Mathematisches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literarischen Nachrichten in alphabetischer Ordnung.

Erste Abtheilung.

Arithmetik, Analysis und Geometrie, die niedere und die höhere.

E.

Ebene ist eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwey Puncte derselben gezogene gerade Linie mit allen ihren Puncten liegt. Sie ist allenthalben, in größern wie in kleinern Theilen, gleichförmig ausgedehnt, weil auf der geraden Linie die Theile durchgehends eine gleichförmige Lage haben.

Euklides sagt: Eine ebene Fläche ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt. Diese Erklärung ist seiner von der geraden Linie gegebenen analog. Die gerade Linie ist nach ihm diejenige, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerley Art liegt. Er deutet durch jene Erklärung die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. Wie auch eine Ebene durch gerade Linien begränzt seyn mag, so ist die Form der Fläche selbst dieselbe, nur die Größe und die äußere Gestalt mögen verschieden seyn. Euklides setzt in der That voraus, daß sich in einer Ebene allenthalben gerade Linien ziehen lassen.

Proklus in seinem weitschweifigen Commentar über das erste Buch des Euklides versteht die Erklärung der Ebene bey demselben so, daß die Ebene zwischen zwey geraden Linien einen Raum einnehme, der so groß ist als der Raum zwischen diesen Linien. Auf ähnliche Art versteht er auch die Erklärung von der geraden Linie, welche Euklides giebt. Schwerlich hat Euklides dieses sagen wollen. Proklus führt auch noch die hier gegebene Erklärung an; ferner diese, daß sie unter allen zwischen denselben Gränzen eingeschlossenen Flächen die kleinste Ausdehnung habe, und, daß sie eine solche ist, deren mittlere Theile die äußern verdecken.

In diesem Artikel wird sich die wichtige Lehre von der Lage der Ebenen gegen einander, und der geraden Linien gegen Ebenen am schicklichsten abhandeln lassen. Der Kürze wegen beziehe ich mich in Absicht der Beweise auf die Elemente des Euklides im 11ten Buche.

1. Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene. Denn man verbinde die drey Puncte durch gerade Linien, und begränze durch diese eine Fläche, in welche alle gerade Linien fallen, die von einem Puncte einer der Linien zu einem Puncte einer der beiden andern gezogen sind. Diese Fläche ist eine Ebene. Die Verlängerungen aller jener Linien fallen in die erweiterte Ebene des Dreyecks, die also auch bestimmt ist.

3 Zwey gerade Linien, die sich schneiden, liegen in einer Ebene. Folgt aus (1.).

2. Zwey Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie.

4 Der Winkel zweyer sich schneidenden Ebenen ist der Winkel der in ihnen auf die gemeinschaftliche Durchschnittlinie durch denselben Punct gezogenen senkrechten. Die Ebenen (Fig. 1. Tab. IX.) seyn CABE, DABF, ihr Durchschnitt AB, die auf AB in den beiden Ebenen durch A gezogenen senkrechten seyn CA, DA, so ist der Winkel CAD der Winkel der beiden Ebenen. Wegen der gleichförmigen Ausdehnung ebener Flächen ist es gleichgültig, durch welchen Punct

der Durchschnittslinie die Perpendikel gezogen werden. Sind EB und FB senkrecht auf AB durch B, jene in der Ebene CABE, diese in DABF, so ist der Winkel EBF = CAD. Dieses läßt sich aber auch streng erweisen, s. 13.

Die Linien CA, DA müssen senkrecht auf AB seyn, weil ihre Neigung gegen AB Einfluß auf die Größe des W. CAD hat. Bey der senkrechten Lage gegen AB hängt der W. CAD bloß von der Lage der Ebenen ab. S. unten, 8.

5. Eine Ebene ist senkrecht auf eine andere, wenn der Winkel der durch einen Punct ihrer Durchschnittslinie in den beiden Ebenen auf jene senkrecht gezogenen ein Rechter ist. Euklides setzt: Wenn die geraden Linien, die in der einen Ebene senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt gezogen werden, auf die andere Ebene senkrecht stehen.

6. Eine gerade Linie ist auf eine Ebene senkrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, die in dieser Ebene durch den Punct, worin sie dieselbe trifft, gezogen werden, einen rechten Winkel macht.

7. Wenn eine gerade Linie auf zwey einander sich schneidende gerade Linien senkrecht ist, so ist sie auf jede durch deren Durchschnitt in ihrer Ebene gezogene gerade Linie senkrecht, und daher senkrecht auf die Ebene selbst. In Fig. 1, ist BA senkrecht auf AC und AD, daher auch senkrecht auf jede AG, die in der Ebene CAD liegt, und daher ist BA senkrecht auf diese Ebene.

8. Wenn der W. CAG = GAD, und BA senkrecht auf die Schenkel dieser Winkel ist, so haben die Ebenen CAB, GAB ganz dieselbe Lage gegen einander wie GAB und DAB. Darum werden die Winkel der Ebenen durch die Winkel der auf ihren Durchschnitt in einem Puncte derselben senkrechten gemessen.

9. Drey durch einen Punct A (Fig. 1.) gezogene gerade AC, AD, AG sind in derselben Ebene, wenn eine gerade BA auf alle drey senkrecht ist.

10. Zwey auf eine Ebene DAC (Fig. 1.) senkrechte BA, EC sind parallel.

11. Wenn von den zwey Parallellinien, BA, EC, die eine, BA, senkrecht auf die Ebene DAC ist, so ist auch die andere, EC, senkrecht auf diese Ebene.

12. Gerade Linien EC, FD, welche der Linie BA, die nicht in der Ebene jener beiden liegt, parallel sind, sind einander parallel.

13. Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel CAD, EBF, die von den parallelen, AC und BE, AD und BF, eingeschlossen werden, sind einander gleich.

14. Aufg. Auf eine gegebene Ebene von einem über derselben gegebenen Puncte, A, eine senkrechte zu ziehen.

In der gegebenen Ebene MN (Fig. 2.) ziehe man willkührlich die gerade BC, und fälle auf sie die senkrechte AD. Ist diese nicht senkrecht auf die Ebene, so ziehe man in derselben durch D die senkrechte ED auf BC, und auf diese in der Ebene ADE die senkrechte AF. Diese ist auf die Ebene der Linien, BC, ED, oder die Ebene MN, senkrecht.

15. Aufg. Auf eine gegebene Ebene durch einen in derselben gegebenen Punct eine senkrechte zu errichten.

Die Ebene (Fig. 3.) sey MN, in derselben der gegebene Punct, A. Über der Ebene nehme man irgend einen Punct B, und fälle von diesem die senkrechte BC auf die Ebene. Mit BC ziehe man durch A die parallele AD, so ist diese die gesuchte senkrechte.

16. Parallele Ebenen sind, welche nie zusammen treffen, so weit sie auch nach jeder Richtung fortgesetzt werden.

17. Ebenen, auf welche eine gerade Linie senkrecht ist, sind parallel. Als in Fig. 1. sind die Ebenen CAD, EBF, parallel, wenn AB auf beide senkrecht ist.

18. Die Ebenen zweyer Winkel sind parallel, wenn die Schenkel der Winkel parallel sind. In Fig. 1. sey

BE parallel mit AC, und BF parallel mit AD, so sind die Ebenen der Winkel CAD, EBF, parallel.

19. Die Durchschnitte paralleler Ebenen mit einer sie schneidenden sind einander parallel.

20. Wenn zwey gerade Linien durch parallele Ebenen geschnitten werden, so sind die Theile der Linien, welche zwischen einerley Ebenen liegen, proportional.

21. Ist eine gerade Linie AB (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD senkrecht, so sind alle durch die AB gelegten Ebenen, wie CAB, DAB, auf dieselbe Ebene, CAD, senkrecht.

22. Sind zwey einander schneidende Ebenen, EA, FA, (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD senkrecht, so ist ihr Durchschnitt, AB, auf dieselbe Ebene senkrecht.

23. Die Folge der Sätze ist, wie bey Euklides im 11ten Buche. Der erste Satz daselbst, daß eine gerade Linie nicht zum Theil in einer Ebene, zum Theil ausser ihr befindlich seyn könne, ist eine unmittelbare Folgerung aus der hier angenommenen Erklärung einer Ebene. Der Beweis, den Euklides von dem Satze giebt, scheint das zu beweisende vorauszusetzen. Der zweyte Satz daselbst ist zweytheilig. Der eine Theil ist hier der Satz in (2.); der zweyte Theil: Jedes Dreyeck liegt in einer Ebene, ist in (1.) enthalten. Der 7te Satz bey Euklides ist eine Folge unserer Erklärung der Ebene, und ist hier weggelassen.

24. Wenn man zu dem Hülfssatze (Eukl. 13.), daß durch einen Punct einer Ebene nur eine einzige senkrechte Linie auf sie möglich ist, noch den analogen Satz fügt, daß durch eine gerade Linie auf einer Ebene nur eine senkrechte Ebene auf sie gesetzt werden kann, so läßt sich der Satz (10; Eukl. 6.) leichter erweisen, als es von E. geschehen ist.

Die Sätze, 21 und 22, sollten wegen ihres Inhalts auf (11.) folgen. Der erstere läßt sich vermöge der hier in (5.) gegebenen Erklärung leichter erweisen. Anstatt des indirecten Beweises von (22.) bey Euklides, 19.

Satz, wird besser ein directer gesetzt. Man sehe Segners Anfangsgründe, §. 517.

25. Wenn zwey Ebenen auf einander senkrecht stehen, so ist die in einer derselben auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht gezogene gerade Linie auf die andere Ebene senkrecht.

Die Ebene DAFE (Fig. 3.) sey senkrecht auf die Ebene MN, ihr Durchschnitt AF, in jener sey BC senkrecht auf AF. Man ziehe in der Ebene MN die GC senkrecht auf AF, so ist BCG ein rechter Winkel, da die Ebenen senkrecht auf einander sind, und BC steht auf zwey Linien, AF, GC, in der Ebene MN senkrecht, also auf die Ebene.

Der Satz fehlt bey Euklides, fließt aber unmittelbar aus seiner in (5.) angeführten Erklärung.

26. Eine gerade Linie ist geneigt gegen eine Ebene, wenn sie mit irgend einer Linie in der Ebene einen schiefen Winkel macht, wie die Linie AD (Fig. 2.) mit DF, die in der Ebene MN durch den Punct D, worin AD sie trifft, gezogen ist.

27. Die Neigung der Linie AD gegen die Ebene MN ist der Winkel ADF, welchen AD mit der DF macht, die durch den Punct D in der Ebene und der Linie AD nach dem Puncte F gezogen ist, worin die senkrechte AF von einem Puncte A der AD die Ebene trifft.

Da die Ebene des Dreyecks ADF senkrecht auf die Ebene MN ist (21.), so ist die gerade BC, die auf DF senkrecht ist, auf die Ebene des Dreyecks senkrecht (25.), also senkrecht auf AD. Solchergestalt wird die Neigung der AD gegen die Ebene, nach der in der Erklärung angegebenen Art sie zu messen, ohne Einmischung einer Neigung gegen BC gefunden.

Die Ebene des Dreyecks ADF nenne man die Neigungs-Ebene.

28. Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie, unbestimmt weit verlängert, dieselbe nicht trifft. Sie kann sie nicht treffen, wenn sie mit irgend einer geraden Linie in derselben parallel ist. Sie liegt nämlich ganz in

der Ebene, die durch diese Linie und einen ihrer Puncte gelegt ist. S. Parallelen.

29. Die Linie AB (Fig. 1.) sey parallel mit der Ebene CEFD. Man lege durch AB zwey Ebenen, ABEC, ABFD, welche jene Ebene in CE, DF schneiden, so sind diese Durchschnittslinien mit der AB und unter sich parallel. Denn da AB die Ebene CF nicht trifft, also auch CE nicht schneidet, und mit derselben in einer Ebene AE liegt, so ist sie der CE parallel. Eben so verhält es sich mit AB und DF. Da nun CE mit AB parallel ist, so ist sie auch der Ebene AF parallel, (28.), daher auch der Linie DF, die mit ihr in einer Ebene liegt, und von ihr nicht geschnitten wird.

30. Zwey gerade Linien, CE, DF (Fig. 1.) sind parallel, so ist der Durchschnitt AB zweyer durch sie gelegten Ebenen, CEBA, DFBA, jeder derselben parallel. Denn EC ist parallel der Ebene DB (28.), schneidet also AB nicht, und ist, da sie mit dieser in einer Ebene CEBA liegt, ihr parallel. Eben so wird erwiesen, daß DF der AB parallel ist.

31. Wenn eine gerade Linie zweyen sich schneidenden Ebenen parallel ist, so ist sie der Durchschnittslinie derselben parallel. Es sey nämlich die gerade AB (Fig. 4.) den Ebenen CDFE, CDHG parallel, deren Durchschnittslinie CD ist. Man lege durch AB die beiden Ebenen, ABFE, ABHG, deren erstere die Ebene CF in EF, die andere die Ebene CH in GH schneide. Diese Linien sind, da AB mit den Ebenen parallel ist, der Linie AB parallel, also auch einander selbst (12). Der Durchschnitt CD der durch EF und GH gelegten Ebenen ist ihnen parallel (30.); also auch der AB, die mit eben denselben parallel ist (12.).

Die Sätze 28 — 31. fehlen bey Euklides. Noch eine Zugabe sind folgende Sätze.

32. Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen steht senkrecht auf jede derselben.

In (Fig. 1.) ist der Winkel CAD der Neigungswinkel der Ebenen CAB, DAB, so daß AB auf die

Schenkel AC, AD senkrecht ist. Daher ist AB senkrecht auf die Ebene des Neigungswinkels, also sind die durch AB gelegten Ebenen CAB, DAB senkrecht auf jene Ebene.

33. Wenn zwey parallele Ebenen von einer Ebene geschnitten werden, so sind ihre Neigungswinkel gegen sie gleich groß.

Man ziehe in der schneidenden Ebene, A, eine senkrechte auf die einander parallelen Durchschnittslinien der parallelen Ebenen, P, P und setze durch diese senkrechte eine auf A senkrechte Ebene, B, so sind jene Durchschnittslinien senkrecht auf die Ebene B, nach (25.), und daher sind die Ebenen P, P, senkrecht auf die Ebene B, aus (21.). Die Durchschnittslinien der Ebene B mit der A und den parallelen Ebenen machen den Neigunswinkel der letztern mit der Ebene A (32.). Da diese Durchschnittslinien sich parallel sind, so sind die Neigungswinkel sich gleich.

34. Parallellinien haben gegen dieselbe Ebene einerley Neigung.

Wenn zwey Linien, wie AD: (Fig. 2.), parallel sind, so sind es auch die senkrechten von irgend einem Puncte derselben auf eine gegebene Ebene (10.), also auch die Ebenen der Winkel, wie DAF, (18.), folglich auch die Grundlinien, wie DF, in der Ebene, daher sind die Winkel wie ADF gleich (13.), oder die Neigungswinkel (27.) in den Neigungsebenen sind sich gleich.

Effectio ist die geometrische Auflösung oder Construction einer Aufgabe oder Gleichung. Das Kunstwort wird gegenwärtig selten gebraucht.

Eilferprobe, s. Rechnungsprobe.

Einfach ist, was nicht zusammengesetzt oder verwickelt ist. Eine einfache Aufgabe ist eine solche, welche nur einen Werth der gesuchten Größe zuläßt. Ein einfacher Bruch ist, worin Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Eine einfache Größe ist, die nicht aus

andern bestimmten Theilen oder Factoren zusammengesetzt ist, ob sie gleich, wie jede Größe, auf unendliche Arten theilbar bleibt. Man möchte sie eine formlose Größe nennen. Eine einfache ganze Zahl ist, die keine ganze Zahl-Factoren enthält, was man auch eine Primzahl nennt.

Einer sind in dem dekadischen Zahlensystem die ersten neun Zahlen; in dem dodekadischen die ersten eilf Zahlen; überhaupt in jedem Zahlensystem die ersten ganzen Zahlen von Eins bis zu der nächsten vor der Grundzahl.

Eingebildete Größe s. unmögliche Größe.

Einheit ist der Begriff, welcher beym Zählen wiederholt wird, oder das Gemeinsame in der Vielheit. Die Einheit ist entweder eine benannte oder unbenannte (allgemeine). Z. B. zwölf Menschen, sieben Thaler, vier Jahre sind eine Vielheit mit der benannten Einheit, Mensch, Thaler, Jahr; aber zwölf, sieben, vier sind eine Vielheit mit einer unbestimmten Einheit, oder einzelne Dinge. Wenn die Einheit getheilt wird, aber so, daß der Theil eine Beziehung auf das Ganze, die ursprüngliche Einheit, behält, so muß man die neue Einheit durch die Benennung, Bruch-Einheit, unterscheiden. Z. B. bey Dreyviertel Jahr, ist ein Vierteljahr die Bruch-Einheit. Neun Monate sind eine Vielheit für sich, mit der absoluten Einheit, Monat. — Die Einheit beym Zählen ist willkührlich. Bey einerley Größe, Menge oder Werth, verhält sich die Anzahl der Einheiten umgekehrt wie die Einheit.

Einmahleins ist eine Tafel der Producte je zweyer Zahlen unter Zehn, und zwar in dem dekadischen System. Folgendes ist ein Stück aus einem Einmahleins in der Dodekadik, worin die Ziffern vor dem Punkte Zwölfer bedeuten.

7	mahl	7	ist	4 .	1	8	mahl	8	ist	5 .	4
7	=	8	=	4 .	8	8	=	9	=	6 .	0
7	=	9	=	5 .	3	8	=	10	=	6 .	8
7	=	10	=	5 .	10	8	=	11	=	7 .	4
7	=	11	=	6 .	5	8	=	12	=	8 .	0
7	=	12	=	7 .	0						

Einrichten der Brüche ist, sie auf einerley Nenner bringen, ohne ihre Größe zu verändern. S. Bruchrechnung.

Eins ist die erste in der Folge der ganzen Zahlen.

Einschalten, Interpoliren, heißt, aus einigen gegebenen Gliedern einer Fortschreitung, die mit den Gliedern einer andern Fortschreitung auf irgend eine Art verknüpft sind, ein Glied in jener so bestimmen, daß es aus dem zugehörigen Gliede der andern Fortschreitung vollkommen oder nahe genug auf dieselbe Art zusammengesetzt werde, wie die gegebenen Glieder aus den zu ihnen gehörigen Größen. Die Glieder der zugeordneten Reihe werden als bloße Zahlen betrachtet, und sind entweder ursprünglich Stellenzahlen für die Glieder der Reihe, oder werden als solche gebraucht. Man nennt sie auch die Wurzeln, und die durch sie zu bestimmenden Größen die Functionen der Wurzeln.

1. Wenn jedes Glied der gegebenen Reihe eine algebraische Function seiner Stelle ist, so ist die Einschaltung nichts anders als in dieser Function für ihre Wurzel statt ganzer Zahlen gebrochene setzen, welche die Stelle des einzuschaltenden Gliedes bezeichnen. So ist $a^{\frac{n}{m}}$ das nte Glied einer geometrischen Reihe, die aus der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : a^4 :$ etc. entstanden ist, indem zwischen je zwey Gliedern dieser Reihe, $m - 1$ Glieder in geometrischer Fortschreitung eingeschaltet sind. Da $(a + b^{\frac{n}{m}}$ auch ein solches eingeschaltetes Glied ist, so hat man in dem

entwickelten Werthe von $(a + b)^n$ statt n nur $\frac{n}{m}$ zusetzen, weil dadurch für jeden Terminus des Werthes der Potenz eben so der Werth eines eingeschalteten erhalten wird, s. Binomischer Lehrsatz, Th. I. S. 328. Gleichfalls wird der für ganze Stellenzahlen gefundene Werth des Gliedes einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung für gebrochne Stellenzahlen eingerichtet, wenn man diese statt jener nimmt, s. arithm. Reihen höherer Ordn. Th. I. S. 210.

2. Wenn die Glieder einer Reihe durch eine transscendente Function gegeben werden, oder auch durch eine verwickelte algebraische, so betrachtet man ein Stück der Reihe als eine arithmetische einer höhern Ordnung, in welcher man zwischen zwey berechneten Gliedern eine beliebige Anzahl Glieder, in gleichen Abständen von einander, mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen einschiebt. Die allgemeinen Formeln für diese Anfangsglieder sind in der Differenzenrechnung (48.), und in dem Artikel, Differentiale, S. 823. in einer etwas veränderten Gestalt, angegeben. Beyspiele dazu sind an dem erstern Orte, und in dem Artikel, Cyklotechnie, S. 692. anzutreffen. Hat man in jedem einzelnen Falle die numerischen Werthe der Anfangsglieder in den Differenzreihen berechnet, so ist es leicht, durch die successive Addition (mit Beobachtung der Vorzeichen) aus den Gliedern einer Differenzreihe die in der vorhergehenden Reihe zu finden, bis daß man auf die Hauptreihe selbst kommt. Da diese Berechnung nur bis zu einer gewissen bestimmten Gränze genau ist, wenn nämlich die Differenzen nicht zuletzt constant werden, so entfernen sich die berechneten eingeschalteten Glieder immer etwas mehr von dem wahren Werthe. Darum müssen in der Hauptreihe einige Glieder in größern Abständen unmittelbar aus der analytischen Formel für dieselben berechnet, und diese hinlänglich genauen Werthe mit denen, welche die Einschaltung in ihren Stellen liefert, verglichen werden. Fände sich ein bedeutender Unterschied, so hätte man der Differenzreihen zu

wenige, oder das Intervall der Einschaltung zu groß genommen.

3. Exempel. In dem Artikel, Differenzenrechnung (50.) ist für die Sinus der Winkel, 42°; 42° 1′; 42° 2′; 42° 3′; u. s. f. der Centesimaltheilung, gefunden das Anfangsglied der ersten Differenzreihe = + 124109698 Billiontheilchen für den Halbmesser als Einheit; der zweyten = — 15126; der dritten = — 3.

Nach den Calletschen Tafeln, oder nach Hobert und Ideler in der Einleitung, S. XXIX. ist sin 42° = 612907 053653 solcher Theilchen. Hieraus werden nun die Sinus von 42° 1′; 42° 2′, u. ff. gefunden.

III.	II.	I.
— 3	— 15126	+ 124109698
	— 15129	+ 124094572
	— 15132	+ 124079443
	— 15135	+ 124064311
	— 15138	+ 124049176
	— 15141	+ 124034038
		+ 124018897

Aus den ersten Differenzen werden nun gefunden die

Sinus	Bogen
612907 053653	42° 0′
613031 163351	42 1
613155 257923	42 2
613279 337366	42 3
613403 401677	42 4
613527 450853	42 5
613651 484891	42 6
613775 503788	42 7

Der Sinus von 42° 7′ ist in dem von Hobert und Ideler a a. O. berechneten Beyspiele 0,613775 503781 22.. Die Rechnung ist daselbst bis zu den sechsten Differenzen und bis auf die 28ste Decimalstelle getrieben. Die Werthe der auf diese Art berechneten Sinus werden allmählig immer mehr von den wahren abweichen. Wollte man sie bis in die zehnte Decimalstelle genau haben, so muß man die Sinus von Grad zu Grad, nach den Umständen auch für größere oder kleinere Intervalle der Winkel, hinlänglich genau berechnen, und bey jedem Abschnitte von Einschaltungen die dazu gehörigen Anfangsglieder der Differenzreihen suchen. So verfährt man in jedem andern Falle.

4. Wenn für die Größen einer Reihe keine Formel ihrer Zusammensetzung aus den Stellenzahlen vorhanden ist, wie es sich oft ereignet, wenn sie durch Beobachtung gegeben werden, oder wenn es Zahlen in Tafeln sind, die durch eine sehr verwickelte Rechnung gefunden worden; so ist das allgemeinste Mittel zur Einschaltung, daß man die gegebenen Größen als Glieder einer arithmetischen Reihe einer gewissen Ordnung ansehe, sie mögen gleiche oder ungleiche Abstände von einander haben. Je näher diese Voraussetzung der Wahrheit kommt, desto weiter dürfen die gegebenen Größen von einander abstehen, und man wird selbst noch ausserhalb ihres Bezirks die Einschaltung fortsetzen können; in dem gegenseitigen Falle wird man nur die zwischen den gegebenen Größen liegenden suchen, und den Abstand der äussersten unter ihnen nur mäßig seyn lassen dürfen.

5. Bey der Interpolation berechneter Tafeln kann man dieses Verfahren immer anwenden, weil die Abstände und die Unterschiede der darin angegebenen Größen klein genug sind, daß der Fehler, den man dabey begehen mag, ganz unbedeutend wird, und weil man, wo zwey oder drey gegebene Größen nicht Genüge thun, mehrere nehmen kann. Allein bey Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, ist es oft nicht genügend, eine individuelle Größe zu finden, sondern man will eine solche allgemeine Formel

haben, welche die Verknüpfung der veränderlichen Größen in der Natur möglichst genau darstelle, und selbst die Anomalien der Beobachtungen und zusammengesetzter Wirkungen zu verbessern diene. Darum wird man auf Formeln von verschiedener Gestalt bedacht seyn müssen, um die in jedem Falle am besten zutreffende wählen zu können. So wie man durch eine gegebene Anzahl Puncte vielerley krumme Linien ziehen kann, so kann man auch mancherley hypothetische Formeln für die gegebenen und die einzuschaltenden Größen anwenden. Die gegebenen Größen sind als gegebene Ordinaten einer Curve in gegebenen Abständen, oder für gegebene Abscissen zu betrachten. Es kommt hier theils auf die Form der Verbindung, theils auch auf die Wahl der Größe an, welche die Stellenzahl vertritt. Gegenwärtig wollen wir die gegebenen und die einzuschaltenden Größen als Glieder einer arithmetischen Reihe einer gewissen Ordnung, oder als Ordinaten an einer parabolischen Linie, betrachten,

Anwendung der arithmetischen Reihen zur Einschaltung.

6. Die Abstände der gegebenen Größen von einander, seyn gleich groß, die Anfangsglieder der Differenzreihen seyn a, b, c, d, etc. Das Anfangsglied, oder das zu der Stellenzahl o gehörige, sey A, die Stelle irgend eines Gliedes, x, das Glied selbst, A + y, so ist (Arithm. Reihen höh. Ordn. 7. u. 25.)

$$y = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2} + \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{dx(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Sind die gegebenen Größen, A; $A+\alpha$; $A+\beta$; $A+\gamma$; $A+\delta$; etc. so ist

$a = \alpha$; $b = \beta - 2\alpha$; $c = \gamma - 3\beta + 3\alpha$; $d = \delta - 4\gamma + 6\beta - 4\alpha$; u. s. f.

7. Exempel. Aus den größern logarithmischen Tafeln sind

Zahlen	Logarithmen	Unterschiede
10000	4,00000 00000	
10002	4,00008 68502	868502
10004	4,00017 36831	868329
10006	4,00026 04985	868154

Hier ist $a = 868502$ Zehntausendmillionstheilchen; $b = -173$; $c = -2$ dergleichen. Man sucht log. 100003, so ist $x = \frac{3}{2}$; $ax = +1302753$; $\frac{bx(x-1)}{1.2} = -65$, $\frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3} = +\frac{2}{10}$; und folglich log. $10003 = 4,0001302688$, wie in den Tafeln.

8. In der obigen Formel sind 1; 2; 3; 4; u. s. f. die Abstände der Glieder von dem Anfangsgliede. Setzt man die Unterschiede derselben ungleich, und die Abstände von dem Anfangsgliede, m, n, p, q, etc. so entsteht die allgemeinere, aber jener analoge Formel,

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x-m)}{mn} + \frac{Rx(x-m)(x-n)}{mnp} + \frac{Sx(x-m)(x-n)(x-p)}{mnpq} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten P, Q, R, S, etc. durch die gegebenen Werthe von y zu bestimmen sind. Diese seyn für die

Abstände m, n, p, q, etc.
α, β, γ, δ, etc.

Das Anfangsglied, für welches $x = 0$ ist, sey A, also das Glied in dem Abstande m sey $A + \alpha$, u. s. f. in dem Abstande x sey es $A + q$. Nun ist

$$\alpha = P;\ \beta = \frac{Pn}{m} + \frac{Qn.n-m.}{mn};$$

$$\gamma = \frac{Pp}{m} + \frac{Qp.p-m.}{mn} + \frac{Rp.p-m.p-n}{mnp};$$

$$\delta = \frac{Pq}{m} + \frac{Qq.q-m.}{mn} + \frac{Rq\ q-m.q-n.}{mnp}$$
$$+ \frac{Sq.q-m\ q-n.q-p.}{mnpq};$$

u. s. f.

Mittelst dieser Gleichungen wird der Werth jedes Coefficienten durch die vorhergehenden gefunden. Werden diese durch die gegebenen Werthe von α, β, etc. und durch die Abstände nach der Reihe zusammengesetzt, so wird gefunden:

$$P = \alpha$$

$$Q = \frac{m\beta}{n-m} + \frac{n\alpha}{m-n}$$

$$R = \frac{mn\gamma}{p-m.p-n.} + \frac{mp\beta}{n-m.n-p.} + \frac{np\alpha}{m-p.m-n.}$$

$$S = \frac{mnp\delta}{q-m.q-n.q-p.} + \frac{mnq\gamma}{p-m.p-n.p-q.}$$
$$+ \frac{mpq\beta}{n-m.n-p.n-q.} + \frac{npq\alpha}{m-n.m-p.m-q.}$$

u. s. w.

Die Art der Zusammensetzung ist offenbar und übereinstimmend. In den binomischen Factoren der Nenner ist immer derjenige Abstand vorangesetzt, der zu dem in dem Zähler befindlichen Factor aus den Größen α, β, γ, δ, etc. gehört, um die Formen ganz übereinstimmig zu machen.

Die Abstände der Glieder von dem Anfangsgliede können auch zum Theil negativ genommen werden, so wie auch die Unterschiede α, β, γ, etc von dem Anfangsgliede. Die Werthe von m, n, p, q, etc. brauchen nicht der Größe nach auf einander zu folgen.

9. Wenn die Abstände der gegebenen Größen von einander gleich groß und $= m$ sind, wenn ferner $n = 2m$; $p = 3m$; $q = 4m$; u. s. f. so verwandeln sich die Werthe von P, Q, R, S, etc. in die von a, b, c, d, etc. in (6.).

10. Wenn die Glieder der Formeln für y entwickelt, und nach den Potenzen von x geordnet werden, so geht eine Formel, wie

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

hervor. Die Coefficienten von x können mittelst der für P, Q, etc. gefundenen Werthe bestimmt werden. Unabhängig von diesen liefert sie folgendes Verfahren.

Es seyn in den

Stellen: o, m, n, p, q, r, etc.

die Werthe von y: o, α, β, γ, δ, ε, etc.

Zu der Stelle x gehöre der durch y bezeichnete Werth, und es sey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

wo a, b, c, d, e, etc. irgend welche Größen seyn mögen. Werden für x die Werthe m, n, p, etc. gesetzt, so ist, wenn die Gleichung für y nicht mehr als fünf Glieder hat

I. $\alpha = am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + em^5$

II. $\beta = an + bn^2 + cn^3 + dn^4 + en^5$

u. s. f. indem für die Buchstaben α, β, etc. wie auch m, n, etc. nach der Reihe der nächstfolgende gesetzt wird.

Es sey $\frac{\alpha - o}{m - o}$ oder $\frac{\alpha}{m} = A$; $\frac{\beta - \alpha}{n - m} = A'$; $\frac{\gamma - \beta}{p - n} = A''$; $\frac{\delta - \gamma}{q - p} = A'''$, u. s. f. wo man den Werth von A mit dem obigen, als Anfangsgliede, nicht verwechseln wird, so ist

$$\text{I.}\quad A = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4$$

$$\text{II.}\quad A' = a + b(m+n) + c(m^2 + mn + n^2) + d(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3) + e(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$$

u. s. f. für A'', A''', etc.

Ferner setze man $\frac{A'-A}{n} = B$; $\frac{A''-A'}{p-m} = B'$; $\frac{A'''-A''}{q-n} = B''$, u. s. f. so ist

$$\text{I.}\quad B = b + c(m+n) + d(m^2 + mn + n^2) + e(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3)$$

$$\text{II.}\quad B' = b + c(m+n+p) + d(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2) + e(m^3 + m^2n + m^2p + mn^2 + mnp + mp^2 + n^3 + n^2p + np^2 + p^3)$$

u. s. f.

Man setze nun $\frac{B'-B}{p} = C$; $\frac{B''-B'}{q-m} = C'$; $\frac{B'''-B''}{r-n} = C''$, so ist

$$\text{I.}\quad C = c + d(m+n+p) + e(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2).$$

$$\text{II.}\quad C' = c + d(m+n+p+q) + e(m^2 + mn + mp + mq + n^2 + np + nq + p^2 + pq + q^2)$$

und so auch C''.

Ferner setze man $\frac{C'-C}{q} = D$; $\frac{C''-C'}{r-m} = D'$; so ist

$$\text{I.}\quad D = d + e(m+n+p+q)$$

$$\text{II.}\quad D' = d + e(m+n+p+q+r).$$

Noch sey $\frac{D'-D}{r} = E$, so ist

$$E = e.$$

Die Größen A, B, C, D, E, sind die Anfangsglieder der Differenzreihen, so fern die Differenzen durch die Abstände der Glieder auf die gezeigte Art modificirt werden. Das Gesetz, wie die mit a, b, c, d, etc. ver-

bundenen Factoren gebildet werden ist offenbar. Sie bestehen aus den Combinationen der Stellenzahlen m, n, p, etc. mit Wiederholungen, aber ohne Versetzungen. In dem ersten Differenzgliede jeder Ordnung ist die Anzahl der combinirten Größen um Eins kleiner als in den folgenden Gliedern, weil der Abstand des Gliedes Null vom Anfang $= 0$ ist.

11. Hieraus ergeben sich die Werthe der Coefficienten in der Formel für y. Es ist

$$e = E$$
$$d = D - (m + n + p + q) E$$
$$c = C - (m + n + p) D + (mn + mp + mq + np + nq + pq) E$$
$$b = B - (m + n) C + (mn + mp + np) D - (mnp + mnq + mpq + npq) E$$
$$a = A - mB + mn C - mnp D + mnpq E.$$

Das Gesetz der Formation ist auch hier einleuchtend. Die Combinationen sind hier ohne Wiederholungen.

12. Ordnet man die Glieder der Formel für y nach den Anfangsgliedern der Differenzreihen, so ist

$$y = Ax + Bx(x - m) + Cx(x^2 - (m + n)x + mn) + Dx(x^3 - (m + n + p)x^2 + (mn + mp + np)x - mnp) + Ex(x^4 - (m + n + p + q)x^3 + (mn + mp + mq + np + nq + pq)x^2 - (mnp + mnq + mpq + npq)x + mnpq).$$

Die Factoren zu Bx, Cx, Dx, Ex, werden aus den Factoren $x - m$; $x - n$; $x - p$; $x - q$, zusammengesetzt, so daß

$$y = Ax + Bx(x - m) + Cx(x - m)(x - n) + Dx(x - m)(x - n)(x - p) + Ex(x - m)(x - n)(x - p)(x - q)$$

u. s. w. wenn noch mehrere Glieder der Reihe gegeben sind.

13. Hier haben wir dieselbe Form für y, welche in (8.) gefunden ist. Dort werden aber die Coefficienten P, Q, R, S, etc. aus den Größen α, β, γ, δ, etc. unmittelbar zusammengesetzt; hier sind A, B, C, D. etc. Anfangsglieder von Differenzreihen mit Rücksicht auf die

Abstände der Glieder von einander, sowohl der nächsten als der entferntern. Die Form für y nach der Zusammensetzung in (12.) hat Newton in den Princip. Philos. nat. L. III. Lemma 5. cas. 2. angegeben, und in cas 1. die Form für y in (6.), bey gleich großen Abständen der Glieder von einander.

14. Wo nur zwey Größen, A und $A + \alpha$, in dem Abstande m gegeben sind, ist der Unterschied der interpolirten, $A + y$, von A der arithmetische oder einfache Proportionaltheil $y = \frac{\alpha x}{m}$, oder es ist $m : x = \alpha : y$. Diese Interpolation findet nur Statt bey Functionen, deren Veränderungen sehr nahe den Unterschieden ihrer Wurzeln oder Stellenzahlen proportional sind, oder dient nur zu einer ungefähren Bestimmung des eingeschalteten Werthes.

15. Es seyn drey Größen, A, $A + \alpha$, $A + \beta$, mit den Stellenzahlen, o, m, n, gegeben; das Glied $A + y$ ist in der Stelle x einzuschalten, so ist nach der Formel in (8.)

$$y = \frac{x-n}{m-n} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{\beta x}{n}.$$

Nimmt man zum ersten Theile den einfachen Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, so ist

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m}{n-m} \left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Nimmt man aber zum ersten Theile den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n}{m-n} \left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Die Function $A + y$ verändert sich ungleichförmig. Nimmt sie stärker zu als nach dem Verhältnisse $m : x$, so ist für einen Werth zwischen den beiden, $A + \alpha$, und

$A + \beta$, wenn n größer als m ist, der Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$ kleiner als y, aber $\frac{\beta x}{n}$ größer als y, daher die Verbesserung jenes additiv, des zweyten subtractiv ist; in dem entgegengesetzten Falle umgekehrt.

16. Es seyn vier Größen, A, $A + \alpha$; $A + \beta$, $A + \gamma$, gegeben, mit den Stellenzahlen, o, m, n, p; das Glied $A + y$ in der Stelle x sey einzuschalten. Nach der Formel (8) ist, wenn dieselbe nach den drey einfachen Proportionaltheilen geordnet wird,

$$y = \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.} \cdot \frac{\alpha x}{m}$$
$$+ \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.} \cdot \frac{\beta x}{n}$$
$$+ \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n} \cdot \frac{\gamma x}{p}.$$

Die Theile von y müssen aus dem einfachen Proportionaltheile und aus den Abständen m, n, p, x auf gleichförmige Art gebildet werden. Daher braucht man nur einen der Theile zu finden, um die andern durch gehörige Vertauschungen daraus herzuleiten.

Wie die Abstände, m, n, p, und x, der Größe nach auf einander folgen, ist willkührlich. Es ist hier nur auf die Symmetrie der Zusammensetzung gesehen. Einige derselben mögen negativ genommen werden, so wie die Werthe von α, β, γ.

Das Gesetz der Formation für mehr als drey Unterschiede von dem Anfangsgliede A erhellt schon vollkommen.

17. Nimmt man zum ersten Theile den Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, so muß dieser durch die Unterschiede desselben von den beiden andern verbessert werden, auf ähnliche Art wie bey der zweyten Formel in (15.). Zu dem Ende ziehe man von dem Bruche $\frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}$ erstlich die Einheit

ab, so bleibt $\frac{x-m}{m-n} \cdot \frac{x+m-n-p}{m-p}$, oder $\frac{x-m}{n-m}$ $\frac{x+m-n-p}{p-m}$. Dazu addire man den Factor des zweyten Proportionaltheils, nämlich $\frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{x-p}{n-p}$, so ist, nach den gehörigen Reductionen, die Summe $= \frac{x-m.x-n.}{p-m.n-p.}$, oder $= - \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}$.

Also ist $\frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{x+m-n-p}{p-m} = - \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.}$ $- \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}$, und

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) + \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Folgen die Abstände m, n, p der Ordnung nach auf einander, und wird x zwischen m und n, genommen, so ist

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m.p-x.}{n-m\ p-n.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{x-m.n-x.}{p-m.p-n.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Die beiden Verbesserungen sind, bey dieser Annahme, von entgegengesetzter Beschaffenheit, wenn die Proportionaltheile zunehmen oder abnehmen.

18. Nimmt man zum ersten Theile der Formel den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, so braucht man nur α und β, so wie m und n mit einander zu vertauschen. Es ist

$$y = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}\left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right)$$
$$+ \frac{x-n.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

oder

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right)$$
$$- \frac{n-x.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Wollte man $\frac{\gamma x}{p}$ zum ersten Theile der Formel nehmen, so hätte man α und γ, so wie m und p mit einander zu vertauschen.

19. Es sey $p = n + m$, und $\gamma = \beta + \delta$, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right)$$
$$- \frac{n-x.x-m.}{n.n+m.}\left(\frac{\delta x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

Diese Formel ist in den Ephemeriden zur Interpolation der Länge und Breite des Mondes sehr brauchbar.

20. Exempel I. Aus dem astronomischen Jahrbuche für 1803 ist, nach bürgerlicher Zeit,

	Länge des Mondes	
26. Febr. Mittern.	47° 33′ 38″	
- - - 1 Uhr	48. 8. 39.	0° 35′ 1″ = α
27. Febr. Mittern.	61. 21. 21.	13. 47. 43 = β
- - - 1 Uhr	61. 55. 21.	14. 21. 43 = γ

Es soll die Länge des Mondes für 12 Uhr Mittags am 26. Febr. gefunden werden. Man nehme bloß die drey ersten Angaben, und gebrauche die dritte Formel in (15.). Es ist

$$\frac{\alpha x}{m} = 7^\circ\, 0'\, 12'' \qquad m = 1$$

$$\frac{\beta x}{n} = 6.\,53.\,51 \qquad n = 24$$

$$\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m} = -\,0.\,6.\,21. \qquad x = 12$$

$$\frac{n-x}{n-m} = \frac{12}{23}$$

Bewegung des Mondes in 12 Stunden,

$y = 6^\circ\, 53'\, 51'' + 0^\circ\, 3'\, 19'' = 6^\circ\, 57'\, 10''$

Länge des Mondes zu Mittag 54. 3 . 48.

Nimmt man die Länge am 27. Febr. Mitternacht zum Anfangsgliede, so ist

$$\alpha = +\,0^\circ\, 34'\, 0'' \qquad m = +\,1$$

$$\beta = -\,13.\,47.\,43. \qquad n = -\,24$$

$$\frac{\beta x}{n} = -\,6.\,53.\,51. \qquad x = -\,12$$

$$\frac{\alpha}{m} = -\,6.\,48.\,0. \qquad \frac{n-x}{n-m} = +\frac{12}{25}$$

Bewegung des Mondes in 12 St. rückwärts genommen,

$y = -\,6^\circ\, 53'\, 51'' + 2'\, 48'' = -\,6^\circ\, 51'\, 3''$

Länge des Mondes am 26 Febr. Mittag, 54 30. 18.

Der Unterschied beider Resultate ist beträchtlich; es ist aber auch die Ungleichheit der Bewegung des Mondes ihrer größten Gränze nahe. Gewöhnlich ist die Zeit, für welche der Ort des Mondes gesucht wird, nicht über acht Stunden von der einen oder der andern Mitternacht entfernt, daher dann die eine oder die andere Rechnung mit mehrerer Richtigkeit gebraucht werden kann. Für den Fall, da man rückwärts rechnet, setze man die Bewegung in der 25sten Stunde $= \delta$, und nehme alle Bezeichnungen absolut, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x}{n+m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\delta x}{m}\right),$$

welcher Werth subtractiv ist.

Nach der Formel (19.) wird der Unterschied der mittlern Bewegung von einer Mitternacht zur andern und

der wirklichen, um jede dieser Zeiten, zugleich in Rechnung gebracht, daher sie ein sehr genaues Resultat giebt. In unserm Beyspiele ist

$$y = 6^\circ 53' 51'' + \frac{12.13}{23.24}(0^\circ 6' 21'')$$
$$+ \frac{12.11}{24.25}(0^\circ 5' 51'')$$
$$= 6^\circ 53' 51'' + 1' 47'' + 1' 17''$$
$$= 6^\circ 56' 55''.$$

Länge des Mondes zu Mittag, $54^\circ 30' 33''$, welche gerade das Mittel zwischen den beiden vorher gefundenen ist.

