Bestimmung und Auflösung noch in Betracht zu ziehen ist. Man kann Gesetze wirkender Kräfte annehmen, die nur nichts den allgemeinen Grundsätzen wiedersprechendes enthalten müssen, und daraus Folgerungen ziehen, ohne dadurch zu behaupten, daß diese Gesetze wirklich in der Natur vorhanden seyn. Vergleicht man die Folgerungen mit den Beobachtungen, und stimmen diese mit jenen gehörig zusammen, so ist dieses wenigstens eine sehr wahrscheinliche Begründung des angenommenen Gesetzes. In der Optik ist es erlaubt, das Licht als einen Ausfluß aus dem leuchtenden Körper zu betrachten, und die Lichtstrahlen für mathematische Linien zu nehmen. Die Übereinstimmung der Folgerungen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraction mit der Erfahrung beweiset inzwischen jene Annahme nicht als wirklich.

In der Astronomie insbesondere heißen die verschiedenen Systeme von dem Laufe der Himmelskörper, Hypothesen, als Hypothesis Ptolemaica, Tychonica, Copernicana.

J.

Ichnographie ist Grundriß in der Baukunst. Von ἴχνος, Fußsole Fußstapfe, und γραφω, zeichne. Es ist eine Anwendung der orthographischen Projection.

Icosaedrum, ein regulärer Körper von 20 gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, s. Körper, reguläre.

Identisch, was in der Größe und Form übereinstimmt. Zwey Größen können einander gleich, und doch in der Form oder Zusammensetzung verschieden seyn. So sind $40 + 8$; $60 - 12$; 3×16; $\frac{96}{2}$, sich gleich, aber in der Form verschieden; so auch $(a + b)(a - b)$ und $aa - bb$. Zwey Dreyecke können einerley Inhalt haben, bey verschiedenen Winkeln und Seiten. Von Figuren, die gleich und ähnlich sind (in der Größe und

Form übereinkommen, sagt man, daß sie congruiren, oder sich decken.

Ein identischer Satz hat allgemein die Form, $A = A$. Mit einem solchen Satze für sich kann man nichts anfangen, allein man gebraucht ihn in Beweisen zur Verwandlung eines Satzes, der ein Glied des Beweises ist. Hat man nämlich gefunden, daß $P = Q$ ist, wo P und Q zwey Größen bedeuten, die sich gleich aber nicht identisch sind, so ist auch $P \pm A = Q \pm A$, wo dann A eine Größe ist, die mit denen, woraus P und Q zusammengesetzt ist, in Verbindung steht. Man kann auch A als Multiplicator oder Divisor von den beiden, P und Q, gebrauchen.

Wenn zwey nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnete Reihen sich gleich sind, sie mögen nun beide ohne Ende fortgehen, oder beide mögen, jede mit welcher Anzahl Glieder es sey, abbrechen, oder auch eine von ihnen nur mag aus einer bestimmten Anzahl Glieder bestehen, so sind sie identisch gleich, das ist, die zu denselben Potenzen von x in beiden Reihen gehörigen Coefficienten sind einander gleich.

Es sey nämlich

$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} =$
$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$
so ist $a = A$; $b = B$; $c = C$; $d = D$, u. s. f.
Denn da für x jeder Werth gesetzt werden mag, so setze man $x = 0$, und es bleibt aus beiden Reihen $a = A$.
Dadurch ist $bx + cx^2 + \text{etc.} = Bx + Cx^2 + \text{etc.}$
Wegen des gemeinschaftlichen Factors x ist
$b + cx + dx^2 + \text{etc.} = B + Cx + Dx^2 + \text{etc.}$
Dadurch ist wie vorher $b = B$, und $cx + dx^2 + \text{etc.} = Cx + Dx^2 + \text{etc.}$ also $c = C$. Solchergestalt sind jede zu derselben Potenz von x gehörige Coefficienten einander gleich.

Wenn die gleichnamigen Coefficienten schlechtweg identisch wären, so würde daraus nichts weiter zu folgern seyn. Allein die Coefficienten in beiden Reihen, oder in einer derselben sind immer aus gewissen Größen zusammen-

gesetzt. In dieser Rücksicht sind die gleichnamigen Coefficienten nicht identisch; sie geben eben so viele Gleichungen für die Größen, woraus sie zusammengesetzt sind.

