ oder}$$

$$\text{sin. } (\alpha - \beta) = \text{sin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta - \text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta.$$

Berechnet man jetzt die beiden Stücke von *cf*, nämlich *fg* und *cg*, so wird die Summe ihrer Werthe Cosinus für $(\alpha - \beta)$ sein.

$$cn : np = dg : fg, \text{ oder}$$

$$1 : \text{sin. } \beta = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta - \text{cosin. } \alpha \text{ sin. } \beta}{\text{cosin. } \beta} : fg, \text{ woraus}$$

$$fg = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta \text{ cosin. } \beta - \text{cosin. } \alpha . \text{ sin}^2 \beta}{\text{cosin. } \beta}$$ Weiter.

$$cp : cn = cm : cg, \text{ oder cosin. } \beta : 1 = \text{cosin. } \alpha : cg,$$

$$cg = \frac{\text{cosin. } \alpha}{\text{cosin. } \beta}$$ folglich $fg + cg$, oder cf

$$\text{cosin. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } \beta . \text{ cosin } \beta + \text{cosin } \alpha - \text{cosin. } \alpha . \text{ sin}^2 \beta}{\text{cosin. } \beta}$$

$$= \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta . \text{ cosin. } \beta + \text{cosin. } \alpha \, (1 - \text{sin}^2 \beta)}{\text{cosin. } \beta}$$

Wird auch hier anstatt des eingeklammerten Faktors aus der Gleichung $1 = \text{sin}^2 \beta + \text{cosin}^2 \beta$ dessen Werth $(\text{cosin}^2 \beta)$ untergestellt, so fällt der Nenner des Bruches weg; denn

$$\text{cosin. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta . \text{ cosin. } \beta + \text{cosin. } \alpha . \text{ cosin}^2 \beta}{\text{cosin. } \beta}$$

gibt abgekürzt:

$$\text{cosin. } (\alpha - \beta) = \text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta + \text{cosin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta$$

Stellt man die gefundenen Formeln zusammen, so ist:

$$\text{sin. } (\alpha \pm \beta) = \text{sin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta \pm \text{cosin. } \alpha . \text{ sin. } \beta,$$

$$\text{cosin. } (\alpha \pm \beta) = \text{cosin. } \alpha . \text{ cosin. } \beta \mp \text{sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta.$$

Pradella.

ugenfällig einander ähn-
al eine Seite, so ist die

glich
dm — gm, oder

sin. β — cosin. α. sin. β
cosin. β

sin. β: df, also df oder

α. sin. β.
n cf, nämlich fg und
für $(\alpha - \beta)$ sein.

in. β: fg, woraus

$^2\beta$ Weiter.

cosin. α: cg,

n α. — cosin. α. $\sin^2\beta$
β
α $(1 - \sin^2\beta)$

erten Faktors aus der
th $(\cos^2\beta)$ unter-
denn
+ cosin. α. $\cos^2\beta$

. cosin. β
en, so ist:
n. α. sin. β,
sin. α. sin. β.

Pradella.