Die Formel (19.) habe ich in dem astronomischen Jahrbuche für 1788 zur Berechnung des Mondslaufes, in der dazu schicklichen Form, mitgetheilt. Die Vorschrift, welche Lambert in dem Jahrbuche für 1776 S. 42. gegeben hat, entsteht aus der ersten Formel in (15.), wenn daselbst statt des Factors $\frac{x-m}{n-m}$ gesetzt wird $\frac{x}{n}$, und bey rückwärts angestellter Berechnung β, n, x, y negativ genommen werden. Um die Zeit des Mittags herum giebt diese Abkürzung ein genaueres Resultat.

21. Exempel II. Bossut führt in seinem Traité d'Hydrodynamique, T. II. ch. 8 à Paris an. IV. Versuche über die Wassermengen an, die aus einem Behälter durch horizontale Röhren von verschiedener Länge in einer gewissen Zeit ausflossen. Unter diesen sind folgende. Die Höhe des Wassers in dem Behälter über der Axe der Röhre war ein Fuß; der Durchmesser der Röhre 16 Lin. Die ausgeflossene Wassermenge in einer Minute war wie folget:

Länge der Röhre	Wassermenge
30 F.	2778 Cub. Zoll
60 =	1957
90 =	1587
120	1351
130	1178
180	1052

Die Wassermenge bey einer kurzen Ansatzröhre von zwey Zoll setzt Bossut zu 6330 Cub. Zoll an. Diese bezeichne man durch M, den Unterschied derselben von der Wassermenge durch eine Röhre von der Länge 30 x durch y, und nehme den ersten, dritten und sechsten Versuch heraus, um durch diese eine empirische Formel für die Wassermenge zu finden. Es sey diese $= M - y$ und

$$y = ax + bx^2 + cx^5.$$

Nun ist für

x	1	3	6
y	3552	4743	5278

Man suche zufolge (10.) die gehörig dividirten Anfangs-Differenzen. Es ist

$$A = 3552;\ A' = \frac{1191}{2} = 595{,}5;$$

$$A'' = \frac{535}{3} = 178{,}33.\ \text{Daraus}$$

$$B = -\frac{2956{,}5}{3} = -985{,}5;\ B'' = -\frac{417{,}17}{5}$$

$$= -83{,}43.$$

Hieraus

$$C = +\frac{902{,}07}{6} = +150{,}34.$$

Diese geben nach (11.)

$$a = A \quad B + 3C = +4988{,}52$$
$$b = B - 4C \quad = -1586{,}86$$
$$c = C \quad = +150{,}34;$$

also

$y = +4988,52x - 1586,86x^2 + 150,34x^3$.

Die Rechnungsprobe ist, daß man für x setze 1 oder 3, oder 6, wodurch y die angeführten Werthe erhalten muß, wie es auch genau oder sehr nahe geschieht. Allein für die nicht zum Grunde gelegten Werthe von x weichen die Rechnungswerthe von y weit von den berechneten ab. Denn für $x = +2$ ist $y = 4832$, und die Wassermenge $M = 1498$ statt 1957. Für $x = +4$ ist $= 4186$, und $M = 2144$ statt 1351. Für $x = 5$ ist $y = 4064$ und $M = 2266$ statt 1178. Die Formel für y hat ein Größtes und ein Kleinstes, jenes für x zwischen $+2$ und $+3$; dieses für x nahe $= +5$. Sie ist daher der vorgegebenen Reihe nicht angemessen, in welcher die Werthe von y ohne Wechsel zunehmen. Dieser Fall ist daher zur Anwendung der arithmetischen Reihen nicht geschickt. Auch bleiben die Differenzen in den Reihen derselben sehr ungleich. Vielmehr müßte man die Reihe als eine rücklaufende betrachten. Bossut hat dies nicht beachtet, auch nicht der Verfasser des Artikels, Interpolation, in dem mathematischen Theile des Dictionaire encyclopédique.

22. Wenn in einer Reihe die Unterschiede der Glieder von dem Anfangsgliede für gleiche entgegengesetzte x gleich und gleichnamig sind; oder als solche schicklich angenommen werden, so hat y die Form

$$y = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + \text{etc.}$$

und nach der Formel in (8.)

$$y = \frac{Px^2}{m^2} + \frac{Qx^2(x^2-m^2)}{m^2n^2} + \frac{Rx^2(x^2-m^2)(x^2-n^2)}{m^2n^2p^2} + \text{etc.}$$

In den entwickelten Formeln ist x^2, m^2, n^2, p^2, etc. statt x, m, n, p, etc. zu setzen.

23. Sind aber die Unterschiede der Glieder von dem Anfangsgliede für gleiche entgegengesetzte x gleich und ungleichnamig, so muß

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{etc.}$$

genommen werden. Die Formel in (8.) erhält die Gestalt

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x^2 - m^2)}{mn^2} + \frac{Rx(x^2-m^2)(x^2-n^2)}{mn^2p^2}$$
$$+ \frac{Sx(x^2-m^2)(x^2-n^2)(x^2-p^2)}{mn^2p^2q^2} + \text{etc.}$$

Aus der letztern Formel wird auf gleiche Art wie in (15.), bey zwey gegebenen Unterschieden, $\pm\alpha$, $\pm\beta$, erhalten

$$y = \frac{x^2-n^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x^2-m^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{\beta x}{n}.$$

Bey drey gegebenen Unterschieden, $\pm\alpha$; $\pm\beta$; $\pm\gamma$, wie in (16.)

$$y = \frac{x^2-n^2 . x^2-p^2.}{m^2-n^2 . m^2-p^2.} \cdot \frac{\alpha x}{m}$$
$$+ \frac{x^2-m^2 . x^2-p^2.}{n^2-m^2 . n^2-p^2.} \cdot \frac{\beta x}{n}$$
$$+ \frac{x^2-m^2 . x^2-n^2}{p^2-m^2 . p^2-n^2} \cdot \frac{\gamma x}{p}.$$

Die Ähnlichkeit dieser Formeln mit denen in (15. 16.) entsteht daher, daß hier doppelt so viele Glieder, ausser dem Anfangsgliede, gegeben sind, als Unterschiede von diesem gegeben werden. Daher kommen ausser den Factoren (oder Distanzunterschieden), $x - m$, $x - n$, $x - p$, etc. auch $x + m$, $x + n$, $x + p$, etc. vor, so auch nebst $m - n$, $m - p$, $n - m$, $n - p$, etc. die Abstände $m + n$, $m + p$, $n + m$, $n + p$, etc.

Es kann auch die Reihe für y aus zwey Reihen, einer mit geraden Potenzen von x, der andern mit ungeraden Potenzen, zusammengesetzt werden müssen. Man sehe Lambert vom Einschalten, in dem dritten Theile der Beyträge zur Mathem. §. 36. ff.

Anwendung der rücklaufenden Reihen zum Einschalten.

24 Eine rücklaufende Reihe ist, worin jedes Glied aus einem, zweyen, dreyen, oder mehrern der Ordnung nach vorhergehenden Gliedern, durch die Multiplication eines jeden mit einer unveränderlichen besondern Größe zusammengesetzt wird. Die geometrische Reihe ist die einfachste dieser Art. Eine rücklaufende Reihe der zweyten Ordnung ist die Reihe.

A, B, C, D, E, F ... P, Q, R, etc.

wenn, nach dem A, B willkührlich bestimmt sind, die folgenden Glieder durch je zwey vorhergehende auf die gedachte Art zusammengesetzt werden; nämlich $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$; ... $R = \alpha Q - \beta P$, u. s f. Die Multiplicatoren, α, β mögen auch negativ genommen werden. Diese mit ihrem Vorzeichen verbunden machen die Scale der Relation aus, nämlich $+\alpha$; $-\beta$.

25. Sind in einer rücklaufenden Reihe der zweyten Ordnung die vier Glieder, A, B, C, D, gegeben, so ist durch diese die Scale der Relation bestimmt. Nämlich aus den Gleichungen, $C = \alpha B \quad \beta A$, und $D = \alpha C - \beta B$, folgt

$$\alpha = \frac{AD - BC}{AC \quad BB}; \quad \beta = \frac{BD - CC}{AC - BB}.$$

Nun formire man die quadratische Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, und suche deren Wurzeln, welche $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ seyn. Sind diese mögliche Größen, wenn nämlich $\alpha\alpha > 4\beta$ ist, so nehme man $a = \frac{Aq - B}{q - p}$; $b = \frac{B - Ap}{q - p}$, und es ist das n te Glied nach dem Anfangsgliede, $P = ap^n + bq^n$.

26 Hat die Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$ zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln, weil $\alpha^2 = 4\beta$ ist, so ist $P = ((n+1)a + b)\, p^n$, wo $a = \frac{B - Ap}{p}$;

$b = \frac{2Ap - B}{p}$ ist. In diesem Falle ist $p = q = \frac{1}{2}\alpha$, und $p^2 = \beta$.

27. Hat die Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, zwey unmögliche Wurzeln, weil $\alpha\alpha < 4\beta$ ist, so ist

$$P = \frac{a \sin(n+1)\varphi + b \sin n\varphi}{\sin \varphi} p^n, \text{ wo } p = \sqrt{\beta};$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{2p}, \; a = A; \; b = \frac{B}{p} - 2A \cos \varphi \text{ ist.}$$

28. Die Herleitung dieser Formen des allgemeinen Gliedes wird in dem Artikel, rücklaufende Reihen, gezeigt. Inzwischen bemerke man, daß aus den Werthen des Gliedes P und des nächst folgenden Q das auf dieses folgende R mittelst der Relationsscale, $+\alpha$; $-\beta$, entsteht. In dem ersten Falle (25.) ist $\alpha = p + q$, und $\beta = pq$; in dem zweyten ist $\alpha = 2p = 2q$, und $\beta = p^2$; in dem dritten (27.) ist $\alpha = 2p \cos\varphi$; $\beta = p^2$. Für den Fall (27.) ist zu erinnern, daß $2 \sin m\varphi . \cos\varphi = \sin(m+1)\varphi + \sin(m-1)\varphi$ ist.

29. Bey der Anwendung einer rücklaufenden Reihe der zweyten Ordnung zur Interpolation leite man aus vier auf einander in gleichen Abständen folgenden, gegebenen Gliedern erstlich die Glieder der Scale, α und β her, woraus sich p und q, und ferner a und b ergeben. Für ein einzuschaltendes Glied setzt man nun in dem allgemeinen Ausdruck eines Gliedes die Stellenzahl desselben, n, so wird dadurch der Werth jenes Gliedes gefunden, mehr oder weniger genau, nachdem die Voraussetzung einer rücklaufenden Reihe mehr oder weniger der wirklichen Reihe angemessen ist.

30. Wenn von den möglichen Wurzeln eine, als p, negativ ist, so sind die geraden Potenzen von p positiv, die ungeraden negativ, und zwischen zwey nächst auf einander folgenden ganzen Potenzen ist ein Wechsel des Positiven und Negativen. Um diesen Wechsel bey der Interpolation zu erhalten, setze man zu p^n den Factor $\cos n\pi$, wo

π die halbe Peripherie des Kreises, oder 3,141... bedeutet. So darf p als eine absolute Zahl, ohne Rücksicht auf Qualität, betrachtet werden, indem für ein gerades n das Product $p^n \cos n\pi = p^n$ und positiv, aber für ein ungerades n dieses Product $= - p^n$ ist, durch die Beschaffenheit des Cosinus. Ist n eine gebrochne Zahl, $\frac{2m+1}{2}$, so ist $\cos n\pi = 0$, und es ist der Wechsel des Positiven und Negativen da. Fällt n zwischen $\frac{4m-1}{2}$ und $\frac{4m+1}{2}$, so ist $\cos n\pi$ positiv; fällt es zwischen $\frac{4m+1}{2}$ und $\frac{4m+3}{2}$, so ist $\cos n\pi$ negativ. Die Wurzel p oder q ist nur bey wechselnder Zunahme und Abnahme der Function negativ.

31 In einer rücklaufenden Reihe mit einer dreygliedrigen Scale, $+\alpha$, $-\beta$; $+\gamma$, wird jedes Glied aus drey nächst vorhergehenden Gliedern zusammengesetzt, nämlich $S = \alpha R - \beta Q + \gamma P$. Durch die drey Glieder der Scale, und drey nächste Glieder der Reihe ist diese ganz gegeben. Sind sechs auf einander folgende Glieder gegeben, so sind dadurch die Glieder der Scale bestimmt. Eine rücklaufende Reihe der dritten Ordnung dient eine Folge von sechs, in gleichen Abständen von einander befindlichen Größen zu interpoliren, in gewissen Fällen auch zu erweitern. Das allgemeine Glied hat viererley Formen, nachdem die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$, entweder alle drey möglich und ungleich, oder zwey gleich und gleichnamig, oder alle drey gleich und gleichnamig, oder zwey unmöglich sind. In dem erstern Falle ist das allgemeine Glied, in der Stelle n nach dem Anfangsgliede, $= ap^n + bq^n + cr^n$, wo p, q, r die reciproken der Wurzeln jener Gleichung sind, und a, b, c auf ähnliche Art, wie a, b in (25.) bestimmt werden.

Die Coefficienten α, β, γ werden aus den drey Gleichungen

$$\text{I. } \alpha C - \beta B + \gamma A = D$$
$$\text{II. } \alpha D - \beta C + \gamma B = E$$
$$\text{III. } \alpha E - \beta D + \gamma C = F$$

hergeleitet, wo A, B, C, D, E, F, sechs auf einander folgende gegebene Glieder in den Stellen 0, 1, 2, 3, 4, 5, sind. Sind die drey Wurzeln der Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$ gefunden, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c in dem allgemeinen Gliede die Gleichungen,

$$1)\ a + b + c = A$$
$$2)\ ap + bq + cr = B$$
$$3)\ ap^2 + bq^2 + cr^2 = C$$

Die Formen für die andern Fälle werden in dem Artikel, rücklaufende Reihen, entwickelt werden.

32. Prony hat zuerst sich der rücklaufenden Reihen zum Einschalten bedient, um das Gesetz der Expansivkraft der Dämpfe kochenden Wassers oder andrer elastischen Flüssigkeiten dadurch zu bestimmen. In seiner Architecture hydraulique, II. Th. Note zu §. 1371. hat er einen Abriß seiner Interpolations-Methode mitgetheilt, welche ausführlicher in den Mémoires des Savans étrangers enthalten ist. Die Gründe hat er in dem Auszuge nicht angegeben. In demselben Werke, §. 1609-1512. beschäftigt er sich nochmals mit der Interpolirungs-Methode für die Erscheinungen bey elastisch-flüßigen Massen. Sein Vortrag und seine Bezeichnungsart machen Mühe. Zum Beyspiel der Formel in (25. nehme ich aus der von ihm mitgetheilten Tafel der Ausdehnungskraft kochenden Wassers (§. 1324, 1368, 1522) vier Glieder, oder vier Unterschiede von einem fünften.

33. Nach Betancourts Versuchen ist die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Elasticität kochenden Wassers im luftleeren Raume das Gleichgewicht hält, für die hier ausgezeichneten Temperaturen (Reaumursche Scale) folgende in alten Pariser Zollen und Hunderttheilen.

Temperatur	Höhe der Quecksilbersäule	Temperatur	Höhe der Quecksilbersäule
0	0,00	60	9,95
10	0,15	70	16,90
20	0,65	80	28,00
30	1,52	90	46,40
40	2,92	100	71 80
50	5,35	110	98,00

34. Man nehme hieraus die vier Höhen,

$$2{,}92 = A \;;\; 28{,}00 = C$$
$$9{,}95 = B \;;\; 71{,}80 = D$$

und bezeichne ihre Stellen durch 0, 1, 2, 3; die Stelle einer andern durch n, die zu derselben gehörige Temperatur durch x Grade, so ist $x = 40 + 20\,n$, und $n = \frac{x - 40}{20}$.

Nun ist

$$AD = 209{,}656;\quad BD = 714{,}41$$
$$BC = 278{,}600;\quad CC = 69{,}59$$
$$AC = 81{,}76;\quad BB = 99{,}0025.$$

Daraus ist

$$\alpha = \frac{689440}{172425};\quad \beta = \frac{695900}{172425}.$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, sind $\frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}}{2\beta}$. Hier ist $\alpha\alpha < 4\beta$; inzwischen ist die Form der Glieder in (27.) hier nicht anwendbar, weil die Expansivkraft eine mit der Temperatur stetig zunehmende Größe ist. Da $\alpha\alpha$ sehr wenig kleiner als 4β ist, so mag es von einem Fehler in der Beobachtung, oder von zufälligen Unregelmäßigkeiten der Versuche herrühren, daß die Wurzeln der Gleichung unmöglich werden. Es ist α nahe $= 4$, und β wenig größer als 4. Setzt man beide $= 4$, so sind die Wurzeln der Gleichung jede $= \frac{1}{2}$, also $p = q = 2$, und das allgemeine Glied der rücklaufenden Reihe ist hier, $P = ((n+1)a + b)\,2^n$. Die Größen,

a, b, mag man aus A und B, oder B und C, oder C und D bestimmen. Nimmt man B und C, so ist

$$(2a + b)\,2 = 9{,}95,$$
$$(3a + b)\,4 = 28{,}00,$$

woraus $a = 2{,}025$; $b = 0{,}925$, und das Maaß der Expansivkraft die Höhe, $(2{,}025\,n + 2{,}950)2^n$. Für $n = 3$ giebt die Formel die Höhe 72,2 statt 71,8. Für $n = \frac{7}{2}$ oder $x = 110$ giebt sie die Höhe 113,56 statt 98,00. Es ist zu merken, daß bey der Temperatur 100 bis 110 Gr. die Elasticität sehr wenig zunimmt.

35. Man nehme die Unterschiede der vorher gebrauchten Höhen von der 0,65 Zoll bey 20 Gr. Temperatur. So ist

$$2{,}27 = A \;;\; 27{,}35 = C$$
$$9{,}30 = B \;;\; 71{,}15 = D.$$

Es ist

$$AD = 161{,}5105;\quad BD = 661{,}6950$$
$$BC = 254{,}3550;\quad CC = 748{,}0225$$
$$AC = 62{,}0845;\quad BB = 86{,}4900$$
$$\alpha = \frac{928445}{244055};\quad \beta = \frac{863275}{244055}$$
$$\log\alpha = 0{,}5802684;\quad \log\beta = 0{,}5486614$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, umgekehrt genommen, sind

$$p = 1{,}6178;\quad \log p = 0{,}2089219;$$
$$q = 2{,}1865\quad \log q = 0{,}3397500.$$

Ferner ist

$$a = -7{,}6256;\quad \log a = 0{,}8822762$$
$$b = +9{,}8956;\quad \log b = 0{,}9954400$$

Solchergestalt wird der Werth der Formel der Expansivkraft, $P = ap^n + bq^n$, erhalten. Die Probe der Rechnung ist, daß sie für $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ und $n = 3$ vollkommen oder sehr nahe zutrifft. Für $n = \frac{3}{2}$, oder $x = 70$, giebt sie 16,303. Dazu 0,65 addirt wird die Höhe des Drucks = 16,953, die nach der Tafel = 16,90 ist. Aber für $n = \frac{7}{2}$ oder $x = 110°$ ist $P = -41{,}068 + 152{,}955 = 111{,}887$. Wird dazu die Höhe 0,65 ge-

setzt, so ist das Maaß der Expansivkraft = 112,54, da die Erfahrung nur 98,00 giebt. Prony hat in §. 1522 eine dreygliedrige Formel aufgestellt, zu welcher auch die Druckhöhe bey 110° Temperatur angewandt ist. In dem ersten Theile, §. 1325 ist eine viergliedrige Formel gegeben, welche auch in Langsdorfs Lehrbuche der Hydraulik §. 402. nachgesehen werden kann.

Interpolationsformeln mit transscendenten Größen.

36. Charles, ehemals Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, hat in dem mathematischen Theile der Encyclopédie eine Interpolationsformel angegeben, welche insbesondere dazu geeignet seyn wird, unregelmäßige Größenfolgen darzustellen. Die Bezeichnung daselbst ist nicht faßlich; auf gewöhnliche Art ist sie in der Nouvelle Archit. hydraulique par Prony, T. II. Anmerk. zu §. 1373.

Es bezeichnen a, b, c, d, etc. die Werthe einer Function y, welche den Werthen 0, 1, 2, 3, etc. der Wurzel oder Stellenzahl zugehören. auch seyn p, q, r, etc. noch andere Größen, die zufolge anderer gegebenen Werthe zu bestimmen sind; π ist die Zahl 3,141.. für den halben Umfang eines Kreises: die Interpolationsformel ist

$$y = p\,\frac{a \sin \pi x}{\sin p \pi x} + q\,\frac{b \sin \pi (x-1)}{\sin q \pi (x-1)}$$
$$+ r\,\frac{c \sin \pi (x-2)}{\sin r \pi (x-2)} + \text{etc.}$$

Wenn $x = 0$ genommen wird, so sind die Zähler alle $= 0$, und in dem ersten Terminus ist auch der Nenner $= 0$. Den Werth von $\frac{\sin \pi x}{\sin p \pi x}$ für $x = 0$ zu finden, verfahre man, wie in dem Artikel, berührende Linie (24.), und Differentialgleichung (5.). Es ist nämlich dieser

$$\text{Werth} = \frac{\partial \sin \pi x}{\partial \sin p \pi x} = \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p \pi \partial x . \cos p \pi x}.$$

Für $x = 0$ werden beide Cosinus $= 1$, und es ist der verlangte Werth $= \frac{1}{p}$, daher für $x = 0$ ist $y = a$, wie es seyn soll.

Für $x = 1$ sind die Zähler wiederum alle $= 0$, und in dem zweyten Terminus ist auch der Nenner $= 0$. Ganz auf dieselbe Art, wie bey dem ersten, ist nun der Werth von $y = b$. Eben so geht es bey dem dritten, und jedem folgenden Terminus. Aber die Größen p, q, r. etc. zu bestimmen wird Schwierigkeit machen. Die Bogen zu den Sinus in den Nennern dürfen keine Vielfache von π seyn.

37. Eine andere von Charles angegebene Formel ist folgende:

$$\pi y = p \frac{a \sin \pi x}{h^{px} - 1} + q \frac{b \sin \pi (x-1)}{h^{q(x-1)} - 1}$$

$$+ r \frac{c \sin \pi (x-2)}{h^{r(x-2)} - 1} + \text{etc.}$$

wo h die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so daß $\log h = 1$. Für $x = 0$ werden alle Zähler $= 0$, und in dem ersten Terminus auch der Nenner. Um den Werth des Bruches $\frac{0}{0}$ zu erhalten, verfahrt man, wie vorher geschehen ist. Es ist $\partial (h^{px} - 1) = \partial h^{px} = h^{px} p \partial x$ (Differential-Formeln, 16.). Nun ist $\frac{\partial \sin \pi x}{\partial (h^{px} - 1)}$ $= \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p dx . h^{px}}$, welches $\frac{\pi}{p}$ für $x = 0$ ist. Dadurch wird der erste Terminus $= \pi a$. Um den Factor π zu heben, ist y mit demselben verbunden worden. Der zweyte Terminus erhält für $x = 1$ den Werth πb, da die andern $= 0$ werden, also ist $y = b$. Auf gleiche Art giebt die Formel $y = c$ für $x = 2$, u. s. f.

38. Noch eine Formel von Charles ist folgende:

$$\pi^2 y = \sin \pi x^2 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-2)^2} + \frac{d}{(x-3)^2} + \text{etc.}\right).$$

Für $x = 0$ wird das erste Glied der Reihe, $\frac{\sin \pi x^2}{x^2} a = \frac{0}{0}$ und die andern werden alle Null. Es ist $\frac{\partial \sin \pi x^2}{\partial . x^2} = \frac{2 \sin \pi x . \cos \pi x . \pi \partial x}{2 x \partial x} = \frac{\pi \sin 2 \pi x}{2 x}$, welcher Bruch für $x = 0$ wiederum $\frac{0}{0}$ ist. Man differentiire Zähler und Nenner aufs neue, so ist $\frac{\partial . \pi \sin 2 \pi x}{2 \partial x} = \frac{2 \pi^2 \partial x . \cos 2 \pi x}{2 \partial x} = \pi^2 \cos 2 \pi x$, welches $= \pi^2$ für $x = 0$ ist. Daher ist $y = a$. Eben so ist $y = b$, für $x = 1$; $y = c$, für $x = 2$, u. s. f.

39. Lambert nimmt für den Fall, da die ersten Unterschiede abwechselnd positiv und negativ sind, die Interpolations-Formel

$$y = a + b \sin \frac{m + x}{n} + c \sin \frac{p + x}{q} + \text{etc.}$$

zeigt aber nicht, wie die unveränderlichen Größen bestimmt werden. Über das Einschalten, in den Beyträgen zur Mathematik. Th. III. §. 5.

La Grange giebt dem allgemeinen Gliede einer Reihe die Gestalt

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \text{etc.}$$

und zeigt wie die Coefficienten a, b, c, etc. nebst den Winkeln α, β, γ, etc. und φ, χ, ψ, etc aus gegebenen Werthen von y in den Werthen 0, ± 1; ± 2; ± 3;

etc. von x gefunden werden können. Astronomisches Jahrbuch für 1783. S. 41.

Interpolation einer Reihe von Producten aus Factoren, in arithmetischer Progression.

40. Eine Reihe bestehe aus Producten, deren Factoren die auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe sind, nämlich

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};$$

$$\overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots M};\ \overset{m}{M}\overset{m+1}{(a+mb)};\ \text{etc.}$$

wo die übergeschriebenen Zahlen die Stellen und die Anzahl der Factoren anzeigen. Das Glied in der Stelle 0 ist $=1$, damit für die Stelle 1 das Glied der Reihe $=a$ werde, nach der allgemeinen Form, in welcher für die Stelle 1 der Factor $m=0$ ist.

41. Die Form eines Gliedes in dieser Reihe gehört zu einer besondern Gattung von transscendenten Functionen, welche Euler inexplicabiles nennt. Die Glieder sind keine solche Function ihrer Stelle, die allen gemein wäre. Die Interpolation solcher Reihen lehrt Euler in den Institt Calc. diff. P. II. c. 17. Ich werde hier einen leichtern Weg dazu nehmen.

42. Es sey $m+\omega$ die Stelle des einzuschaltenden Gliedes, m die Stelle des nächst vorhergehenden, also eine ganze Zahl, und ω der Abstand jenes von diesem, ein eigentlicher Bruch. Setzen wir nach jedem Gliede in dem Abstande ω ein Zwischenglied, so müssen diese Zwischenglieder jedes aus dem vorhergehenden auf dieselbe Art gebildet werden, wie die Glieder der ursprünglichen Glieder aus einander entstehen, damit, wenn $\omega=0$ oder $=1$ ist, die Glieder dieser Reihe hervorgehen. Dieses ist der Analogie der Interpolation geometrischer und arithmetischer Reihen gemäß.

43. Es sey nun die Reihe der eingeschalteten Glieder:

$$\omega \quad 1+\omega \quad 2+\omega \quad 3+\omega \quad 4+\omega$$
$$u\ ;\ \alpha u\ ;\ \beta u\ ;\ \gamma u\ ;\ \delta u\ ;\ \text{etc.}$$

so ist

$\alpha u = (a+\omega b)u$
$\beta u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)u$
$\gamma u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)u$
$\delta u = (a+\omega b)\ldots(a+3b+\omega b)u$

und, wenn μu das interpolirte Glied in der Stelle $m+\omega$ ist,

$\mu u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)u.$

Dieses Glied fällt zwischen die Glieder,

$a(a+b)\ldots\ldots(a+(m-1)b)$, und
$a(a+b)\ldots\ldots(a+mb)$,

also fällt u zwischen die Brüche,

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+(m-1)b)}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)}$$

und

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+mb)}{(a+\omega b)\ a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)},$$

welchen Werth auch m haben mag. Daher ist

$$u = \frac{a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\text{in infin.}}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)\ldots\text{in infin.}}.$$

Denn wenn man hier zu einer Anzahl Factoren im Nenner entweder eben so viele oder einen mehr im Zähler nimmt, so erhält man eben solche Partialwerthe wie dort für u. Dieses Schwanken der unvollständigen Werthe von u darf nicht befremden. Es ist ein solcher Fall, wie mit dem Werthe einer Reihe, die, ohne zu convergiren, in ihren Gliedern abwechselnde Vorzeichen hat. Die Partialwerthe von u gehen rückwärts und vorwärts, über 1 und über a hinaus. Es ist hier nicht sowohl von der Annäherung zu einem gewissen bestimmten Werthe, als von der Form dieses Werthes die Frage. Unten wird sich

doch ein Mittel zur Annäherung an den wahren Werth von u zeigen.

44. Nun ist

$$\alpha u = a \cdot \frac{(a+b)(a+2b).\ \text{etc.}}{(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b).\ \text{etc.}}$$

$$\beta u = a(a+b) \cdot \frac{(a+2b)(a+3b).\ \text{etc.}}{(a+2b+\omega b)(a+3b+\omega b).\ \text{etc.}}$$

$$\gamma u = a(a+b)(a+2b) \cdot \frac{(a+3b).\ \text{etc.}}{(a+3b+\omega b).\ \text{etc.}}$$

$$\delta u = a(a+b)(a+2b)(a+3b) \cdot \frac{(a+4b).\ \text{etc.}}{(a+4b+\omega b).\ \text{etc.}}$$

und das Glied in der Stelle $m+\omega$ ist

$$a(a+b)\ldots(a+(m-1)b) \cdot \frac{(a+mb).\ \text{etc.}}{(a+mb+\omega b).\ \text{etc.}}.$$

Wenn $\omega = 0$ ist, so verwandelt sich das eingeschaltete Glied in das nächstvorhergehende Glied der ursprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ ist, in das nächstfolgende, wie es seyn muß.

Nimmt man in dem Bruchfactor zu dem Gliede der ursprünglichen Reihe im Zähler und Nenner gleich viele Factoren, so wird das eingeschaltete Glied kleiner als das nächste vorhergehende; nimmt man im Zähler einen Factor mehr als im Nenner, so wird das eingeschaltete Glied größer als das nächste folgende. In dem ersten Falle nämlich wird das nächste vorhergehende Glied mit einer Reihe eigentlicher Brüche multiplicirt; in dem zweyten das nächste folgende mit einer Reihe uneigentlicher Brüche. Der Multiplicator wird dort immer kleiner, hier immer größer, wiewohl die einzelnen Brüche sich der Einheit immer mehr nähern.

45. Euler giebt a. a. O. §. 401. für ein in der Stelle ω (es sey ω ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch) eingeschobenes Glied Σ die Formel,

$$\Sigma = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}$$
$$\times \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+\omega} \text{ etc.}$$

Man sieht, daß diese Formel für $\omega < 1$ mit der hier für u gefundenen übereinkommt, nur daß in derselben die Factoren des Zählers in zwey Wurzelgrößen zerlegt sind. Aus jener Formel, $\omega < 1$ gesetzt, leitet Euler die hier in (44) gefundenen her. Sofern es hier bloß auf die Form eines eingeschalteten Gliedes ankommt, geben diese Formeln eine sehr faßliche Darstellung.

46. Die gegebene Reihe sey

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \text{etc.}$$

Das mte Glied (dessen Stelle m ist) sey $= M$, so ist das nächste $= M \cdot \frac{a+mc}{b+mc}$. Darum ist das Glied in der Stelle $0 = 1$.

Um die Reihe zu interpoliren, setze man in dem Abstande ω von 1 vor $\frac{a}{b}$ das Glied u, und lasse auf dieses in den Stellen $1+\omega$; $2+\omega$; $3+\omega$; etc. die Glieder αu, βu, γu, etc. folgen, so ist nach dem Gesetze für die Hauptglieder,

$$\alpha u = \frac{a+\omega c}{b+\omega c} u$$

$$\beta u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)} u$$

$$\gamma u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)(a+2c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)(b+2c+\omega c)} u$$

u. s. w.

Nach derselben Schlußart wie in (43.) ist

$$u = \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots}{b(b+c)(b+2c)\ldots} \times \frac{(b+\omega c)(b+c+\omega c)\ldots}{(a+\omega c)(a+c+\omega c)\ldots}$$

und das eingeschaltete Glied in der Stelle $m + \omega$ ist

$$\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)\ldots \text{in inf.}}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)\ldots \text{in inf.}}$$

$$\times \frac{(b+mc+\omega c)(b+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}{(a+mc+\omega c)(a+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}$$

Die Bruchfactoren jedes dieser beiden Brüche nähern sich immer mehr der Einheit. Wenn $\omega = 0$ genommen wird, so verwandelt sich das eingeschaltete Glied in das mte der ursprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ gesetzt wird, in das $(m+1)$te. Euler hat dieselbe Formel, a. a. O. §. 400. ohne Zerlegung in Potentialgrößen.

47. Exempel. In der Reihe

$$1;\ \frac{2}{3};\ \frac{2.4}{3.5};\ \frac{2.4.6}{3.5.7};\ \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9};\ \text{etc.}$$

zwischen je zwey nächsten Gliedern eines einzuschalten.

Hier ist $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$, also

$$u = \frac{2.4.6.8.\ \text{etc.}}{3.5.7.9.\ \text{etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\ \text{etc.}}{3.5.7.\ 9.\ \text{etc.}},$$

als das zwischen 1 und $\frac{2}{3}$ eingeschaltete Glied. Oder

$$u = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$u = 1 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

Man sieht, wie der partielle Werth von u sich einer gewissen Größe nähern könne.

Das zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{2.4}{3.5}$ eingeschaltete Glied ist

$$= \frac{2.4.6.8.\ \text{etc.}}{3.5.7.9.\ \text{etc.}} \times \frac{6.8.10.12.\ \text{etc.}}{5.7.\ 9.11.\ \text{etc.}},$$

$$\text{oder} = \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{oder} = \frac{2.4}{3\ 5} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

48. Die Glieder der hier zum Beyspiele genommenen Reihe sind die Flächenräume einer Curve, deren Gleichung ist $y = (1 - z^2)^m$ für die Abscisse $z = 1$. Denn das Differential der Fläche ist $= y\,\partial z = (1 - z^2)^m\,\partial z =$

$$(1 - mz^2 + \frac{m.m-1.}{1.2} z^4 - \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^6$$

$+$ etc.) ∂z Also ist der Flächenraum $=$

$$z - \tfrac{1}{3} mz^3 + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1.}{1.2} z^5$$

$$- \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^7 + \text{etc.}$$

welches Integral mit z anfangen soll. Für $z = 1$ ist es $=$

$$1 - \tfrac{1}{3} m + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} - \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Setzt man m folgweise $= 1; 2; 3; 4;$ etc. so sind die Werthe der Flächenräume die Glieder der Reihe in (47.).

49. Für $m = \frac{1}{2}$ ist die krumme Linie ein Kreis mit dem Halbmesser als Einheit, in welchem die Abscisse z vom Mittelpuncte aus genommen wird. Wird $z = 1$ gesetzt, so ist die Reihe der vierte Theil der Kreisfläche. Sie ist auch das in der Reihe der Producte eingeschaltete Glied in der Stelle $\frac{1}{2}$. Folglich ist der vierte Theil der

$$\text{Kreisfläche} = \frac{2.4.6.8.\ \text{etc.}}{3.5.7.9.\ \text{etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\ \text{etc.}}{3.5.7.\ 9.\ \text{etc.}}.$$

Setzt man den halben Umfang $= \pi$, so ist eben dieser vierte Theil $= \frac{1}{4}\pi$, und

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8 \text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9. \text{ etc.}}.$$

Das ist der Werth von $\frac{1}{2}\pi$, der in dem Artikel, Cyklometrie (29.) aus andern Gründen gefunden ist. Es ist derjenige, welchen Wallis auch durch eine ihm eigene, künstliche Einschaltungsart herausgebracht hat. Arithm. Infin. Prop. 191. Man sehe noch den Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 654.

50. Die vorher (47.) zum Beyspiel gegebene Reihe kann man auch mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen nach der Formel in (7.) interpoliren. Diese Anfangsglieder sind

$$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}; +\frac{1}{9}, - \text{ etc.}$$

negativ nämlich, wo die folgenden Glieder kleiner sind als die vorhergehenden. Jene Formel giebt den Unterschied des eingeschalteten Gliedes über das in der Stelle o befindliche. Das eingeschaltete sey hier $= q$, so ist

$$q = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}.\frac{x.x-1.}{1.2} - \frac{1}{7}.\frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}$$
$$+ \frac{1}{9}.\frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4} - \text{ etc.}$$

Also ist das in der Stelle $\frac{1}{2}$ eingeschaltete

$$q = 1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2} - \frac{1}{5}.\frac{1.1}{2.4} - \frac{1}{7}.\frac{1.1.3}{2.4.6}$$
$$- \frac{1}{9}.\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} - \text{ etc.}$$

Diese Reihe ist der vierte Theil der Kreisfläche $= \frac{1}{4}\pi$. Unter den cyklometrischen Reihen wird sie noch nicht vorgekommen seyn. Sie convergirt nur langsam, da der sechste Terminus des subtractiven Theils erst 0,001577 ist. Darauf kommt es inzwischen nicht an, weil man mehr

als eine schnell convergirende Reihe für den Umfang des Kreises hat.

51. Exempel. In der Reihe 1; 1; 1.2; 1.2.3; 1.2.3.4; etc. zwischen je zwey Gliedern eines einzuschalten.

Hier ist in (40, 43.) $a = 1$; $b = 1$; $\omega = \frac{1}{2}$, also das zwischen den beiden ersten eingeschaltete,

$$u = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \text{etc.}}{\frac{3}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \frac{9}{2}.\ \text{etc.}}$$

Nimmt man immerfort gleich viele Factoren im Zähler und im Nenner, so wird der Werth von u immer kleiner; nimmt man im Zähler immer einen Factor mehr als im Nenner, so wird der Werth immer größer. Um annähernde Werthe zu erhalten, müssen die Bruchfactoren abwechselnd größer und kleiner als die Einheit seyn, sich aber derselben immer mehr nähern. Dieses wird erhalten, wenn man den Werth von u^2 nimmt, und zugleich jeden Bruchfactor im Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt. So ist

$$u^2 = 1.\ \frac{2}{3}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{4}{5}.\ \frac{6}{5}.\ \frac{6}{7}.\ \frac{8}{7}.\ \text{etc.}$$

Da $\frac{1}{4}\pi = \frac{2.4.4.6.6.8.8.\ \text{etc.}}{3.3.5.5.7.7.9.\ \text{etc.}}$ ist,

so ist $u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Die eingeschalteten Glieder in den Stellen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. sind aus (43.) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3.5}{2.2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\frac{3.5.7}{2.2.2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$: etc.

52. Auf diese Art kann man überhaupt einen convergirenden Werth für u erhalten. Es ist

$$u^2 = a \cdot \frac{a}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+b+\omega b} \cdot \frac{a+2b}{a+b+\omega b} \times$$

$$\frac{a+2b}{a+2b+\omega b} \cdot \frac{a+3b}{a+2b+\omega b} \cdot \text{etc.}$$

wo die Brüche abwechselnd kleiner und größer als die Einheit sind, und sich ihr allmählig nähern.

53. Da zufolge (44.) das $(m+\omega)$te Glied der Reihe daselbst ist

$$a(a+b)\ldots(a+(m-1)b) \cdot \frac{(a+mb) \cdot \text{etc.}}{(a+mb+\omega b) \cdot \text{etc.}},$$

wo der Unterschied der Factoren im Zähler und Nenner des Ergänzungsbruches b ist, wie in der Hauptreihe, so kann man für diesen Bruch auf ähnliche Art einen convergirenden Werth finden. Man hat nur in der Formel für u anstatt a hier $a+mb$ zu setzen Wenn die Differenz b negativ ist, und die Producte wechselnd positiv und negativ werden, so erfordert die Interpolation noch ein besonderes Verfahren, wie bey einer geometrischen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen.

54. Das eingeschaltete Glied in der Reihe (46.) ist convergirend. Man setze nur die Factoren in dem Zähler des zweyten Bruchs wechselsweise zwischen die Factoren in dem Zähler des ersten Bruchs, und verfahre eben so mit den Nennern, so sind die Bruchfactoren abwechselnd kleiner und größer als die Einheit, wie vorher in dem Werthe von u^2. Bey der Berechnung des Werthes von u^2 oder jenes Ergänzungsbruches hat man nur aus dem Zähler oder Nenner des letzten Bruchfactors, bey dem man stehen bleibt, die Quadratwurzel zu ziehen.

Beyspiel einer Interpolation aus der mathematischen Geographie.

55. Bouguer fand (Figure de la terre p. 290.) daß die Überschüsse der in Frankreich und in Lappland

gemessenen Grade des Meridians über den in Peru, nämlich 321 und 669 Toisen sich nahe wie die Biquadrate der Sinus der Breite verhalten. Das Verhältniß wird folgendergestalt gefunden. Die geographische Breite des mittlern Punctes des französischen Grades sey, wie Bouguer sie ansetzt, 49° 23′, des lappländischen 66° 19′. Die Länge des peruanischen Grades sey, nach seiner Bestimmung, 56753 Toisen; des französischen 57074 T., des lappländischen 57422 T. Es sey nun $321 = a(\sin 49° 23')^n$; $669 = a(\sin 66° 19')^n$, so ist $\frac{669}{321} = \left(\frac{\sin 66° 19'}{\sin 49° 23'}\right)^n$, und $l\,669 - l\,321 = n(l \sin 66° 19' - l \sin 49° 23')$, also $n = \frac{0,3189211}{0,0815022} = 3,913036$.

Hierauf läßt sich der unveränderliche Factor a bestimmen. Es ist $l\,321 = \log a + n\,l \sin 49° 23'$. Der Logarithme des Sinus als eines eigentlichen Bruchs ist eine negative Größe, nämlich $l \sin 49° 23' = 9,8802887 - 10 = -0,1197113$, also $n\,l \sin 49° 23' = -0,468434$, und $\log a = 2,97494$, so daß $a = 943,93$. Die Breite des mittlern Punctes eines Grades des Meridians sey $= \varphi$, so ist durch Einschaltung die Länge des Grades $= 56753 + 943,93 \times \sin \varphi^{3,913}$.

56. Nach der neuen Messung in Lappland hält der Meridiangrad in der Breite 66° 20′ 12″ nur 57209,28 Toisen, nach einer vorläufigen Berechnung. Der Überschuß über den peruanischen Grad beträgt also nur 456 T. und es ist $n = 1,871$. Das bringt die Figur des Meridians der elliptischen sehr nahe.

57. Da der Überschuß der Länge eines Grades in der Breite φ auf einem elliptischen Meridian durch die Reihe, $A \sin \varphi^2 + B \sin \varphi^4 + C \sin \varphi^6 +$ etc ausgedrückt wird (s. Krümmungskreis), wo aber A, B, C, etc. nicht unabhängige Großen sind, sondern alle durch die beiden Axen der Ellipse gegeben werden, so läßt sich dieser Überschuß an einer von der elliptischen wenig abweichenden

Gestalt der Meridiane bequem durch eine ähnliche Formel darstellen, wenn die Coefficienten von einander unabhängig gesetzt, und bloß durch gemessene Grade bestimmt werden. Das ist eine Erweiterung von Bouguers Hypothese, die nur das zweyte Glied der Reihe aufnimmt. Man sehe meine beiden Aufsätze über die Anwendung dieser Formel in dem astronomischen Jahrbuche von Bode für 1787 und 1788. Hier soll dies nur zum Beyspiele dienen, wie man ein einfaches Gesetz den Beobachtungen anpassen möge, wenn diese, der Natur der Erscheinungen gemäß, nur durch Nebenwirkungen davon abweichen.