Es sey z. B. $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$ $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}$ so entsteht durch die Multiplication mit dem Nenner, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ aus der Reihe, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{etc.}$ eine zusammengesetzte, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ deren Coefficienten aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. zusammengesetzt sind. Da nun $A = a$; $B = b$; $C = c$; $D = d$, u. s. f. ist, so erhält man dadurch Gleichungen zwischen den Coefficienten in dem Zähler und dem Nenner des Bruches, und in dem Quotienten, wodurch die letztern aus jenen bestimmt werden. S. Buchstabenrechnung, V.

Zum Beyspiel diene ferner das Verfahren in Cyklometrie (5.), den Sinus eines Winkels φ durch den Winkel auszudrucken. Es wird angenommen $\sin\varphi = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + \text{etc.}$ und es wird dann gefunden $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}A\varphi^3 + \frac{1}{20}B\varphi^5 - \frac{1}{42}C\varphi^7 + \text{etc.}$ Daraus ist $A = 1$; $B = \frac{1}{6}A$; $C = \frac{1}{20}B$; $D = \frac{1}{42}C$, u. s. f.

Es sey

$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$

so daß diese Reihe eine aus mehreren zusammengesetzte sey. Es ist hier $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$; $E = 0$, u. s. f. Das heißt nicht, $0 = 0$, welches gar nichts enthalten würde, sondern jeder Coefficient giebt für die Größen, woraus er zusammengesetzt ist, eine Gleichung. Denn wenn $x = 0$ genommen wird, so ist $A = 0$, und $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Setzt man für x irgend einen Werth, der nicht $= 0$ ist, so ist der Factor $B + Cx^2 + Dx^2 + \text{etc.} = 0$. Daher ist $B = 0$, damit für $x = 0$ die Gleichung erfüllt werde. Dadurch ist nun $0 = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$ und $C + Dx + Ex^2 + \text{etc.} = 0$, woraus folgt, daß

C = o seyn muß. Solchergestalt sind alle Coefficienten = o.

Dieses wird insbesondere bey der Methode des unbestimmten gebraucht. Für die veränderliche Größe, deren Werth durch eine andere veränderliche ausgedruckt werden soll, wird eine Reihe angenommen, die nach dieser letztern geordnet ist, und in die für beide gegebene gesetzt. So erhält man eine Reihe, die aus mehreren Reihen, auch einzelnen Gliedern zusammengesetzt ist, in welcher jeder Coefficient = o ist. S. Function (41. ff.).

Inclinatio ist, als gewöhnliche Übersetzung des von Apollonius gebrauchten Worts νευσις, so viel als Richtung einer geraden Linie. Pappus sagt in der Nachricht von dieses Geometers zwey Büchern über die Richtungen, daß eine Linie (γραμμη) nach einem Puncte gerichtet sey (νευειν ἐπι σημειον), wenn sie verlängert (ἐπεκβαλλομενη) den Punct trifft. Die allgemeine Aufgabe sey diese: Wenn zwey Linien der Lage nach gegeben sind, zwischen ihnen eine gerade, der Größe nach gegebene, Linie so zu legen, daß sie nach einem gegebenen Puncte gerichtet sey (νευουσαν). Unter den besondern Aufgaben sind einige ebene, einige körperliche, einige linearische (γραμμικα). Die letztern sind solche, welche weder durch den Kreis, noch vermittelst Kegelschnitte aufgelöset werden können, sondern höhere Curven erfordern (Th. I. S. 227.). Von den ebenen Aufgaben führt Pappus folgende an. Gegeben ein Halbkreis und eine auf dessen Grundlinie senkrechte gerade; oder gegeben zwey Halbkreise, deren Grundlinien auf derselben geraden Linie liegen: zwischen ihnen eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem Winkel des Halbkreises gerichtet sey. Ferner: Gegeben ein Rhombus, dessen eine Seite verlängert worden, in desselben äußern Winkel eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem entgegengesetzten Winkel gerichtet sey. Auch dieses: in einem der Lage nach gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe.

Diese Aufgaben, außer die zweyte, waren in dem ersten Buche des Apollonius abgehandelt. In dem zweyten Buche kam nur eine einzige Aufgabe vor, die von zwey Halbkreisen. Apollonius scheint sich auf den Fall eingeschränkt zu haben, da die gerade Linie durch den einen Endpunct des Durchmessers eines der beiden Kreise geht. Pappus rechnet in seinem Verzeichnisse der Schriften zur geometrischen Analysis die Schrift von den Richtungen noch zu der Analysis ebener Örter. In seinen Hülfssätzen (Lemmatibus) zu dieser Schrift kommen nur solche Fälle von zwey Halbkreisen vor, da die gerade Linie durch einen Endpunct des Durchmessers geht. Diese Lemmata sind in dem 7. Buche seiner mathematischen Sammlungen von Prop. LXV bis XCV. enthalten.