58. Von der Einschaltung des größten oder kleinsten Werthes einer Function, z. B. bey der größten Declination der Sonne im Sommer oder Winter; bey der Culmination eines Gestirns, s. den Artikel, Größtes und Kleinstes.

Zur Geschichte der Theorie des Einschaltens.

Zur Berechnung der einfachen Proportionaltheile hat schon Ptolemäus in seinen Tafeln der Chorden eines Kreises den zu einer Minute bey jedem halben Grade gehörigen Unterschied der Chorde beygefügt.

Wie Rhäticus sich bey dem Einschalten der Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Secunden verhalten hat, ist in dem Artikel, Cyklotechnie, (Th. 1. S. 672.) erzählt.

Briggs gebrauchte zur Berechnung der Logarithmen die Einschaltung vieler Glieder in geometrischer Progression zwischen der Einheit und einer wenig von ihr verschiedenen Zahl. Er verfuhr dabey folgendermaßen.

Es sey $(1+u)-1=A$; $(1+A)^{\frac{1}{2}}-1=A'$; $(1+A)^{\frac{1}{4}}-1=A''$; $(1+A)^{\frac{1}{8}}-1=A'''$, u. s. f.
Ferner sey
$\frac{1}{2}A-A'=B$; $\frac{1}{2}A'-A''=B'$; $\frac{1}{2}A''-A'''=B''$, u. s. f.

$\frac{1}{4}B - B' = C$; $\frac{1}{4}B' - B'' = C'$ u. s. f.
$\frac{1}{8}C - C' = D$; $\frac{1}{8}C' - C'' = D'$ u. s. f.
$\frac{1}{16}D - D' = E$; $\frac{1}{16}D' - D'' = E'$ u. s. f.
$\frac{1}{32}E - E' = F$, u. s. f.

Die Größen B, C, D, E, F, etc. werden successiv kleiner, und nehmen sehr ab, wenn A ein kleiner Bruch ist. Das fand Briggs durch eine individuelle Rechnung, da er den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit noch nicht kannte. Wird eine der Größen, als F, so klein, daß sie nicht mehr in Betracht kommen kann, so ist $E' = \frac{1}{32}E$ fast genau. Daraus werden successiv D^{II}, C^{III}, B^{IV}, A^{V} gefunden, wenn die Werthe A bis zu dem A^{IV} nebst den zugehörigen Differenzen gefunden sind, so daß nun die geometrische Reihe fortgesetzt werden kann. Das Verfahren ist aber beschwerlich, nur ein Behelf in Ermangelung des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten.

Briggs giebt noch eine Methode, die Differenzen zu finden, die Hutton in seiner Abhandlung von der Construction der Logarithmen, in der Einleitung zu seinen mathematischen Tafeln, ingenious, but not obvious nennt. Sie beruht auf denselben Gründen als die erstere.

Es sey nämlich $(1+u) - 1 = A$;
$(1+u)^2 - 1 = A'$; $(1+u)^4 - 1 = A''$;
$(1+u)^8 - 1 = A'''$; $(1+u)^{16} - 1 = A^{IV}$, u. s. f.

Ferner sey

$\frac{1}{2}A' - A = B$; $\frac{1}{2}A'' - A' = B'$; $\frac{1}{2}A''' - A'' = B''$; u. s. f.
$\frac{1}{4}B' - B = C$; $\frac{1}{4}B'' - B' = C'$, u. s. f.
$\frac{1}{8}C' - C = D$; $\frac{1}{8}C'' - C' = D'$, u. s. f.
$\frac{1}{16}D' - D = E$, u. s. f.

Hieraus ist $B = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}A^2$;
$C = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{8}u^4$;
$D = \frac{7}{8}u^4 + \frac{7}{8}u^5 + \frac{7}{16}u^6 + \frac{1}{8}u^7 + \frac{1}{64}u^8$. u. s. f.

Dadurch findet man die Größen A', A'', A''', etc. nach der Reihe, auch in dem Falle, wenn $A+1$ eine Wurzelgröße ist, deren Grad eine Potenz der Zwey ist, als $(1+u)^{\frac{1}{4}}$, $(1+u)^{\frac{1}{8}}$ u. d. gl.

Beide Methoden mit Beyspielen erläutert giebt Briggs in der Einleitung zu seiner Arithmetica logarithmica, 1624, woraus die ersten eilf Capitel in der Arithmetica logarithmica von Vlacq eingerückt sind. In den folgenden beiden Capiteln, die Vlacq nicht hätte weglassen sollen, zeigt Briggs, wie mittelst der Differenzen die Logarithmen durch Einschaltung gefunden werden. Er betrachtet zweyerley Fälle, erstlich, wenn die zweyten Differenzen ganz oder nahe gleich groß sind, zweytens, wenn die Differenzreihen bis zu irgend einer Ordnung fortgehen. Seine Regel für den ersten Fall stimmt mit der Formel $y = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2}$ überein, die aus der in (6.) entsteht, wenn die Glieder der dritten Differenzreihe und der folgenden alle Null sind. Für den zweyten schwerern Fall stimmen seine Vorschriften ganz mit denen überein, die Cotes in seiner Canonotechnia gegeben hat, da die Differenzen, welche Briggs mittlere und verbesserte nennt, von Cotes runde und viereckte genannt werden, weil er sie durch Zahlen bezeichnet, die in einen kleinen Kreis und in ein Quadrat eingeschlossen sind. (Hutton in der vorgedachten Abhandlung) In der Trigonometria Britannica, L. 1. cap. 12. giebt Briggs einen Abriß seiner Methode des Einschaltens, und zeigt ihre Anwendung bey der Einschaltung in einer berechneten Folge von Sinus, deren Winkel eine arithmetische Reihe ausmachen. Briggs ist also der Erfinder der Methode durch Differenzen einzuschalten. Er nimmt in dem gedachten zweyten Falle andere Glieder der Differenzreihen, als bey der Formel in (6.) angewandt sind

Wallis fand auf eine sehr sinnreiche Art die Interpolation solcher Brüche, deren Zähler und Nenner

successive Producte aus den Gliedern arithmetischer Progressionen sind, die in (47.) auf eine andere Art bewerkstelligt ist. Er scheint den Ausdruck, Interpolation, zuerst gebraucht zu haben. Die Arithmetica infinitorum, worin er jene Erfindung vorträgt, erschien im J. 1655. In diesem Werke zeigt er auch, wie die figurirten Zahlen zu interpoliren sind, aus der allgemeinen Form derselben.

Mouton, ein Geistlicher, der zu Lyon lebte (gest. 1694.), gebrauchte zu astronomischen Rechnungen eine Interpolations-Methode, die er einem Lyoner Mathematiker, Namens Regnault, verdankt. Er zeigte, wie man dadurch sowohl zwischen den Angaben berechneter Tafeln mittlere Größen finden, als in einer Reihe von Beobachtungen die fehlenden einschieben könne, und zwar genauer als durch einfache Proportionaltheile. Vermittelst dieser Methode berechnete er Tafeln der Declination der Sonne und der scheinbaren Größen ihres Durchmessers bis zu Secunden und Tertien, in einer Schrift: Observ. diametr. Solis et Lunae apparentium. Lugduni 1670. 4. (Montucla hist. des Mathem. T. II. p. 640. III. p. 301.)

Leibnitz fand auch, wie die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen zusammengesetzt werden. S. Th. I. S. 839.

Allgemeine, zur Anwendung geeignete Vorschriften gab Newton in den Principiis Philos. natur. L. III. Lemm. 5. für beide Fälle, da die Abstände der gegebenen Größen von einander gleich groß oder ungleich sind. Das Lemma hat die Überschrift: Invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transit. Die gegebenen und die einzuschaltenden Größen werden, nach der damahls gewöhnlichen Methode, alle Relationen geometrisch darzustellen, als Ordinaten einer parabolischen Curve betrachtet, deren Gleichung ist $y = A + ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$ In einem kleinen Aufsatze: Methodus differentialis, der 1711. gedruckt ist, zeigt Newton, wie für irgend eine Anzahl gegebener Größen, die als Ordinaten einer parabolischen Curve angesehen wer-

den, die Gleichung für die Curve bestimmt wird. Die Rechnung ist fast dieselbe, wie die oben in (10. 11) geführte. Er leitet daraus noch einige Formeln zur Berechnung der eingeschalteten Größe her, welche man in jener Schrift selbst nachzusehen hat.

Ehe die Newtonische Schrift über den Gebrauch der Differenzen zum Einschalten bekannt gemacht war, suchte Cotes, veranlaßt durch das Lemma in den Principien, eine Auflösung der Aufgabe, und trug sie nebst den dazu gehörigen Sätzen, seinen Zuhörern in Cambridge vor. Der Aufsatz ist der Ausgabe seiner Harmonia mensurarum durch Rob. Smith, Cantabr. 1722. beygefügt.

Eben dieser Schrift ist angehängt: Canonotechnia, sive constructio tabularum per differentias, worin Cotes Formeln zum Einschalten angiebt. Die Rechnung nach denselben aber ist sehr zusammengesetzt, ob gleich das Verfahren sehr sinnreich ist. Die gegebenen Größen setzt er in gleichen Abständen von einander, und nimmt das Anfangsglied in der Mitte derselben, so auch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Aus den Differenzen aller vorhandenen Ordnungen sucht er die Anfangsglieder der Differenzreihen für die erweiterte Reihe. Diese Anfangsglieder nehmen ebenfalls die mittelste Stelle in ihren Reihen ein. An der Erfindung der Beweise zu jenen Formeln mag man seinen Scharfsinn üben. Beide Abhandlungen sind nebst noch zwey kleinen dem Hauptwerke beygefügten Schriften desselben Verfassers, von Matsko, Prof. in Rinteln, zu Lemgo 1768 besonders herausgegeben, unter dem allgemeinen Titel: Opera miscellanea Rogeri Cotes.

In Jakob Stirlings Methodus differentialis, Lond. 1730. handelt der zweyte Theil von der Interpolation der Reihen. Es wird darin nicht allein gezeigt, wie zwischen Größen von der Form der Ordinaten parabolischer Linien die Einschaltung geschieht, sondern auch wie es bey continuirlichen Producten ausgeführt wird, bey den leztern nicht so kurz als es in diesem Artikel gewiesen ist.

Für die Interpolation der erstern Art giebt der Verfasser eigenthümliche Formeln.

F. C. Maier, in Petersburg, zeigte in den Commentariis Acad. Petrop. T. II. a. a. 1727, wie der Zeitpunct des Sonnenstillstandes durch Hülfe einer Interpolations-Formel gefunden wird. Er giebt daselbst auch die Formeln für Größen von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. mit dem Gesetz ihrer Fortschreitung. Ihre Glieder sind anders geordnet, als die von den Formeln (15, 16.).

Die Abhandlung, De la méthode des différences et de la Sommation des Series par Walmesley, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, T. XIV. a. 1758, wird kaum etwas neues enthalten, es möchte denn in der Entwickelung der Formeln seyn. Die Formeln, Probl. II. III. stehen in Stirlings Abhandlung, propos. XX.

In Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, 3ten Th. Berlin 1772. sind Anmerkungen über das Einschalten befindlich, die insbesondere auf die schickliche Wahl der Formel zum Einschalten aufmerksam machen. Mit diesem Aufsatze verbinde man den über das Einschalten beym Gebrauche der Ephemeriden, im astron. Jahrbuche für 1776. In den Zusätzen zu den logar. und trigonom. Tabellen, Tab. 38. hat Lambert die obigen Formeln (8. 22. 23.) und noch eine dieser Gattung entwickelt.

Problems concerning Interpolations by E. Waring. Philos. Transact. vol. LXIX. (1779.), nr. VII. Die allgemeine Formel kommt mit der in (16.) der Gestalt nach überein. Waring giebt auch eine Methode an, eine angenommene Function für eine Folge von Größen so zu verändern, daß sie nicht allein die gegebenen Glieder, sondern auch die nach derselben berechneten richtig darstelle.

La Grange hat in den Memoiren der Pariser Academie für 1771. eine Abhandlung über das Einschalten bey Reihen geliefert, deren Unterschiede sehr ungleich sind,

bald zunehmen, bald abnehmen. Nachher hat ihn die Betrachtung des von Newton in der Schrift über die Differenzen-Methode, in dem dritten Satze gebrauchten Verfahrens zu einer Bemerkung veranlaßt, wodurch er seine in jener Abhandlung gebrauchte Methode noch sehr abgekürzt hat. Er theilt sein neues Verfahren in dem astronomischen Jahrbuche für das J. 1783. mit. Hier entwickelt er ein allgemeines Glied von der Form

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \text{etc.}$$

und zeigt sehr scharfsinnig, wie die unveränderlichen Coefficienten sowohl als die Winkel α, β, γ, etc. φ, χ, ψ, etc. bestimmt werden können. Man kommt dabey auf Glieder successiver Differenzenreihen, die rücklaufende Reihen ausmachen. Noch eine Abhandlung über das Einschalten von diesem großen Analysten ist in den Memoiren der Berliner Akademie für die Jahre 1792 und 1793 enthalten.

La Place hat sich auch mit der Theorie des Einschaltens beschäftigt, in einer Abhandlung über die Reihen, in den Pariser Memoiren für das J. 1779.

Was Prony und Charles in diesem Fache geleistet haben, ist oben schon angeführt worden.

* * *

Nach der Interpolations-Methode von Briggs, Newton Meth. diff. Prop. III. IV.), Cotes, Stirling (Prop. XX.), La Grange (Astron. Jahrb. 1783.) werden nicht die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen, wie in der hier (6.) zum Grunde gelegten Formel, sondern Glieder aus der Mitte dieser Reihen genommen, um daraus und aus der Stellenzahl eines Gliedes die Formel für dasselbe zusammen zu setzen. Man schreibe die Hauptreihe und die Differenzreihen folgendergestalt unter einander:

$$
\begin{array}{ccccccc}
{}'''A & {}''A & {}'A & A & A' & A'' & A''' \\
{}'''B & {}''B & {}'B & B' & B'' & B''' & \\
{}''C & {}'C & C & C' & C'' & & \\
{}''D & {}'D & D' & D'' & & & \\
{}'E & E & E' & & & & \\
{}'F & F' & & & & & \\
G & & & & & &
\end{array}
$$

wo die Differenzen unterhalb zwischen denjenigen Gliedern stehen, von welchen sie die Differenzen sind. Das Anfangsglied der Hauptreihe ist A, die Glieder, A', A'', A''', gehören zu den Stellen $+1$, $+2$, $+$; die linker Hand zu den Stellen -1, -2, -3; so daß A die Stelle 0 hat. Da aus der Hauptreihe hier eine ungerade Anzahl Glieder genommen ist, so enthalten die Differenzreihen mit einer ungeraden Ordnungszahl eine gerade Anzahl Glieder, und die mit einer geraden Ordnungszahl eine ungerade Anzahl Glieder. Man setze deshalb in jenen erstern $\frac{1}{2}({}'B + B') = B$; $\frac{1}{2}({}'D + D') = D$; $\frac{1}{2}({}'F + F') = F$, u. s. f. wenn aus der Hauptreihe noch mehr Glieder in ungerader Anzahl genommen wären. Nun werden in den Formeln der angeführten Verfasser die Interpolationsformeln aus den Gliedern B, C, D, E, F, G, und aus der Stellenzahl des einzuschaltenden Gliedes zusammengesetzt. Nach der Formel (6) werden dazu die Differenz-Glieder B', C', D'', E'', F''', G''', etc. genommen. Nun muß man diese Differenzglieder, B', C', D'', etc. in jene B, C, D, etc. verwandeln, welches leicht ist, und in der Formel (6.) ihre Werthe durch diese ausgedruckt, setzen, so erhält man die Formel

$$y = A + xB + \frac{x^2}{1.2} C + \frac{x(x^2-1)}{1.2.3} D + \frac{x^2(x^2-1)}{1.2.3.4} E$$
$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5} F + \frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5.6} G + \text{etc.}$$

Das ist die Formel in Newtons Meth. diff. Prop. III. Cas. 1.

Auf eine ähnliche Art hätte man zu verfahren, wenn zu der Hauptreihe eine gerade Anzahl Glieder genommen wäre. Man hätte aber das arithmetische Mittel von den beiden mittlern Gliedern in den Differenzreihen von einer geraden Ordnungszahl zu nehmen.

In unsern allgemeinen Formeln (8. 10. u. s. f.) mögen von den Abständen m, n, p, q, r, etc. der gegebenen Glieder von dem Anfangsgliede, welche man will, negativ genommen werden, daher man zu dem Anfangsgliede, welches man will, nehmen kann. Die Formel in (7.) enthält nur einen besondern Fall, der gebraucht ist, um die allgemeine Form eines einzuschaltenden Gliedes zu erhalten. Man hat nicht nöthig, in dem Falle, da das Anfangsglied in der Mitte zwischen den gegebenen Gliedern liegen soll, eine besondere Formel zu suchen.

Einschreibung der Figuren (Inscriptio) ist bey einer geradlinichten, wenn diese innerhalb einer gegebenen Figur, geradlinichten oder krummlinichten, so gezeichnet wird, daß sie mit jeder ihrer Ecken oder Winkelpuncte den Umfang dieser trifft; bey einer krummlinichten in einer geradlinichten, wenn sie alle Seiten dieser berührt. Die andere Figur ist um die eingeschriebene beschrieben (circumscripta).

Eine eingeschriebene Hyperbel ist diejenige, die ganz in dem Winkel ihrer Asymptoten enthalten ist, wie die gewöhnliche. Eine umschriebene Hyperbel ist ein Theil einer Linie der dritten Ordnung, welche ihre Asymptoten schneidet, und dieselben von dem Durchschnittspuncten an unendlich weit hinaus zwischen ihren Schenkeln begreift. Eine zwitterartige (ambigena) ist, welche mit einem Schenkel innerhalb, mit dem andern ausserhalb des Asymptoten-Winkels liegt.

Der Fall, der am meisten vorkommt, ist die Einschreibung und Umschreibung des Kreises und eines ordentlichen Vielecks in und um einander, s. Kreis und Vieleck.

Eintheilung, s. Theilung.

Elcatayn, die Benennung einer Rechnungsregel bey Lucas de Burgo, nämlich der Regel von zwey unrichtigen Annahmen. Das Wort verräth einen arabischen Ursprung. Kästners Gesch der Mathem I. S. 69.

Electio, s. Complexion.

Elemente, in der höhern Geometrie, sind die mit jeder, auch noch so kleinen, endlichen Größe unvergleichbaren Theile einer Linie, Fläche oder Körpers, was man allgemein bey jeder Art veränderlicher Größen Differentiale nennt. Auf diese bloß relativ denkbaren Theile kommt man nothwendig, wenn man eine Größe sich stetiger Weise verändern läßt. Die Unterschiede der veränderten Größen sind Theile des endlichen Ganzen, aber wegen der Bedingung der Stetigkeit in der Zunahme oder Abnahme können sie keine meßbare Größe haben. S. Differentiale, S. 815.

Der Ausdruck ist aus der Naturlehre entlehnt. Elemente der Körper heißen die uranfänglichen Bestandtheile derselben, es sey nun, daß man sie sinnlich darstellen zu können glaube, wie die ältern Philosophen, oder daß man ihnen eine für uns unsinnliche Beschaffenheit beylege. Freylich kann man nicht sagen, Gold bestehe aus goldnen Theilchen.

Elemente einer mathematischen Wissenschaft sind die Hauptsätze, aus welchen alle besondern Sätze hergeleitet werden, sie mögen von der leichtern oder schwerern Gattung seyn. Die Hauptsätze unterscheiden sich von den Folgesätzen durch die Verbindung mit einem Begriffe, der in den vorhergehenden Lehrsätzen noch nicht angewandt war. So lange in der Verkettung der Sätze bloß dieselbe Anzahl von Begriffen gebraucht wird, sind die Sätze Folgerungen aus den vorhergehenden, Umwandlungen gewisser Formen. So wie aber ein neuer Begriff eingeführt wird, so entsteht eine Abtheilung der Kette, oder ein neuer Zweig, und der Satz, oder die Sätze, die diesen Zweig anfangen, gehören zu den Elementen. z. B. in der Geometrie sey man mit den Lehrsätzen über Gleichheit der Dreyecke, Linien und

Winkel fertig, und führe nun die Parallelen ein, so hat man in den Sätzen, worin dieses geschieht, ein Element der Wissenschaft. Ein anderes Element giebt darauf die Betrachtung der Ähnlichkeit durch die Verbindung mit dem Begriffe der Proportionalität; dann die Verbindung eben dieses Begriffs mit den Parallelogrammen von einerley Höhe. In der höhern Geometrie sind die Differentialformeln von dem Flächenraume einer Figur, der Länge des Bogens, dem körperlichen Raum, der durch die Umdrehung um eine Axe erzeugt wird, Elemente dieses Theils der Wissenschaft. So auch die Verbindung eines Kreisbogens mit dem Bogen einer Curve zur Messung der Krümmung; die Verbindung einer geraden Linie mit demselben zur Bestimmung der Richtung, einer solchen oder eines hyperbolischen Zweiges zur Bestimmung der Lage oder Gestalt des unendlich entfernten Theils der Curve, wo dieses Statt hat.

Elemente in dem Lehrvortrage sind eine Sammlung der Grundlehren, mit den wichtigsten Folgesätzen, innerhalb eines gewissen vorgezeichneten Umfanges, mit mehrerer oder geringerer Ausführlichkeit, nach dem Bedürfniß der Leser, für welche der Verfasser seine Schrift bestimmt. Bey den Alten waren die Elemente der Geometrie und Arithmetik von Euklides ein allgemeines classisches Lehrbuch, die auch in der Urschrift den Titel, στοιχεια (Elemente) haben. Er selbst ward manchmal ὁ στοιχειωτης, elementarius, genannt. Was in seinem Werke bewiesen war, ward von andern Geometern als bekannt vorausgesetzt; was sich nicht darin fand, aber doch zur Ausführung einer Untersuchung nöthig war, ohne dazu unmittelbar zu gehören, ward unter der Rubrik, Lemma, eingeschaltet.

Wir können schwerlich ein solches allgemein angenommenes Lehrbuch der Mathematik erhalten. Die Wolfischen Anfangsgründe waren es in Deutschland beynahe eine gute Zeit hindurch. Allein die schnelle Zunahme der Wissenschaft und Verbesserung der Methoden verdrängen bald ein gutes Lehrbuch. Ein bleibendes wäre auch nur in der rei-

nen Mathematik zu hoffen. Es ist nicht so leicht zu verfassen, als es unsere rüstigen Schriftsteller glauben. Die Elemente muß man nicht bloß erlernt, sondern durch häufige eigene Anwendungen sich eigenthümlich gemacht haben. Wir werden mit einer Menge Lehrbücher überhäuft, ohne daß das Studium der Mathematik dadurch befördert würde. Man schreibt die Vorgänger nur ab, verändert die Anordnung, läßt hier etwas weg, setzt da hinzu, verbessert hier eine Kleinigkeit, verschlimmert da vielleicht mehr; man hält seine unausgebildeten, verworrnen Vorstellungen für helle Begriffe; man schmeichelt sich, daß man der Wissenschaft Dienste leisten möge, und es ist nur die Begierde als Schriftsteller sich zu zeigen, oder sich dadurch als Lehrer zu empfehlen. Aber auch geübten Gelehrten mag die Ausarbeitung eines Lehrbuches mißrathen. Sie können leicht versucht werden, hier ihre Gelehrsamkeit zu zeigen, oder etwas eigenthümliches anzubringen. Allein in einem Lehrbuche muß nichts als das schon bekannte vorgetragen werden, nur auf die möglich gründlichste, kürzeste und lichtvollste Art. Die Form macht das ganze Verdienst des Werks aus. Alles dieses mag auch auf die Lehrbücher in andern Wissenschaften angewandt werden.

Elimination (Eliminatio, exterminatio) in der Analysis ist das Verfahren, da eine Größe, welche in zwey oder mehrern, wesentlich verschiedenen und unabhängigen Gleichungen vorkommt, herausgeschafft wird, so daß dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den übrigen, frey von der weggeschafften Größe, erhalten werden.

1. Man habe zwey Gleichungen und in beiden dieselbe Größe z. Zu dieser haben die übrigen Größen eine bestimmte Relation; sie haben daher auch unter sich eine bestimmte Relation. Diese ist aber nur mittelbar gegeben, wegen der Einmischung der Größe z. Die neue Gleichung, welche durch die Wegschaffung derselben erhalten wird, stellt die Relation der übrigen unabhängig von z, und unmittelbar dar. Jede derselben wird nun durch die damit verbun-

denen bestimmt, und zwar so, daß ihre Relation gegen z den beiden zuerst gegebenen Gleichungen gemäß ist.

2. Überhaupt, wenn n Gleichungen gegeben werden, in deren jeder von den $n-1$ Größen, z, y, x, etc. wenigstens eine vorkommt, so wird durch die Wegschaffung einer dieser Größen eine neue Gleichung (eine Bedingungsgleichung) erhalten, in welcher die Relation der übrigen, in den gegebenen Gleichungen enthaltenen Größen gegen einander so bestimmt wird, daß jede derselben zu der weggeschafften Größe die Relation hat, die in jenen Gleichungen ausgedruckt ist.

3. Die Algebra gebraucht die Elimination zur Absonderung einer der unbekannten Größen von den übrigen. Sind n Gleichungen vorhanden, und n unbekannte Größen, so lassen sich $n-1$ derselben wegschaffen, und es geht eine bestimmte Gleichung zwischen der einen übrig gelassenen und den bekannten Größen hervor, die in den Gleichungen gegeben werden.

4. Die beiden Hauptfälle sind, erstlich, wenn alle unbekannte Größen bloß in der ersten Potenz vorhanden sind, zweytens, wenn von allen oder von einigen höhere Potenzen vorkommen.

I. Elimination der unbekannten Größen, die nur in der ersten Potenz vorhanden sind.

5. Für zwey unbekannte Größen, z, y, seyn die beiden Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } az + by = p.$$

$$\text{II. } Az + By = P.$$

Man multiplicire I. mit B, und II. mit b, und ziehe darauf I. von II. ab, so wird erhalten,

$$\text{III. } (Ab - aB)z = Pb - pB.$$

Auf ähnliche Art oder durch gegenseitige Vertauschung von A und a mit B und b, ist

$$\text{IV. } (Ba - bA)y = Pa - pA.$$

In der Gleichung für z stehen in dem Theile rechter Hand P und p für A und a in dem Theile linker Hand, so wie in der Gleichung für y jene für B und b stehen.

6. Die unbekannten Größen seyn z, y, x, und die drey Gleichungen:

$$\text{I. } az + by + cx = p$$
$$\text{II. } Az + By + Cx = P$$
$$\text{III. } \alpha z + \beta y + \gamma x = \pi$$

Man multiplicire I. durch $B\gamma - \beta C$: ferner II. durch $\beta c - b\gamma$; und III. durch $bC - Bc$, und addire die Producte, so hebt sich alles auf, was y und x enthält, und es ist

$$(aB\gamma - a\beta C + A\beta c - Ab\gamma + abC - aBc)z$$
$$=$$
$$pB\gamma - p\beta C + P\beta c - Pb\gamma + \pi bC - \pi Bc.$$

Verwechselt man gegenseitig a, A, α mit b, B, β, so erhält man die Gleichung für y. Vertauscht man gegenseitig a, A, α mit c, C, γ, so wird die Gleichung für x erhalten.

7. Das Gesetz der Formation ist ein combinatorisches. Man bezeichne die drey Alphabete, a, b, c; A, B, C; α, β, γ, durch die Zahlen 1, 2, 3; die Buchstaben durch die Stelle, indem a, A, α in die erste, b, B, β in die zweyte, c, C, γ, in die dritte Stelle gesetzt werden. Es ist sonach der Factor von $z = +123 - 132 + 231 - 213 + 312 - 321$. Das Product von z in diesen Factor wird auf dieselbe Art ausgedruckt, wenn p, P, π statt a, A, α gesetzt werden. Es sind hier alle Versetzungen der Zahlen 1, 2, 3, vorhanden. Das Vorzeichen der Glieder ist +, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl auf eine größere gerade oder null (wie in 123) ist, und —, wenn diese Anzahl ungerade ist. Oder es ist +, wenn die Ziffern aus der Reihe 12312 von der linken nach der rechten Hand genommen werden, —, wenn es auf die entgegengesetzte Art geschieht. Z. B. in + 231 sind zwey Folgen, 21, 31, in — 321 sind drey Folgen 32, 31, 21.

8. Für vier unbekannte Größen, z, y, x, u, werden die Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } az + by + cx + dw = p$$
$$\text{II. } Az + By + Cx + Dw = P$$
$$\text{III. } \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta w = \pi$$
$$\text{IV. } \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}w = \mathfrak{P},$$

es sollen die Gleichungen für z, y, x, w, jede besonders gefunden werden. Man bezeichne die für die Coefficienten gebrauchten Alphabete nach der Folge der Gleichungen durch 1, 2, 3, 4; die Buchstaben selbst durch ihre Stelle, wie in dem beygefügten Täflein, so daß z. B. 3412 das Product $\alpha\ \mathfrak{B}\ c\ D$ bedeutet. Man bezeichne nun die Gleichung für z abgekürzt durch $Mz = N$, so ist

1	a	b	c	d
2	A	B	C	D
3	α	β	γ	δ
4	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$

$$M =$$

$$+1234 - 1243 + 1342 - 1324 + 1423 - 1432$$
$$+2314 - 2341 + 2431 - 2413 + 2143 - 2134$$
$$+3412 - 3421 + 3124 - 3142 + 3241 - 3214$$
$$+4132 - 4123 + 4213 - 4231 + 4321 - 4312$$

Die Größe N entsteht aus M, wenn für a, A, α, $\mathfrak{A}$ folgweise p, P, π, $\mathfrak{P}$ gesetzt werden. Der Factor M enthält alle Versetzungen der Ziffern, 1, 2, 3, 4. Das Vorzeichen + wird gesetzt, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl nach einer größern gerade oder Null (in 1234) ist, das Vorzeichen —, wenn diese Anzahl ungerade ist. Z. B. in + 3412 sind 4 solche Folgen, 31, 32, 41, 42; in — 3142 sind 3 solche Folgen 31, 32, 42. Oder, das Vorzeichen einer Combination ist in der ersten und dritten Zeile +, wenn die drey letzten Ziffern derselben aus der Folge der Ziffern 1234123 von der linken nach der rechten Hand, mit Übergehung der ersten, genommen werden, und —, wenn es von der rechten nach der linken Hand geschieht; hingegen in der zweyten und vierten Zeile — in dem erstern Falle, + in dem zweyten.

Für die unbekannte Größe y wird die Gleichung erhalten, wenn die Buchstaben in der Ordnung, wie b, c, d, a, geschrieben werden, wie in dem beygefügten Täflein, so daß nun 3412 das Product β C d A bedeutet. Auch werden nun p, P, π, $\mathfrak{P}$ für b, B, β, $\mathfrak{B}$ gesetzt.

1	b	c	d	a
2	B	C	D	A
3	β	γ	δ	α
4	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{A}$

Die Rechnung, um die Gleichung für z zu finden, wird folgendergestalt gemacht. Man multiplicirt die Gleichung I. mit den sechs ersten Größen in M, nachdem sie durch a dividirt sind; die Gleichung II. mit den sechs folgenden, durch A vorher dividirten Größen; die Gleichung III. mit dem nächsten sechs folgenden, durch α dividirten; endlich die Gleichung IV. mit den letzten sechs, durch $\mathfrak{A}$ dividirten Größen. Hierauf addirt man die multiplicirten Gleichungen, das ist, die Theile auf jeder Seite, so hebt sich alles, was y, x, w enthält. Je zwey Partialproducte heben sich, die aus Gliedern in M entstehen, worin die dritte und vierte Ziffer dieselben sind, und die beiden ersten ihre Stellen vertauscht haben, wie 1234 und 2134.

9. Wenn in den Gleichungen das gegebene Glied, als p, P, π, $\mathfrak{P}$, fehlt, so ist

bey zwey Gleichungen

$$Ab = aB,$$

bey drey Gleichungen

$$aB\gamma + A\beta c + \alpha bC = a\beta C + Ab\gamma + \alpha Bc,$$

bey vier Gleichungen,

$$M = 0 \text{ aus } (8.).$$

Dieses sind Bedingungsgleichungen für die gegebenen Größen, wodurch die Relation derselben gegeben wird, so daß man sie nicht alle willkührlich annehmen darf.

II. Elimination der Größen, von welchen Potenzen vorhanden sind.

10. Die Methode, welche sich zur Elimination einer Größe y aus zwey Gleichungen zwischen dieser y und einer andern unbekannten x am ersten anbietet, ist folgende. Steigt sie in der einen Gleichung auf eine höhere Potenz als in der andern, so multiplicirt man die letztere Gleichung mit einer Potenz von y, so daß die höchste Potenz dieser Größe in beiden Gleichungen dieselbe sey. Durch die Multiplication jeder Gleichung mit dem Factor der höchsten Potenz in der andern wird der höchste Terminus in beiden einerley, und durch die Subtraction der einen Gleichung von der andern erhält man eine neue Gleichung, in welcher y auf einen niedrigern Grad steigt, als in der Gleichung von dem höhern Grade. So fährt man fort, bis daß man zwey Gleichungen von demselben Grade in Absicht auf y erhält. Aus diesen schafft man durch gehörige Multiplicationen sowohl den Terminus mit der höchsten Potenz von y, als denjenigen, der y nicht enthält, weg, so werden zwey neue Gleichungen erhalten, in welchen y einen niedrigern Grad hat, und auf diesem Wege gelangt man endlich zu zwey gleichen Werthen von y, die eine Gleichung für die zweyte unbekannte Größe und die bekannten geben, es sey denn, daß beide Werthe von y Null sind.

Hier folgen einige Beyspiele. I. Der Fall, da y in der einen Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, ist leicht, weil man nur den Werth von y aus dieser Gleichung in die andere zu setzen braucht.

II. Es seyn P, Q, R, p, q, r Functionen einer unbekannten x, und die beiden Gleichungen für x und y seyn:

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2 = 0$$
$$\text{II. } p + qy + ry^2 = 0.$$

Man multiplicire I. durch r; II. durch R, und ziehe das zweyte Product von dem ersten ab; dann multiplicire man I. durch p, und II. durch P, und ziehe das erste Product

von dem zweyten ab, worauf man den Unterschied bey der letztern Subtraction durch y dividire. So entstehen die Gleichungen,

$$\text{III. } (Pr - Rp) + (Qr - Rq)\, y = 0$$

$$\text{IV. } (Pq - Qp) + (Pr - Rp)\, y = 0.$$

Da aus diesen Gleichungen erhalten wird

$$y = \frac{Pr - Rp}{Rq - Qr};\quad y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp},$$

so ist

$$\text{V. } (Pr - Rp)^2 = (Qp - Pq)(Rq - Qr).$$

In dieser Gleichung ist die Relation zwischen x und den gegebenen Größen enthalten, wodurch diejenigen x bestimmt werden, welche in beiden Gleichungen, I. und II. einerley Werth von y geben.

12. Sind die Gleichungen zwischen den Größen x und y vom zweyten Grade, so übersteigt die Anzahl der Factoren x und y in keinem Gliede die Zahl 2. Daher sind R und r gegebene Größen, ohne x und y. Ferner hat Q die Form $A + Bx$, und P die Form $C + Dx + Ex^2$. Eben so hat q die Form $a + bx$, und p die Form $c + dx + ex^2$. Wenn diese Formen vollständig gegeben sind, so ist die höchste Potenz von x in $Pr - Rp$ die zweyte, in dem quadratischen Product die vierte; in $Qp - Pq$ die dritte, in $Rq - Qr$ die erste, in dem Producte beider die vierte. Daher ist IV. eine Gleichung für x vom vierten Grade. Da eine solche Gleichung entweder vier, oder zwey, oder gar keine, mögliche Wurzeln hat, so können die beiden Gleichungen I. und II. entweder auf viererley oder zweyerley Art, oder gar nicht neben einander bestehen, das ist, es giebt entweder vier Werthe von x (worunter auch gleiche seyn können), oder zwey, oder gar keine, für welche y in jenen beiden Gleichungen einerley Werth erhält. Setzt man die Wurzeln der Gleichung V. in die Formel für y, so werden dadurch die Werthe der in beiden gegebenen Gleichungen für jene Wurzeln übereinstimmenden y gefunden.

Setzt man die möglichen Werthe von x in eine der Gleichungen I. oder II. so erhält y für jeden dieser Werthe zwey Werthe, welche möglich sind, da y durch eine Gleichung vom ersten Grade gegeben wird. Hätte nun x vier Werthe, so bekäme y zwar acht Werthe, allein nur vier derselben kommen mit vier Werthen von y in der andern Gleichung überein. Denn y kann, vermöge der einfachen Gleichung, nur so viele mögliche Werthe erhalten, als x hat.

13. Es sey in der einen Gleichung die dritte Potenz von y nebst niedrigern vorhanden; in der andern sey die höchste Potenz von y die zweyte, wie folget.

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2$$

$$\text{II. } p + qy + ry^2 + sy^3 = 0,$$

wo P, Q, R, p, q, r eben die Bedeutung haben, wie vorher, und s auch eine Function von x allein ist. Man multiplicire I. durch sy, und II. durch R, ziehe darauf I. von II. ab, so ist

$$\text{III. } Rp + (Rq - Ps)y + (Rr - Qs)y^2 = 0.$$

Nun haben wir zwey Gleichungen, in deren jeder die höchste Potenz von y die zweyte ist. Man setze daher für die Functionen p, q, r in (11.) hier Rp; Rq — Ps; Rr — Qs; so erhält man

$$y = \frac{P(Rr - Qs) - R^2p}{R(Rq - Qs) - Q(Rr - Qs)},$$

$$y = \frac{QRp - P(Rq - Ps)}{P(Rr - Qs) - R^2p}.$$

Also ist

$$\text{IV. } (PRr - PQs - R^2p)^2 =$$
$$(QRp - PRq + P^2s)(R^2q - PRs - QRr + Q^2s).$$

Diese Gleichung entwickelt wird

$$P^3s^2 - Q^3ps + R^3p^2 + P^2(Rr^2 - 2Rqs - Qrs)$$
$$+ Q^2(Pqs + Rpr) + R^2(Pq^2 - 2Ppr - Qpq)$$
$$+ PQR(3ps - qr) = 0.$$

Zu den Combinationen sind von den Functionen P, Q, R je drey, und von den Functionen p, q, r, s je zwey genommen. Setzt man zu jeder die zugehörige Potenz von y, so bekommt jedes Glied die sechste Potenz von y als Factor.

14. Wenn in der Gleichung I. höchstens zwey unbekannte Größen in einander multiplicirt vorkommen, und in der Gleichung II. höchstens drey, so sind R, s gegebene Größen ohne x; und die andern Functionen haben folgende Formen:

$P = A + Bx + Cx^2$; $Q = D + Ex$;

$p = a + bx + cx^2 + dx^3$; $q = e + fx + gx^2$;

$r = h + ix$. Die Gleichung IV. für x steigt also auf den sechsten Grad, wenn nicht durch gewisse Bestimmungen der gegebenen Größen der Coefficient von x^6, oder die von x^6 und x^5, oder mehrerer Potenzen von oben herab Null sind.

Da eine Gleichung vom sechsten Grade entweder sechs, oder vier, oder zwey mögliche Wurzeln oder gar keine hat, so sind es sechs, oder vier, oder zwey Werthe von x, wodurch beide Gleichungen I. II. in den Werthen von y zusammentreffen, oder es werden diese für keinen Werth von x übereinstimmig.

Beyspiele von höhern Gleichungen sind in Eulers Introd. in Anal. Inf. T. II. cap. 19. anzutreffen.

15. Die Gleichungen zwischen x und y in (11, 13.) können auch als unabhängige, jede als eine zwischen zwey veränderlichen Größen, angesehen werden, nur daß alsdann, wenn x in beiden dieselbe Größe bedeutet, y nicht einerley Werth hat, außer für solche Werthe von x, welche die Wurzeln der durch die Elimination von y erhaltenen Endgleichung sind. So ist es auch mit den beiden Gleichungen in (5.) beschaffen, worin y nur für denjenigen Werth von z, der durch die Gleichung III. das. bestimmt ist, übereinstimmende Werthe erhält.

16. Die beiden Gleichungen in (5.) stellen jede eine gerade Linie mit den Coordinaten z und y vor. Für den Punct, wo sie sich schneiden, (wenn sie nämlich in einer Ebene liegen und nicht parallel sind; ist die Ordinate zu der Abscisse z gemeinschaftlich. Für jede andere Abscisse muß man die Ordinaten y in Gedanken oder durch eine Bezeichnung unterscheiden.

17. Die Gleichungen in (11.) gehören für zwey Linien der zweyten Ordnung. Hier sind vier Abscissen x möglich, für welche die Ordinaten y einerley Werth erhalten, oder die beiden Curven können sich in vier Puncten schneiden. So wie es aber auch nur zwey solche x geben kann, oder auch gar keine möglich sind, so giebt es Lagen dieser Curven, bey welchen sie sich nur in zwey Puncten oder gar nicht schneiden. Wo ein Durchschnittspunct gefunden ist, ist auch außer diesem noch einer vorhanden; zu drey Durchschnittspuncten kommt noch immer der vierte. Dieses wird durch die Gestalt dieser Curven gut erläutert.

18 Die erste Gleichung in (13.) ist für eine Linie der zweyten Ordnung, die zweyte für eine der dritten. Diese können sich also in sechs Puncten schneiden; es mögen aber der Durchschnitte auch nur vier, oder zwey vorhanden seyn, oder es mag keiner Statt haben.

19. Bey der hier vorgetragenen Methode der Elimination ist zu erinnern, daß die dadurch erhaltene Endgleichung für die eine der unbekannten, x, auf einen höhern Grad führen kann, als es nach der Beschaffenheit der Gleichungen seyn sollte, und daß sie alsdann auf den gehörigen, möglich niedrigsten Grad durch die Division mit einem Factor gebracht wird, der keine gemeinschaftliche y für die beiden Gleichungen enthält. In dem Beyspiele (13.) enthält die Endgleichung IV. den Factor R; bey höhern Gleichungen enthält sie einen mehr zusammengesetzten. Die beiden Gleichungen,

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 = 0,$$

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0,$$

führen zu einer Endgleichung mit dem Factor $Sp - Ps$ der keine gemeinschaftliche y liefert.

Dieses ist eine Unbequemlichkeit, weil man bey höhern Gleichungen den Factor der Endgleichung vielleicht nicht mag finden können.

20. Euler giebt a. a. O. noch ein Verfahren an, welches weniger Substitutionen bedarf, als das erstere bey höhern Gleichungen erfordert. Allein in dem Falle (13.) ist es doch viel beschwerlicher, als jenes. Um dieselbe Zeit, als seine Introduction herauskam, (1748.), trug er in den Abhandlungen der Berliner Akademie für das J. 1748. eine sinnreiche Methode der Elimination vor, besonders in der Absicht zu erweisen, daß zwey Linien, eine vom mten Grade, die andere vom nten Grade sich in nicht mehr als $m \times n$ Puncten schneiden können. Ich will sie hier an dem Beyspiele (13.) zeigen.