Die Aufgabe von dem Rhombus ist in Th. I. S. 118 aufgelöset.

Die Aufgabe in dem zweyten Buche des Apollonius wird durch die Algebra leicht aufgelöset. Es seyn (Fig. 81.) über AB und CD auf derselben geraden AD zwey Halbkreise AEB, CGD beschrieben. Durch den Endpunct D des Durchmessers CD soll an den Halbkreis AEB die gerade DE so gezogen werden, daß das zwischen beiden Halbkreisen auf derselben abgeschnittene Stück FG eine gegebene Größe habe.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte H des Halbkreises AEB die senkrechte HK auf DE, welche EF in K halbirt. Dadurch ist DK das arithmetische Mittel zwischen DE und DF, also ihrer halben Summe gleich. Ferner ist, nach einer Eigenschaft des Kreises, $AD \times BD = DE \times DF$. Noch ziehe man CG, so ist der Winkel CGD ein Rechter, und $DC : DH = DG : DK$, oder $DC \times DK = DG \times DH$. Aus diesen Verknüpfungen der Größen kann man leicht eine Gleichung für DE oder DF oder DG herleiten. Man setze $AB = a$; $CD = b$; $BC = c$; $FG = d$; $DF = x$, und zur Abkürzung $a + b + c = f$; $b + c = g$, so

ist $DE = \frac{fg}{x}$; $DK = \frac{1}{2}\left(\frac{fg}{x} + x\right)$,

$DG = x - d$, und

$$b(fg + xx) = (2f - a)(xx - dx),$$

oder

$$(f + c)xx - (f + g)dx = bfg.$$

Dieselbe Gleichung wird erhalten, wenn $DE = x$, und $EG = d$ gesetzt werden.

In beiden Fällen, es mag FG oder EG die gegebene d seyn, ist der Werth derselben zwischen gewissen Gränzen eingeschränkt. Auch ist die negative Wurzel der Gleichung für die geometrische Auflösung nicht anwendbar. Diese schränkt sich auf den Fall ein, da das Verhältniß, $x^2 + fg : xx - dx$, oder $2DK : DG$, ein gegebenes, nämlich $2DH : DC$ ist, da die arithmetische Auflösung auch den Fall begreift, daß $xx + fg : xx + dx$ dasselbe Verhältniß sey.

Incommensurabel ist ein Verhältnißbegriff, wodurch angezeigt wird, daß zwey Größen kein gemeinschaftliches Maaß haben, so klein dieses auch genommen werden mag. Dergleichen Größen sind die Seite eines Quadrats und dessen Diagonale; alle Potenzen in ganzen Zahlen und ihre Wurzeln, wenn die letztern sich nicht unter den ganzen Zahlen finden; und viele andere Gattungen von Größen.

Incommensurabel in der Potenz sind nach Euklides (X. def. 4.) Größen, deren Quadrate kein gemeinschaftliches Maaß haben, im Gegensatze gegen Commensurabel in der Potenz, s. Commensurabel.

Incomplexe Größe ist eine solche, die aus keinen besonders angezeigten Theilen durch Addition und Subtraction zusammengesetzt, und durch ein solches Symbol, als a, x, bezeichnet wird. Auch nennt man benannte ganze Zahlen z. B. 16 Pfund, 30 Rthlr. eine uncomplexe Größe, hingegen die mit Bruchtheilen

vergesellschafteten complexe, als 16 Pfund 12 Loth 2 Qu.

Increment, die endliche Veränderung einer veränderlichen Größe, sie mag additiv oder subtractiv seyn. In England ist diese Benennung gewöhnlich; auf dem Continent nennt man die Veränderungen Differenzen, s. Differenzenrechnung.

Indeterminatum, das unbestimmte, heißt erstlich eine veränderliche Größe in einer Reihe von Größen, deren Form entweder bestimmt ist, oder selbst diese unbestimmt gelassen wird, nur daß sie für alle Größen der Reihe dieselbe ist.