21. Es sey

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2 = 0,$$

$$\text{II. } p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

Wenn für einen gemeinschaftlichen Werth von x beide Gleichungen auch denselben Werth für y geben, so ist dieser letztere eine der beiden Wurzeln in I. oder eine der drey Wurzeln in II. Die beiden Wurzeln in I. seyn A, B, so ist entweder

$$p + qA + rA^2 + sA^3 = 0,$$

oder

$$p + qB + rB^2 + sB^3 = 0.$$

Das Product dieser Gleichungen ist Null, es mag A, oder B, oder jedes derselben der gemeinschaftliche Werth von y für dasselbe x seyn. Lassen sich aus diesem Producte die A und B herausschaffen, so erhält man eine Gleichung für x mittelst der Functionen P, Q, R, p, q, r, s.

Das Product ist

$$p^2 + pq(A+B) + pr(A^2+B^2) + ps(A^3+B^3)$$
$$+ q^2AB + qrAB(A+B) + qsAB(A^2+B^2),$$
$$+ r^2A^2B^2 + rsA^2B^2(A+B) + s^2A^3B^3.$$

Nun ist nach der Theorie der Gleichungen (s. Gleichung VI. 6.) und derer vom zweyten Grade insbesondere,

$$A + B = -\frac{Q}{R}; \quad AB = \frac{P}{R}.$$

Ferner ist

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB = \frac{Q^2 - 2PR}{RR},$$

und

$$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB\,(A+B) = \frac{-Q^3 + 3PQR}{R^3}.$$

(s. auch combinatorische Analysis, 53.). Also ist das Product der beiden Gleichungen für A und für B,

$$\begin{aligned} &= p^2 R^3 - pqQR^2 + prR\,(Q^2 - 2PR) \\ &+ ps\,(3PQR - Q^3) + q^2 PR^2 - qrPQR \\ &+ qs\,(PQ^2 - 2PR) + r^2 P^2 R - rsP^2 Q \\ &+ s^2 P^3 = 0 \end{aligned}$$

übereinstimmig mit der Gleichung in (13.). Nach diesem Verfahren geschieht nichts überflüssiges in der Rechnung, wie bey der erstern geschah, wo mehrere Glieder sich aufheben, und die ganze Gleichung darauf noch durch R dividirt werden muß.

22. Die Bedingungsgleichung für x kann auch durch ein Product der ner Gleichungen, wie I. dargestellt werden. Die drey Wurzeln der Gleichung II. für irgend ein x seyn a, b, c. Soll eine derselben auch eine Wurzel von I. seyn, so ist

entweder	$P + Qa + Raa = 0$
oder	$P + Qb + Rbb = 0$
oder	$P + Qc + Rcc = 0.$

Die Bedingungsgleichung für x ist das Product dieser drey Gleichungen, nämlich:

$$P^3 + P^2Q(a+b+c) + P^2R(a^2+b^2+c^2)$$
$$+ PQ^2(ab+ac+bc) + PR^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$+ PQR(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$$
$$+ Q^3abc + Q^2R(abc^2+acb^2+bca^2)$$
$$+ QR^2(ab^2c^2+ba^2c^2+ca^2b^2) + R^3a^2b^2c^2 = 0.$$

Zur Wegschaffung von a, b, c, dienen folgende Gleichungen:

1) $a+b+c = -\frac{r}{s}$; 2) $ab+ac+bc = \frac{q}{s}$;

3) $abc = -\frac{p}{s}$; (Gleichung III. 5, und VI. 6.)

Ferner

4) $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

5) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)$

6) $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b =$
$(ab+ac+bc)(a+b+c) - 3abc$

7) $abc^2+acb^2+bca^2 = abc(a+b+c)$

8) $ab^2c^2 + ba^2c^2 + ca^2b^2 = abc(bc+ac+ab)$.

Durch die Substitution dieser Werthe entsteht wiederum die in (13.) gefundene Gleichung.

23. Bald nach Euler hat Cramer (Analyse des lignes courbes, 1750.) die Methode, welche jener nur gleichsam angedeutet und in ein paar Beyspielen erläutert hatte, völlig ausgeführt und erwiesen, in dem zweyten Anhange des gedachten Werks, pag. 660—671.

24. Euler selbst hat das Verfahren noch etwas abgeändert, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1764. T. XX. Er zeigt es zuerst an folgenden beiden Gleichungen,

$$z^2 + Pz + Q = 0$$
$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0,$$

aus welchen z herausgeschafft werden soll. Die Buchstaben, P, Q, p, q, r, enthalten die übrigen unbekannten Größen ausser z. Damit beide Gleichungen mit einander zugleich bestehen können, müssen sie für einen gewissen Werth von z beide auf Null gebracht werden können, oder beide Gleichungen haben eine gemeinschaftliche Wurzel, oder auch mehrere. Eine solche Wurzel sey ω, so ist $z - \omega$ ein Factor von beiden Gleichungen, und es ist (Gleichung VI.)

$$z^2 + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$$

$$z^3 + pz^2 + qz + r = (z - \omega)(z^2 + az + b),$$

wo der zweyte Factor in dem Producte rechter Hand der Quotient des Werthes der Gleichung durch den Factor $z - \omega$ ist. Hieraus ergiebt sich nun, daß

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) =$$
$$(z^3 + pz^2 + qz + r)(z + \mathfrak{A})$$

ist.

Wird das Product auf beiden Seiten entwickelt, so sind die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z einander gleich, nämlich

I. $P + a = p + \mathfrak{A}$. II. $Q + Pa + b = q + p\mathfrak{A}$.
III. $Pb + Qa = q\mathfrak{A} + r$. IV. $Qb = r\mathfrak{A}$.

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich die drey einfachen Größenzeichen, $\mathfrak{A}$, a, b, wegschaffen, und es bleibt die Bedingungsgleichung für die Functionen P, Q, p, q, r übrig.

25. La Grange hat in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1769. T. XXV. zur Elimination einer unbekannten Größe aus zwey Gleichungen ein lehrreiches Verfahren angewandt. Die beiden Gleichungen sind

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \text{etc.} = 0.$$

erstere vom Grade m, diese vom Grade n.

Diese verwandelt er jede in ein Product aus zweytheiligen Factoren von der Form $1 - \alpha x$. Den Logarithmen des Products zerlegt er in einzelne Logarithmen, und diese entwickelt er in Reihen. Den Logarithmen des Aggregats von den Gliedern der Gleichung entwickelt er eben so in Reihen mit Zuziehung der Potenzirung einer Reihe, und findet dadurch ein Mittel, die Wurzeln der Gleichungen herauszuschaffen, wobey er auch den Satz gebraucht, daß die Bedingungsgleichung ein solches Product ist, wie oben in den Beyspielen gemacht worden. Die Bedingungs- oder Endgleichung ist der Form nach eine unendliche Reihe, von welcher er aber zeigt, daß alle Producte aus A, B, C, etc. die über n Dimensionen enthalten, darin wegfallen müssen, so wie auch alle Producte aus a, b, c, etc. von mehr als m Dimensionen. Auf welche Art aber sich dieselben heben, kann man nur in besondern Fällen einsehen.

26. Bezout hat in den Mém. de l'Acad. de Paris 1764. ein Mémoire sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues geliefert. Derselbe lehrt auch in seiner Théorie générale des équations algébriques, à Paris 1779, wie aus n Gleichungen, deren jede n unbekannte Größen enthält, eine Gleichung für jede dieser Größen, hergeleitet werde.

27. In der Vorrede zu Rüdigers Specimen analyticum de lineis secundi ordinis, Lipſ. 1784. hat Hindenburg Cramers und Bezouts Methoden zur Wegschaffung der unbekannten Größen aus Gleichungen vom ersten Grade vorgetragen, und aus der combinatorischen Analytik mit bequemen Abkürzungen bereichert.

28. Das erste Beyspiel einer Elimination möchte dasjenige seyn, welches sich in Fermats vermischten Werken (Opera varia, Tolosae 1679.) S. 58. findet. Nach unserer Bezeichnungsart sind die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x^3 + y^3 = p$$

$$\text{II. } ax + by + y^2 = q.$$

Aus diesen leitet Fermat, aber auf eine unbequeme, weitschweifige Art, einen Werth für y her. Diesen soll man in die Gleichung II. setzen, welches eine mühselige Rechnung erfordern würde. Fermat rühmt seine Methode als ein allgemeines Mittel, irrationale Ausdrücke aus einer Gleichung wegzuschaffen, wozu die symmetrica climatismus Vietaea nicht immer hinlänglich sey.

29. Newton giebt in der Arithm. univers. pag. 62. für vier Fälle die allgemeine Endgleichung, deren man sich in jedem besondern Falle bedienen kann. Seine Eliminations-Methode ist nicht so bequem als die hier in (10.) gewiesene.

30. Ein der Elimination entgegengesetztes Verfahren ist, wenn zu einer Gleichung für eine unbekannte x zwey Gleichungen zwischen dieser x und einer neben eingeführten, als unbekannt betrachteten Größe y, gesucht werden, so daß durch Elimination von y jene erstere für x entstehe. Oder man verbindet die gegebene Gleichung für x mit einer unbestimmten zwischen x und y, um eine Gleichung von einer gegebenen Form zu erhalten. Dergleichen Fälle kommen in der Algebra vor, s. Gleichung V. u. X.

Ellipse ist eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten u und y ist $cu - m^2 u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältnisses zweyer gegebenen Linien ist. Wenn $m = 1$ genommen wird, so verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis, dessen Durchmesser $= c$ ist.

Die Benennung Ellipse, (Verminderung), soll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate kleiner ist als das Rechteck von der Abscisse und einer constanten Linie. Nimmt man $m = 0$, so hat man die Parabel, an welcher das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Rechtecke von der Abscisse und einer Constante. Die Gleichung $cu + m^2u^2 = y^2$ gehört für die Hyperbel, woran das Quadrat der Ordinate größer ist, als das Rechteck cu.

Wie diese drey Linien durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, wird in dem Artikel, Kegel-

schnitt, gezeigt. Hier wird, was die Ellipse betrifft, alles aus ihrer Gleichung, als einer vollständigen Erklarung derselben, hergeleitet. Die Hülfssätze aus der Trigonometrie finden sich in dem Artikel, Goniometrie.

1. Für jedes u hat y zwey gleich große, entgegengesetzte Werthe. Die Axe der Abscissen u theilt die Ellipse in zwey gleiche und ähnliche Hälften, wie ein Durchmesser seinen Kreis.

Für $u = o$ ist $y = o$; und für $u = \frac{c}{mm}$ ist ebenfalls $y = o$. Man setze $\frac{c}{m^2} = 2a$, so ist . . . .

$m^2(2au - u^2) = y^2$. Die Ordinaten an der Ellipse verhalten sich wie die Ordinaten an einem Kreise, dessen Durchmesser 2a ist.

2. Man setze $u = a - x$, so ist

$$m^2(a^2 - x^2) = y^2,$$

und die größte Ordinate an der Ellipse ist $= ma$.

3. Man setze $b^2 = m^2a^2$, so ist

$$\frac{1}{m^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

Diese Gleichung ist jener ganz ähnlich. Der unveränderliche Factor des ersten Theils der einen ist das Reciproke des Factors der andern. Betrachtet man hier x als Ordinate, so ist ihr größter Werth $= \frac{b}{m} = a$.

4. Setzt man statt m dessen Werth, $\frac{b}{a}$, so ist

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2,$$

oder $$\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

5. Hieraus ergiebt sich eine Construction der Ellipse. Aus c als Mittelpunct (Tab. IX. Fig. 5.) beschreibe man mit den Halbmessern $AC = a$, $CD = b$, Kreise. Diese Halbmesser seyn senkrecht auf einander. Willkührlich ziehe man einen Halbmesser CQ in dem erstern Kreise, welcher den zweyten in R schneide. Durch Q ziehe man die senkrechte QP auf AC, und durch R die senkrechte RN auf CD. Der Durchschnitt jener mit der verlängerten NR in M ist ein Punct der Ellipse.

Denn man setze $CP = x$; $PM = y$, so ist $QP^2 = a^2 - x^2$; $RN^2 = b^2 - y^2$. Da $CQ : CR = PQ : PM$, so ist PM oder $y = \frac{CR \cdot PQ}{CQ}$, oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Desgleichen, da $CR : CQ = NR : CP$, so ist . . .

$CP = \frac{CQ \cdot NR}{CR}$, und $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$.

Diese Werthe von y^2 und x^2 sind diejenigen, welche sie nach (4) an der Ellipse haben.

Für dieselbe Abscisse CP verhält sich die Ordinate am Kreise zu der an der Ellipse, wie die große Axe zur kleinen.

Die hier gezeigte Construction einer Ellipse wird in der Astronomie gebraucht, die elliptische Projection eines Parallelkreises der Erde der Zeit proportional einzutheilen.

6. Die Durchmesser AB, DE der beiden Kreise heißen die Axen der Ellipse. Sie theilen die Ellipse in vier gleiche und ähnliche Quadranten. Die größere (Axis principalis, transversus, latus transversum) wird hinführo durch 2a bezeichnet werden, die kleinere (zweyte, Neben-Axe,) durch 2b. Beide mit einander verbunden heißen conjugirte Axen. Ihr Durchschnittspunct, C, heißt der Mittelpunct der Ellipse. Die Endpuncte der großen Axe heißen die Scheitelpuncte (vertices) der Ellipse.

7. Die dritte geometrische Proportionale zu der großen und kleinen Axe, oder $\frac{2b}{2a} \cdot 2b \left(= \frac{2bb}{a}\right)$, heißt der

Parameter (latus rectum) der Ellipse. Wenn diese Nebenlinie, das ist c, in die Gleichungen (4.) gesetzt wird, so ist

$$cu - \frac{c}{2a} u^2 = y^2$$

$$\frac{c}{2a} (a^2 - x^2) = y^2$$

$$\frac{2a}{c} (b^2 - y^2) = x^2.$$

Die Benennung, Parameter, hat Apollonius nicht. Er nennt diese Linie sowohl diejenige, in Beziehung auf welche (παρ' ἣν) die Ordinaten potenziren, als auch die senkrechte Seite. Die große Axe, oder überhaupt einen Durchmesser nennt er die schiefe Seite (πλαγια), das Rechteck von beiden die Figur ('ειδος) zu dem Durchmesser. Die Beywörter, senkrecht und schief, beziehen sich auf die Lage, welche beide Linien in der Zeichnung des Apollonius haben.

8. Aufg. Die Gleichung für die krumme Linie zu finden, auf welcher die Scheitelpuncte aller Dreyecke, wie FMG, FmG (Fig. 6.) liegen, worin die Seite FG gemeinschaftlich, und die Summe der beiden andern gleich groß ist, nämlich $FM + GM = Fm + Gm$.

Man halbire FG in C, und setze FC oder $GC = e$; ferner $FM + GM = 2a$; $FM = a + t$, also $GM = a - t$. Von M ziehe man die senkrechte MP auf FG, und setze $CP = x$, also $FP = e + x$; $GP = e - x$. Auch sey $PM = y$. Nun ist

$$(e + x)^2 + y^2 = (a + t)^2,$$
$$(e - x)^2 + y^2 = (a - t)^2.$$

Daraus wird durch Addition und durch Subtraction,

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + t^2$$
$$ex = at.$$

Durch Wegschaffung von t wird erhalten

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2},$$

oder

$$\frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2.$$

Der geometrische Ort des Punctes M, oder die gesuchte krumme Linie, ist eine Ellipse, deren große Axe $= 2a$, und deren kleine Axe $= 2\sqrt{(a^2 - e^2)}$ ist

9. Umgekehrt, wenn AMB eine halbe Ellipse ist, deren große Axe AB, halbe kleine CD, Mittelpunct, C, und wenn aus dem Endpuncte D an AB die Linien DF, DG gezogen werden, deren jede $=$ CA oder CB ist, so ist die Summe der Linien FM, GM, die von den Puncten F, G an irgend einen Punct der Ellipse gezogen werden, der großen Axe AB gleich.

Bew. Zufolge der Construction ist $CF^2 = a^2 - b^2$. Man setze $CF = e$, so ist $b^2 = a^2 - e^2$. Da $FM^2 = (e + x)^2 + y^2$, und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ist, so wird

$$FM^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2,$$

$$FM = a + \frac{ex}{a}.$$

Eben so wird

$$GM = a - \frac{ex}{a},$$

also $FM + GM = 2a$.

10. Die beiden merkwürdigen Puncte, F, G, heißen bey den alten Geometern Puncta ex comparatione, (τα γενομενα 'εκ της παραβολης σημεια) bey den Neuern, Foci, auch Umbilici, Brennpuncte, wegen einer Eigenschaft, die unten vorkommen wird. Apollonius trägt den hier in (9.) erwiesenen Satz erst im dritten Buche,

52sten Satze, vor. Er erweiset ihn aus Betrachtungen über die berührenden Linien, und ihre Verbindungen unter sich und mit andern. Der nächste Satz dazu ist der, daß die Linien, welche von den Vergleichungspuncten an einen Berührungspunct gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. Er nennt sie Vergleichungs- oder vielmehr Gleichheits-Puncte, weil er setzt, daß (Fig. 6.) $AF \times FB = AG \times GB = CD^2$ ist, oder gleich dem vierten Theil der Figur zu der Axe, wie er es ausdrückt. Man sieht nicht, wie er auf diese Puncte gekommen seyn mag. Die Gleichung für die Coordinaten auf den Axen bietet keine Veranlassung dazu dar. Die leichteste möchte die in (8.) vorgetragene Aufgabe seyn.

11. Die Ordinate in den Brennpuncten ist dem halben Parameter gleich, oder die Doppelordinate dem ganzen Parameter. Denn es ist in denselben $x = \pm e$, also $a^2 - x^2 = b^2$, und $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$; $y = \frac{b^2}{a}$. Das ist auch der Werth des halben Parameters (7.).

12. Es sey $FM = z$, $AFM = \varphi$, so ist
I. $aa + ex = az$; II. $aa - ee = (a - e \cos \varphi) z$.

Die erste Gleichung ist dieselbe mit der Gleichung, $ex = at$ in (8.), da $t = z - a$ ist. Hieraus folgt die zweyte, wegen $x = z \cos \varphi - e$. In der Astronomie wird die letztere vorzüglich gebraucht. Die Winkel an F sind in dieser Formel von dem entferntern Scheitelpuncte A an genommen. Werden sie von dem nächsten Scheitelpuncte B an gerechnet, so ist $aa - ee = (a + e \cos \varphi) z$, wo $BFM = \varphi$ ist.

13. Es sey CH die dritte Proportionale zu CG und CA, so ist $CA : CG = HP : GM$.

Bew. Man setze nun $GM = z$, so ist $t = a - z$, und $ex = aa - az$, oder $az = aa - ex$. Es sey $HP = v$, und $ev = aa - ex$, so ist $aa = e(v + x)$, oder $CA^2 = CG \times CH$, das ist, CH die dritte Propor-

tionallinie zu CG und CA. Umgekehrt, folgt aus dieser Annahme das Verhältniß von HP : GM.

Die Linie GH ist die dritte Proportionale zu der GC und der halben kleinen Axe CD; der Abstand AH die vierte Proportionale zu CG, GA, CA.

Man kann sich des gefundenen Verhältnisses bedienen, um mit Hülfe eines Proportionalzirkels eine Ellipse zu zeichnen.

14. Innerhalb des rechten Winkels ACE (Fig. 7.) ist eine gerade Linie von bestimmter Länge FG, gelegt, und auf ihrer Verlängerung ist ein Punct M gegeben; es wird die Beschaffenheit der krummen Linie gesucht, welche der Punct M beschreibt, indem der Punct F von A nach C, so wie G von C nach E hin geschoben wird, und diese Bewegung der beiden Puncte rückwärts oder vorwärts auch in den drey andern rechten Winkeln um C geschieht.

Man ziehe MP senkrecht auf CA, und MN parallel mit derselben, so ist MG : FG = MN : FC, und MF : FG = MP : CG. Es sey GM = a; FM = b: CP = x; MP = y, so ist $FC = \frac{a-b}{a} x$; $CG = \frac{a-b}{b} y$. Da $FG^2 = FC^2 + CG^2$, so ist $(a-b)^2 = (a-b)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$. Daraus wird $\frac{bb}{aa}(aa - xx) = yy$, eine Gleichung für die Ellipse, deren halbe große Axe = a = GM (= CA), und halbe kleine Axe = b = FM (= CD) ist.

Wird der Punct M zwischen F und G genommen, so wird von demselben ebenfalls eine Ellipse beschrieben.

Anstatt des rechten Winkels ACE mag auch ein schiefer genommen werden, s. Newtoni Arithm. univ. Quaest. geom. probl. 35. Man kann auch die gegebene MF unter einem rechten Winkel in F auf FG setzen, eb. das. probl. 36.

Wenn zwey Winkel ACB, acb um ihre fixen Scheitelpuncte, C, c, gedreht werden, und der Durchschnitt

der Schenkel CA, ca auf einer geraden Linie fortrückt, so beschreibt der Durchschnitt der Schenkel CB, cb eine Ellipse oder auch einen andern Kegelschnitt. Newtoni Princip. Phil. nat. L. I. Lemma 21. Maclaurin Geometria organica. Lond. 1720. Prop. 1. Man hat noch mehrere dergleichen Entstehungsarten einer Ellipse oder auch anderer Kegelschnitte erdacht, s. van Schooten exercit. mathem. L. IV.

15. Es sey (Fig. 8.) AB die große Axe einer Ellipse, C ihr Mittelpunct, DE und FG seyn zwey durch den Mittelpunct C in in ihr gezogene gerade Linien, und MN, welche DE in P schneidet, der FG parallel. Wenn tang ACD $\times$ tang BCG $= \frac{bb}{aa}$ ist, so wird jede mit FG parallele von DE halbirt.

Bew. Die halbe große Axe AC ist $= a$; die halbe kleine $aC = b$, $CP = x$: $PM = y$, der W. $ACD = \varphi$, der W. $BCG = \omega$. Von M ziehe man MQ senkrecht auf AB, und durch P die parallele PR mit AC, wie auch die senkrechte PS auf dieselbe. Es ist der W. $MPR = GC$ (wegen der parallelen MP, GC, und PR, CB), also $MPR = \omega$. Daher ist $MR = y \sin \omega$; $PR = y \cos \omega$. Ferner $QR = PS = x \sin \varphi$; $CS = x \cos \varphi$. Dadurch ist $MQ = x \sin \varphi + y \sin \omega$, und $CQ = x \cos \varphi - y \cos \omega$. Nun ist

$$a^2b^2 = b^2 . CQ^2 + a^2 . MQ^2,$$

also

$$a^2b^2 = b^2 (x^2 \cos \varphi^2 - 2xy \cos \varphi \cos \omega + y^2 \cos \omega^2)$$
$$+ a^2 (x^2 \sin \varphi^2 + 2xy \sin \varphi \sin \omega + y^2 \sin \omega^2).$$

Sollen nun in dieser Gleichung für jedes x die Werthe von y gleich und entgegengesetzt seyn, so müssen diejenigen Glieder sich aufheben, welche y enthalten, das ist, es muß seyn

$$2b^2 xy \cos \varphi . \cos \omega = 2a^2 xy \sin \varphi . \sin \omega.$$

oder $b^2 \cos \varphi . \cos \omega = a^2 \sin \varphi . \sin \omega$,

folglich $\frac{b^2}{a^2} = \tan \varphi . \tan . \omega$.

16. Zwey Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ und ω mit der großen Axe, der Bedingung in (15.) gemäß, gezogen sind, heißen conjugirte Durchmesser. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel gezogen sind. Die Gleichung zwischen den Coordinaten CP und PM oder PN ist

$$a^2b^2 = (a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2)x^2$$
$$+ (a^2 \sin \omega^2 + b^2 \cos \omega^2)y^2.$$

17. Es sey $CD = f$; $CG = g$, so ist

$$\frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2) = y^2,$$

$$\frac{f^2}{g^2}(g^2 - y^2) = x^2.$$

Bew. Man setze zur Abkürzung in der Gleichung (16.) den Coefficienten von $x^2 = A$, den von $y^2 = B$, so daß $a^2b^2 = Ax^2 + By^2$. In den Endpuncten, D, E, ist $y = 0$, und $x = f$, also ist $a^2b^2 = Af^2$. In dem Mittelpuncte C ist $x = 0$, und $y = g$, also $a^2b^2 = Bg^2$. Setzt man nun in jener Gleichung für A und B ihre Werthe aus diesen particularen Gleichungen, so ist

$$a^2b^2 = a^2b^2\left(\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}\right),$$

$$\text{also} \quad 1 = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}.$$

Daraus ergeben sich sogleich die aufgestellten Gleichungen, welche den zum Grunde gelegten (4.) ganz ähnlich sind. Aus ihnen folgt

$$f^2g^2 = g^2x^2 + f^2y^2.$$

18. Man setze $DP = u$, also $CP = f - u$. Setzt man diesen Werth für x, so ist $f^2 - x^2 = 2fu - u^2$, und

$$\frac{2g^2}{f}u - \frac{g^2}{f^2}u^2 = y.$$

Diese Gleichung hat ganz dieselbe Form, als die ursprünglich für die Ellipse angesetzte, welche daher für jedes Paar conjugirter Durchmesser gilt, wenn die Abscissen auf dem einen von dem Scheitelpuncte an genommen, und die Ordinaten dem andern parallel gezogen werden.

Auch heißt $\frac{2g^2}{f}$ der Parameter zu dem Durchmesser $2f$, als die dritte Proportionale zu $2f$ und $2g$.

19. Es ist

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\sin(\varphi+\omega)}a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi.\sin(\varphi+\omega)}b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\sin(\varphi+\omega)}a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega.\sin(\varphi+\omega)}b^2.$$

Bew. Es sey $a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2 = A$, so ist aus (16.) $a^2b^2 = Af^2$. Nun ist $b^2 = a^2\tang\varphi.\tang\omega$ aus (15.), oder $b^2 = a^2.\frac{\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}$, also

$$a^2\sin\varphi^2 = b^2.\frac{\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\omega}{\sin\omega}, \text{ und}$$

$$A = b^2.\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}(\sin\varphi.\cos\omega + \cos\varphi.\sin\omega)$$

$$= b^2.\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}.\sin(\varphi+\omega).$$ Folglich ist

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\sin(\varphi+\omega)}a^2.$$ Setzt man für a^2 seinen Werth durch b^2, so wird der zweyte Werth von f^2 erhalten.

Die Werthe von g^2 entstehen aus denen von f^2, wenn φ und ω mit einander vertauscht werden, welches nichts anders ist, als die Durchmesser DE und FG vertauschen, wobey statt des W. ACD der W. BCG, und statt dieses jener genommen wird.

20. Es ist $\frac{f^2}{g^2} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$, aus (19.).

21. Man ziehe Ee und Gg senkrecht auf AB, so ist Ee : Gg = Cg : Ce, und die Dreyecke ECe, GCg sind gleich.

Bew. Da $f^2 \sin 2\varphi = g^2 \sin 2\omega$, so ist $f^2 \sin\varphi . \cos\varphi = g^2 \sin\omega . \cos\omega$, folglich $f \sin\varphi : g \sin\omega = g \cos\omega : f \cos\varphi$. Dieses ist die angegebene Proportion. Der zweyte Theil des Satzes folgt daher aus der Lehre von den Dreyecken; s. Dreyeck, 30.

Der Satz gilt für je zwey Paare von Durchmessern, s. unten 37.

22. Es ist $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} . \frac{a}{b}$ und $\frac{f}{g} < \frac{a}{b}$.

Der erste Satz aus (19.). Der zweyte erhellt folgendermaßen. Da $\frac{b^2}{a^2} = \tang\varphi . \tang\omega = \frac{\tang\omega}{\tang(90^\circ - \varphi)}$, so ist $90^\circ - \varphi > \omega$, und $\sin(90^\circ - \varphi) > \sin\omega$, oder $\cos\varphi > \sin\omega$, also $\frac{\sin\omega}{\cos\varphi} < 1$. In dem Falle, daß $f < g$ ist, ist der zweyte Satz für sich klar.

Apollonius beweiset die zweyte Formel in seinem Werke von den Kegelschnitten, B. VII. S. 24.

23. Es ist $fg \sin(\varphi + \omega) = ab$, oder, das Parallelogramm, welches von zwey conjugirten Durchmessern mit dem ihnen zugehörigen Winkel gemacht wird, ist dem Rechteck von den beiden Axen gleich. Der Winkel $\varphi + \omega$ ist der W. DCG der Durchmesser, innerhalb dessen die kleine Axe liegt.

Apollonius hat den Satz gefunden, Conicor. L. VII. prop. 31.

24. Es ist $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$.

Bew. Aus (19.) ist $f^2 + g^2 =$

$\frac{a^2}{\sin(\varphi+\omega)}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\omega}\right)$. Der zweyte Factor ist $\frac{\sin\omega.\cos\omega+\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos\varphi.\cos\omega}=$

$\frac{\sin 2\omega+\sin 2\varphi}{2\cos\varphi.\cos\omega}=\frac{\sin(\varphi+\omega).\cos(\varphi-\omega)}{\cos\varphi.\cos\omega}$

$=\sin(\varphi+\omega)\left(1+\frac{\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}\right)=$

$\sin(\varphi+\omega)(1+\tang\varphi.\tang\omega)=\sin(\varphi+\omega)$ $(1+\frac{b^2}{a^2})$. Setzt man dazu den ersten Factor des Werths von f^2+g^2, so erhält man die Formel des Satzes.

Den merkwürdigen Satz hat schon Apollonius, Conicorum L. VII. prop. 12.

25. Es ist $f+g>a+b$, und $f-g<a-b$.

Bew. Denn $f^2+g^2\pm 2fg\sin(\varphi+\omega)=a^2+b^2\pm 2ab$, aus (23 u. 24.), und $f^2+g^2\pm 2fg=(f\pm g)^2$. Nun ist $fg>fg\sin(\varphi+\omega)$, also erhellt der Satz. Bey Apollonius L. VII. prop. 26. 27.

26. Der Unterschied zwischen $f^2+g^2+2fg\times\sin(\varphi+\omega)$, das ist $(a+b)^2$ und $(f+g)^2$ ist $=$ $2fg(1-\sin(\varphi+\omega))=2ab\left(\frac{1}{\sin(\varphi+\omega)}-1\right)$. Er ist am größten, wenn $\sin(\varphi+\omega)$ am kleinsten ist, und dieser Sinus ist am kleinsten, wenn $\varphi=\omega$, das ist, wenn $f=g$ ist.

Bew. Da $\frac{b^2}{a^2}=\tang\varphi.\tang\omega$ ist, und

$\tang(\varphi+\omega)=\frac{\tang\varphi+\tang\omega}{1-\tang\varphi.\tang\omega}$, so ist

$\tang(\varphi+\omega)=\frac{a^2}{a^2-b^2}(\tang\varphi+\tang\omega)$. Nun

ist, wenn das Product zweyer veränderlichen Größen eine gegebene Größe ist, ihre Summe ein Kleinstes, wenn beide gleich groß sind (Größtes u. Kleinstes.). Also ist $\tang\varphi + \tang\omega$ ein Kleinstes, wenn $\varphi = \omega$ genommen wird. Alsdann ist $\tang(\varphi + \omega)$ ein Kleinstes, daher auch $\sin(\varphi + \omega)$. Folglich ist der vorher gesuchte Unterschied ein Größtes.

Daher ist nun auch der Unterschied zwischen der Summe zweyer conjugirten Durchmesser und der Summe der beiden Axen am größten, wenn die beiden Durchmesser gleich groß sind. Und die Summe zweyer gleichen conjugirten Durchmesser ist größer als die Summe je zweyer andern conjugirten. Apollonius L. VII. prop. 26.

27. Es ist $\frac{f^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}$,

oder $\frac{f^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}$.

Bew. Aus (19.) ist $\frac{f^2}{a^2} \cos\varphi = \frac{\sin\omega}{\sin(\varphi + \omega)}$.

Der umgekehrte Bruch ist $\sin\varphi . \cot\omega + \cos\varphi = \frac{a^2}{b^2} \tang\varphi . \sin\varphi + \cos\varphi = \frac{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}{b^2 \cos\varphi}$.

Die Umkehrung dieses Bruches giebt den Werth von $\frac{f^2}{a^2} \cos\varphi$, also die erste Formel des Satzes.

In derselben vertausche man $\sin\varphi^2$ mit $1 - \cos\varphi^2$, und $2\cos\varphi^2$ mit $1 + \cos 2\varphi$, so geht die zweyte Formel hervor.

Diese Formeln unterscheiden sich von denen in (19.) dadurch, daß der Durchmesser darin bloß durch den Winkel φ, den er mit der großen Axe macht, nebst a und b ausgedruckt wird.

Die Formeln sind in der mathematischen Geographie anwendbar.

28. Die beiden conjugirten Durchmesser, welche einander gleich sind, machen mit der Axe den Winkel, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist. Daher sind sie parallel mit den Chorden Aa und Ba (Fig. 8.), durch die Endpuncte der großen Axe, und einen Endpunct der kleinen.

29. Di durch den Endpunct D eines Durchmessers DE (Fig.) mit dem zugeordneten FG gezogene parallele TDt ist eine berührende in dem Puncte D.

Denn wenn sie die Ellipse schnitte, so würde der Durchmesser, welcher die auf ihr enthaltene Chorde halbirte, der zu FG gehörige Durchmesser seyn, nicht DE, (16.)

Oder: die mit FG parallelen Chorden sind Theile von schneidenden Linien, welche von DE halbirt werden. In dem Endpuncte D fallen die Durchschnittspuncte mit der Ellipse in einen einzigen Punct zusammen, und die durch D mit FG parallele hat nur diesen Punct mit der Ellipse gemein, daher sie eine berührende ist.

30. Es schneide TDt (Fig. 9.) die verlängerte große Axe in T, und von D werde DP senkrecht auf AB gezogen, es ist CP : CA = CA : CT.

Bew. Denn $CT = \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin \omega} f$, und $CP = f \cos\varphi$, also $CT . CP = \frac{\cos\varphi . \sin(\varphi + \omega)}{\sin \omega} f^2 = aa$, aus (19.).

31. Hieraus folgt CP : PA = CA : AT, und hieraus CP : PA = BP : PT, so daß der Punct P sowohl CA als BT in demselben Verhältnisse eintheilt.

Zu vergleichen, berührende Linie, 8, 18. In Apollonii Conic. L. I. prop. 37, ist der Satz (30.) allgemeiner vorgetragen, daß nämlich AB irgend ein Durchmesser seyn mag, nur daß DP mit dem zu AB gehörigen parallel sey. S. unten 38.

32. Es sey DQ (Fig. 9). auf die berührende TDt in D senkrecht, und $\frac{aa - bb}{aa + bb} = m$, so ist tang CDQ $= \frac{m \sin 2\varphi}{1 - m \cos 2\varphi}$.

Bew. Da DCT $= \varphi$, und DQT $= 90^\circ - \omega$, so ist CDQ $= 90^\circ - \omega - \varphi$, also tang CDQ $=$ cot $(\omega + \varphi)$. Ferner ist

$$\tan(\varphi + \omega) = \frac{\tan\varphi + \tan\omega}{1 - \tan\varphi \,.\, \tan\omega},$$

$$b^2 = a^2 \tan\varphi \,.\, \tan\omega,$$

$$\tan\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}; \quad \cot\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

Durch die Substitutionen mittelst der drey letztern Gleichungen wird

$$\tan(\varphi + \omega) = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}.$$

Der umgekehrte Bruch ist cot $(\varphi + \omega) =$ tang CDQ. Dividirt man Zähler und Nenner durch $aa + bb$, und gebraucht die abgekürzte Bezeichnung, m, so hat man die Formel des Satzes.

In der Hypothese elliptischer Meridiane ist CDQ der Winkel der Richtung der Schwere mit dem Halbmesser der Erde an einem Orte.

33. Es ist (Fig 9.) PQ $= f \sin\varphi \,.\, \tan\omega = \frac{bb}{aa} \times$ CP. Und CQ $= \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ CP $= \frac{e^2}{a^2}$ CP.

Bew. Denn PQ $=$ DP. tang PDQ; DP $= f \sin\varphi$; und W. PDQ $=$ PTD $= \omega$. Aus dem Werthe von PQ folgt sogleich der Werth von CQ.

34. Es ist DQ $= \frac{f \sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f \sin(\varphi + \omega)}$ (aus 19.).

35. Man ziehe (Fig. 9.) QS senkrecht auf DC, so ist $CD \times DS = bb$.

Denn $DS = DQ. \cos QDS = DQ. \sin (\varphi + \omega)$ $= \frac{bb}{f}$, aus (34.)

36. Es seyn wiederum DE, FG (Fig. 10.) zwey conjugirte Durchmesser. Anstatt sie auf die beiden Axen zu beziehen, nehme man irgend ein Paar anderer conjugirter Durchmesser HI, KL, deren Winkel ICK ist. Es ist

I. $CH^2 \times \sin HCD \times \sin HCG = CK^2 \times \sin KCD \times \sin KCG.$

II. $CH^2 . \sin HCK . \sin HCG = CD^2 . \sin DCG \times \sin DCK.$

III. $CD^2 . \sin DCH . \sin DCK = CG^2 . \sin GCH \times \sin GCK.$

Bew. Man setze $ICK = \alpha$, $HCD = \varphi$; $ICG = \omega$; ferner $DC = f$, $CG = g$; $HC = h$, $CK = k$. Dann ziehe man durch irgend einen Punct M des Umfanges MP parallel mit CG, als Ordinate auf dem Durchmesser DE; und MQ parallel mit CK, als Ordinate auf HI; ferner PR parallel mit HC; PS parallel mit CK, und setze $CP = x$; $PM = y$. Nun ist

$$\frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} = MR; \quad \frac{y \sin (\alpha - \omega)}{\sin \alpha} = PR;$$

$$\frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha} = PS; \quad \frac{x \sin (\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} = CS,$$

also

$$MQ = \frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} + \frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha},$$

$$CQ = \frac{x \sin (\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{y \sin (\alpha - \omega)}{\sin \alpha}.$$

Da die Ordinaten MQ mit dem conjugirten Durchmesser parallel sind, so ist (17.)

$$h^2 k^2 = k^2 . CQ^2 + h^2 . QM^2.$$

Daraus ist

$$h^2 k^2 \sin \alpha^2 = k^2 (x^2 \sin (\alpha + \varphi)^2 - 2xy \sin (\alpha + \varphi). \sin (\alpha - \omega) + y^2 \sin (\alpha - \omega)^2).$$
$$+ h^2 (x^2 \sin \varphi^2 + 2xy \sin \varphi. \sin \omega + y^2 \sin \omega^2).$$

Weil die Ordinaten MP mit dem conjugirten Durchmesser zu DE parallel sind, so hat y immer zwey gleiche entgegengesetzte Werthe, also ist

$$h^2 \sin \varphi . \sin \omega = k^2 \sin (\alpha + \varphi) . \sin (\alpha - \omega).$$

Dies ist die erste Formel des Satzes.

Die Gleichung zwischen x und y ist nun

$$h^2 k^2 \sin \alpha^2 = (h^2 \sin \varphi^2 + k^2 \sin (\alpha + \varphi)^2) x^2 + (h^2 \sin \omega^2 + k^2 \sin (\alpha - \omega^2)) y^2.$$

Für $y = 0$ ist $x = f$, und

$$h^2 k^2 \sin \alpha^2 = (h^2 \sin \varphi^2 + k^2 \sin (\alpha + \varphi)^2) f^2.$$

Setzt man in dem zweyten Theile für h^2 seinen Werth durch k^2, so ist

$$h^2 \sin \alpha^2 = \left(\frac{\sin (\alpha + \varphi) . \sin (\alpha - \omega) . \sin \varphi}{\sin \omega} + \sin (\alpha + \varphi)^2 \right) f^2.$$

Entwickelt man die Sinus der zusammengesetzten Winkel, so wird der Factor von $f^2 =$

$$\frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \omega} (\sin \alpha . \cos \omega . \sin \varphi + \sin \alpha . \sin \omega . \cos \varphi)$$
$$= \frac{\sin \alpha . \sin (\alpha + \varphi) . \sin (\varphi + \omega)}{\sin \omega}.$$

Solchergestalt ist

$$h^2 \sin \alpha . \sin \omega = f^2 \sin (\varphi + \omega) . \sin (\alpha + \varphi),$$

welches die zweyte Formel des Satzes ist.

Die dritte Formel ist der ersten ganz ähnlich, indem nur die conjugirten Durchmesser HI, KL mit den Durchmessern, DE, FG, vertauscht sind.

37. Man ziehe (Fig. 10.) durch die Endpuncte E, G, der beiden Durchmesser, DE, FG, die mit dem zu

HI conjugirten Durchmesser KL parallelen Ee, Gg an CI: es ist Ee : Gg = Cg : Ce, und die Dreyecke ECe, GCg sind sich gleich.

Bew. Es ist

$$CE : Ee = \sin CeE : \sin ECe$$
$$CE : Ce = \sin CeE : \sin CEe$$
und $$Gg : CG = \sin GCg : \sin CgG$$
$$Cg : CG = \sin CGg : \sin CgG.$$

Da W. ECe = DCH; CEe = DCK; CGg = GCK, und sin CeE = sin CgG; sin GCg = sin GCH ist, so entsteht durch Zusammensetzung der Verhältnisse rechter Hand das Verhältniß sin GCH × sin GCK : sin DCH × sin DCK. Dieses ist gleich dem Verhältnisse $CD^2 : CG^2$ nach (36. III.), oder dem $CE^2 : CG^2$. Aus den Verhältnissen linker Hand entsteht das zusammengesetzte $CE^2 \times Gg \times Cg : CG^2 \times Ee \times Ce$. Da dieses dem $CE^2 : CG^2$ gleich ist, so ist das Verhältniß $Gg \times Cg : Ee \times Ce = 1 : 1$, oder es ist Ee : Gg = Cg : Ce.

38. Es sey (Fig. 11.) HI irgend ein Durchmesser, und DT eine berührende in D, welche die verlängerte IH in T schneide, Man ziehe DP parallel mit dem zu HI conjugirten Durchmesser KL, so ist CP : CH = CH : CT.

Bew. Durch D ziehe man den Durchmesser DE, und den zugeordneten FG, so ist DT parallel mit FG. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen ist DC = f; HC = h; W. HCD = φ; ICG = DTC = ω; CPD = α; CDP = $180° - (\alpha + \varphi)$; CDT = $180° - (\varphi + \omega)$; also $CP = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha} CD$; $CT = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\omega} CD$, daher $CP . CT = \frac{\sin(\alpha+\varphi) . \sin(\varphi+\omega)}{\sin\alpha . \sin\omega} \times CD^2$, also aus (36. II.) $CP . CT = CH^2$. Hieraus ist CP : PH = IP : PT, und IP : PH = IT : TH.

39. Die verlängerte Ordinate schneide die Ellipse in d, und die berührende daselbst die verlängerte CH in T. Es

werde an d der Halbmesser Cd gezogen, so wird für die berührende in d eben so erwiesen, daß CP : CH = CH : CT'. Daher ist CT = CT'. Oder, der Durchschnitt T der berührenden in zwey Puncten, D, d, liegt mit dem Mittelpuncte der Ellipse, und dem Mittelpuncte der Chorde Dd in gerader Linie. (Apollon. Conic. II. 29.)

40. Die berührende in D (Fig. 11.) schneide die conjugirten Durchmesser HI, LK, jenen in T, diesen in t, auf ihren Verlängerungen, und FG sey der conjugirte Durchmesser zu dem durch D gelegten, oder der berührenden parallel: es ist $TD \times Dt = CG^2$.

Bew. Es ist $\sin CTD : \sin TCD = CD : TD$,

$\sin CtD : \sin tCD = DC : Dt$,

und $\sin CTD = \sin ICG = \sin GCH$;

$\sin CtD = \sin GCK$, also ist durch Verbindung beider Proportionen,

$\sin GCH \,.\, \sin GCK : \sin HCD \,.\, \sin KCD = CD^2 : TD \times Dt$.

Das erstere Verhältniß ist gleich dem $CD^2 : CG^2$, (36. III.) also ist $TD \times Dt = CG^2$.

41. Durch die Endpuncte des Durchmessers HI ziehe man mit dem conjugirten KL die parallelen HM, IN bis an die in D berührende TDt: es ist MD : DN = HM : IN.

Denn MD : DN = HP : PI = TH : TI = HM : IN. (s. 38.).

42. Von einer Ellipse sind gegeben drey Puncte, M, N, P, (Fig. 12.). und die berührenden in M, N, die Ellipse zu bestimmen.

Die berührenden schneiden sich in T. Zieht man durch T und die Mitte Q der Chorden MN die gerade TQ, so geht diese, wenn es nöthig, verlängert durch den Mittelpunct der Ellipse (39.). Eben diese Linie halbirt alle mit MN parallelen Chorden, weil eine gerade Linie, welche die parallelen Chorden halbirt, durch zwey Puncte, hier C und Q, bestimmt wird. Sie treffe die Ellipse in D

und E. Die mit MN durch C parallele FG ist der zu DE conjugirte Durchmesser, dessen Winkel mit DE, nämlich ECF = CQM, durch das Dreyeck MTN gegeben wird.

Die gegebenen Größen sind PR = p, wenn PR parallel mit MN gezogen wird, QN = q; QR = r; QT = t; die gesuchten CD = f; CF = GC = g; GQ = x. Es ist

I. $f^2 g^2 = g^2 x^2 + f^2 q^2$.

II. $f^2 g^2 = g^2 (x + r)^2 + f^2 p^2$ (17.)

III. $(t + x) x = f^2$ (38.).

Aus diesen Gleichungen wird durch Elimination von f, g, leicht erhalten:

$$x = \frac{r^2 q^2}{(q^2 - p^2) t - 2rq^2}.$$

Die dritte Gleichung giebt nun den Werth von f^2 oder CD^2. Die erste Gleichung, oder die aus I. und III. hergeleitete, $g^2 tx = f^2 q^2$ giebt den Werth von g^2 oder FG^2. Da der Winkel ECF gegeben wird, so ist in der Gleichung, $fg \sin(\varphi + \omega) = ab$ (22.), der Winkel $\varphi + \omega$ = ECF bekannt. Dadurch wird ab, das Product der beiden halben Axen gefunden. Da ferner $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$ ist (24.), so wird nun sowohl $a + b$, als $a - b$, bekannt. Da endlich $f^2 : g^2 = \sin 2\omega : \sin 2\varphi$ ist (20.), so wird dadurch sowohl ω als φ gefunden, von welchen letzterer der Winkel der großen Axe mit dem Durchmesser DE ist Es ist nämlich $f^2 + g^2 : f^2 - g^2 = \sin 2\omega + \sin 2\varphi : \sin 2\omega - \sin 2\varphi = \tang(\omega + \varphi) : \tang(\omega - \varphi)$. Die Ellipse läßt sich aber auch, ohne die Axen und ihre Lage zu kennen, beschreiben, weil die Quadrate der Ordinaten zu dem Durchmesser DE sich wie die Rechtecke von den zugehörigen Segmenten verhalten. Es ist nämlich $QN^2 : RP^2 = DQ \times QE : DR \times RE$, und so mit jedem andern Paare, wie es aus der Gleichung in (17.) sogleich folgt.

Die Lage und Länge der Axen aus zwey gegebenen conjugirten Durchmessern durch Construction zu finden, lehrt Pappus in den mathematischen Sammlungen. VIII. 14.

Diese Aufgabe hat ihre Anwendung in der Baukunst bey der Zeichnung ungleichschenklichter Gewölbebogen (arcs rampants), wo die Kämpfer an den Gewölbepfeilern ungleiche Höhe haben, und außer ihnen noch ein Punct gegeben wird, durch welchen der Gewölbebogen gehen soll.

43. Es ist AMB (Fig. 13.) eine halbe Ellipse, deren große Axe AB, Mittelpunct C, Brennpuncte, F, G. In M sey die berührende TMt, und die darauf senkrechte MQ. Von den Brennpuncten, F, G, werden die geraden, FM, GM, an M gezogen: es ist der W. FMQ = GMQ, so wie W. FMt = GMT.

Bew. Man ziehe MP senkrecht auf AB. Aus (33.) ist $CQ = \frac{e^2}{a^2} CP$, wo a die halbe große Axe, e der Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte C ist. Also ist $FQ = e + \frac{e^2}{a^2} CP$, und $GQ = e - \frac{e^2}{a^2} CP$. Nun ist (12.) $FM = a + \frac{e}{a} CP$, also $GM = 2a - FM = a - \frac{e}{a} CP$. Folglich ist $FQ : GQ = FM : GM$. Daher halbirt die MQ den Winkel FMG, zufolge des umgekehrten Satzes in dem Artikel, Dreyeck, nr. 9. S. Apollonius, B. III. S. 48.

44. Wenn die Ellipse als eine physische, die Lichtstrahlen zurückwerfende Linie betrachtet wird, so werden die von dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen nach dem andern hin zurückgeworfen. Daher die Benennung der Brennpuncte.

45 Es ist $\sin FMQ$ oder $\sin GMQ = \frac{e \cos \omega}{a}$, wo $\omega = CTM$ ist. (Fig. 13.)

Bew. In dem Dreyeck FMQ ist $FM : FQ = \sin MQF : \sin FMQ = \cos \omega : \sin FMQ$. Ferner ist

$FM = a + \frac{e}{a} CP$, und $FQ = e + \frac{e^2}{a^2} CP$, also $FM : FQ = a : e$, daher $a : e = \cos\omega : \sin FMQ$.

46. Es ist $(\sin FMQ)^2 = \frac{\cos\omega \,.\, \cos(\varphi + \omega)}{\cos\varphi}$; $(\cos FMQ)^2 = \frac{\sin\omega \,.\, \sin(\varphi + \omega)}{\cos\varphi}$; $(\cot FMQ)^2 = \tang\omega \,.\, \tang(\varphi + \omega)$; $\cot FMQ = \frac{f}{e} \,.\, \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\cos\omega}$, wo $f = MC$; φ der Winkel ACM; ω der Winkel des zu MC conjugirten Halbmessers mit der Axe ist. Die erste Formel wird leicht aus der in (45.) gefunden, wenn man für e^2 den Werth desselben, $a^2 - b^2$, einführt, und für $\frac{b^2}{a^2}$ seinen Werth aus (15.) setzt. Aus der ersten Formel folgt unmittelbar die zweyte, aus beiden die dritte. Die vierte wird folgendergestalt gefunden.

Es ist $(\sin FMQ)^2 = \frac{e^2 \cos\omega^2}{a^2}$; $(\cos FMQ)^2 = \frac{a^2 - e^2 \cos\omega^2}{a^2} = \frac{a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2}{a^2}$, also $(\cot FMQ)^2 = \frac{a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2}{e^2 \cos\omega^2}$. Aus der in (16.) gefundenen Gleichung ergieb sich, daß $a^2 b^2 = (a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2) g^2$ ist, nämlich wenn $x = 0$, also $y = g$ ist. Dadurch ist $\cot FMQ = \frac{ab}{fge \cos\omega}$. Es ist aber aus (23.) $fg \sin(\varphi + \omega) = ab$, folglich $\cot FMQ = \frac{f \sin(\varphi + \omega)}{e \cos\omega}$.

47. Es ist $\frac{aa-bb}{aa}\left(=\frac{e^2}{a^2}\right)=\frac{\cos(\varphi+\omega)}{\cos\varphi.\cos\omega}$;

$\frac{aa+bb}{aa}=\frac{\cos(\varphi-\omega)}{\cos\varphi.\cos\omega}$; $\frac{aa-bb}{aa+bb}=\frac{\cos(\varphi+\omega)}{\cos(\varphi-\omega)}$.

Bew. Aus (15.) ist $aa-bb=\ldots$ $aa\,(1-\tang\varphi.\ \mathrm{tg}\,\omega)=aa\,\frac{\cos\varphi.\cos\omega-\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}$ $=aa\,\frac{\cos(\varphi+\omega)}{\cos\varphi.\cos\omega}$. Auf ähnliche Art wird die zweyte Formel erwiesen, woraus die dritte unmittelbar folgt.

48. Es ist $FM\times GM=gg=$ dem Quadrat des zu CM conjugirten Halbmessers. (Fig. 13.).

Bew. Da $FM=a+\frac{e}{a}CP$; $GM=a-\frac{e}{a}CP$, so ist $FM\times GM=a^2-\frac{e^2}{a^2}f^2\cos\varphi^2=a^2-e^2\times\frac{\sin\omega.\cos\varphi}{\sin(\varphi+\omega)}=a^2\left(1-\frac{\sin\omega.\cos(\varphi+\omega)}{\cos\omega.\sin(\varphi+\omega)}\right)$ $=a^2.\frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\sin(\varphi+\omega)}=g^2$ (aus 19.).

49. Es seyn FH, GK senkrecht auf die berührende TMt, so ist $FH\times GK=bb=$ dem Quadrat der halben kleinen Axe. (Fig. 13.).

Bew. Da $FH=FM.\sin FMH=FM.\cos FMQ$, und $GK=GM.\cos GMQ=GM.\cos FMQ$, ferner $FM\times GM=a^2\frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\sin(\varphi+\omega)}$, auch $(\cos FMQ)^2=\frac{\sin\omega.\sin(\varphi+\omega)}{\cos\varphi}$ ist, so ist $FH\times GK=a^2\tang\varphi.\tang\omega=b^2$, aus (15.).

Ich finde den Satz beym Apollonius nicht. Er dient zur Auflösung der astronomischen Aufgabe, den Stillstandspunct eines Planeten in einer elliptischen Bahn zu finden. Keillii Introd. in Astron. Lect. XVII.

50 In den Scheitelpuncten der großen Axe, A, B, seyn die senkrechten, AD, BE, auf dieselbe errichtet, welche die berührende TM in D, E, treffen; es ist $AD \times BE = bb$. (Fig. 13.).

Bew. Es ist $CT = \frac{CA^2}{CP}$ aus (30.), also $AT = CA\left(\frac{CA}{CP} - 1\right)$; $BT = CA\left(\frac{CA}{CP} + 1\right)$, und $AT \times BT = \frac{CA^2}{CP^2}(CA^2 - CP^2)$, oder $AT \times BT = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \operatorname{tg} \varphi^2$, aus (4 u. 15.). Ferner ist $AD = AT. \operatorname{tang} \omega$; $BE = BT, \operatorname{tg} \omega$, also $AD \times BE = AT . BT. \operatorname{tang} \omega^2 = \frac{a^2}{b^2} . a^2 . \operatorname{tang} \varphi^2 \times \operatorname{tang} \omega^2 = b^2$, (15.).

Apollonius hat den Satz allgemein für jeden Durchmesser erwiesen. L. III. prop. 42. Anstatt des Quadrats der halben kleinen Axe ist nur das Quadrat des conjugirten Halbmessers zu setzen. Nach der hier gebrauchten Methode kann der allgemeinere Satz, mit Zuziehung 36. I. erwiesen werden. Der Winkel CPM ist daselbst α, CA ist h, und statt b ist k zu setzen. Der besondere Satz ist wegen der Verbindung mit dem Satz (49.) merkwürdig.

51. Der Winkel, welchen die von F oder G nach den Puncten D, E gezogenen geraden Linien in Fig. 13. mit einander machen, ist ein Rechter. Apollonius, B. III. S. 45. Der Satz folgt aus den Werthen von AD und BE, verbunden mit denen von AG und BG. Es ist

$AD = AT \times \tang\omega = \frac{a(a-x)}{x} \operatorname{tg}\omega$; $BE = BT \times \tang\omega = \frac{a(a+x)}{x} \operatorname{tg}\omega$, (31.).

52. Es sind wie vorher, F, G, die Brennpuncte, T, Q, die Puncte, wo die berührende MT und die Normale MQ die Axe treffen; es ist $TG : TQ = TC : TF$. (Fig. 13.).

Erhellt aus den Werthen dieser Linien.

53. Man ziehe aus C an die Puncte H, K, wo die senkrechten FH, GK auf die berührende sie treffen, die geraden CH, CK, so ist CH mit GM, und CK mit FM parallel. (Fig. 13.).

Bew. Es ist $TM : TH = TQ : TF = TG : TC$ (52.), also sind GM, CH parallel. Eben so ist $TK : TM = TG : TQ = TC : TF$, daher KC und MF parallel.

54. Es ist $CH = CK = CA$.

Denn $TF : TC = TM : CK$, das ist $\frac{aa}{x} + e : \frac{aa}{x} = a + \frac{e}{a} x : CK$, also $CK = a$. Eben so ist $TG : TC = GM : CH$, das ist, $\frac{aa}{x} - e : \frac{aa}{x} = a - \frac{ex}{a} : CH$, also $CH = a$.

55. Ein ganz geometrischer Beweis des Satzes (54.) ist folgender. An die Ellipse AMB (Fig. 14.) ist in M die berührende Tt gezogen, und an M aus den Brennpuncten F, G die geraden FM, GM, die nach D und E verlängert werden bis an die gleichfalls verlängerten Perpendikel GK, FH auf die berührende. Wegen der gleichen Winkel, FMH, GMK, HME, KMD, ist $FM = ME$; $GM = MD$, also $FD = AB$, und $GE = AB$. Man ziehe aus dem Mittelpuncte C die CH und CK, so ist,

weil FH = HE, und GK = KD, so wie FC = CG ist, CH parallel mit GME und = $\frac{1}{2}$ GE. Eben so ist CK parallel mit FMD, und = $\frac{1}{2}$ FD. Das ist, CH = CK = AC.

56. Ist die große Axe der Länge und Lage nach gegeben, also auch der Mittelpunct, so ergiebt sich hieraus die Construction der Ellipse, welche eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt. Die Forderung kann unmöglich seyn.

Sind bloß die Länge der großen Axe und der Mittelpunct gegeben, dazu aber noch zwey gerade Linien, die von der Ellipse berührt werden sollen, so beschreibe man aus C mit der halben Axe einen Kreis, welcher auf jeder der berührenden zwey Puncte, wie H, K, angiebt, wenn die Forderung anders möglich ist. Die Perpendikel auf die berührenden in den Durchschnittspuncten mit dem Kreise bestimmen die Brennpuncte, und dadurch sowohl die Lage der großen Axe als die Größe der kleinen.

57. Dieses sind die wichtigsten und merkwürdigsten Eigenschaften der Ellipse. Die Verhältnisse an den Abschnitten zugeordneter Linien bey irgend einer Lage der Axen der Coordinaten werden aus der allgemeinen Gleichung für alle drey Kegelschnitte in dem Artikel, worin von diesen Linien allgemein gehandelt wird, hergeleitet werden, da sie ihnen allen ganz gemein sind.

Die Rectification und Quadratur der Ellipse wird in den Artikeln, die dazu überhaupt die Methoden angeben, gezeigt werden. Die Formel für den Halbmesser der Krümmung in dem Artikel, Krümmungskreis.

Ellipsen höherer Art (elliptoides) sind krumme Linien, die durch die Gleichung, $ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$, wenn m und n größer als 1 sind, bestimmt werden. Man sollte noch hinzusetzen, daß m und n beide ungerade Zahlen seyn, damit diese höhere Gattung keine ins Unendliche wachsende Ordinaten haben könne, und daß, wie bey der Apollonischen Ellipse, die Abscissen, zu welcher mögliche Ordinaten gehören, nicht über eine gewisse Gränze, hier a, sich erstrecken. Sie können aus einem Kegel höherer Art,

wie die Ellipse aus dem gemeinen Kegel, geschnitten werden, wenn statt des Kreises die Linie genommen wird, deren Gleichung ist $y^{m+1} = x^m (a-x)$. Es wird nicht der Mühe werth seyn, Untersuchungen über diese Linien anzustellen. Man sehe de la Hire in dem Appendice ad sectiones conicas, und Wolf in den elementis Analyseos §. 522. seqq.

Ellipsimber, (ellipsis imbricata,) hohl gebogene Ellipse, ist eine krumme Linie von doppelter Krümmung auf der Oberfläche eines senkrechten elliptischen Cylinders, deren Abscissen Bogen des elliptischen Umfanges von der Grundfläche dieses Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche senkrecht stehen, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich sind, an welcher die Abscissen mit denjenigen zu den Bogen des elliptischen Umfanges übereinkommen. Diese zweyte Curve gehe durch die Endpuncte einer der Axen. Die Durchschnittslinie einer Kugelfläche und der Oberfläche eines senkrechten Cylinders, der nach seinem ganzen Umfang durch die Kugel gesteckt ist, so aber, daß die Axe nicht durch ihren Mittelpunct geht, ist eine Ellipsimber. Frezier traité de Stéréotomie. T. I. pag. 54. Vergl. Cykloimber.

Ellipsograph, (Compas elliptique), ein Instrument, um eine Ellipse durch stetige Bewegung eines Stiftes zu beschreiben. Es kann auf verschiedene Art eingerichtet werden. Das einfachste ist ein Faden, dessen Länge man der großen Axe gleich nimmt. Die Endpuncte befestigt man in den Brennpuncten. Mit einem Stifte spannt man den Faden, und führt so die beiden Theile desselben rings um die Brennpuncte herum. Dieses Verfahren gründet sich auf die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Linien aus den Brennpuncten an irgend einen Punct des Umfanges der großen Axe gleich ist.

Anstatt des Fadens kann man auch zwey Liniale mit einem der Länge nach gemachten Einschnitt gebrauchen. In der Figur 14. zu Ellipse (54.) sind FD, GE, die

sich in dem Puncte M der Ellipse schneiden, jede der großen Axe gleich, und der Abstand der Puncte, D, E, dem Abstande der Brennpuncte, F, G. Man nehme zwey Liniale von der Länge FD, GE, so groß als die Axe der Ellipse, und verbinde sie in den Puncten, D, E, durch ein Linial, das dem Abstande der Brennpuncte gleich ist, mittelst Zapfen, um welche die Liniale beweglich seyn. Die Puncte, F, G, werden in den Brennpuncten mit einem Stifte, um welchen die Liniale sich drehen können, befestigt. Ein Stift in dem Durchschnitte der Mittellinien beider Liniale, die nach der Länge ausgeschnitten sind, beschreibt bey der Drehung derselben die Ellipse.

Auf die Construction einer Ellipse in dem Artikel, Ellipse (14.), gründet sich ein Instrument, woran man die große Axe und den Abstand der Brennpuncte innerhalb gewisser Gränzen verändern kann. Zwey Liniale mit einem Ausschnitte der Länge nach werden unter einem rechten Winkel zusammengefügt, wie die Linien AB, DE (Fig. 7.). Auf einem dritten Linial werden drey Stifte, M, F, G, eingesteckt, so daß MG die halbe große Axe, MF die halbe kleine ist. Den Stift F verschiebt man auf AB, den Stift G zu gleicher Zeit auf DE, so beschreibt der Stift M die verlangte Ellipse.

Das bequemste Instrument zur Zeichnung einer Ellipse ist folgendes, welches aus der Construction (5.) hergeleitet wird. Zwey Liniale, AB, AC, von gleicher Länge (Fig. 15.) sind in A durch ein Gewinde beweglich verbunden. Die ausgestreckte Länge beider ist gleich der halben Summe der beiden Axen. Auf AB ist BD die halbe kleine Axe, also CA + AD die halbe große. In dem Puncte C wird das Linial AC auf der Ebene der Zeichnung befestigt, so daß es sich um C drehen läßt. Der Endpunct B von AB wird auf einer geraden, durch C gezogenen, Linie BCb fortgeschoben, so beschreibt ein Stift in dem Puncte D die gegebene Ellipse, um den Mittelpunct C, und die große Axe fällt in Bb. Denn man nehme auf AC das Stück AE = AD, und auf der verlängerten AF = AD, so ist der W. EDF ein rechter, als Winkel in einem Halb-

kreise. Weil AD = AE, so wie AB = AC, so ist AD : AE = AB : AC, und ED parallel mit CB, (Dreyeck, 6.). Man verlängere FD bis G auf CB, so ist FG senkrecht auf CB, wie FD auf ED. In den ähnlichen Dreyecken FED, FCG ist FG : GD = FC : EC = FC : DB. Nun beschreibt der Punct F den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser CF ist. Die Ordinate FG an diesem Kreise verhält sich zu der Ordinate an der von D beschriebenen Linie durchgehends wie der Halbmesser FC zu einer gegebenen DB; also ist die von D beschriebene Linie eine Ellipse, deren halbe Axen FC und BD sind.

Den Punct D kann man auch auf der andern Seite von B nehmen.

Von den Instrumenten, Ellipsen und die andern Kegelschnitte zu beschreiben, ist eine umständliche Beschreibung in van Schooten Tractatus de organica conicarum sectionum in plano descriptione, befindlich, in der Sammlung: Exercitationes mathematicae, Lugd. 1657.

Beschreibung eines Ellipsograph, ꝛc. (von G. F. Parrot). Gotha 1794.

Ellipsoid, wird von einigen statt Sphäroid gebraucht, nicht ganz schicklich, weil der Ausdruck eine ellipsenähnliche Figur bedeutet, da er einen Körper anzeigen soll, der durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entsteht. Da Sphäroid allgemein jeden Körper bedeuten kann, der durch die Umdrehung einer in sich wiederkehrenden rundlichen Figur entsteht, so mag Ellipsoid kurz das elliptische Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipse erzeugte, bedeuten.

Ellipticität ist der Quotient des Unterschiedes der Axen einer Ellipse durch die große (oder auch die kleine) Axe dividirt. Je größer dieser ist, desto mehr entfernt sich die Ellipse von einem Kreise über der großen Axe als Durchmesser. Der Ausdruck ist noch wenig gebräuchlich, aber ganz schicklich. Auf deutsch hieße es die Abplattung, wie

in der Geographie der Quotient des Unterschiedes der beiden Haupt-Durchmesser der Erde dividirt durch den Durchmesser des Aequators ihre Abplattung heißt. Der Abstand der Brennpuncte durch die große Axe dividirt, was man in der Astronomie die Excentricität nennt, dient auch die Abweichung einer Ellipse von dem Kreise über der großen Axe zu messen.

Elliptoides, s. Ellipse höherer Art.

Endecagonalzahl, eilfeckige Zahl, ist eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{9nn-7n}{2}$ als die Summe von n Gliedern der arithmetischen Reihe 1; 10, 19, etc.

Endecagonum, ein ordentliches Vieleck von eilf Seiten.

Endlich ist jede Größe, die sich mit der Einheit unmittelbar oder mittelbar vergleichen läßt. Jede zählbare Menge ist endlich; jede begränzte Linie, Fläche oder körperliche Ausdehnung ist endlich. Der Abstand der Sonne von einem Nebelfleck ist endlich, ob er gleich durch unsere Mittel zur Ausmessung der Abstände nicht meßbar ist. Das Unendliche läßt sich weder mit einer abstracten, noch einer sinnlichen Einheit vergleichen; aber wohl kann man ein Unendliches mit einem andern derselben Gattung vergleichen.

Eine Größe kann aus unendlich vielen Theilen bestehen, und dennoch endlich seyn. Eine geometrische abnehmende Progression ins Unendliche fortgesetzt, hat eine endliche Summe. Daher ist der Raum zwischen der logarithmischen Linie und ihrer Asymptote auf der Seite der abnehmenden Ordinaten endlich, ob er gleich unendlich lang ist. Die Körper, die durch die Umdrehung einer Hyperbel und Conchoide um ihre Asymptote entstehen, haben einen endlichen Inhalt, ob sie gleich unendlich in die Länge ausgedehnt sind. S. Conchoide und Cubirung.

Enneagonalzahl, neuneckige Zahl, ist eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{7nn-5n}{2}$, als die Summe von n Gliedern der arithmetischen Progression 1, 8, 15, etc.

Enneagonum, ein ordentliches Vieleck von neun Seiten.

Entgegengesetzte Größen sind solche, bey welchen außer ihrer Quantität noch eine entgegengesetzte Beziehung, in Absicht auf Addition und Subtraction, betrachtet wird. Dieses kann auf zweyerley Art geschehen.

Erstlich, es sey der Werth einer Größe der Unterschied zweyer Größen, die eintheilig oder mehrtheilig sind, als $A = a + b - c - d$, so sind die Theile, a, b, den Theilen der abgezogenen Größe, c, d, entgegengesetzt, jene aber sind gleichnamig, so wie diese. Z. B. Schulden sind dem baaren Cassenvorrath und den activen Schuldforderungen entgegengesetzt bey der Berechnung des Vermögenstandes. So sind Steigen und Fallen, vorwärts- und rückwärts gerichtete Bewegung, entgegengesetzte Größen, die bey der Berechnung des zurückgelegten Weges mit entgegengesetzten Vorzeichen zusammengenommen werden. Diejenigen Größen, von welchen die ihnen entgegengesetzten abgezogen werden, nennt man positive, weil man setzt, daß der Werth der Größe A, die aus der Verbindung der entgegengesetzten Größen entsteht, ihnen gleichnamig sey. Die abzuziehenden Größen nennt man negative. Fände sich, daß diese in der Quantität jene übertreffen, so legt man A einen negativen Werth bey, nämlich in Beziehung auf die Beschaffenheit, die man von A vorausgesetzt hatte. Nimmt man aber für A gleich Anfangs diese Beschaffenheit an, so ist, was vorher negativ war, positiv, und das Positive wird in Negatives verwandelt. Wer sein baares Vermögen berechnete, und fande, daß seine Schulden mehr betragen als Cassenvorrath und Forderungen, der hätte ein negatives Vermögen. Hätte er aber das Resultat gleich als Schuld vorausgesetzt, so fand er es positiv.

So verhält es sich auch mit den Werthen einer Gleichung, als $x^3 - 10x^2 + 12x - 140 = y$. Man nennt sie positiv, wenn die mit + bezeichneten Termini mehr ausmachen als die, welche — vor sich haben, z. B. wenn $x = 12$, so ist $y = + 292$. Man nennt die Werthe negativ, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt wird, z. B. wenn $x = 5$ ist, wodurch $y = - 205$ wird. Ueberhaupt muß man bey allen Progressionen von Größen, die aus Theilen zusammengesetzt werden, sie in Absicht der gegenseitigen Beschaffenheit dieser Theile unterscheiden. Es ist gleichgültig, welche Gattung von Theilen man positiv, und welche man negativ nennen will. So könnte man statt des vorher gegebenen Werthes von y, ohne die Quantität zu ändern, auch annehmen $140 - 12x + 10x^2 - x^3 = y$, wodurch der Werth von $y = + 205$ oder positiv für $x = 5$ wird, aber $y = - 292$ oder negativ für $x = 12$. Eine arithmetische Progression wird erhalten, wenn entweder derselbe Unterschied zu einer gegebenen Größe folgweise addirt oder subtrahirt wird. Die Glieder sind in dem letzten Falle negativ, wenn die Vielfachen des Unterschiedes die gegebene Größe übertreffen. Z. B. der Unterschied = 3; die gegebene Größe = 7, so entsteht durch Addition die Reihe; 7; 10; 13; 16; 19, etc. durch Subtraction die Reihe 7; 4; 1; — 2; — 5; — 8, — etc. Beide Reihen machen durch das gemeinschaftliche Glied, 7, nur eine Reihe aus, in welcher die Glieder auf gleiche Art gebildet werden, in der einem Folge durch Addition, in der andern durch Subtraction.

Diese Anwendung des Entgegengesetzten ist inzwischen nur die unwichtigere, wiewohl in allen Lehrbüchern bloß diese gelehrt wird, zufolge der Erklärung, daß entgegengesetzte Größen solche seyn, die unter der Bedingung betrachtet werden, daß sie sich einander vermindern, und daß die eine durch einen ihr gleich großen Theil der andern aufgehoben wird. Man gründet hierauf auch die Rechnung mit Größen, deren Vorzeichen entgegengesetzt sind. Dieses macht aber Dunkelheit, daher auch diese an sich so leichte Rechnung (s. Buchstabenrechnung) von einigen mit Müh-

und Kunst dargethan wird. Dieses Verfahren kann sogar die unrichtige Vorstellung veranlassen, daß man entgegengesetzte oder gleichnamige Größen mit Rücksicht auf ihre Beziehung in einander multipliciren könne, wenn man bey den Vorzeichen + und — zugleich an die zur Erläuterung gegebenen Beyspiele denkt, sich z. B. die Multiplication von + 8 in — 3 als Multiplication von 8 Thlr. Vermögen in drey Thaler Schulden vorstellt. In der That ist die bisher erklärte Art der Entgegensetzung nur Vertheilung der Werthe einer zusammengesetzten Größe unter zweyerley Rubriken.

Zweytens kann man auch die Größen in einer Verbindung den ihnen gleichartigen in einer andern ähnlichen Verbindung entgegensetzen. Diese Entgegensetzung ist die eigentlich wichtige, wodurch die analytischen Sätze und Auflösungen Allgemeinheit erhalten, und oft viele Fälle aus einem einzigen bloß durch gehörige Vertauschung der Vorzeichen hergeleitet werden können. Die Alten kannten den Gebrauch dieser Entgegensetzung gar nicht. Jeder Fall, der sich durch eine andere Lage einer oder mehrerer Linien und Winkel unterscheidet, ward von ihnen besonders betrachtet. Das macht aber Weitläuftigkeit, und ist ermüdend, wenn ein Beweis oder eine Auflösung mit wenigen Veränderungen oft wiederholt wird, wie in den Büchern des Apollonius de sectione rationis, de sectione determinata, de locis planis.

Bey jeder Verbindung von Größen, einige ganz einfache ausgenommen, sind immer mehrere Fälle vorhanden, die sich nur in der gegenseitigen Beziehung der Größen durch Addition und Subtraction derselben, ihrer Producte, Quotienten und Wurzeln unterscheiden. Alle Abänderungen einer Verbindung, worin eine oder mehrere Größen jene Beziehung durchaus ändern, sind nicht wesentlich verschiedene Verbindungen, sondern nur verwandte Fälle einer und derselben Art von Verbindung. Es genügt, die Rechnung für einen dieser Fälle zu machen, um die Resultate auch für die andern zu gebrauchen, wenn die Vertauschung der Vorzeichen + und — gehörig vorgenommen wird.

Z. B. die Potenzen von $a + b$ und $a - b$ unterscheiden sich bloß darin, daß b entgegengesetzte Werthe hat, daher die ungeraden Potenzen von b in den Formeln für beide entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, (s. Buchstabenrechnung). Es ist das Product $(a + b)^2 (a - b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, und $(a - b)^2 (a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$, beide nur in den Vorzeichen von b und b^3 verschieden.

Ein Courier A habe die Geschwindigkeit a, ein anderer B die Geschwindigkeit b, nach einerley Richtung; der Abstand der Örter, von welchen sie ausgehen, sey c; der erstere gehe m Stunden früher aus, als B, und x sey der Weg des A, bis er von B eingeholt wird, so ist $x = \frac{a(c + mb)}{b - a}$, und $x = \frac{a(c - mb)}{b - a}$, wenn A m Stunden später als B abgeht, wobey $c > mb$ seyn muß, wofern die Antwort für die Frage brauchbar seyn soll. Geht A dem B entgegen, und früher ab, so ist $x = \frac{a(c + mb)}{b + a}$, und, wenn er später abgeht, $x = \frac{a(c - mb)}{b + a}$. Alle diese vier Fälle sind nur Abänderungen derselben Aufgabe; man mag jeden derselben wählen, um die Auflösungen der andern aus der für den einen Fall gefundenen herzuleiten. Welchen man auch nehme, so werden alle Größen bloß in Absicht auf ihre Quantität betrachtet, und den Umständen des Falles nach gehörig mit einander verbunden. Ist es der erste, so haben die Geschwindigkeiten b und a in dem Nenner des Werthes von x entgegengesetzte Vorzeichen, ob sie gleich nach einerley Richtung genommen werden. Allein hier geschieht auch keine Entgegensetzung der verbundenen Größen. Um den vierten Fall aus dem ersten herzuleiten, müssen m, a, x entgegengesetzt, in Absicht auf dieselben Größen in dem ersten Falle, genommen werden. Das giebt $-x = \frac{-a(c - mb)}{b + a}$ und wenn man unter x und a die Quantität mit Voraussetzung

der Richtung versteht, $x = \frac{a(c - mb)}{b + a}$. Der Weg des B ist in dem ersten Falle $= \frac{b(c + ma)}{b - a}$, in dem vierten $= \frac{b(c + ma)}{b + a}$. Man sehe die dritte Aufgabe, in dem Artikel, Gleichung I. Die 9te Aufgabe dess. Art. zeigt auch, wie der Fall, da das Wasser durch die eine Röhre aus dem Behälter fließt, aus demjenigen hergeleitet wird, da das Wasser durch beide hineinfließt, und wie eine negative Antwort für die gesuchte Größe die Voraussetzung der Frage berichtigt.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 16.) soll aus AB, AC und dem Winkel A der Winkel B gefunden werden. Man fälle das Perpendikel CD auf AB, so ist, wenn B spitz ist, $\text{tang } B = \frac{AC . \sin A}{AB - AC . \cos A}$, und wenn B stumpf ist, $\text{tang } CBD = \frac{AC \sin A}{AC \cos A - AB}$. Weil die Segmente DB in beiden Fällen entgegengesetzte Lage haben, so bekommen die Nenner entgegengesetzte Zeichen. Diese Nenner sind die Werthe von BD. Gebraucht man für den zweyten Fall die erste Formel, so zeigt die Negation des Nenners, und daher der Tangente, an, daß der innere Winkel, der zu der Tangente gehört, stumpf ist.

In derjenigen Verbindung von Größen, die zum Grunde für alle übrigen verwandten Verbindungen gelegt wird, müssen alle Größen als positiv betrachtet werden, das heißt, ihre Symbole bezeichnen bloß die Quantität, und die Addition und Subtraction wird durch die Vorzeichen + und — angedeutet, so daß + eine wirkliche Vergrößerung, und — eine wirkliche Verminderung anzeigt. Es kann hier keine negative Größe durch die Subtraction des Größern von dem kleinern entstehen, weil der Fall in Absicht desjenigen, was addirt und subtrahirt wird,

und was eine Summe oder Differenz ist, ganz bestimmt seyn soll. Man hat hier bloß additive und subtractive Größen, nicht positive und negative. Positiv heißen sie in Beziehung auf andere Fälle, nicht in dem vorliegenden Falle für sich allein genommen.

Diejenigen Größen, welche in einer mit dem zum Grunde der Rechnung gelegten Falle, dem Normalfalle, verwandten Verbindung ihre Beziehung ändern, sind negativ, nicht in Rücksicht auf die mit ihnen verbundenen Größen, sondern in Rücksicht auf die mit ihnen gleichnamigen in jenem ersten Falle.

Eine Änderung der Beziehung einer Größe zieht eine durchgängige Vertauschung ihrer Vorzeichen in der ganzen Rechnung nach sich. Wo sie in dem zum Grunde gelegten Falle addirt ward, wird sie nun subtrahirt, und umgekehrt. Wo sie Factor war, ändert das Product sein Vorzeichen, weil der Factor es ändert. Eine ungerade Anzahl negativer Factoren verändert das Vorzeichen des Products, eine gerade Anzahl aber nicht, da je zwey negative oder mit — vergesellschaftete Factoren ein Product mit demselben Vorzeichen geben, was positive an ihrer Stelle bekommen. (Buchstabenrechnung, 14.). Daher behalten die geraden Potenzen einer negativen Größe das Vorzeichen, welches sie in dem zum Grunde gelegten Falle hatten; die ungeraden aber ändern es. Wird durch die Negation einer Größe ein Dividendus oder ein Divisor negativ, so wird der Quotient es auch; werden beide negativ, so bleibt der Quotient positiv und behält sein Vorzeichen; denn das Product des Quotienten in den Divisor muß dasselbe Vorzeichen mit dem Dividendus erhalten.

Giebt die Rechnung ein negatives Resultat, so zeigt dieses an, daß die gefundene Größe in einer entgegengesetzten Beziehung gegen diejenige zu nehmen ist, die man ihr beygelegt hatte. Da man nicht immer bestimmen kann, wie der Fall, den man behandelt, beschaffen sey, so muß das Resultat ergeben, nicht allein, wie groß die gesuchte Größe sey, sondern auch, in welcher Beziehung man sie

zu nehmen habe, durch die Beschaffenheit des Vorzeichens ihres Werthes.

Wenn man nicht vollkommen deutlich einsieht, daß die Übertragung der Rechnung von einem Falle auf einen andern zulässig ist, so muß man sie für diesen Fall besonders anstellen, um die Übertragung zu rechtfertigen, oder ihre Unzulässigkeit zu erweisen. Die Evidenz muß durch die Allgemeinheit der Rechnungen nicht leiden.

Die analytische Behandlung der Geometrie hat das eigenthümliche, daß sie die Rechnung nur für einen gewissen Fall einer Verbindung von Linien und Winkeln ausführt, und das Resultat auf alle andere ähnliche Verbindungen, die nur in der Lage der Linien und Zusammensetzung der Winkel unterschieden sind, anwendet, indem diejenigen Linien und Winkel, welche eine entgegengesetzte Lage in Beziehung auf jenen Normalfall erhalten, negativ werden, und deshalb ihre Vorzeichen ändern. Beyspiele davon kommen in diesem ganzen Werke vor. Insbesondere sehe man die Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie und der Geometrie auf die Algebra. Auch der Artikel, Coordinaten, zeigt, daß man bey der Veränderung derselben die Werthe der neuen aus den vorigen durch eine einzige Rechnung für alle Fälle bestimmen könne.

In den trigonometrischen Formeln werden alle Abänderungen der Verbindung derjenigen Größen, die zu einer Formel gehören, bloß durch die Anwendung des Entgegengesetzten auf die trigonometrischen Functionen hergeleitet. In dem Normalfalle werden alle Winkel spitz genommen, sie mögen unter einander eine Lage, welche es seyn mag, haben. Dadurch sind alle trigonometrische Functionen positiv.

Die analytische Dioptrik bietet sehr viele und lehrreiche Beyspiele der Übertragung der Rechnung von einem Falle auf andere verwandte dar, da hier eine große Menge von Verbindungen gleichnamiger Größen Statt hat. Schon bey einem einzelnen Linsenglase sind manche Abänderungen möglich. Es sey das Glas auf beiden Seiten convex, der Halbmesser der Vorderfläche $= f$, der Hinter-

fläche $= g$, der Abstand des leuchtenden Punctes, oder eines Vereinigungspunctes der auffallenden Strahlen vor dem Glase $= a$; der Abstand des Vereinigungspunctes der gebrochnen Strahlen hinter dem Glase $= \alpha$, das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas $= n : 1$, so ist $\alpha = \frac{afg}{(n-1)(f+g)a-fg}$. Ist eine Fläche concav, so wird ihr Halbmesser negativ, liegt der Vereinigungspunct der gebrochnen Strahlen vor dem Glase, so ist α negativ, und sind die auffallenden Strahlen nach einem Puncte hinter dem Glase gerichtet, so ist a negativ. So ist für ein biconcaves Glas $\alpha = \frac{afg}{-(n-1)(f+g)a-fg}$. Die Negation des Nenners, da der Zähler positiv bleibt, zeigt an, daß der Vereinigungspunct der gebrochnen Strahlen vor dem Glase liegt. Ist das Glas ein Meniskus mit der convexen Fläche gegen die auffallenden Strahlen, so ist g negativ, und größer als f, folglich $\alpha = \frac{-afg}{(n-1)(f-g)a+fg}$ $= \frac{afg}{(n-1)(g-f)a-fg}$. Wenn die auffallenden Strahlen nach einem Puncte hinter demselben Glase fahren, so ist, da a negativ ist, $\alpha = \frac{afg}{-(n-1)(f-g)a+fg}$ $= \frac{afg}{(n-1)(g-f)a+fg}$. Man sehe meine analytische Dioptrik, im zweyten Theile, wo die Anwendungen der allgemeinen Formeln auf besondere Fälle gemacht werden.

In allen allgemeinen Formeln werden die Coefficienten der unbekannten oder veränderlichen Größen als positiv betrachtet, was sie auch für ein Vorzeichen haben. Ihre Symbole, ohne die Vorzeichen, bedeuten schlechthin die Quantität, ohne weitere Relation. Wird nun mit der Normalformel irgend eine andere unter ihr begriffene

verglichen, so sind diejenigen Coefficienten negativ, die ein anderes Vorzeichen als in jener Formel haben.

Die negativen Wurzeln einer Gleichung werden in dem Art. Gleichung erklärt, wo ihre Verhältnisse gegen die positiven Wurzeln in allen Fällen der Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gezeigt werden. Die negativen Wurzeln einer Gleichung sind die positiven einer andern Gleichung, welche zur vollständigen Beantwortung der Aufgabe nöthig wäre, wenn man das Negative umgehen, und alle Größen bloß nach ihrer Quantität betrachten wollte. Durch die Veränderung der Vorzeichen in den ungeraden Potenzen wird die gegebene Gleichung in jene andere verwandelt. Der Gebrauch der negativen Wurzeln vereinigt beide Gleichungen in eine einzige.

Negative Wurzeln können auch positive Werthe für einen andern Fall der Aufgabe enthalten. Z. B. Es sey I. $x^2 - y^2 = xy$, und II. $x + y = xy$. Wenn I. durch II. dividirt wird, so wird erhalten, $x - y = 1$. Dieses giebt die Gleichungen,

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ und } y^2 - y - 1 = 0.$$

Die Wurzeln der erstern sind $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; der zweyten, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Der erstere Werth von x und von y thun der Frage auf die bestimmte Art, wie sie abgefaßt ist, Genüge. Der zweyte Werth von y ist negativ. Dieser giebt mit $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ die Antwort auf eine verwandte Frage, wenn $y - x = xy$ seyn soll. Es seyn nämlich die beiden Bedingungen: I. $y^2 - x^2 = xy$; II. $y - x = xy$, so sind die Gleichungen, I. $x^2 - 3x + 1 = 0$; II. $y^2 + y - 1 = 0$.

Die Wurzeln der zweyten sind den Werthen von y in der obigen Gleichung entgegengesetzt, so daß die dort für den bestimmten, wörtlichen Sinn der Frage unbrauchbare negative Wurzel y hier positiv nach dem Sinn der veränderten Frage ist. Die beiden andern Combinationen der Wurzeln beider Gleichungen erfüllen die Forderung nicht.

Ein anderes sehr erläuterndes Beyspiel wird in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie. 12. Aufg. angetroffen.

Seit Descartes bis zu Wolfs Zeiten nannten manche die negativen Wurzeln falsche Wurzeln, weil sie sie entweder für ganz unbrauchbar (in dem wörtlichen eingeschränkten Sinne der Frage) hielten, oder auch, wiewohl auf eine zweydeutige und mißverständliche Art, durch den Ausdruck, wahre Wurzeln, diejenigen der gesuchten Größen bezeichneten, welche der Aufgabe nach den Voraussetzungen derselben Genüge thun, durch falsche aber diejenigen, welche in einem andern Sinne es leisten. Die Anwendung auf die Geometrie zeigte ihnen, daß die falschen Wurzeln so gut zur vollständigen Auflösung gehören als die wahren.

Man gebraucht für negative Größen bisweilen den paradoxen Ausdruck, weniger oder kleiner als Nichts. In der zweyten vorher erklärten Bedeutung negativer Größen läßt sich dieser Ausdruck nicht anwenden: allein bey den Gliedern einer Reihe, die durch fortgesetzte Verminderung Null, und dann negativ werden, hat er einen guten Sinn. So wie man ganz richtig sagt, $a-b$ ist kleiner als a, wenn $b < a$ ist, so sagt man auch analogisch richtig, $a-(a+b)$ oder $-b$, ist kleiner als a, wenn auch der Unterschied $-b$ absolut genommen größer ist als a. So ist auch beziehungsweise $-(a+b)$ kleiner als $-a$. Dieser Sprachgebrauch verhilft zu allgemein ausgedruckten Sätzen, und erspart die Aufzählung aller einzelnen Fälle. Die Hinzusetzung von $+a$ giebt Größeres, die Hinzusetzung von $-a$ oder Abziehung von $+a$ giebt Kleineres, wenn gleich der Quantität nach das umgekehrte erfolgt, nämlich in dem Falle, wenn die Hinzusetzung zu einer negativen Größe geschieht.

Die Veränderung einer Größe wird also bloß nach der Beschaffenheit der Veränderung benahmt. Sie ist eine Zunahme, wenn die Veränderung das Vorzeichen $+$ hat oder positiv ist; sie ist eine Verminderung, wenn diese das Vorzeichen $-$ hat oder negativ ist. Hat man eine Folge von Größen, nach irgend einer analytischen Form der Zusammensetzung, so werden diese als wachsend betrachtet, wenn zu einer vorangehenden y eine Größe $+\Delta y$ ge-

setzt wird, um die nächstfolgende y' zu erhalten; als abnehmend, wenn zu y die Größe — Δy gesetzt wird, um y' zu bekommen; obgleich, wenn y negativ ist, die Größen in jenem Falle abnehmen, in diesem aber zunehmen.

In der Differentialrechnung zeigt ein positiver Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ an, daß beide Größen x und y mit einander der Quantität nach wachsen oder abnehmen, wenn beide gleichnamige (beide positiv oder beide negativ) sind. Ein negativer Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt an, daß die eine der x und y der Quantität nach abnimmt, wenn die andere zunimmt, in dem Falle, da beide gleichnamig sind. Sind sie aber ungleichnamig, so zeigt der negative Quotient an, daß sie zugleich wachsen und abnehmen, z. B. Kreisbogen und Cosinus.

Principles of Algebra, by W. Frend. London 1796. Der Verfasser sucht das Studium der Algebra durch die Ausschließung der negativen Größen zu erleichtern. Francis Maseres hat dazu einen Anhang geliefert, der stärker ist als die Schrift selbst, 1798. Er stimmt mit Frend überein.

Neue Erörterungen über Plus und Minus ꝛc. von F. G. Busse. Erste Abtheilung. Cöthen 1801. in 8. Der Verf. will die Beziehungen der zu einer Verbindung gehörigen Größen durch die Vorzeichen + und — mit bezeichnen. Die Schrift ist zum Theil gegen meine Abhandlung über die Lehre von den entgegengesetzten Größen, in dem Hindenburgischen Archiv der Mathematik, Heft III. IV. gerichtet. Das daselbst und hier erklärte Verfahren bey der Anwendung entgegengesetzter Größen ist bisher in der That von den vorzüglichsten Mathematikern fast immer befolgt, nur ist nirgends die Theorie desselben gehörig auseinander gesetzt, und von ungleichartigen Beymischungen rein dargestellt worden.

Epicykloide ist die krumme Linie, welche ein in der Ebene eines Kreises befindlicher Punct beschreibt, indem dieser Kreis auf dem Umfange eines andern, in derselben Ebene mit ihm liegenden, Kreises sich um seinen Mittelpunct walzt, so daß die Bogen, die auf beiden Kreisen zwischen zusammengehörigen Berührungspuncten liegen, gleich groß sind. Oder die Bewegung um den Mittelpunct des sich walzenden Kreises ist so groß als die fortrückende Bewegung auf dem andern, dem ruhenden. Die Wälzung kann auf der convexen (äußern), oder auf der concaven (innern) Seite des unbewegten Kreises geschehen. In dem letztern Falle heißt die Curve eine Hypocykloide, wiewohl man auch häufig diese eine Epicykloide nennt. Alsdann unterscheidet man beide Gattungen durch die Beywörter äußere (oder obere) und innere (oder untere). Der unbewegte Kreis heißt die Grundlinie oder die Basis, der sich wälzende heißt der erzeugende oder beschreibende Kreis. Liegt der beschreibende Punct auf dem Umfange des bewegten Kreises, so ist die Curve eine Epicykloide im engern Verstande; liegt derselbe außerhalb des Kreises, so ist sie eine verkürzte, (curtata), liegt er innerhalb, so ist dieselbe eine gestreckte (elongata). Der beschreibende Punct bewegt sich in allen drey Fällen um einen gewissen Punct, der wiederum sich um den Mittelpunct der Basis bewegt, allein nur in dem erstern Falle ist seine Kreisbewegung gleich der fortrückenden Bewegung des Kreises auf dem Grundkreise; in dem zweyten ist jene größer, in dem dritten kleiner als diese. Es verhält sich hier wie bey der Cykloide, Th. I. S. 599. Wir wollen hier nur die eigentliche Epicykloide betrachten. Zuerst ein Satz aus der geometrischen Lehre von der zusammengesetzten Bewegung.

1. Es werde die gerade AB Tab. IX. (Fig. 17.) von einem Puncte gleichförmig beschrieben. Über derselben als Diagonale verzeichne man das Parallelogramm ACBD, so sind AC, AD die relativen Wege nach den Richtungen AC, AD, in welche der absolute Weg AB

zerlegt wird, oder, wenn AB die Geschwindigkeit nach der Richtung AB darstellt, so ist AC die relative Geschwindigkeit nach der Richtung AC, und AD die relative nach AD. Aus den relativen Geschwindigkeiten wird umgekehrt die absolute zusammengesetzt.

Ist Aa der krummlinichte Weg eines Körpers mit der Richtung und Geschwindigkeit AB in A, so sind AC, AD die relativen Geschwindigkeiten nach denselben Richtungen, in welche die nach AB zerlegt wird, so wie umgekehrt diese aus jenen zusammengesetzt wird.

2. Es sey AB (Fig. 18.) der Halbmesser des unbewegten Kreises, CB des bewegten, B der beschreibende Punct. Durch die Wälzung auf jenem komme der Punct d auf D, so daß der Bogen BD = Bd sey. Man ziehe AD, und nehme auf der Verlängerung derselben DE = CB, beschreibe aus E einen Kreis, nehme darauf den Bogen DF = BD, so ist F ein Punct der Epicykloide.

Den Bogen DF dem BD gleich zu machen, bemerke man, daß bey gleich großen Kreisbogen die Winkel sich umgekehrt wie die Halbmesser verhalten. Also ist ED : AB = BAD : DEF. In der Figur ist AB : DE = 20 : 9, und BFP die Hälfte der Epicykloide, die nach einer Umwälzung des erzeugenden Kreises die Basis trifft, und nach zwanzig Umwälzungen wieder bey dem Puncte B anfängt.

3. Die Halbmesser der Basis und des erzeugenden Kreises verhalten sich wie m : n; der Umfang des erstern Kreises sey = P, des andern = p, so ist m : n = P : p. und nP = mp. Sind m und n ganze Zahlen, so trifft nach m Umlaufen der beschreibende Punct wieder in denjenigen Punct der Basis ein, von welchem er ausgieng. In diesem Falle ist die Epicykloide eine algebraische Linie, für welche eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten Statt hat. Ist das Verhältniß m : n irrational, so besteht auch die Gleichung aus unendlich vielen Gliedern, indem der beschreibende Punct nie wieder in den Anfangspunct trifft, und daher die Curve unendlich viele Umgänge um die Basis macht, so daß eine gerade Linie sie in unendlich vielen Puncten treffen kann.

4. Man ziehe die Chorde FD, und nach dem Endpuncte G des Durchmessers DG die Chorde FG: es ist diese die berührende an der Epicykloide in F.

Bew. Der Punct F hat zwey relative Bewegungen, eine nach der Richtung FH senkrecht auf AF, die andere nach FI senkrecht auf EF. Denn so wie der Mittelpunct E seine Bewegung nach der auf AE in E senkrechten Richtung hat, so hat jeder Punct der Ebene des Kreises ebenfalls eine solche, senkrecht auf die den Punct mit A verbindende gerade Linie. Außerdem hat aber wegen der Wälzung auf der Basis, oder der Drehung um E, jeder Punct eine Bewegung senkrecht auf die von ihm nach E gezogene Linie. Die Geschwindigkeit des Punctes F nach der Richtung FI ist gleich der Geschwindigkeit des Punctes D, und die nach FH verhält sich zu der des Punctes D wie die von F und D beschriebenen Kreisbogen, das ist, wie AF : AD, also ist FH : FI = AF : AD. Man vollende das Pgrm HFIK, so ist FK die absolute Richtung des Punctes F, oder die berührende in F.

Man setze AB = a, CB = b, AF = z.

In dem Dreyeck AEF, dessen Winkel hier alle spitz sind, ist W. AFE = W. HFI des Pgrms FK, und, wenn AF nach f hin verlängert wird, der äußere W. EFf = W. FHK des Pgrms. Denn es ist AFE + EFH = HFI + EFH, wegen der rechten Winkel AFH, EFI.

Da in dem Dreyeck AEF ist $\sin AFE = \frac{AE}{AF} \sin E$, so ist $\sin HFI$ oder $\sin FHK = \frac{a+b}{z} \sin E$.

Zweytens, in demselben Dreyeck ist $\tang AFE = \frac{AE . \sin E}{EF - AE . \cos E}$, oder $\cot AFE = \frac{EF}{AE . \sin E} - \cot E = \frac{b}{(a+b) \sin E} - \cot E$. Da W. FHK = EFf =

$2R - AFE$, so ist $\cot FHK = -\cot AFE = \cot E - \frac{b}{(a+b)\sin E}$.

Drittens, in dem Dreyeck FHK ist $\cot FKH = \frac{KH}{FH \cdot \sin HK} - \cot FHK$, oder, weil $FH : KH = z : a$ ist, $\cot KH = \frac{a}{z \sin HK} - \cot FHK$.

Mittelst der vorher gefundenen Werthe des Sinus und der Cotangente von HK ist

$$\cot KH = \frac{a}{(a+b)\sin E} + \frac{b}{(a+b)\sin E} - \cot E.$$

$$= \frac{1}{\sin E} - \cot E = \frac{1 - \cos E}{\sin E} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} E^2}{2 \sin \frac{1}{2} E \cdot \cos \frac{1}{2} E}$$

$= \tang \frac{1}{2} E$; folglich $FKH = 90° - \frac{1}{2} E$. Da IF mit KH parallel ist, so ist W. IK = KH, und $IFK = 90° - \frac{1}{2} E$. Wegen des rechten Winkels IE ist $EFK = \frac{1}{2} E$. Man ziehe nach dem Endpuncte G des Durchmessers DG die FG, so ist W. EG $= \frac{1}{2} E$, also fällt FK in FG, oder die in F berührende geht durch G.

Daß die in F berührende durch G gehen müßte, konnte man daher schon abnehmen, weil die Ebene des Kreises sich in jedem Moment der Fortwälzung um den Berührungspunct D dreht, daher DF auf die berührende senkrecht ist, also diese selbst durch G geht.

5. In dem Dreyeck FAG ist I. $\sin G^2 = \frac{zz - aa}{4b(a+b)}$; II. $\cos G^2 = \frac{(a+2b)^2 - zz}{4b(a+b)}$; III. $\tang G^2 = \frac{zz - aa}{(a+2b)^2 - zz}$

Bew. In dem Dreyeck FAE ist $(a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos E = z^2$, also

$\cos E = \frac{2a + 2ab + 2bb - zz}{2b(a+b)}$. Daraus ist $1 - \cos E$ $= \frac{zz - aa}{2b(a+b)}$; $1 + \cos E = \frac{(a+2b)^2 - z^2}{2b(a+b)}$. Nun ist $1 - \cos E = 2 \sin \frac{1}{2} E^2 = 2 \sin G^2$, und $1 + \cos E = 2 \cos \frac{1}{2} E^2 = 2 \cos G^2$. So sind die beiden ersten Formeln dargethan. Aus diesen folgt unmittelbar die dritte.

6. Man verlängere die berührende AG auf der andern Seite nach Fg, es ist I. $\sin AFg = \frac{(a+2b)}{z} \sin G$; II. $\cos AFg = \frac{a}{z} \cos G$; III. $\tang AFg = \frac{a+2b}{a} \tang G$.

Die erste Formel ist die bekannte trigonometrische Grundformel für das Dreyeck FAG; die zweyte ist eben dieselbe für das Dreyeck FAD, worin aber $\sin ADF = \cos G$, und $\sin AFD = \cos AFg$ ist, weil DF auf FG in F senkrecht steht. Die dritte Formel ist eine unmittelbare Folge aus den beiden ersten.

7. Der Winkel BAF des veränderlichen Radius der Curve mit AB sey $= \omega$, es ist

$$\partial\omega = \frac{a+2b}{a} \cdot \frac{\partial z}{z} \sqrt{\frac{zz - aa}{(a+2b)^2 - zz}}.$$

Bew. Es ist $\tang AFg = \frac{z \partial\omega}{\partial z}$ (berühr. Linie, 27.). Hier setze man für $\tang AFg$ seinen Werth aus (6 und 5.), und multiplicire auf beiden Seiten mit $\frac{\partial z}{z}$, so entsteht die aufgestellte Formel.

8. Der Bogen BF sey $= s$, und $a + 2b = c$: es ist $s = \frac{cc - aa}{a} - \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a}$.

oder $s = \frac{2(a+b)}{a}(2b - FG)$.

Bew. Es ist nämlich $\partial s = \sqrt{(z^2 \partial \omega^2 + \partial z^2)}$, s. Rectification. Nun ist $z\partial\omega = \frac{c}{a}\partial z \sqrt{\frac{zz - aa}{cc - zz}}$, also $\partial s^2 = \frac{(cc-aa)zz}{aa(cc-zz)}\partial z^2$, und $\partial s = \frac{z\sqrt{(cc-aa)}}{a\sqrt{(cc-zz)}}\partial z$. Folglich

$$s = \text{Const} - \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a},$$

(Integralrechn. 40.). In B, wo $z = a$ ist, ist $s = 0$, also $\text{Const} = \frac{cc-aa}{a}$. So wird die erste Formel des Satzes erhalten.

Ferner ist die berührende Chorde $FG = 2b \cos G = 2b\sqrt{\frac{cc-zz}{4b(a+b)}}$, (5.).

Da $4b(a+b) = cc - aa$ ist, so ist $2(a+b) \times FG = \sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}$. Durch die Substitutionen aus diesen beiden Gleichungen wird die zweyte Formel erhalten.

9. Nimmt man $z = a + 2b = c$, so ist . . . $s = \frac{cc-aa}{a} = \frac{4b(a+b)}{a}$. Für diesen Werth von z ist $\omega = \frac{b}{a}\pi$, wo π der halbe Kreisumfang mit dem Halbmesser als Einheit ist. Es sey $BAP = \frac{b}{a}\pi$, und

$AF = a + 2b$, so ist der Bogen $BP = \frac{4b(a+b)}{a}$, also der Bogen $PF = \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a}$, oder $PF = \frac{2(a+b)}{a} \times FG$.

10. Die Area BAF zwischen den beiden Winkel-Ordinaten AB, AF und dem Bogen der Epicykloide BF ist =

$$\frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang cos}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$$

$$-\frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}.$$

oder $= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times$ Segm. circ. DF.

Bew. Die Area sey Z, so ist $\partial Z = \frac{1}{2} zz\partial\omega$ (s. Quadratur) also $\partial Z = \frac{c}{2a} z\partial z \sqrt{\frac{zz-aa}{cc-zz}}$, wenn $a + 2b = c$ gesetzt wird. Man setze $cc - zz = uu$, so ist $z\partial z = -u\partial u$, und

$$\partial Z = -\frac{c}{2a}\partial u\sqrt{(cc-aa-uu)}.$$

Die Integration giebt (Integralr. 36. u. 28.)

$$Z = \text{Const} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)}$$

$$-\frac{c}{4a}(cc-aa)\int\frac{\partial u}{\sqrt{(cc-aa-uu)}}.$$

$$= \text{Const} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)}$$

$$-\frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang sin}\frac{u}{\sqrt{(cc-aa)}}.$$

$$= \text{Const} - \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}$$

$$- \frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang. sin}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}.$$

Für $z = a$ ist $Z = 0$, und der Winkel in dem letzten Terminus $= 90$ Grad oder $\frac{1}{2}\pi$, also $\text{Const} = + \frac{c}{4a}(cc-aa) \times \frac{1}{2}\pi$. Demnach

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)\left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang sin}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}\right)$$

$$- \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}.$$

Der Winkel in dem ersten Terminus ist das Complement des Winkels, dessen Sinus $= \sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ ist, also ist es der Winkel, dessen Cosinus eben diesen Werth hat. So ist die erste Formel des Satzes erwiesen.

Weiter ist der Winkel zu Cosinus $\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ der W. AGF, (5.) und $\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)} = 4b(a+b)$ sin AGF. cos AGF $= (cc-aa)$ sin AGF. cos AGF, also

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)(\text{Ang AGF} - \text{sin AGF. cos AGF}).$$

Der Kreisbogen DF ist $= b$. Ang DEF, oder $2b$. Ang AGF, und Sector DEF $= bb$. Ang AGF. Auch ist $\Delta DEF = \frac{1}{2}\Delta DFG = \frac{1}{4}DF \times GF = bb$ sin G. cos G.

Setzt man nun für $\frac{c}{4a}(cc-aa)$ seinen Werth $\frac{a+2b}{a} \times b(a+b)$, so wird

$$Z = \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} (\text{Sect. DEF} - \Delta\text{DEF})$$

$$= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times \text{Segm. DF.}$$

11. Wenn der erzeugende Kreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, so daß der beschreibende Punct mit dem Berührungspuncte Q und dem Mittelpuncte des ruhenden Kreises in gerader Linie liegt, nämlich in P, so ist der Flächenraum zwischen AB, AP und dem Bogen BFP $=$ $\frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times$ area semicirc. PRQ, oder $\frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{1}{2} bb\pi$.

12. Der Winkel BAQ ist $= \frac{b}{a}\pi$, der Bogen BQ $=$ $b\pi$, der Sector BAQ $= \frac{1}{2} ab\pi$. Zieht man diesen von der ganzen Area BAPB ab, so bleibt die Area BQPB $= \frac{3a+2b}{a} \cdot \frac{1}{2} bb\pi = \frac{3a+2b}{a} \times$ area semic. PRQ.

13. Die Area BDF zwischen dem Kreisbogen BD, dem Bogen BF und der Chorde DF ist $= \frac{3a+2b}{a} \times$ segm. DF.

Bew. Denn es ist Sect. BAD $= \frac{a}{b}$ Sect. DEF, und ΔDAF $= \frac{a}{b}$ ΔDEF. Nun ist in dem Beweise der zweyten Formel (10.) gefunden

$$\text{Area BAF} = \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} (\text{Sect. DEF} - \Delta\text{DEF}).$$

Addirt man dazu das Dreyeck DAF, und subtrahirt den Sector BAD, so bleibt die Area BDF, und es ist also

$$\text{Area BDF} = \frac{3a+2b}{a}\,(\text{Sect. DEF} - \Delta\text{DEF})$$

$$= \frac{3a+2b}{a}\,\text{Segm. DF.}$$

14. Die Area DQPF ist $= \frac{3a+2b}{a}$ Segm. FDG.

Diese Formel giebt Joh. Bernoulli in der Lect. Hospit. XXII. Die Area DQPF und die BDF sind nämlich zusammen $= \frac{3a+2b}{a} \times$ area semicirc. FDG.

15. Der Halbmesser der Krümmung OF in F ist $= \frac{2(a+b)}{a+2b} \times$ DF.

Bew. Das Perpendikel auf die berührende in F aus dem Mittelpuncte A des ruhenden Kreises sey $AT = t$, der Halbmesser der Krümmung in dem Puncte F sey $= r$, so ist $r = \frac{z\partial z}{dt}$ (s. Krümmungskreis). Nun ist $AT = AG \times \sin AGT = (a+2b)\sin G = (a+2b)\sqrt{\frac{zz-aa}{4b(a+b)}}$ (6. I.). Man setze $\frac{\sqrt{4b(a+b)}}{a+2b} = p$, so ist $t = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{p}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{p\sqrt{(zz-aa)}}$; also $\frac{z\partial z}{\partial t} = p\sqrt{(zz-aa)} = p\sin G.\sqrt{4b(a+b)}$ $= \frac{4b(a+b)}{a+2b}\sin G = \frac{2\sqrt{(a+b)}}{a+2b} \times FD$, weil $FD = 2b\sin G$ ist.

16. Die krumme Linie, auf welcher die Mittelpuncte der Krümmungskreise, wie O, liegen, ist eine der BFP ähnliche Epicykloide, s. Evolute.

17. So wie DEF der Wälzungswinkel ist, wenn der Kreis von B nach D hin gerückt ist, so ist GEF der Wälzungswinkel, wenn der Kreis von Q nach D bewegt ist. Es ist nämlich bey der Berührung in Q der beschreibende Punct in P, auf der geraden AQP. Die Gleichung zwischen AF und einer trigonometrischen Function des Wälzungswinkels ist daher eine gedoppelte. In dem erstern Falle ist,

$$zz = aa + 4b(a+b)(\sin \tfrac{1}{2} DEF)^2,$$

wo $z = AF$ ist. In dem andern Falle ist, wenn AP oder $a + 2b = c$ gesetzt wird,

$$zz = cc - 4b(c-b)(\sin \tfrac{1}{2} GEF)^2.$$

Die erste Formel folgt aus (5. I.), die zweyte aus derselben, wenn für a gesetzt wird $c - 2b$, und $1 - (\sin \frac{1}{2} DEF)^2$ mit $(\cos \frac{1}{2} DEF)^2$, das ist mit $(\sin \frac{1}{2} GEF)^2$ vertauscht wird.

In der zweyten Formel ist b dem in der ersten Formel entgegengesetzt.

18. Die hier betrachtete Epicykloide, so sehr sie bloß etwas Beschauliches scheint, hat doch ihren praktischen Nutzen. Die Zähne der Kämme der Räder in Maschinen, und die Hebedaumen, welche Hebel bewegen, müssen nach einer Epicykloide geformt seyn, wenn die Maschine einen gleichförmigen Gang haben soll. Es sey AB der Halbmesser des Rades bis an den Punkt, wo der Zahn oder Kamm zuerst von dem Triebstecken berührt wird; ED der Halbmesser des Getriebes bis an die Axe der Triebstecken, die hier als eine Linie ohne Dicke betrachtet werden. Das Getriebe dreht sich wie der erzeugende Kreis für eine Epicykloide um den Mittelpunct, aber wälzt sich nicht, dagegen schiebt sich der Umfang des Rades unter demselben weg. Es ist einerley, ob der Kreis DEG sich auf BD wälzt, und dadurch C nach E rückt, oder ob der Bogen BD sich unter BC wegschiebt. Stellt man sich die Epicykloide auf der Ebene des Kreises um A gezeichnet vor, so bleibt bey der Wälzung der beschreibende Punct immer auf jener krummen Linie. Ist auf dem Rade der Kamm nach der Epicykloide BF geformt, und verhalten sich die Winkel, welche B und F beschreiben, umgekehrt wie AB und EF, so schiebt der Kamm den Trieb-

stecken ungezwungen fort, ohne Klemmung und Schlottern. Auch bleibt das Verhältniß der gegenwirkenden Kräfte immer dasselbe, wie in der dritten Abtheilung, Artikel, Rad und Getriebe, gezeigt werden wird.

Ist AB der Halbmesser einer Daumenwelle, BF der epicykloidisch geformte Hebedaumen, GFg ein Hebel, der um den Ruhepunct G gedreht wird, und verhalten sich die von AB und GFg zugleich beschriebenen Winkel wie GD: AB, so wirkt der Hebedaumen ungezwungen auf den Hebel, indem er sich daran hinschiebt, und von GFg berührt wird, ohne Verlust an Kraft und ohne Ungleichheit in dem Verhältnisse der entgegen wirkenden Kräfte. S. Hebedaumen in der dritten Abtheilung.

19. Diese nützliche Anwendung ist die Veranlassung zu der Construction der Epicykloiden gewesen. Römer, ein Dänischer Astronom, gerieth auf diese Curve, als er die schicklichste Gestalt der Zähne oder Kämme eines Rades suchte, um das J 1674. Dies bezeugt Leibnitz in einem Briefe an Joh. Bernoulli (Commerc. epist I. 247.). Er hat es von Römer selbst, wie er mit ihm zugleich in Paris war, und von Hungens vernommen. De la Hire hat eine ausführliche, aber sehr verwickelt abgefaßte Abhandlung über die Epicykloiden und ihre Anwendung in der Mechanik, geschrieben, die in einer kleinen besondern Sammlung: Mémoires de Mathématiques et de Physique, à Paris 1694, befindlich ist. Er erwähnt nichts von Römer, und scheint sich diese geometrische und mechanische Entdeckung zuzueignen.

20. Die äußere Epicykloide, die von einem auf dem Umfange eines sich wälzenden Kreises befindlichen Puncte beschrieben wird, ist die Brennlinie für zurückgeworfene Strahlen an einem Kreise. Der Halbmesser der Basis ist halb so groß als der von dem zurückwerfenden Kreise, und doppelt so groß als der von dem erzeugenden Kreise, wie es de la Hire in einer Abhandlung über die Brennlinien, in der gedachten Sammlung zuerst gezeigt hat. Auch ist die Brennlinie eine Epicykloide, wenn die Strah-

len von dem Endpuncte eines Durchmessers auffallen. S. Brennlinie und Caustica.

21. Wenn die Basis der Epicykloide einen unendlichen großen Halbmesser hat, so verwandelt sie sich in eine gerade Linie, und der erzeugende Kreis giebt eine Cykloide.

Ist aber der Halbmesser des erzeugenden Kreises unendlich groß, so entsteht durch Abwicklung des Umfanges der Basis eine Linie, welche man die Evolvirende nennen kann. Die Basis ist ihre Evolute. Anstatt des Bogens FD ist eine gerade Linie, die dem Bogen BD gleich ist, von dem Anfange der Abwicklung an bis an den Berührungspunct, s. Evolute.

22. Das ganze Verfahren für die äußere Epicykloide kann man auf die innere anwenden. In der Rechnung wird b durchgehends negativ. Denn in dem Dreyeck AEF wird für diese die Seite $AE = a - b$ statt $a + b$ an der äußern. Es ist zur deutlichern Einsicht rathsam, die Zeichnung und Rechnung für diesen Fall besonders zu machen.

Auch sieht man aus dem für die eigentliche Epicykloide angewandten Verfahren, wie die Untersuchung für gestreckte und verkürzte Epicykloiden anzustellen seyn würde.

Halley hat in den Philos. Trans. nr. 218. für den Flächenraum aller Arten von Cykloiden und Epicykloiden verglichen mit dem Flächenraum der zugehörigen Kreissegmente folgenden Satz bewiesen: Die Area dieser Curven verhält sich zu der Area des erzeugenden Kreises, wie die Summe der doppelten Geschwindigkeit des Mittelpunctes und der Geschwindigkeit der drehenden Bewegung zu der Geschwindigkeit dieser letztern, und eben so überhaupt die zusammengehörigen Flächenräume an der Curve und dem Kreise. Die Raume werden von dem Scheitel an gerechnet, und von dem Bogen der Basis, der Curve und dem Durchmesser PQ begranzt, s. 14.

23. Man kann jede Figur über einer andern Figur in derselben Ebene auf die Art, wie einen Kreis über einem andern, sich wälzen, und einen Punct in der Ebene der

erstern eine Linie beschreiben lassen. De la Hire hat in den Memoiren der Pariser Akademie vom J. 1706. den Abriß zu dem Verfahren gegeben, der aber unzureichend ist, obgleich Montucla den Aufsatz als ausführlich und nett geschrieben empfiehlt. Hingegen hat in derselben Sammlung vom J. 1707. Nicole Formeln angegeben, durch welche die Gleichung für die auf gedachte Art erzeugte krumme Linie gefunden wird. Es ist ein Eliminations-Proceß zwischen drey Paaren veränderlicher Größen, nämlich den rechtwinklichten Coordinaten der drey Curven. So wie Nicole die Methode vorträgt, scheint die bewegte Curve mit dem Wälzen zugleich rutschen zu können. Er bemerkt nicht, daß die Elemente der beiden Curven, der bewegten und der unbeweglichen, gleich groß sind, aber doch in der Formel, als wenn sie verschieden wären, beybehalten werden müssen, weil Differentiale an zwey verschiedenen Curven nicht mit einander verglichen werden können.

24. Wenn eine Parabel auf einer ihr gleichen sich wälzt, und zuerst die Scheitelpuncte zusammenfallen, so beschreibt der Scheitelpunct jener eine Cissoide. Nicole a. a. O. S. 124. der holl. Ausg.

25. Der Brennpunct der beweglichen Parabel beschreibt, bey dieser Voraussetzung, eine gerade Linie, die senkrecht auf die Axe der Parabel durch den Punct geht, der ausserhalb so weit von dem Scheitel absteht, als der Brennpunct von demselben.

26. Wenn eine Ellipse auf einer ihr gleichen sich wälzt, und die Scheitelpuncte beider zuerst in eins fallen, so beschreiben die Brennpuncte jener Kreise, deren Mittelpunct der andere Brennpunct ist, und der Durchmesser die große Axe. Eben so verhält es sich mit zwey Hyperbeln, bey gleicher Voraussetzung. Der Durchmesser der beschriebenen Kreise ist die Hauptaxe. Dieses beruht darauf, daß die Linien, die in der Ellipse und Hyperbel von den Brennpuncten nach einem Puncte der Curven gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. In der Parabel kommt statt der einen Linie eine parallele mit der Axe.

27. Eine sphärische Epicykloide wird von einem Puncte des Umfanges eines sich um seinen Mittelpunct drehenden Kreises beschrieben, indem derselbe zugleich auf einem andern Kreise herumgeführt wird, der in einer andern Ebene liegt, welche aber mit der Ebene jenes einen unveränderlichen Winkel macht. Ein senkrechter Kegel, der eine Ebene mit einer Seite berührt, und auf ihr herumrollt, so daß die Spitze an derselben Stelle bleibt, beschreibt mit einem Puncte des Umfanges seiner Grundfläche eine solche Epicykloide. Von dieser handeln Hermann in den Comment. Acad. Petrop. T. I. ferner Joh. Bernoulli, Maupertuis, Nicole und Clairaut in den Memoiren der Pariser Akademie vom J. 1732. Lexell in den Actis Petrop. T. III. a. a. 1779.

28. Will man verschiedene Methoden zur Entwickelung der Eigenschaften der Epicykloide kennen lernen, so sehe man nach Halleys Abhandlung in den Philos. Trans. nr. 218. die vorher angeführte Abhandlung von de la Hire; L'Hôpital Analyse des infin. petits, nr. 100. ff. Ioh. Bernoulli Lect. Hospit. Lect. XXI. seqq. Newtoni Principia Phil. nat. Prop. 48. 49. Euleri Introd. in Anal. Infin. T. II. §. 523. ff.

Epipedometrie ist derjenige Theil der Geometrie, der von der Vergleichung der Flächen handelt, nach einigen die Vergleichung von Körpern, die einerley Grundfläche haben. Das Wort wird jetzt nicht mehr gebraucht.

Epitagma, Anordnung, ein Kunstwort in der alten Geometrie, womit Pappus die verschiedene Anzahl und Lage der Puncte in der Aufgabe von dem bestimmten Schnitte einer Linie, als besondere Fälle verschiedener Aufgaben bezeichnet, in der Nachricht, die er von des Apollonius Schrift über diese Aufgabe ertheilt. Collect. mathem. L. VII. praef. S. bestimmter Schnitt.

Eratosthenes, Sieb des (Cribrum, Κοσκινον) ist eine Methode dieses alten sehr gelehrten Mathematikers und Astronomen im 3ten Jahrh. vor C. G. die Primzah-

len aus den übrigen Zahlen auszusondern. Sie ist folgende. Man setzt die Reihe aller ungeraden Zahlen hin, so weit als man es nöthig findet, als:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21,
23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39,
41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, etc.

Man streicht zuerst jede dritte Zahl nach 3 aus, als 9, 15; etc. dann das Quadrat von 5 oder 25, und jede 5te Zahl nach 25, als 35, 45, etc. darauf das Quadrat von 7 oder 49, und jede 7te Zahl nach 49. So fährt man fort, bis daß die erste nicht ausgestrichene Zahl, die zunächst auf diejenige folgt, deren Vielfache zuletzt ausgestrichen worden, so beschaffen ist, daß ihr Quadrat größer ist, als die letzte Zahl der Reihe, mit welcher man sie beschließt. Die nun übrig gebliebenen Zahlen sind einfache oder Primzahlen.

Nikomachus in seiner Einleitung zur Arithmetik, und aus ihm Boethius in seinem Abrisse derselben, haben von diesem Verfahren Nachricht gegeben. Sie machen aber zugleich die Factoren der Zahlen, welche Vielfache von andern sind, bemerklich, und fangen deswegen immer bey der Einheit des Vielfachen an, nicht bey ihrem Quadrat. Der bildliche Name eines Siebes, den das Verfahren erhalten hat, zeigt an, daß dieses nicht die Absicht des Eratosthenes gewesen ist, sondern das Aussondern der Primzahlen.

Horsley hat in den Philos. Transact. Vol. 62. eine Abhandlung über das Sieb des Eratosthenes geliefert. Er ist mit den gedachten beiden Schriftstellern unzufrieden, daß sie die Erfindung des alten Griechen verstellt haben. Sie ist hier nach seiner Erklärung vorgetragen. In der schönen Oxforder Ausgabe des Aratus vom J. 1672. ist eine Tafel der ungeraden Zahlen von 1 bis 113, mit den Theilern der zusammengesetzten unter ihnen, angehängt, unter der Aufschrift, Sieb des Eratosthenes. Diese Tafel ist also nach der Vorstellung des Nikomachus gemacht, vermuthlich von irgend einem Commentator desselben.

Erdmeßkunst, s. Geometrie.

Erhebung einer Zahl zu einer Dignität oder Potenz ist, ein Product aus Factoren machen, deren jeder ihr gleich ist.

Erklärung, (definitio), mathematische, ist die deutliche Darstellung eines mathematischen Begriffs durch Worte mit Hinzufügung des Wortzeichens, welches für den Begriff unveränderlich gebraucht werden soll.

In reinen mathematischen Erklärungen ist die Darstellung des Begriffs als Subject eines Satzes zu betrachten, dessen Prädicat das Wortzeichen ist, wenn gleich nach der grammatischen Stellung dieses das Subject zu seyn scheint. Das Wortzeichen zum Subject machen, ist nur, es grammatisch erklären. Es ist hier nicht der Fall, daß das Erklärte außer uns gegeben, und uns schon undeutlich und unvollständig bekannt wäre, so daß die Erklärung den deutlichen und vollständigen Begriff von der Sache geben muß, sondern in der reinen Mathematik entspringen alle Begriffe gleichsam auf unserm eigenen Grund und Boden. Die Erklärungen enthalten eine Form der Größe, welche wir eigenmächtig bilden. Wir gehen also von dem Begriffe zu dem Wortzeichen, nicht von dem schon irgendwoher gegebenen Wortzeichen zu dem Begriffe und dessen Auseinandersetzung. So hat man erst die Form der Kegelschnitte gefunden, und darauf die Benennungen, Ellipse, Parabel, Hyperbel, eingeführt. Wenn auch sinnliche Gegenstände Veranlassung zu einer geometrischen Form geben, so ist dieses nur zufällig, und die abstracte Form gehört doch ganz dem Verstande zu. Arithmetische und analytische Zusammensetzungen sind ganz reine Producte des Verstandes.

Eine mathematische Erklärung braucht nur in so fern bewiesen zu werden, daß zu zeigen ist, wie die darin liegende Form der Größe möglich, und geometrisch oder analytisch dargestellt werden kann. Z. B. Euklides erklärt ein Quadrat als eine vierseitige Figur mit vier gleichen Seiten und rechten Winkeln. In dem System zeigt er, wie eine solche Figur verzeichnet wird.

Die Eigenschaften einer Form der Größe kommen ihr ausschließlich zu, nämlich nach dem grammatischen Sinne des Worts, Eigenschaft. Daher kann man dieselbe Form oft ohne Zwang auf verschiedene Arten charakterisiren. Z. B. die Erklärung, welche Euklides in der 5ten Erkl. des 5ten Buchs von proportionalen Größen giebt, (s. Proportion), ward von ihm gewählt, weil sie zugleich auf rationale und irrationale Verhältnisse sich anwenden läßt, ohne daß man für die letztern eine besondere Erweiterung oder Ergänzung nöthig hat. Die Neuern pflegen die Erklärung zu nehmen, daß für proportionale Größen die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, weil dieses zur Rechnung bequem ist. Nimmt man Euklidens Erklärung, so folgt daraus der Lehrsatz, daß die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, sie mögen rational oder irrational seyn; so wie nach der Erklärung der Neuern die Euklidische sich in einen Lehrsatz verwandelt. — Von den geraden Parallelen kann man verschiedene Definitionen machen, wodurch dann ein verschiedener Gang in dem Theile des Systems, welcher die Parallelen betrifft, verursacht wird. Was nach der einen Methode zum Grunde gelegt wird, das wird nach der andern Folge. — Eine Ellipse ist eine krumme Linie, die auf eine gewisse Art durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entsteht; man kann sie auch durch die Gleichung erklären, welche aus dieser Entstehungsart hergeleitet wird, ohne inzwischen dabey diese Entstehung anzugeben. Man kann auch eine Eigenschaft der Ellipse zum Grunde legen, daß sie diejenige krumme Linie sey, in welcher die Summe der beiden aus zwey bestimmten Puncten an den Umfang gezogenen Linien unveränderlich ist.

Ermeßliche, vergleichbare, commensurable, Größen sind solche, welche von einem und demselben Maaße gemessen werden, als alle ganze Zahlen, und alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, oder auf solche gebracht werden können.

Ermeßliche Zahlen unter sich sind solche, die zwar einzeln von der Einheit oder einem aliquoten Theile

derselben nicht gemessen werden, allein sich doch wie ganze Zahlen verhalten, z. B. $\sqrt{8} : \sqrt{18}$, die sich verhalten wie 2 : 3, weil $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, und $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Diese Art irrationaler oder absolut unvergleichbarer Größen nennt man communicantes. Wolfii Elem. Anal. §. 63.

Ermeßliche Größen in der Potenz sind solche, deren Quadrate von einer und derselben rationalen Zahl, als geometrische von einem und demselben Flächenraume, gemessen werden, wie $\sqrt{5}$ und $\sqrt{17}$. Unter diese gehören auch die gleich vorher angeführten relativ ermeßlichen Größen. Die in der Potenz ermeßlichen Größen kommen in dem 10ten Buche der Euklidischen Elemente viel vor.

Erniedrigung einer Gleichung ist, sie auf die einfachste Form, der sie fähig ist, oder den möglich niedrigsten Grad bringen. Dieses geschieht, nachdem alle Glieder auf eine Seite das Gleichheitszeichen gebracht sind, durch Absonderung des Factors, der nicht zum Wesentlichen der Verbindung der Größen in der Gleichung gehört.

Errathende Rechenkunst (Arithmetica divinatoria) ist eine Sammlung von arithmetischen Spielereyen, Zahlen, die jemand im Sinne hat, durch Verknüpfung mit andern Zahlen zu entdecken. Dahin mag man auch rechnen, wenn aus mehrern Dingen das von jemanden in Gedanken gewählte durch Abzählen und Versetzungen angezeigt wird, und mehreres dergleichen. Sie dient zur Belustigung, bisweilen auch zur Übung in Übersicht arithmetischer Verbindungen, wodurch sie bey dem Unterricht junger Leute gut zu gebrauchen ist. In der natürlichen Magie von Wiegleb und Rosenthal findet sich ein reicher Vorrath dieser Kunststücklein. In den Recréations mathématiques par Ozanam, T. I. sind manche für Anfänger dienliche Aufgaben enthalten. Daselbst werden angeführt Problèmes plaisans et delectables par Bachet. Schwenters mathematische und philosophische Erquickstunden, 1651. nebst den beiden

Fortsetzungen von Harsdörfer, liefern auch dergleichen, so wie Ioco-serierum naturae et artis, s. Magiae naturalis centuriae tres, Auctore Aspasio Caramuelio (Kirchero), 1666. 4.

Ein paar Beyspiele mögen zur Anleitung dienen, die Beweise der Vorschriften in diesen Büchern zu finden.

Eine Zahl x, die jemand in Gedanken hat, zu entdecken, lasse man ihn dazu 2 addiren, die Summe mit der Zahl multipliciren, dann zu dem Product 1 addiren, und dann die Summe beider, a, angeben. Diese ist das Quadrat von $x + 1$, wodurch also x leicht gefunden wird.

Die Zahl bestehe aus zwey Ziffern, den Zehnern a, und den Einern b, so ist sie $10a + b$. Man lasse sie mit 2 multipliciren, und zu dem Product eine beliebige Zahl, 7, addiren, so entsteht die Summe $20a + 2b + 7$. Diese werde mit 5 multiplicirt, wodurch $100a + 10b + 35$ erhalten wird. Dieses Product lasse man mit 10 multipliciren, und dann eine Zahl, 4, addiren, so ergiebt sich $1000a + 100b + 354$. Diese Zahl lasse man sich angeben, und ziehe von derselben die bekannte Zahl 354 ab, so sind die beiden ersten Ziffern die gesuchte Zahl.

Auf diese Art kann man zwey und mehrere Zahlen herausbringen, wenn sie nicht über 9 sind. Wären sie größer als 9, und kleiner als 12, so müßte man statt der Multiplicatoren 2 und 5, die 2, 3, 4, 6 gebrauchen, wodurch noch mehr Mannigfaltigkeit des Verfahrens entsteht; die überschießende bekannte Zahl muß aber duodekadisch ausgedruckt werden. Bey noch größern Zahlen hätte man sich eines mehr erweiterten Zahlensystems zu bedienen. Dies ist ein Beytrag zu der errathenden Rechenkunst, den man in den Sammlungen noch nicht finden wird.

Drey Zahlen, x, y, z, durch Hülfe der Algebra zu entdecken, lasse man sich die Summen je zweyer, als $x + y$; $x + z$; $y + z$, geben, so hat man drey Gleichungen für die drey unbekannten Größen, woraus sie leicht bestimmt werden.

Euthymetria wird bisweilen derjenige Theil der Geometrie genannt, welcher die Betrachtung der geradlinichten Figuren enthält. Die erste Hälfte des Worts bedeutet das Gerade.

Evolution, Abwicklung einer krummen Linie, ist die stetige Bewegung einer geraden berührenden Linie und eines bestimmten Punctes auf derselben durch alle ihre Lagen an der Curve. Man lege auf oder an eine krumme Linie AMm (Fig. 19.) einen vollkommen biegsamen Faden ohne Dicke, das ist, eine biegsame mathematische Linie, die mit der Curve völlig zusammenfällt, befestige ihn in irgend einem Puncte m, und verlängere ihn in einem andern Puncte A nach der Richtung der berührenden AB, der Faden werde nach dieser Richtung gespannt, und nach der Seite jenes Punctes m hin bewegt, immer gespannt, ohne Drehung, so daß in dem Puncte M der gerade Theil des Fadens die Curve daselbst berühre, da der übrige Theil noch auf dem Bogen Mm liegt. Irgend ein Punct des Fadens, als der Anfangspunct A des Bogens selbst, oder einer auf der berührenden AB, wie B, beschreibt eine Curve BNn, die man die durch Evolution erzeugte (oder evolvirende, abwickelnde) nennt, so wie die AMm die abgewickelte, oder Evolute. Es erhellt, daß der gerade Theil des Fadens MN der Summe des Bogens AM und der geraden AB ist, wenn B der beschreibende Punct ist.

1. Der Radius MN der Evolvirenden BNn ist auf dieselbe senkrecht.

Die Coordinaten der Evolute seyn $AP = x$; $PM = y$; der Evolvirenden, $AQ = t$; $QN = u$, beide Paare rechtwinklichte, die Abscissen AP, AQ auf der die Curve in A berührenden. Der Bogen $AM = s$, der Radius $MN = z$. Es ist $PM + QN = (MS + SN)$. sin $MSP = MN$. sin MSP. Nun ist tang $MSP = \frac{\partial y}{\partial x}$ (berühr. Linie 14.), also sin $MSP = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}}$

$= \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial z}$, weil der Bogen AM und der Radius MN immerfort gleichviel zunehmen. Folglich

$y + u = \frac{z\partial y}{\partial z}$. Eben so ist $QP = MN.\cos MSP$, oder

$x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$. Die Differentiation giebt

$\partial y + \partial u = \partial y + \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$, wenn ∂z oder ∂s unveränderlich genommen wird, oder $\partial u = \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$. Eben so ist

$\partial t = -\frac{z\partial^2 x}{\partial z}$. Da ∂s unveränderlich gesetzt ist, so ist $\delta.(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, also $\partial x \partial^2 x = -\partial y \partial^2 y$, und $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = \frac{\partial x}{\partial y}$.

Nun ist $QS = QN.\tang QNS = QN.\tang SMP = \frac{u\partial x}{\partial y}$, also ist $QS = \frac{u\partial u}{\partial t}$. Dieses ist aber der Werth der Subnormale für den Punct N oder die Ordinate u, (berühr. Linie 41.), also ist NS senkrecht auf die Curve BNn.

2. Die berührende MN an der Evolute bis an die Evolvirende ist der Halbmesser der Krümmung an dieser.

Es sey $\frac{\partial u}{\partial t} = p$, der Halbmesser der Krümmung in N sey $= r$, so ist $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} . \frac{\partial t}{\partial p}$ (Krümmungskreis, 2.). Da $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial y}$ ist, so ist $p = \frac{\partial x}{\partial y}$, und

$$\partial p = \frac{\partial^2 x \partial y - \partial x \partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{(\partial y^2 + \partial x^2)\partial^2 x}{\partial y^3} = \frac{\partial z^2 \partial^2 x}{\partial y^3}.$$

In (1.) ist gefunden $\partial t = -\frac{z\partial^2 x}{\partial z}$, also ist

$\frac{\partial t}{\partial p} = -\frac{z\partial y^3}{\partial z^3}$. Ferner ist $1 + p^2 = \frac{\partial y^2 + \partial x^2}{\partial y^2}$

$= \frac{\partial z^2}{\partial y^2}$, und $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial z^3}{\partial y^3}$. Folglich ist $r = z$.

3. Die Evolute ist der geometrische Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise für diejenige Linie, die aus ihrer Evolution entsteht, und wird von den Halbmessern der Krümmung berührt. Diese Eigenschaft kann man auch zur Erklärung der Evoluten gebrauchen.

4. Aus der Gleichung für die Evolvirende BNn läßt sich mittelst der in (1.) gefundenen Formeln immer die für die Evolute herleiten. Denn es ist erstlich

$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$, und $\frac{\partial y}{\partial z} =$

$\frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$. Ferner ist

$z = -(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial p}$, also ist $\frac{z\partial x}{\partial z} = -(p^2 + 1)$

$\times \frac{p\partial t}{\partial p}$, und $\frac{z\partial y}{\partial z} = -(p^2 + 1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}$. Daraus

werden nun die in (1.) zwischen den Coordinaten beider Linien gefundenen Gleichungen folgende:

$$x = t - (p^2 + 1) \cdot \frac{p\partial t}{\partial p}$$

$$y = -u - (p^2 + 1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}.$$

Aus der Gleichung für die Evolvirende werden die Differential-Quotienten p, und $\frac{\partial t}{\partial p}$ hergeleitet, und durch t nebst u gegeben. Setzt man die Werthe derselben in jene beiden Gleichungen, so hat man nebst der für die Curve drey Gleichungen, woraus man die beiden veränderlichen t, u herausschaffen, und eine Gleichung zwischen x und y erhalten kann.

Die Abscissen x und t kann man, wo man will, anfangen lassen, da es ihr Unterschied ist, der in der erstern Gleichung durch p und $\frac{\partial t}{\partial p}$ gegeben wird.

5. Aus der Gleichung für die Evolute läßt sich nicht immer eine Gleichung für die Evolvirende, von Differentialen befreyte, herleiten. Ist die krumme Linie rectificabel, so ist z eine Function von x und y in endlichen Ausdrücken, und die Differentialquotienten, $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ werden durch x und y gegeben. Aus den beiden in (1.) gefundenen Gleichungen und der für x und y gegebenen läßt sich nun sowohl x als y herausschaffen, so daß eine Gleichung für t und u hervorgeht.

Ist aber z keine algebraische Function, von x und y, so ist die Gleichung zwischen t und u keine algebraische. Denn wenn sie es wäre, so wäre die Gleichung zwischen x und y nicht allein auch eine algebraische, sondern die Evolute wäre auch rectificabel, und z eine algebraische Function von x und y. Es kommt nun darauf an, ob die Gleichung, welche man durch die Substitution der in (4.) gefundenen Werthe von x und y in der Gleichung für dieselbe erhält, sich integriren läßt.

6. Exempel. Die Evolvirende BNn sey eine Parabel, deren Axe BQ ist, die Gleichung für die Evolute zu finden.

Die Abscissen der Parabel lasse man in dem Scheitel anfangen, wohin dann auch der Anfang der Abscissen x an der Evolute gelegt wird, zufolge der Bemerkung in (4.).

Der Parameter der Parabel sey a, so daß ihre Gleichung ist, $at = uu$. Also ist $a\partial t = 2u\partial u$; $p = \frac{a}{2u}$;

$p^2 + 1 = \frac{aa + 4uu}{4uu}$; $\partial p = -\frac{a\partial u}{2uu}$, folglich

$$x = t + \frac{aa + 4uu}{2a}$$

$$y = \frac{aa + 4uu}{aa} . u - u = \frac{4u^3}{aa}.$$

Die Verbindung mit der Gleichung $at = uu$ giebt

$x - \frac{1}{2}a = \frac{3uu}{a}$, also $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27u^6}{a^3}$. Da

$y^2 = \frac{16u^6}{a^4}$, so ist $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27}{16}ay^2$,

die Gleichung für die Evolute. Wenn in derselben $x = \frac{1}{2}a$ genommen wird, so ist $y = 0$, also ist der Anfang der Evolute in A, wo $AB = \frac{1}{2}a$, und der Halbmesser der Krümmung an der Evolvirenden in B ist $= \frac{1}{2}a$. Dieser Werth folgt auch aus der allgemeinen Formel für den Halbmesser der Krümmung an der Parabel, $r = \frac{(aa + 4uu)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, wenn in derselben $u = 0$ gesetzt wird.

Man setze $AP = w$, so ist $w^3 = \frac{27}{16}ay^2$, welches die Gleichung für eine parabola semicubica, oder die Neilische mit dem Parameter $\frac{27}{16}a$ ist. Sie hat auf der andern Seite der Abscissenlinie einen dem Zweige AMm ähnlichen und gleichen, beide ins Unendliche fortlaufend,

und in A eine Spitze, da hier die berührende in die Abscissenlinie fällt. Vergl. Th. 1. S. 137. f.

7. Zu einem Beyspiele des Verfahrens, aus der Evolute die Evolvirende zu finden, nehme man zur Evolute die Neilische Parabel AMm, mit dem Parameter a, setze hier $AP = x$; $PM = y$; so ist für die Curve, $x^3 = ay^2$; die Differentialgleichung, $3x^2\partial x = 2ay\partial y$; das Differential des Bogens oder des Radius MN,

$$\partial z = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Die Integration giebt

$$z = \frac{a}{27}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + c,$$

wo c eine willkührliche Linie ist, die von der Länge abhängt, welche man der Linie AB giebt. In A ist $x = 0$, und $z = \frac{8a}{27} + c$, so daß $AB = \frac{8a}{27}$ ist, wenn $c = 0$ genommen wird.

Die beiden Gleichungen für die Coordinaten an beiden Linien sind (1.)

$$y + u = \frac{z\partial y}{\partial z};$$

$$x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}.$$

Daraus ist

$$\frac{y + u}{x - t} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2}{2ay}, \text{ oder}$$

$$2ay^2 + 2auy = 3x^3 - 3x^2t.$$

Die Verbindung mit der Gleichung für die Curve giebt

$$2auy = x^3 - 3tx^2.$$

Diese quadrirt, und mit eben derselben verglichen giebt

$$4au^2 = x(x - 3t)^2 \qquad (A).$$

Die Gleichung $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$ wird durch gehörige Substitution

$$x - t = \frac{2}{27}(4a + 9x) + 2c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$9x - 27t - 8a = 54c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dieser Gleichung und der gleich vorher gefundenen (A) schaffe man x weg, so erhält man eine Gleichung für die Evolvirende mit der bestimmten Constante c.

Man setze $c = 0$, so ist $9x - 27t = 8a$, oder $9(x - 3t) = 8a$, oder $81(x - 3t)^2 = 64a^2$. Diese Gleichung verbinde man mit der Gleichung (A), so entsteht die Gleichung $81u^2 = 16ax$, und, für x seinen Werth gesetzt, $81u^2 = 16a(\frac{8}{9}a + 3t)$, oder

$$u^2 = \frac{16}{27}a\left(\frac{8}{27}a + t\right).$$

Dieses ist die Gleichung für eine Parabel, deren Parameter $= \frac{16}{27}a$ ist, mit dem Abstande $\frac{8}{27}a$ oder AB, des Anfangs der Abscissen vom Scheitel. Der Parameter der Parabel und ihrer Evolute verhalten sich wie 16:27, so wie es auch in (6.) gefunden ist.

8. Man sieht hieraus, wie man einer gegebenen krummen Linie eine parallele (gleichlaufende) ziehen könne, das ist, eine solche, die ihre Richtung in den successiven Puncten eben so ändert, wie die gegebene, wobey die parallelen berührenden beider in den correspondirenden Puncten einen gegebenen Abstand haben, wie in zwey concentrischen Kreisen. Man suche zu dem Ende die Gleichung für die Evolute AMm einer gegebenen Linie BNn, und setze den Anfangspunct der Abscissen in A auf der geraden BAP. Aus jener Gleichung leite man den Werth von z oder $\int(\partial x^2 + \partial y^2)$ her, und bestimme die Constante so, daß

für $x = o$ der Werth von z an der parallelen Curve von dem an BNn, oder von AB, um den gegebenen Abstand der parallelen berührenden verschieden sey. Nun hat man aus der Gleichung für die Evolute, und den beiden allgemeinen, $y + u = \frac{z\partial y}{\partial z}$, und $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$, die Coordinaten, x, y, wegzuschaffen, um die Gleichung für die gesuchte Linie zu erhalten.

Zum praktischen Gebrauch (bey Gewölbebogen, Kämmen der Räder in Maschinen) mag man die krumme parallele so beschreiben, daß man zuerst die Evolute durch Hülfe einiger Puncte zeichne, und an dieser, statt des vorher gebrauchten Fadens, ein Linial herumführe, welches die Evolute stetig berührt, und mit einem darauf bemerkten Puncte an seiner Schärfe die gegebene Curve beschreibe, so wird irgend ein anderer daran bemerkter Punct eine parallele mit jener beschreiben. Oder anstatt die Evolute zu zeichnen, ziehe man mehrere Normalen an die gegebene Curve, und trage darauf von dieser an den Abstand der parallelen von jener, so erhält man eine Anzahl Puncte, die durch einen freyen Zug zu verbinden sind.

Ein sehr gutes Beyspiel an der Ellipse giebt von Prasse in Dissertatione de Ellipseos evoluta et aequidistantibus. Lipsiae 1798.

Kaestner de curvis aequidistantibus, Commentt. Soc. Goetting. T. XI. und in der Analysis des Unendl. §. 95.

9. Die krumme Linie zu finden, deren Evolute mit ihr in den zusammengehörigen, durch Normale an dieser, und berührende an jener (der Evolute) verbundenen Puncten gleich große Ordinaten hat.

Die krumme Linie sey ANB (Tab. X. Fig. 20.), und ihre Evolute AMC. Die Normale an jener NM berührt diese in M. Es sey nun die Ordinate $NQ = PM$, so ist $NS = SM$, oder $MN = 2NS$. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen ist $y = u$, also $2y = \frac{z\partial y}{\partial z}$,

oder $\frac{2\partial z}{z} = \frac{\partial y}{y}$. Die Integration dieser logarithmischen Differentiale giebt $\frac{zz}{aa} = \frac{y}{b}$ (Different. Formeln 14.), wo a und b zwey willkührliche Constanten sind. Also ist $zz = \frac{aa}{b} y = \frac{aa}{b} u$, oder kürzer $zz = 4cu$, wo c eine unveränderliche Größe bedeutet.

Die Subnormale QS ist $= \frac{u\partial u}{\partial t}$ (berühr. Linie, 42.), also ist $NS^2 = NQ^2 + QS^2 = u^2 \left(\frac{\partial t^2 + \partial u^2}{\partial t^2}\right)$. Da $2NS = z$, und $zz = 4cu$, so ist $u(\partial t^2 + \partial u^2) = c\partial t^2$, oder $u\partial u^2 = (c-u)\partial t^2$, und

$$\partial u \sqrt{\frac{u}{c-u}} = \partial t,$$

als die Differentialgleichung für die gesuchte evolvirende Linie.

Die Gleichung integrirbar zu machen, verwandle man sie in folgende,

$$\frac{u\partial u}{\sqrt{(cu-uu)}} = \partial t.$$

Die Integration (s. Integralformeln) giebt

$t = \frac{1}{2} c \text{ Ang. sin. vers.} \frac{2u}{c} - \sqrt{(cu-uu)}$, wobey

Const $= 0$ ist. Es sey Ang. sin. vers. $\frac{2u}{c} = \varphi$, so ist

$\sin\varphi^2 = \frac{2u}{c}\left(2 - \frac{2u}{c}\right) = \frac{4(cu-uu)}{cc}$, also ist

$$t = \tfrac{1}{2} c (\varphi - \sin\varphi)$$
$$u = \tfrac{1}{2} c (1 - \cos\varphi).$$

Es ist nämlich $1 - \frac{2u}{c} = \cos\varphi$.

Jene beiden Gleichungen gehören für die Cykloide (s. Cykloide, I.), welche durch die Wälzung eines Kreises, dessen Durchmesser c, von einem Puncte des Umfanges beschrieben wird. Die Benennungen, x, y, a, a. a. O. sind hier mit t, u, $\frac{1}{2}$c vertauscht.

Die Subnormale QS ist $\frac{u\partial u}{\partial t} = \sqrt{(cu - uu)}$ $= \frac{1}{2}c \sin\varphi$. Da SP = QS ist, so ist AP oder $x = \frac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi)$. Man ziehe AE senkrecht auf AP und MV parallel der letztern, so ist an der Evolute

$$AV = \frac{1}{2}c(1 - \cos\varphi)$$
$$VM = \frac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi).$$

Diese Linien sind die Coordinaten einer Cykloide, deren erzeugender Kreis den Durchmesser c hat, wie die ANB, aber an der Cykloide AMC ist A der Scheitel, von welchem an die Abscissen auf der Axe AE genommen werden. Die Werthe von AV und VM haben eben die Form, welche die von EQ und QM in dem Art. Cykloide, II. haben. Nur gehören daselbst diese Ordinaten zu demselben Puncte mit den Coordinaten AP, PM, hier aber gehören AV und VM zu einem andern Puncte M als der durch AQ und QN bestimmte N ist, außer in dem Falle $\varphi = 90°$.

Man nehme AE = c, so ist $\cos\varphi = -1$; $\varphi = \pi$, und EC = $\frac{1}{2}c\pi$, dem halben Umfange des erzeugenden Kreises. Die Evolute der halben Cykloide ANB ist sie selbst in einer umgekehrten und entgegengesetzten Lage. Die Evolute der andern Hälfte schließt sich an AMC in C mittelst einer Spitze und gemeinschaftlicher berührenden zwischen beiden

10. Man krümme zwey blecherne Streifen nach der Linie AMC, und füge sie auf die Art zusammen, wie die beiden Hälften der Evolute der Cykloide sich an einander schließen, stelle sie umgekehrt, so daß CFB lothrecht, und B der unterste Punct sey. Dann lege man an AMC einen

Faden mit einem Gewichte in A (welches man man sich als einen einzigen schweren Punct zu gedenken hat), so schwingt dieser schwere Punct in der Cykloide hin und her. Läßt man ihn von irgend einem Puncte N an fallen, so gebraucht er dieselbe Zeit bis zu dem untersten Puncte, und von da wieder bis zu dem in der andern Hälfte der Cykloide mit N gleich hoch liegenden, wie von jedem andern Puncte. Diese merkwürdige Entdeckung, so wie von der Evolute der Cykloide, hat Huygens gemacht, und in der Schrift, Horologium oscillatorium, Parisiis 1673. Fol. erwiesen. Die Gleichheit der Schwingungszeiten findet nur in einem leeren Raume statt, und in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Euleri Mechanica T. II. §. 584.

11. Die Evolute der Epicykloide zu finden, deren beschreibender Punct auf dem Umfange des erzeugenden Kreises liegt.

Es ist (Fig. 18.) BDQ der Grundkreis, A sein Mittelpunct; FDG der erzeugende Kreis; E der Mittelpunct; F der beschreibende Punct, GFT die berührende; FD die Normale, auf welcher der Mittelpunct des zu F gehörigen Krümmungskreises O ist. In dem Artikel, Epicykloide, ist gesetzt $AD = a$; $DE = b$; $AF = z$. Ferner ist daselbst (15.) gefunden $FO = \frac{2(a+b)}{a+2b} \times DF$. Man setze $\frac{2(a+b)}{a+2b} = m$, und für DF seinen Werth, $2b \sin G$, so ist $FO = 2mb \sin G$. Eben daselbst (5. I.) ist gezeigt, daß $\sin G^2 = \frac{zz - aa}{4b\,a+b)}$, und (6. I.) daß $\sin AFg = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Da FO senkrecht auf die berührende Fg oder FG ist, so ist $\cos AFO = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Die Linie AO aus dem Mittelpuncte A an den Mittelpunct

der Krümmung wird in dem Dreyeck AFO durch AF, FO und den Winkel AFO gegeben. Es ist nämlich

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 - 2AF \times FO \times \cos AFO.$$

Aus der zweyten der obigen Formeln ist

$$zz = aa + 4b(a + b) \sin G^2,$$

also ist

$$AO^2 = aa + 4b(a + b - m(a + 2b) + m^2 b) \sin G^2$$
$$= aa - 4(m - 1)b(a - (m - 1)b) \sin G^2.$$

Dieser Werth von AO hat dieselbe Form mit dem für z, indem statt des Halbmessers b des erzeugenden Kreises hier $-(m-1)b$, das ist, $-\frac{ab}{a+2b}$ gesetzt ist. Aber die Evolute der Epicykloide kann nicht eine innere seyn, wie die Negation von b sonst nach (Epicykloide, 22.), anzeigt, weil diese nach dem Umfange des Grundkreises hin hohl ist, die Evolute aber nach der äußern Epicykloide und daher nach dem Grundkreise hin convex seyn muß. Allein in dem Artikel, Epicykloide (17.) ist bemerkt, daß die Formel,

$$zz = cc - 4b(c - b)(\sin \tfrac{1}{2} GEF)^2$$

auch für die äußere Epicykloide gehört, nur daß der Wälzungswinkel von dem entferntesten Puncte des bewegten Kreises an gerechnet wird, so wie auch c den Abstand dieses Punctes von dem Mittelpuncte des ruhenden Kreises bedeutet. Also ist auch hier für die Evolute eine äußere Epicykloide zu nehmen, an welcher der Abstand des Scheitels von $A = a$; der Halbmesser des bewegten Kreises $= (m-1)b$ oder $\frac{ab}{a+2b}$, also der Halbmesser des ruhenden $= \frac{aa}{a+2b}$, und der Wälzungswinkel 2G von dem entferntesten Puncte des bewegten Kreises an gerechnet wird. Der Scheitel liegt in B; der Radius zu der ersten Spitze macht mit AB den Winkel $\frac{b\pi}{a}$ oder $\frac{b}{a} \cdot 180°$.

An der innern Epicykloide liegt eine Spitze in B, der nächste Scheitelpunct um den Winkel $\frac{b\pi}{a+2b}$ an dem Mittelpuncte A davon entfernt, wo der Radius $= \frac{aa}{a+2b}$ ist. Die Gränzen für den Radius sind an beiden Epicykloiden dieselben, nämlich a und $\frac{aa}{a+2b}$, aber bey demselben Wälzungswinkel ist die Lage ganz verschieden.

12. Ein anderes Verfahren, die Evolute der Epicykloide zu finden lehrt Joh. Bernoulli, Lect. Hospit. XXIV.

Tschirnhausen hat schon gefunden, daß die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen, die eine Epicykloide ist, durch Abwickelung die Brennlinie eines im Durchmesser doppelt so großen Kreises erzeugt. Es ist aber nur für diesen besondern Fall, daß er es darthut. Acta Erud. 1690, pag. 169.

13. Die Evolute der Epicykloide ist derselben ähnlich. Die Basis und der erzeugende Kreis der letztern haben die Halbmesser, a, b; an der Evolute haben diese Kreise die Halbmesser $\frac{aa}{a+2b}$; $\frac{ab}{a+2b}$, welche sich wie a:b verhalten. S. analytische Ähnlichkeit.

Die Halbmesser der Krümmung an beiden Linien für gleiche Wälzungswinkel verhalten sich wie die Halbmesser der erzeugenden Kreise Denn die Chorde dieses Winkels, von dem Berührungspuncte des erzeugenden Kreises mit dem Grundkreise bis an den beschreibenden Punct sey an der evolvirenden $= f$, an der Evolute $= g$, so ist an jener der Halbmesser der Krümmung $= \frac{2(a+b)}{a+2b} f$. Setzt man für a und b die gleichnamigen Halbmesser, die zu der Evolute gehören, so bleibt der Factor $\frac{2(a+b)}{a+2b}$ derselbe, und

der Halbmesser der Krümmung ist $\frac{2(a+b)}{a+2b}g$. Da f und g sich wie die Halbmesser ihrer Kreise verhalten, so verhalten sich die Halbmesser der Krümmung eben so.

Bey der ähnlichen Form haben Epicykloide und Evolute entgegengesetzte Lage. Darum nennt man sie auch verkehrt ähnlich. S. Kästners Anal. d. Unendl. §. 578. ff.

14. Die Linie, welche durch die Abwickelung eines Kreises beschrieben wird, ist als eine Epicykloide anzusehen, deren erzeugender Kreis einen unendlich großen Halbmesser hat Der Kreisbogen FD (Fig. 18.) wird dadurch zu einer geraden Linie, der Winkel E wird Null, und W. FDE ein Rechter, so daß FD die BD berührt. Wir werden dieses aber aus der unmittelbaren Betrachtung dieser Linie folgern.

Es sey ADBA (Tab. X. Fig. 21.) ein Kreis, dessen Mittelpunct C ist. Man ziehe einen Halbmesser CD, und durch D darauf die senkrechte DF, nehme DF gleich dem Bogen AD, so ist F ein Punct der durch die Evolution entstandenen Linie.

Man setze $AC = a$, $CF = z$, ACF oder $ACE = \omega$, so ist $\frac{z}{a} = \sec DCF$, und $DCF = \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}$, also $ACD = \omega + \text{Ang. sec} \frac{z}{a}$, und der Bogen $AED =$ $= a\left(\omega + \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}\right)$. Diesem ist die gerade DF gleich. Also ist $a\left(\omega + \text{Ang. sec} \frac{z}{a}\right) = \sqrt{(zz-aa)}$, und

$$\omega = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a} - \text{Ang. sec.} \frac{z}{a}.$$

Hieraus entsteht die Differentialgleichung,

$$\partial\omega = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{az}\partial z.$$

Es ist nämlich das Differential des ersten Theils von

$$\omega = \frac{z\partial z}{a\sqrt{(zz-aa)}}, \text{ und } \partial.\text{Ang. sec}\frac{z}{a} = \frac{a\partial z}{z\sqrt{(zz-aa)}},$$

(Different. Formeln, 33.), wo $\frac{s}{a}$ ein Bogen oder Winkel für den Halbmesser als Einheit ist, wie derselbe hier angenommen ist.

Die Gleichung entsteht aus der für die Epicykloide (s. diese, 5.), wenn b unendlich groß gesetzt wird.

Der Bogen AF ist $= \frac{zz-aa}{2a}$, oder die dritte proportionale zu dem Durchmesser AB und dem Kreisbogen AD. — Denn es sey AF $= s$, so ist $\partial s = \sqrt{(z^2\partial\omega^2 + \partial z^2)}$, (Rectification), das ist, $\partial s = \frac{z\partial z}{a}$ also $s = \frac{zz}{2a} + \text{Const.}$ Für $z = a$ ist $s = o$, also Const $= -\frac{1}{2}a$, und $s = \frac{zz-aa}{2a}$. Da Bog. AD $= \sqrt{(zz-aa)}$, so folgt daraus der zweyte Ausdruck für AF.

Die Area ACF ist $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a}$. Denn es ist ihr Differential $= \frac{1}{2}z^2\partial\omega$ (s. Quadratur), und für $\partial\omega$ seinen Werth gesetzt, ist es $= \frac{z\partial z\sqrt{(zz-aa)}}{2a}$, woraus sogleich das Integral, als die Area, ohne eine Constante zu bedürfen, folgt.

$$\text{Die Area AEDFA ist} = \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} = \frac{(\text{Bog. AD})^3}{6a}.$$

Denn das Dreyeck CDF ist gleich dem Kreissector ACD. Addirt man zu der Area ACF jenes, und subtrahirt dafür diesen, so wird die Area zwischen den Bogen, AF, AD und der geraden DF erhalten.

Zieht man BG senkrecht auf den Endpunct B des Durchmessers AB, und nimmt BG gleich dem halben Umfange des Kreises, so ist G ein Punct der Curve, und die Area AEBGA gleich dem sechsten Theile des mit dem Halbmesser BG beschriebenen Kreises. — Denn da der Halbkreis $= \pi a$ ist, so ist die Area AEBGA $=$ $\frac{\pi^3 a^3}{6a}$ $\frac{1}{6}\pi . \pi^2 a^2$. Die Area des mit dem Halbmesser πa beschriebenen Kreises ist $\pi(\pi a)^2$.

Der Halbmesser der Krümmung in F ist $=$ DF. Denn es sey die senkrechte CT aus dem Mittelpuncte C auf die berührende FT $= t$, der Halbmesser der Krümmung $= r$, so ist $r = \frac{z\partial z}{\partial t}$, (s. Krümmungskreis). Es ist aber CT $=$ DF, da DF den Kreis berührt, und auf die Evolvirende senkrecht ist, also ist $t = \sqrt{(zz-aa)}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{\sqrt{(zz-aa)}}$, folglich $r = \sqrt{(zz-aa)} =$ DF.

Die letztere Formel folgt sogleich aus der für den Halbmesser der Krümmung an der Epicykloide, wenn (s. das. 15.) der Halbmesser b unendlich groß genommen wird, also Bogen und Chorde sich gleich werden. Wegen der Formel für den Bogen AF, um sie aus der für die Epicykloide (s. das. 8.) herzuleiten, ist zu bemerken, daß für einen verschwindenden Winkel φ ist $1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$, (s. Cyklometrie, 6.), und daß der Bogen der Epicykloide sich auch so ausdrucken lasse, $s = \frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos G)$,

oder $\frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos\frac{1}{2}E)$, woraus sich denn für ein unendliches b, mit Zuziehung jener Formel, der Werth des Bogens ergiebt. Was die Area betrifft, so ist zu merken, daß ein Kreissegment für den Winkel φ mit dem Halbmesser b ist $= \frac{1}{2} b^2 \varphi - b^2 \sin\frac{1}{2}\varphi . \cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} b^2 (\varphi - \sin\varphi)$. Da $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 +$ etc. ist (Cyklometrie, 5.) so verwandelt sich für ein verschwindendes φ das Segment in $\frac{1}{12} b^2 \varphi^3$, wo $b\varphi$ der Bogen zu dem verschwindenden Winkel ist. Mittelst dieses Werthes des Segments verwandelt sich die Formel für die Epicykloide (10.) in die hier gefundene.

Die Abwicklung des Kreises kann unendlich oft wiederholt werden, daher die dadurch erzeugte Curve unendlich viele, sich immer mehr erweiternde Umläufe um C macht.

15. Die Linie, deren Evolute der Kreis ist, hat einen wichtigen Nutzen in der Mechanik. Wenn die Hebelatte eines senkrechten Stampfers mit gleichförmiger Kraft und Bewegung ohne Klemmung gehoben werden soll, so muß der Hebedaumen nach einer Curve, wie jene ist, geformt seyn. Es ist AB der Durchmesser der Daumenwelle oder eines concentrischen Kreises. Man sehe meine Encyklopädie, 2te Ausg. Th. III. S. 476.

16. Die mechanische Construction der Curve ist leicht. Man setze BG senkrecht auf AB in B, und mache BG dem halben Umfange gleich, so genau als es der Maaßstab zuläßt. Den halben Umfang theile man in 3, oder 4 oder mehr Theile, und in eben so viele die Linie BG, so erhält man für jeden Theilungspunct wie D die Länge der auf CD senkrechten DF. Auf ähnliche Art wird die krumme Linie weiter fortgesetzt. Man kann sich bequem des Halbmessers der Krümmung in jedem Puncte bedienen, und die Curve beynahe aus Kreisbogen zusammen setzen.

17. Die Evolute der logarithmischen Spirallinie, an welcher der Winkel der Curve mit der berührenden ein halber Rechter ist, ist sie selbst, in einer ähnlichen Lage, wie diese; ist jener Winkel ein anderer, auch beständiger, so ist die Evolute eine ähnliche Spirale. S. Spirallinie.

18. Die Evolution einer krummen Linie ist zuerst von Huygens eingeführt worden. In der Schrift, Horologium oscillatorium, hat er sie synthetisch, nach der Methode der Alten, behandelt. Die Analysis des Unendlichen war 1673. als die Schrift herauskam, noch nicht im Gebrauche, nur Newtons Eigenthum. Tschirnhausens Bemerkung über die Evolution einer Epicykloide in einem einzelnen Falle ist in (12.) angeführt. Jakob Bernoulli fand, daß die logarithmische Spirallinie mit dem (17.) angegebenen beständigen Winkel zur Evolute sich selbst hat. Acta Erud. 1692. Hernach zeigte G. W. Kraft in den ältern Commentarien der Petersburger Akademie, T. II. a. a. 1727, daß nur die Cykloide, die Epicykloiden, und die Spiralen durch Abwickelung sich selbst oder ähnliche erzeugen. Euler hat diese Untersuchung auch vorgenommen, und auf die Evoluten der Evoluten angewandt. Investigatio curvarum, quae evolutae sui similes producunt, Comm. Acad. Petrop. vet. T. XII. Etwa dreyßig Jahre nachher hat er diese Untersuchung noch allgemeiner angestellt, mit der in einem so langen Zeitraume gewonnenen Erweiterung der Analysis. Investigatio curvarum, quae similes sunt suis evolutis, vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel ordinis cujuscunque. Nova Acta Petrop. T. I. a. a. 1783. Ein Auszug aus der ältern Eulerischen Abhandlung in Kästners Analysis d. Unendl. §. 578 — 590.

Evolution, analytische, ist entweder dasselbe mit Ausziehung einer Wurzel aus einer zwey- oder mehrtheiligen Größe, oder allgemeiner, die Umwandlung irgend einer analytischen Zusammensetzung in ein Aggregat von Gliedern, es sey von einer endlichen Anzahl oder einer unendlichen, z. B. eines Products, eines Quotienten, der Wurzel einer Gleichung, der Größe, nach welcher eine Reihe geordnet ist, wohin auch der zuerst angeführte Fall gehört. Das entgegengesetzte der Evolution ist Involution.

Exhaustions-Methode ist ein Verfahren, Größen, welche sich durch ihre vollständigen Theile nicht

vergleichen lassen, vermittelst anderer Größen zu vergleichen, welche jene zwar nicht vollkommen erschöpfen, aber doch ihnen als Gränzen unbestimmt nahe gebracht werden können.

Die alten Geometer bedienten sich desselben bey Vergleichung krummlinichter Figuren, krummer Oberflächen und runder Körper. Es machte ihre Analysis des Unendlichen aus, welche näher zu kennen es sich verlohnt, sowohl um sie mit der unsrigen, so viel weiter greifenden, zu vergleichen, als auch um zu sehen, wie künstlich sie ein sehr einfaches Werkzeug zu gebrauchen gewußt haben. Sie betrachteten eine krumme Linie nicht als ein Polygon von unendlich vielen Seiten; sie zerlegten Figuren, Körper und Oberflächen, nicht in unendlich viele, unendlich kleine Theile, sondern das Krumme unterschieden sie sorgfältig von dem Geradlinichten, und verglichen nur Theile, die ostensibel sind, oder eine endliche, vergleichbare Größe haben. Sie betrachteten aber die krummlinichten Figuren als Gränzen von geradlinichten, und zeigten, daß das Verhältniß derselben zu einer ebenen weder größer noch kleiner seyn könne, als ein gewisses bestimmtes, und so auch an Körpern und Oberflächen. Es war bey ihnen ein Grundsatz, daß jede Größe so oft genommen werden kann, bis sie jede Größe ihrer Art übertrifft; sie würden aber den Satz, daß eine unendlich kleine Größe, unendlich oft genommen, etwas endliches giebt, schwerlich sich haben gefallen lassen.

Ein Satz, der zu den Beweisen in der Geometrie des Krummen von den Alten gebraucht wird, ist folgender: Sind zwey ungleiche Größen, A, a, gegeben, und man nimmt von der größern A mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort, so kommt man irgend einmahl auf einen Rest, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe a. Euklides Elemente, X, 1. Die Alten sagten nicht, die Theile einer Größe können unendlich klein genommen oder gedacht werden.

Die Exhaustions-Methode, welche, wie gesagt, die Analysis des Unendlichen der Alten ausmacht, ist von viererley Art. Die erste lernt man aus dem zwölften Buche

der Euklidischen Elemente, die andern aus den Schriften des Archimedes kennen.

I. Die erste Methode hat folgenden Gang. Die nicht erschöpfenden Theile zweyer Größen, welche diesen aber unbestimmt nahe kommen können, verhalten sich beständig wie zwey gegebene, a:b, so verhalten sich auch die Gränzen wie a:b.

C P pA Q DqB E

F

Es stellen die Linien CA, CB die beiden zu vergleichenden Größen vor, diese mögen nun Linien, Flächen oder Körper seyn, als allgemeine Zeichen, wie die Buchstaben bey den Neuern. Die Theile CP, CQ beider Größen sind auf eine gewisse Art der Form nach bestimmt, es sey nun, daß sie einerley Form oder verschiedene haben; sie haben dadurch, als zusammengehörige Größen, ein gegebenes Verhältniß, a:b, bey veränderlicher Größe, und können ihren Gränzen, CA, CB, so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner ist als irgend eine gegebene Größe. Verhalten sich nun CA und CB nicht wie a:b, so sey a:b = CA:Z, wo Z entweder kleiner oder größer als CB ist. Es sey zuerst Z kleiner als CB, und werde durch CD angedeutet. Man nehme von CB den Theil Cq, der die gegebene Form hat, und größer als CD sey, welches der Voraussetzung nach möglich ist, und von CA den Theil Cp, ebenfalls von der gegebenen Form, und mit Cq zusammengehörig, so ist Cp:Cq = a:b. Da CA:CD = a:b so ist auch Cp:Cq = CA:CD. Nun ist Cp < CA ist, also muß Cq < CD seyn. Dieses widerspricht dem Vorigen, daß Cq > CD sey. Also ist Z nicht kleiner als CB. — Eben so wird bewiesen, daß nicht seyn kann b:a = CB:Y, wenn Y kleiner als CA ist.

Zweytens sey Z größer als CB, und werde durch CE bezeichnet, so daß a:b = CA:CE, oder b:a = CE:CA sey. Man mache CE:CA = CB:CF, so ist, da CE > CB seyn soll, auch CA > CF. Nun ist ange-

nommen b:a = CE:CA, also ist b:a = CB:CF, wo CF kleiner als CA ist. Dieses ist nach dem ersten Falle unmöglich. Also ist nicht a:b = CA:CE, wo CE größer als B ist.

Da nun das Verhältniß der durch CA, CB bezeichneten Größen weder größer noch kleiner seyn kann als das gegebene, so ist es diesem gleich.

Das zwölfte Buch der Euklidischen Elemente enthält größtentheils Anwendungen dieser Methode. Im 2ten Satze wird erwiesen, daß Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Hier sind CA, CB die Kreisflächen, CP, CQ oder Cp, Cq, eingeschriebene gleichnamige ordentliche Polygone. Die Form ist hier, daß es gleichseitige Figuren von gleicher Anzahl der Seiten sind. Diese verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser ihrer zugehörigen Kreise, und können denselben so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner wird als irgend eine anzugebende Größe. Pappus leitet hieraus den Satz her, daß die Umfänge der Kreise sich wie ihre Durchmesser verhalten, und bemerkt, daß dieses auch daraus fließet, daß die Umfänge ähnlicher gleichseitiger Vielecke sich wie die Durchmesser der zugehörigen Kreise verhalten. Collect. mathem. IV. 11.

Der 5te Satz ist, daß dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Die Vorbereitung dazu gehört zu den künstlichsten in der Elementar-Geometrie. Euklides schneidet von den beiden Pyramiden Stücke ab, die sich wie die Grundflächen verhalten, und in jeder zwey Pyramiden übrig lassen, die kleiner als irgend eine gegebene Größe sind. Die beiden gegebenen Pyramiden sind hier die durch CA, CB bezeichneten Größen, die Summen der folgeweise abgeschnittenen Stücke, welche alle einzeln sich wie die Grundflächen der Pyramiden verhalten, daher die Summen auch dasselbe Verhältniß haben, sind CP, CQ, oder Cp, Cq.

Der 10te Satz ist: Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche hat. Hier sind Kegel und Cylinder die beiden

zu vergleichenden Größen; die annähernden sind eine Pyramide und ein Prisma über gleichnamigen ordentlichen Polygonen der Grundfläche jener Körper, mit derselben Höhe. Diese haben das Verhältniß 1:3, daher Kegel und Cylinder dasselbe haben.

Der 11te Satz ist: Kegel und Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Es verhalten sich nämlich die Pyramiden über den ähnlichen ordentlichen eingeschriebenen Polygonen wie diese Polygone, das ist, wie die Kreisflächen, also ihre Gränzen, die Kegel, eben so; und auch die Dreyfachen der Kegel oder die Cylinder.

Der 12te Satz ist: Ähnliche Kegel und Cylinder sind in dreyfachem Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen. Hier wird gezeigt, daß die Pyramiden über den ähnlichen Polygonen der Grundflächen bey derselben Höhe mit den Kegeln das dreyfache Verhältniß der Durchmesser haben. Daß sie den Kegeln näher als um jeden gegebenen Unterschied kommen können, ist vorher schon gewiesen. Die Kegel, die Euklides betrachtet, sind senkrechte.

Der 18te Satz ist: Kugeln sind in dem dreyfachen Verhältniß ihrer Durchmesser. Nämlich ähnliche in den Kugeln beschriebene Polyedra verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser (in dem dreyfachen Verhältnisse derselben), und können ihnen näher als um jede gegebene Größe kommen.

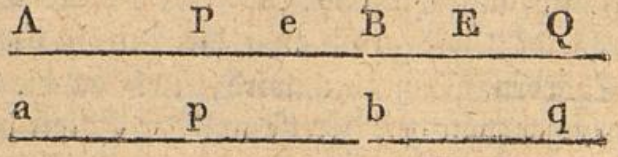
Archimedes beweiset auf diese Art (von Konoiden und Sphäroiden, Satz 5.) den Satz, daß die Fläche einer Ellipse sich zu dem Kreise über ihrer großen Axe verhält wie die kleine Axe zu der großen. Es sey AB (Tab. X. Fig. 22.) die große Axe, CD die halbe kleine, ADB die Hälfte der Ellipse, AEB ein Halbkreis über AB. In dem Kreise werde ein gleichseitiges Vieleck (dessen Seitenzahl ein Vielfaches der Vier sey) beschrieben, und von den Winkelpuncten e werden mit EC parallelen gezogen, welche die Ellipse in den Puncten d treffen. Durch die successiven Puncte d nebst D werden Chorden gelegt, so entstehen in der Ellipse Vierecke, wie CDdc, cddc, und in dem Kreise eben solche. Es ist CE : CD = ce : cd

(Ellipse, 1.), und daher verhalten sich die Vierecke über derselben Grundlinie in beiden Figuren wie CE:CD. Sie zerfallen nämlich jedes in zwey Dreyecke, von welchen die auf gleiche Art liegenden dieses Verhältniß haben. Dasselbe Verhältniß haben auch die beiden Paare von Dreyecken bey A und B. Die Polygone in beiden Figuren verhalten sich also auch wie CE:CD. Da dieses Verhältniß beständig bleibt, wie groß auch die Anzahl der Vierecke oder der Chorden genommen wird, und da die Polygone immer weniger von dem Kreise und der Ellipse verschieden werden, so muß jenes Verhältniß auch für ihre Gränzen, den Kreis und die Ellipse, gelten. Archimedes beweiset aber dieses noch auf folgende, besondere Art.

Man nehme einen Kreis Z, dessen Halbmesser z die mittlere proportionale zwischen den beiden AC, CD (a und b) ist; den Kreis über AB nenne man A, die Ellipse E. Es ist nun A:Z = aa:zz = a:b (s. Proportion). Ist Z der Ellipse nicht gleich, so sey zuerst Z größer als E. In dem Kreise Z beschreibe man ein gleichseitiges Vieleck, so daß dieses von Z weniger unterschieden sey als E es ist. Dadurch wird das Polygon in Z größer als E gesetzt. Da das Polygon in A zu dem in E sich wie a:b verhält, eben so wie jenes zu dem in Z, so ist das Polygon in E dem in Z gleich. Es müßte also das Polygon in E größer als die Ellipse selbst seyn. Folglich ist Z nicht größer als E. — Es sey nun die Ellipse größer als der Kreis Z. In der Ellipse werde ein Vieleck beschrieben, das von jener weniger unterschieden sey als der Kreis Z von der Ellipse E. (Dieses ist möglich, weil das Dreyeck in einem Abschnitte größer ist als die Hälfte desselben). So ist das Vieleck in E größer als der Kreis Z. Nun ist vorher erwiesen, daß das Vieleck in Z dem in E gleich ist, also wäre jenes Vieleck größer als der Kreis. — Demnach ist die Ellipse so groß als der Kreis, und verhält sich zu dem Kreise über der großen Axe, wie die kleine Axe zur großen.

II. Eine bestimmte Größe A liegt zwischen zwey andern unbestimmten, aber der Form nach gegebenen Größen,

so daß ihr Unterschied von diesen beliebig klein gemacht werden kann. Eine andere gleichfalls bestimmte Größe B liegt zwischen denselben oder noch weniger verschiedenen Größen, (indem die größere kleiner als die größere jener, und die kleinere größer als die kleinere jener ist), so sind A und B gleich groß.



In der allgemeinen Abbildung bedeuten AB, ab zwey bestimmte Größen von verschiedener Form, AP, AQ zwey unbestimmte, zwischen welchen AB liegt, so daß das Verhältniß AP : AQ dem von 1 : 1 näher kommen möge, als irgend ein Verhältniß einer kleinern zu einer größern Größe. Eben so falle ab zwischen zwey Größen ap, aq, deren Verhältniß dem von 1 : 1 näher kommen könne, als irgend ein Verhältniß zweyer auf ähnliche Art ungleichen Größen, und ap sey entweder gleich AP oder größer, so wie aq gleich AQ oder kleiner. Bey diesen Annahmen müssen die in der Form verschiedenen, AB, ab, gleich groß seyn.

Man mag dieses gleich daraus schließen, daß sonst die Verhältnisse AP : AQ und ap : aq dem von 1 : 1 nicht unbedingt nahe genommen werden könnten. Wäre ab größer oder kleiner als AB, wie es die AE oder Ae sind, so wäre entweder das Verhältniß AB : AE oder das Ae : AB, die Gränze für AP : AQ.

Die Beweisart des Archimedes im Allgemeinen ist folgende.

Man setze erstlich ab sey größer als AB, oder gleich AE. Da das Verhältniß AQ : AP dem 1 : 1 sich unbedingt nähern kann, so kann dasselbe kleiner als das, AE : AB, genommen werden *). Da ferner aq so groß oder kleiner

*) Ein Verhältniß a : b ist kleiner als ein anderes, c : d, wenn der Quotient der Division von a durch b kleiner ist als der von c durch d; es ist größer in dem entgegengesetzten Falle.

als AQ ist, und ab = AE, so ist das Verhältniß aq : AP kleiner als das, ab : AB. Dieses ist nicht möglich, da aq größer als ab, und AP kleiner als AB ist.

Man setze zweytens ab sey kleiner als AB, oder gleich Ae. Man nehme nun das Verhältniß AQ : AP kleiner als AB : Ae, so ist, weil ap so groß oder größer als AP ist, das Verhältniß AQ : ap kleiner als AB : ab. Dieses ist nicht möglich, weil AQ größer als AB, und ap kleiner als ab ist.

Demnach muß ab = AB seyn.

1. Ein Beyspiel giebt die bekannte von Archimedes gemachte Vergleichung der Kreisfläche mit einem Dreyeck, dessen Grundlinie den Umfang des Kreises, und die Höhe der Halbmesser desselben ist. Der Kreis ist die durch AB bezeichnete Größe, das Dreyeck die ab; die AP ist ein eingeschriebenes ordentliches Vieleck, die AQ ein ähnliches umgeschriebenes; die Größen, ap, aq, sind einerley mit diesen.

2. Archimedes erweiset in dem ersten Buche von Kugel und Cylinder, 13ten Satze, daß eines senkrechten Cylinders Oberfläche einem Kreise gleich ist, der zum Halbmesser die mittlere proportionale zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche hat. Die Oberfläche des Cylinders fällt zwischen die Oberflächen zweyer Prismen, deren eines mit seinen Seitenflächen den Cylinder berührt, das andere seine Seitenlinien in der cylindrischen Fläche liegen hat. Die Oberflächen der Prismen sind dem Rechteck von dem Umfange der Grundfläche und der Höhe des Prisma gleich. Die Grundflächen der beiden Prismen, wenn sie ähnliche gleichseitige Vielecke sind, können sich näher als um jeden angebbaren Unterschied kommen, also auch die darauf errichteten Prismen. Was von ihnen gilt, gilt auch von ihrer Gränze. Archimedes schließt aber nicht aus einem allgemeinen Grundsatze, sondern gebraucht Vergleichungen, die jedem Falle besonders angemessen sind. Die Grundfläche des Cylinders heiße A, der Kreis, dessen Halbmesser die angegebene mittlere proportionale ist, heiße B. Um

und in den Kreis A seyn gleichseitige ähnliche Vielecke gezeichnet, auf welchen Prismen, so hoch als der Cylinder, errichtet werden. Die Oberflächen dieser Prismen (ohne die Grundflächen) werden in Dreyecke verwandelt. Diese mögen, D, d, heißen. Um und in den Kreis B werden Vielecke, jenen Vielecken ähnliche, gezeichnet. Das äußere ist dem Dreyeck D gleich, das innere kleiner als das Dreyeck d. Hier sind die cylindrische runde Oberfläche und der Kreis B die in der allgemeinen Darstellung der Methode durch die Linien AB, ab bezeichneten Größen; die beiden Dreyecke sind die Linien AP, AQ; die beiden zu dem Kreise B gehörigen Vielecke sind durch ap, aq vorgestellt, von welchen die ap der AP immer gleich, aber aq kleiner als AQ ist. Nun zeigt Archimedes nach der angegebenen Methode, daß der Kreis B weder kleiner noch größer seyn kann, als die cylindrische runde Oberfläche, also derselben gleich ist.

3. Auf gleiche Art erweiset Archimedes (Satz 15.). daß die krumme Oberfläche eines gleichseitigen Kegels einem Kreise gleich ist, der zum Halbmesser die mittlere proportionale zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser des Grundkreises hat.

Einen andern Beweis dieses Satzes, nach derselben Methode, giebt Maclaurin, treatise of fluxions, pag. 11.

4. Die Oberfläche einer Kugel ist das Vierfache des größten Kreises derselben. Archimedes a. a. O. Satz 31. Der Vorbereitungs- und Hülfssätze zu dem Erweise sind viele, die aber sehr verdienen studirt zu werden. In einem Kreise werde ein gleichseitiges Vieleck beschrieben, wovon die Anzahl der Seiten ein vierfaches der Vier ist; um den Kreis ein ähnliches, dessen Seiten mit denen jenes parallel sind. Den Kreis und die beiden Vielecke lasse man sich um einen Durchmesser drehen, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und die beiden Vielecke beschreiben Polyedra, deren Oberfläche theils aus Kegelflächen, theils aus Kegelzonen bestehen. Zwischen beiden liegt die Oberfläche der Kugel. Das Verhältniß der Oberflächen von den beiden Polyedren ist das duplicirte

der Seiten in den beiden Vielecken, und kann dem Verhältnisse der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner ist die Oberfläche des innern Polyedrum kleiner als das Vierfache des größten Kreises der Kugel, die des äußern Polyedrum größer als dieses Vierfache. Demnach sind die Oberfläche der Kugel und das Vierfache ihres größten Kreises zwischen denselben Größen enthalten, wie in dem allgemeinen Schema die AB, ab zwischen AP und AQ, welchen hier ap und aq gleich sind. Die Oberfläche der Kugel ist also gleich dem Vierfachen ihres größten Kreises. Archimedes zeigt besonders, daß jene nicht größer noch kleiner seyn könne als dieses.

5. Eine Kugel ist das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist. Archimedes a. a. O. Satz 32. Es werden wieder zwey solche Polyedra in und um die Kugel construirt, wie in (4.). Zwischen beiden liegt die Kugel. Das Verhältniß beider Körper ist das triplicirte der Seiten in den beiden Vielecken, durch deren Umdrehung die Polyedra erzeugt werden, und kann dem Verhältnisse der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner ist das innere Polyedrum kleiner als das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, das äußere aber größer als dieses Vierfache. Daraus folgt nun wie bey (4.), daß die Kugel dem Vierfachen dieses Kegels gleich ist.

Pappus giebt einen andern Beweis des Satzes von der Vergleichung der Kugel mit einem Kegel, Collect. mathem. V. 35.

6. Die Oberfläche eines Kugelschnittes, der kleiner ist als die Halbkugel, ist einem Kreise gleich, der zum Halbmesser die vom Scheitel des Abschnittes an den Umfang des Grundkreises gezogene gerade Linie hat. Archimedes a. a. O. S. 40. Diese Oberfläche fällt zwischen die Oberflächen der Abschnitte zweyer solcher Polyedren, als vorher construirt sind, über dem Grundkreise. Das Verhältniß dieser Oberflächen kann dem der Gleichheit näher kommen

als jedes gegebene zweyer ungleichen Größen. Ferner ist die innere polyedrische Oberfläche kleiner als der angegebene Kreis, die äußere aber größer. Daher ergiebt sich der Satz. Von der Oberfläche eines Abschnitts, der größer ist als die Kugel, wird das nämliche erwiesen, als Folgerung, da die Oberflächen des größern und kleinern Abschnitts zusammen die ganze Oberfläche der Kugel ausmachen.

7. Ein Kugelausschnitt ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche des Kugelabschnitts, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Archimedes a. a. O. S. 42. Der Kugelausschnitt fällt zwischen zwey polyedrische, deren Verhältniß dem der Gleichheit unbedingt nahe kommen kann. Der innere dieser beiden Ausschnitte ist kleiner als der angegebene Kegel, der äußere ist größer. So findet hier die Anwendung des Grundsatzes Statt.

Der Weg, den Archimedes bey den Beweisen dieser Sätze genommen hat, ist lang, und für ungeduldige Leser nicht gemacht. Der große Scharfsinn aber, den er bey der Anwendung geringer Hülfsmittel bewiesen hat, ist zur Übung des mathematischen Geistes vortrefflich. Jüngern Mathematikern sind seine Schriften überhaupt sehr zu empfehlen. Zu dem ersten Buche von Kugel und Cylinder (und Kegel) wird das hier beygebrachte eine brauchbare Einleitung seyn. Hauber hat eine sehr gute Uebersetzung der beiden über Kugel und Cylinder mit einigen Zusätzen geliefert. Tübingen 1798.

III. Archimedes bedient sich zu einigen feinen Untersuchungen in der höhern Geometrie noch eines Verfahrens, welches ganz besonders den Namen, Exhaustions-Methode, verdient, und sich unserer Analysis des Unendlichen nähert. Es ist im Allgemeinen folgendes. Eine Größe Q werde in mehrere Theile getheilt, deren Menge größer, und deren Quantität kleiner als nach irgend einer Angabe gemacht werden kann. Es sey $Q = a + b + c + d + e +$ etc. Die Theile werden nach einem gewissen Gesetze auf doppelte Weise verändert, so daß aus Q zwey neue Größen entstehen,

$$Q+q=(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+(d+\delta)+\text{etc.}$$

$$Q-q=(a-\alpha)+(b-\beta)+(c-\gamma)+(d-\delta)+\text{etc.}$$

Man könne nun die Größen $Q+q$ und $Q-q$ jede mit einer andern vergleichen, so daß die Werthe derselben einen gemeinschaftlichen Theil haben, dem sie desto näher kommen, je mehr der Theile a, b, c, etc. genommen werden. Dieser Theil ist der Werth von Q, da Q die gemeinschaftliche Gränze beider Reihen ist, an welcher sie sich entgegen kommen.

Das leichteste Beyspiel dieser Methode giebt der parabolische Kegel, nach Archimedes von Konoiden und Sphäroiden, Satz 23. Es sey (Fig. 23.) BAC, eine Parabel, deren Axe AD ist, auf welche die Chorde BC senkrecht gezogen ist. Man lasse die Figur sich um die Axe AD ganz herumdrehen, so beschreibt sie einen parabolischen Kegel. Dieser soll mit dem Cylinder, der über der Grundfläche mit dem Durchmesser BC die Höhe AD hat, verglichen werden. — Man theile AD in irgend eine Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte parallele Chorden mit BC. Durch die Puncte, wo diese die Parabel treffen, ziehe man Parallelen mit AD bis an die beiden nächsten Chorden und ihre Verlängerungen. Die Rechtecke und das parabolische Segment beschreiben bey der Umdrehung der Figur jene Cylinder, diese parabolische Kegelsegmente. Der Unterschied aller äußern Cylinder, wie LMNO, von allen innern, wie PQRS, ist der unterste äußere Cylinder BEFC. Dieser kann kleiner gemacht werden als jeder angegebene Raum. Da die Quadrate der Chorden, wie QR, sich wie die dazu gehörigen Abscissen der Axe, AT, verhalten, so verhalten sich die cylindrischen Segmente des umgeschriebenen und eingeschriebenen Körpers wie die zugehörigen Abscissen, bey dem äußern bis zu der untern Basis, bey den innern bis zu der obern genommen. Sie machen daher, jede Folge für sich, eine arithmetische Reihe aus, deren Glieder sich wie die Zahlen, 1, 2, 3, 4, etc. verhalten. Beide Reihen enthalten dieselben Glieder, nur daß die Reihe der äußern Cylinder

ein Glied mehr hat als die Reihe der innern. Nun ist in einer arithmetischen Reihe die Summe aller Glieder größer als die halbe Summe von eben so vielen, dem größten von ihnen gleichen, hingegen ist die Summe aller Glieder ohne das größte kleiner als eben diese halbe Summe (Archim. 1. S.), das ist, die Summe der äußern Cylinder ist größer als der halbe Cylinder über der mit DC beschriebenen Grundfläche bey der Höhe AD, so wie die Summe der innern Cylinder kleiner ist als die Hälfte dieses Cylinders. Beide Summen sind um den untersten Cylinder BCFE unterschieden, der durch fortgesetzte Halbtheilungen von AD kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Der parabolische Kegel liegt ebenfalls zwischen beiden Summen. Folglich ist derselbe der Hälfte des Cylinders, mit dem Halbmesser DC und der Höhe AD, gleich.

Archimedes gebraucht hier auch die Beweisart, wodurch gezeigt wird, daß der parabolische Kegel weder größer noch kleiner seyn könne als des gedachten Cylinders Hälfte, vergleicht aber die parabolischen Kegel mit einem geradlinichten, der dieselbe Grundfläche und Höhe hat. Da er aber doch den Cylinder zur Vergleichung mit dem geradlinichten Kegel gebraucht, so wird es bequemer seyn, seine Beweisart zur Vergleichung mit dem Cylinder anzuwenden. Man bezeichne den parabolischen Kegel durch K, den Cylinder über BC bey der Höhe AD durch C, den umgeschriebenen Körper durch U, den eingeschriebenen durch E. Wenn K nicht ist $= \frac{1}{2}C$, so sey erstlich K größer, und der Unterschied $= u$, so daß $K - \frac{1}{2}C = u$. Man nehme der Theile auf AD so viele, daß der unterste Cylinder BF kleiner werde als u, oder daß $U - E < u$ sey. So ist $U - E < K - \frac{1}{2}C$. Da $U > K$ ist, so ist $E > \frac{1}{2}C$. Vorher aber ist erwiesen, daß $E < \frac{1}{2}C$ ist, also kann der parabolische Kegel nicht größer seyn als die Hälfte des Cylinders. — Zweytens mag er nun kleiner seyn, und der Unterschied sey u, so daß $\frac{1}{2}C - K = u$. Wiederum sey $U - E < u$, so ist $U - E < \frac{1}{2}C - K$. Da $E < K$, so ist $U < \frac{1}{2}C$. Es ist aber vorher erwiesen, daß $U > \frac{1}{2}C$ ist, folglich kann der parabolische Kegel auch nicht kleiner

seyn als die Hälfte des Cylinders. Es ist also der Abschnitt des parabolischen Kegels BAC halb so groß als der Cylinder über derselben Grundfläche bey derselben Höhe.

Der geradlinichte Kegel mit denselben Bestimmungen ist der dritte Theil des Cylinders, und verhält sich daher zu dem parabolischen wie $\frac{1}{3}$ zu $\frac{1}{2}$ oder wie 2 : 3. Zu vergleichen der Artikel, Cubirung, Th. I. S. 580.

Auf eine ähnliche Art vergleicht Archimedes den Abschnitt eines hyperbolischen Kegels und eines Sphäroids mit einem geradlinichten Kegel über einerley Grundfläche bey gleicher Höhe. Die Berechnung aber ist hier schwerer, weil die cylindrischen Segmente des eingeschriebenen und umgeschriebenen Körpers die Summe oder der Unterschied zweyer Theile sind, von welchen der eine ein Glied aus einer arithmetischen Reihe, der andere ein Glied aus einer Reihe von Quadraten ist. In der Abhandlung von den Spirallinien, Satz 10. findet Archimedes, daß

$$3(aa + 4aa + 9aa \ldots + n^2a^2) =$$
$$n^3a^2 + n^2a^2 + a(a + 2a + 3a \ldots + na)$$

ist, (vergl. arithmet. Reihen höh. Ordn. 14.), und giebt in der Abhandlung von den Konoiden, 3. Satz, die Größen an, zwischen welchen die Summe einer arithmetischen Reihe und der Reihe von Quadraten mit gleichförmig abnehmenden Wurzeln liegt. Nämlich wenn $(ab + 2ab + 3ab \ldots + nab) + (b^2 + 4b^2 + 9b^2 \ldots + n^2b^2) = S$ ist, so hat das nfache von den beiden größten Gliedern dieser beiden Reihen, oder $n(nab + n^2b^2)$, zu der Summe S ein kleineres Verhältniß als $a + nb : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}nb$; aber zu der um das letzte Glied jeder der beiden Reihen verminderten Summe, $S - nab - n^2b^2$, ein größeres Verhältniß als das angegebene. Archimedes druckt den Satz ganz in Worten aus, und führt den Beweis an einer Zeichnung, die durch einen Fall sich auf alle mögliche Fälle anwenden läßt.

Für die Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, wo die Abscissen x von dem näch-

sten Scheitel an genommen werden, für die Ellipse ist $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Man wird leicht einsehen, wie Archimedes das jetzt eben angezeigte Gränzverhältniß bey dem hyperbolischen Konoid gebraucht hat. Für die Ellipse ist eine Abänderung eines Vorzeichens nöthig. Die Größen a, b bedeuten in den Gleichungen für die beiden krummen Linien nicht dasselbe, was in den beiden vorher aufgestellten Reihen.

Man vergleiche mit dieser Methode den Inhalt eines Körpers zu finden, die Auflösung, welche die Integralrechnung giebt, Artikel, Cubirung. Diese ist freylich viel kürzer, aber jene läßt die Zusammensetzung des Körpers und die Vergleichung mit einem einfachern deutlicher einsehen. Die Methode der Neuern ist in einiger Absicht, was eine Maschine bey Fabrikarbeiten. Sie dient die Arbeit zu fördern, ohne daß man nöthig hat immer auf ihre Wirkungsart zu achten. Doch muß man auch wissen, wie weit man ohne Maschine zu kommen vermöge.

Das Verfahren, wodurch Archimedes den von seiner Schneckenlinie nach jedem Umlaufe des Halbmessers beschriebenen Flächenraum mit dem Kreise vergleicht, ist ein ganz ähnliches. In dem Artikel, Spirale, wird davon etwas angeführt werden.

Die Fläche der Parabel zwischen ihrem Bogen BAC und der Chorde BC konnte Archimedes auf diese Art nicht finden, weil die Rechtecke, die in die Parabel und um dieselbe beschrieben werden, dergleichen PQRS und LMNO sind, sich wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Abscissen, AT, At, verhalten. Die Summe einer Anzahl von Wurzeln aus Zahlen, die in arithmetischer Fortschreitung sind, konnte er nicht angeben, das ist, mit einer gegebenen Größe vergleichen. Zwar hätte er den Raum zwischen dem Bogen AC, einer mit AD parallelen durch C, und einer auf AD durch den Scheitel A senkrechten leicht mit dem Rechteck von AD und DC vergleichen können, weil er, wie schon bemerkt ist, die Summe von Quadraten,

deren Wurzeln in arithmetischer Progression sind, zu bestimmen wußte. Allein er gebraucht, vielleicht um seinen Scharfsinn zu zeigen, ein sehr künstliches Hülfsmittel, die Verbindung der Statik mit der Geometrie, in der Abhandlung von der Quadratur der Parabel.

Es sey BAC (Fig. 24.) eine Parabel, deren Axe AD ist, und BC darauf senkrecht. Diese BC werde in irgend eine Anzahl gleicher Theile, wie BE, EF, FG, etc. getheilt. Durch die Theilungspuncte werden auf BC senkrechte Linien, EM, FN, GO, etc. gezogen, welche die Parabel in M, N, O, etc. schneiden; auch wird auf dieselbe noch BP senkrecht gesetzt. Aus C werden durch die Durchschnittspuncte, M, N, O, etc. die geraden CM, CN, CO, etc. gezogen, welche die auf BC senkrechten in H, I, K, etc. nach ihrer Folge treffen. So entstehen die Vierecke EH, FI, GK, etc. und für den letzten Theilungspunct Z das Dreyeck CZX, dessen Seite CX die Parabel in C berührt, indem hier zwey Durchschnittspuncte in einen Berührungspunct zusammen fallen. Diese Vierecke nenne man die umgeschriebenen. Die Durchschnittspuncte m, n, o, etc. der CM und übrigen mit den Perpendikeln auf der Seite nach C hin geben die eingeschriebenen Vierecke Em, Fn, Go, etc. wozu bey C das Dreyeck ZCY kommt. Nun beweiset Archimedes, erstlich, daß die Summe der umgeschriebenen Vierecke nebst dem Dreyecke ZCX größer ist als der dritte Theil des Dreyecks BCP; zweytens, daß die Summe der eingeschriebenen Vierecke, Em, Fn, etc. nebst dem Dreyecke ZCY kleiner ist als der dritte Theil eben des Dreyecks BPC. Dieses wird durch Hülfe der Statik erwiesen. Man stelle sich die Parabelfläche mit der Chorde BC an dem Arme eines Hebels, dessen Ruhepunct in B ist, aufgehängt vor, so daß der Scheitel A zu unterst liege. An dem andern Arme des Hebels, in einer Entfernung von B, so groß als BC, werde eine schwere Fläche an einem mathematischen Faden ohne Schwere aufgehängt, und halte dem Dreyeck BPC das Gleichgewicht, so ist diese Fläche der dritte Theil des Dreyecks. Nun wird gezeigt, daß das

umgeschriebene Viereck BEMH größer ist als die Fläche, welche in dem Abstande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes B dem Trapezium BPeE das Gleichgewicht hält; daß eben so die folgenden Vierecke EMNF, FNOG, etc. jedes größer sind als die Fläche, die in dem gedachten Abstande dem Trapezium EefF, FfgG, etc. wovon jene Vierecke nach ihrer Folge ein Theil sind, das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieser Vierecke nebst dem Dreyeck ZCX ist also größer als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Hingegen ist jedes der eingeschriebenen Vierecke wie Em, Fn, etc. kleiner als die Fläche, welche in dem Abstande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes dem Trapezium, wovon es ein Theil ist, als EefF, FfgG, etc. das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieser Vierecke, nebst dem Dreyeck ZCY ist daher kleiner als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Nun zeigt Archimedes, daß die Parabelfläche weder größer noch kleiner seyn kann, als der dritte Theil eben dieses Dreyecks. Beide sind die gemeinschaftliche Gränze für die umgeschriebenen und eingeschriebenen Vierecke. Daraus folgt endlich vermittelst einer Eigenschaft der Parabel, daß der parabolische Abschnitt BAC sich zu den geradlinichten Dreyeck BAC, das mit demselben einerley Grundfläche und Höhe hat, wie 4 : 3 verhält. Der Satz wird von Archimedes auch für den Fall erwiesen, da die Grundlinie oder Chorde BC nicht senkrecht auf AD ist. Das Dreyeck BAC ist alsdann dasjenige, welches zwischen den Endpuncten der Chorde und dem Scheitelpuncte des zugehörigen Durchmessers liegt.

IV. Zwey Größen, A, B, sind beide die Gränzen einer Reihe abnehmender Größen, $a + b + c \ldots + q +$ etc. so daß der Unterschied derselben und der Reihe kleiner als irgend eine Größe gemacht werden kann: es ist $A = B$. Denn es sey das Gegentheil möglich, und entweder $A > B$ oder $A < B$. Man nehme von der Reihe so viele Glieder, $a + b + c \ldots + q$, daß der Unterschied der Summe derselben von A kleiner sey, als der Unterschied zwischen A und B, so müßte eben diese Summe größer seyn als B, welches der Voraussetzung widerspricht. Nämlich,

wenn $a + b + c \ldots + q = S$; $A - B = u$, und $A - S < u$ ist, so ist $S > B$. Eben so, wenn $B - A = u$ ist, nehme man $B - S < u$, so ist $S > A$, auch wider die Voraussetzung.

Archimedes gebraucht diese Beweisart bey einer andern Methode für die Quadratur der Parabel, als die gleich vorher beschriebene ist. Es ist BAB (Fig. 25.) eine Parabel, in welcher AC die Axe oder ein anderer (der Axe paralleler) Durchmesser; und BB eine Chorde, die von AC in C halbirt wird. Es seyn die beiden AB von dem Scheitel A an B gezogen, und durch die Mitte D von BC die beiden DE parallel mit AC bis an die Parabel, welche die beiden AB in F schneiden. Das Dreyeck AEB ist der achte Theil des Dreyecks BAB. Denn in der Parabel ist $EF : FD = 1 : 2$, es mag AC die Axe oder ein anderer Durchmesser seyn. Beschreibt man auf dieselbe Art in jedem der entstandenen vier Abschnitte ein Dreyeck, so ist ein solches der achte Theil des Dreyecks AEB. Fährt man mit derselben Einschreibung fort, so machen das Dreyeck BAB und die folgenden eingeschriebenen zusammengehörigen Dreyecke, (als die beiden AEB, dann die vier Dreyecke in den Segmenten AE, EB, AE, EB. u. ff.) eine geometrische Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ aus. Die Summe einer solchen Progression mit dem dritten Theile des kleinsten Gliedes verhält sich zu dem größten Gliede wie 4 : 3. Demnach ist $\frac{4}{3} \Delta BAB$ die Gränze aller in dem parabolischen Abschnitt eingeschriebenen Dreyecke; und der Abschnitt selbst ist auch ihre Gränze, weil jedes in einem der Abschnitte eingeschriebene Dreyeck größer als die Hälfte desselben ist. Folglich ist der parabolische Abschnitt $= \frac{4}{3} \Delta BAB$.

Die von Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren (s. Th. I. S. 415.) ist zwar auf der einen Seite eine Erweiterung der Exhaustions-Methode der Alten, aber dabey weniger befriedigend, wegen der darin zum Grunde gelegten Vorstellungen. Die Abkürzung, daß die Gränze, welcher sich zwey Reihen nähern, statt dieser unmittelbar gesetzt wird, ohne besonders zu zeigen, daß der gesuchte Werth weder größer noch kleiner seyn kann, möchte erlaubt

seyn, wo sie der Evidenz nicht nachtheilig ist. Wallis erweiterte die Methode der Alten noch mehr dadurch, daß er die Summen oder Gränzen von manchen Reihen fand, welche den Alten noch nicht erreichbar gewesen waren. Unsere Integrations-Methode ist aber nicht als eine höhere Art der Exhaustion anzusehen. Denn diese mit gehöriger Schärfe behandelt, ist keine Summirung unendlich vieler, unendlich kleiner, Größen. In der Encyclopédie méthodique wird zwar gesagt, die Differentialrechnung sey nichts anders als jene Methode der Alten, auf eine einfache und bequeme Analysis gebracht; allein dieses ist eine zu flüchtige und verwirrende Vergleichung. Das zeigt die in dem gegenwärtigen Artikel vorgetragene Erörterung derselben. Hutton sagt in seinem Wörterbuche der Mathematik und Physik, daß auf der Methode der Exhaustion die von Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren beruhe, welche nur eine kürzere Art von Exhaustion sey, desgleichen die Arithmetik des Unendlichen von Wallis, welche wiederum eine Verbesserung der Methode des Untheilbaren sey; und dann ferner die Methode der Incremente, Differentiale, Fluxionen und unendlichen Reihen. Die Vergleichung mit den Methoden von Cavaleri und Wallis ist richtig; die neue Analysis des Unendlichen ist aber etwas ganz anders da, wo sie nicht eine Summe, sondern das für eine Function charakteristische Verhältniß der Veränderungen sucht, und von diesem auf die Function selbst zurückgeht. Dieses ist eine ganz andere, viel höhere und ergiebigere Art die Relationen der Größen zu entdecken, als jene ältern Summirungen durch Gränzen der Reihen. Maclaurin hat in der Einleitung zu seinem Werke über die Fluxionen von der Exhaustions-Methode der Alten einen sehr lehrreichen und ausführlichen Unterricht gegeben.

Exponent ist erstlich die Zahl, welche den Grad einer Potenz anzeigt, und kann eine ganze, eine gebrochne, rationale oder irrationale, eine positive oder negative Zahl seyn, s. Potenz. Zweytens ist es die Zahl, womit das Vorderglied eines Verhältnisses zu multipliciren ist, um

das Hinterglied desselben zu erhalten, oder es ist das Hinterglied selbst, wenn das Vorderglied die Einheit ist, oder darauf gebracht wird. Einige verstehen unter Exponent eines Verhältnisses den Quotienten von der Division des Vorderglieder durch das Hinterglied. So wäre der Exponent von 3 : 12 der Bruch $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$, da nach der ersten Erklärung der Exponent 4 ist. In der That ist es willkührlich, ob man die eine oder die andere Bestimmung wählt, weil die Glieder eines einzelnen Verhältnisses verwechselt werden können. Allein bey einer geometrischen Progression heißt der Exponent der Quotient von der Division eines folgenden Gliedes durch das vorhergehende; und daher muß man dieses auch bey einem einzelnen Verhältnisse beybehalten.

Hutton sagt, daß angesehene Mathematiker die Logarithmen als Exponenten der Verhältnisse ansehen. Ich finde nur, daß Halley die Logarithmen erklärt, als Numeri rationem exponentes, welches man wohl Statt finden lassen kann, wiewohl doch Maaßen der Verhältnissen deutlicher seyn möchte. Nämlich der Logarithme zeigt an, wie ein Verhältniß aus mehrern unter sich gleichen Verhältnissen, die ein Grundverhältniß sind, zusammengesetzt wird. So ist für das Verhältniß $a^m : b^m$ oder $(a : b)^m$, die Zahl m das Maaß, weil es aus m unter sich gleichen Verhältnissen a : b zusammengesetzt wird, wenn m eine ganze Zahl ist. Für das Verhältniß $(a : b)^{\frac{m}{n}}$ ist der Bruch $\frac{m}{n}$ das Maaß, welches anzeigt, daß man das aus m gleichen Verhältnissen a : b zusammengesetzte in n gleiche zerlegen soll. Es ist nöthig, zwey verschiedene Begriffe mit zwey verschiedenen Worten zu bezeichnen.

Exponent eines Gliedes in einer Reihe heißt auch die Stellenzahl desselben, z. B. in der Reihe der ungeraden Zahlen ist 9 der Exponent des Gliedes 17. Allein man wird hier besser das Wort, Stellenzahl, oder Stellenzeiger, gebrauchen.

Exponential-Größe, oder Exponential-Formel, ist eine Potenz, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, wie a^x, oder z^x. Die Wurzel der Potenz muß eine unveränderliche oder veränderliche Größe seyn. Eine solche, wie die hier angegebene, ist eine Exponentialgröße vom ersten Grade. Ist der Exponent wieder eine Exponentialgröße, so ist die Größe eine solche vom zweyten Grade. So giebt es mehrere Grade dieser Größen, als

I. a^x, II. a^{x^y}. III. $a^{x^{y^z}}$. u. s. f.

Nennt man $x^y = p$, so ist der zweyte Ausdruck $= a^p$. Ist $y^z = p$, und $x^p = q$, so ist der dritte $= a^q$.

Eine besondere Gattung ist,

$$r^{r^{r^{r^{\alpha}}}}$$

welcher unterhalb mehrere r beygefügt werden mögen. Condorcet hat über die Eigenschaften dieser Form von Größen Untersuchungen angestellt, die Euler fortgesetzt hat, in einer Abhandlung, de formulis exponentialibus replicatis. Acta Acad. Petrop. T. I. a. a. 1777. Setzt man $r^{\alpha} = \beta$; $r^{\beta} = \gamma$; $r^{\gamma} = \delta$; $r^{\delta} = \varepsilon$, so ist der obige Ausdruck $= \varepsilon$ oder r^{δ}. Diese Art Größen wächst ungeheuer an, wenn für r nur eine mäßige Zahl genommen wird. Setzt man nur $r = 2$, und dazu $\alpha = 0$, so ist $\beta = 1$; $\gamma = 2$; $\delta = 4$; $\varepsilon = 16$, aber $r^{\varepsilon} = \zeta = 65536$, und $r^{\zeta} =$ wird eine Zahl von 19729 Ziffern. Setzt man $r^{\alpha} = \alpha$, so bleiben alle Glieder der Reihe gleich groß. Z. B. jedes $= 2$, wenn $\alpha = 2$, wodurch $r = \sqrt{2}$ wird.

Setzt man $r^{\alpha} = \alpha + i$, wo i unendlich klein ist, so ist es möglich, daß die Glieder der Reihe, β, γ, δ, etc. immerhin unendlich wenig zunehmen, und daß ein unendlich entferntes Glied, r^{ω}, noch endlich ist. Umgekehrt wird es möglich seyn, von einem solchen endlichen Gliede

r^ω auf ein unendlich entferntes, $r^\alpha = \alpha$, zu kommen, mit Beyseitesetzung der unendlich kleinen Abweichung i. Man vertausche die Benennungen α und ω, so daß r^α das Anfangsglied, und r^ω ein unendlich davon entferntes sey. Die Glieder der Reihe nähern sich einer endlichen Gränze, r^ω, wofern $r^\omega = \omega$ ist. Dieses giebt $\omega \log r = \log \omega$, und $l\, r = \frac{l\omega}{\omega}$. Nun darf r nicht größer genommen werden, als es nach dieser Gleichung seyn kann. Der größte oder kleinste Werth einer Function wird gefunden, wenn ihr Differential = 0 gesetzt wird. Nun ist

$$\partial . \frac{l\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega^2} (1 - l\omega)\, \partial\omega.$$

(Differentialformeln, 5 u. 14.), wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt. Da die natürlichen Logarithmen sich wie die künstlichen, zu denselben Zahlen gehörigen, verhalten, so ist es hier gleichgültig, ob man diese oder jene nimmt. Ist $l\omega$ größer als 1, oder ω größer als die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist das Differential des Quotienten $\frac{l\omega}{\omega}$ negativ, so daß dieser abnimmt, wenn ω wächst. Daher ist der Werth desselben für ω = der Basis, ein Größtes. Die Basis sey = e, so ist in dem Falle eines Größten, $\log . \text{nat}\, r = \frac{1}{e}$. Es ist $e = 2{,}7182818 \ldots$, und $\frac{1}{e} = 0{,}3678794 \ldots$ Der Modulus des Briggischen Systems ist $= 0{,}43429448 \ldots = M$, und log. Brigg. r $= \frac{M}{e} = 0{,}1597680 \ldots$ also $r = 1{,}444668 \ldots$ Das ist die Gränze der Werthe von r, bey welchen die formula replicata, so weit man sie fortsetzt, immer einen endlichen Werth behält.

Nimmt man r kleiner als 1,444668.. so giebt es zwey Werthe für ω, um die Gleichung $r^{\omega} = \omega$ zu erfüllen. Denn wenn man wiederum $r^{\alpha} = \alpha + i$ setzt, wo i einen unendlich kleinen Werth hat, so mag i auch negativ seyn, oder es ist $r^{\alpha} = \alpha \pm i$, so daß man mit einem größern α und subtractiven i auf dasselbe Glied der Reihe, als mit einem kleinern α und additiven i, kommen mag. Doch die weitern Untersuchungen hierüber hat man in der angeführten Abhandlung nachzusehen. Das hier vorgetragene ist anders abgefaßt als es von Euler geschehen ist, und wird zur Erläuterung dienen können.

Den Coefficienten einer Exponential-Größe kann man, wenn es diensam ist, in eine Potenz von derselben Wurzel mit der veränderlichen Potenz verwandeln. Z. B. es ist $ha^x = a^{m+x}$, wenn $a^m = h$ ist.

Umgekehrt kann man den Exponenten einer veränderlichen Potenz um eine beliebige Größe vermindern, und dafür einen Coefficienten setzen.

Die Wurzel einer Exponential-Größe kann man beliebig in eine andere verwandeln, wenn dagegen der Exponent gehörig umgeändert wird. So ist $b^x = a^{mx}$, wenn $a^m = b$ gemacht wird.

Die Entwickelung einer Exponentialgröße durch eine Reihe ist in dem Artikel, Differenzenrechnung (25.) gezeigt. Es ist

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^2} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

wo c:1 das Gränzverhältniß des Logarithmen einer Zahl zu dem Überschusse der Zahl über die Einheit ist, in dem System mit der Basis a. Man setze $a^u = e^x$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl a^u in diesem System ist. In demselben ist $c = 1$, also

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

Nun ist log nat. $a^u = u \,\text{lnat.}\, a$, und $\text{lnat}\, e^x = x$, also $x = u\,\text{lnat}$, und

$$a^u = 1 + u\,\text{la} + \tfrac{1}{2}u^2(\text{la})^2 + \tfrac{1}{6}u^3(\text{la})^3 + \tfrac{1}{24}u^4(\text{la})^4 + \text{etc.}$$

Man sieht, daß $\frac{1}{c} = l\,nat.\,a$ ist. Dieses folgt auch aus der Formel für $l(x+u)$ a. a. O. (24.), wenn darin $x = 1$ gesetzt wird. Man bezeichne den Logarithmen von $1+u$ in dem System, wozu das Gränzverhältniß $c:1$ gehört, durch $L(1+u)$; und den von $1+u$ in dem natürlichen System durch $l(1+u)$, so ist

$$l(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \text{etc.}$$

und $L(1+u) = c\,l(1+u)$.

In dieser Formel ist $1+u$ die Zahl zu einem Logarithmen, in jener für a^u aber ist u der Logarithme einer Zahl. Die Basis des Systems mit dem Gränzverhältnisse $c:1$ sey a, so ist $La = 1$. Setzt man nun $1+u = a$, so ist $1 = c\,la$, $\frac{1}{c} = la$.

Es giebt auch Exponentialgrößen mit unmöglichen Exponenten. Solche kommen bey der Vergleichung der Kreisbogen und der Logarithmen, oder eines circularen und hyperbolischen Sectors vor. S. Differentialformeln, 48-50. und Goniometrie, VIII.

Exponential-Gleichung ist eine Gleichung, worin Exponentialgrößen vorkommen. Dergleichen ist $a^x = y$; oder, $z^x = y$; oder $x^x = y$; oder, $ae^{x+2} + be^{x+1} + ce^x = y$; oder $ae^{2x} + be^x = y$.

Diese Gleichungen werden, wenn es angeht, mittelst der Logarithmen aufgelöset. Die erste der angeführten verwandelt sich in diese: $x \log a = \log y$, so daß durch Hülfe der berechneten Tafeln jede der beiden, x, y, durch die andere gefunden wird. Die zweyte und dritte werden eben so behandelt. Die vierte Gleichung verwandle man zuerst in diese, $e^x(ae^2 + be + c) = y$, und setze $\log e = 1$, so ist $x + l(ae^2 + be + c) = ly$. Aus der letzten Gleichung den Werth von x durch y zu finden hat man eine quadratische Gleichung, worin e^x die Wurzel ist, aufzulösen. Hat man die beiden Werthe von e^x gefunden, so findet man x vermittelst der Logarithmen. In dem Die-

tionnaire encyclopédique wird von dieser Gleichung gesagt, daß x in derselben nur durch Probiren gefunden werden könne.

Die gegebenen Coefficienten kann man, wenn man es dienlich findet, mit in die Exponentialgröße ziehen; auch die Wurzel derselben in eine andere verwandeln, nach Anleitung des vorhergehenden Artikels.

Exponential-Curve ist eine solche, deren Gleichung eine exponentiale ist. Dergleichen ist die logarithmische, für welche ist $y = a^x$, also $x = \frac{ly}{la}$. Weil Logarithmen sich auf bloße Zahlen beziehen, so ist hier eine linearische Größe zur Einheit gemacht. Diese sey absolut genommen $= b$, so ist $\frac{x}{b} = \frac{l(y:b)}{l(a:b)}$, wo die Quotienten $\frac{x}{b}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{a}{b}$ numerische Größen sind, s. Abmessung.

Die logarithmische Spirale ist auch eine solche Curve. Ihre Gleichung ist, $e^{m\frac{\varphi}{}} = \frac{y}{a}$, wo a ein gegebener Radius, y irgend ein anderer Radius, φ der Winkel desselben mit dem Radius a, und m eine gegebene Zahl ist. Die Wurzel e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Joh. Bernoulli betrachtet in einem Aufsatze: Principia calculi exponentialium, Acta Erud. 1697. Opp. T. I. nr. 36. die krumme Linie, deren Gleichung ist, $x^x = y$. Für die Quadratur ihres Flächenraumes, von der Ordinate zu der Abscisse $x = 0$ bis zu der $x = 1$, findet er die durch ihre Form merkwürdige Reihe,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.}$$

Das Differential der Area $y\partial x$ ist hier $= x^x \partial x$. Das unbestimmte Integral davon wird in dem Artikel, Integralformeln, gefunden.

Exponentialrechnung ist die Entwickelung solcher Relationen, die von Exponentialgrößen abhangen. Sie hat es entweder bloß mit diesen und andern endlichen Größen zu thun, oder sie führt zugleich ihre Differentiale ein. Zu jener Rechnung mit endlichen Größen ist in den vorhergehenden Artikeln Anleitung gegeben. Sie erfordert nur, daß man mit der Potenzenrechnung und der Theorie der Logarithmen bekannt sey. Von der zweyten ist in dem Artikel, Differentialformeln, IV. gehandelt.

Leibnitz und Joh. Bernoulli haben diese Rechnung jeder für sich erfunden. s. Differentialrechnung, Th. I. S. 858.

Exterminatio ist eben das was eliminatio, s. Artikel, Elimination.

Extrema et media ratio bey der Eintheilung einer geraden Linie ist, wenn die ganze sich zu dem größern Abschnitte, wie dieser sich zu dem kleinern verhält. Es ist also so viel als eine Linie nach einer stetigen Proportion theilen. S. Euklides Elemente. B. VI. Erkl. 3. und VI. 30. auch II. 11. Die Aufgabe kommt bey ihm zweymahl vor. Sie ist in dem ersten Theile dieses Wörterbuchs auch zweymahl aufgelöset, einmahl nach einer geometrischen Analysis, S. 91. zum zweytenmahl durch algebraische Rechnung, S. 110.

Die Aufgabe wird zu der Verzeichnung eines gleichseitigen Fünfecks gebraucht. Man hat ehedem auch diese Eintheilung die sectio divina genannt.

Eylinie, Eyrundung. s. Ovale.

F.

Facit ist die Antwort auf eine numerische Rechnungsfrage, als die gesuchte Summe vorgegebener Größen, das Product zweyer Zahlen, das vierte Glied einer Proportion, von welcher drey Glieder gegeben sind. Die Auflösung einer