Zweytens, eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn sie unendlich viele Auflösungen zuläßt; auch wenn sie durch eine gewisse Bedingung eingeschränkt wird, insbesondere auf rationale, ganze oder gebrochene Werthe der unbestimmten Größe. Eine Aufgabe kann bestimmt seyn, und doch mehrere Auflösungen zulassen, da es die Natur der Gleichungen mit sich bringt, daß sie, nach ihrem Grade, mehrere Wurzeln haben. S. unbestimmte Analytik.

Drittens die Methode des undeterminirten ist diejenige, da man bloß die Form der gesuchten Gleichung bestimmt, die Werthe der unveränderlichen Coefficienten aber unbestimmt läßt, und sie nur vorläufig durch Buchstaben bezeichnet. Aus andern Gleichungen zwischen den Größen, deren Verbindung untersucht wird, leitet man mit Hülfe jener Gleichung eben dieselbe her, worin aber die Coefficienten aus den undeterminirten in der angenommenen Gleichung und gegebenen Größen zusammengesetzt werden. Beide sind identisch dieselben, und dadurch erhält man für die undeterminirten Coefficienten Gleichungen zu ihrer Bestimmung, wie in dem Artikel, Identisch, gezeigt worden ist. Am häufigsten wird diese Methode gebraucht, um den Werth einer veränderlichen Größe aus einer nicht gesonderten Gleichung herauszuziehen, oder Reihen umzukehren.

Descartes wird als der Erfinder dieser Methode angesehen. In dem zweyten Buche seiner Geometrie zeigt er, wie Normalen an eine Curve zu ziehen sind. Hier muß in einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen y und v die letztere durch die gegebenen Größen und durch y so bestimmt werden, daß y zwey gleiche Werthe erhalte. Nun nimmt Descartes zwey Factoren an, I. $yy - 2ey + ee$; II. $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$, wo f, g, h, k die zu bestimmenden Größen sind. Das Product setzt er der gegebenen Gleichung gleich, so giebt die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten die Werthe jener vier Größen, und den Werth von v durch gegebene Größen und durch e, das ist durch y.

Index ist bey Logarithmen dasselbe, was die Kennziffer oder Charakteristik derselben heißt, s. Logarithmen.

Auch wird bisweilen dieses Wort für Exponent einer Potenz gebraucht.

In der combinatorischen Analysis enthält der Index oder der Zeiger die zu combinirenden Elemente mit ihren Stellenzahlen.

Indivisibilia, s. Cavaleri's Methode des Untheilbaren.

Inexplicabilis functio, s. Facultät und Function.

Infinitesimal-Rechnung, s. Unendlich.

Inhalt einer Fläche oder eines Körpers ist ein Verhältnißbegriff, wodurch die Größe der Fläche oder des Körpers in Vergleichung mit einer gegebenen Fläche oder einem gegebenen Körper ausgedruckt wird. Diese dienen bey praktischen Rechnungen als Einheit; in allgemeinen Vergleichungen werden sie unbestimmt gelassen. Man vergleicht z. B. ein Rechteck mit einem andern mittelst ihrer Seiten, einen Kreis mit dem Quadrat des Halbmessers, einen parabolischen Abschnitt mit einem Dreyeck über derselben Grundlinie mit derselben Höhe, eine Kugel

mit dem Würfel ihres Durchmessers oder mit einer andern Kugel. Dieses geschieht entweder nach Art der Alten bloß durch Zusammensetzung der Verhältnisse, oder durch Rechnungsformeln, worin das Product zweyer Linien das Rechteck von denselben, das Product dreyer ein senkrechtes Parallelepipedum mit diesen drey Linien als Seiten bedeutet. Bey der praktischen Anwendung wird eine ostensible Einheit für die Längen angenommen, die man Fuß, Ruthe, Toise u. dergl. nennt. Daraus ergeben sich die Einheiten für die Flächen und Körper, nämlich Quadratfuß, oder Quadratruthe, u. dergl. Cubikfuß, Cubikruthe, u dergl. Oft ist es bequem, zur Einheit eine Größe zu nehmen, die mit ihr gleichnamig ist; z. B. eine Kreisfläche durch eine andere solche als Einheit auszudrucken; einen Cylinder oder cylinderartigen Körper durch einen Cylinder zu messen, dessen Höhe und Durchmesser sich gleich sind, wie bey dem Visiren der Fässer; eine Kugel mit einer andern Kugel von gegebener Größe zu vergleichen, wie in der Artillerie geschieht, wo die zur Einheit genommene Kugel ein bestimmtes Gewicht hat.

Instrumentale Arithmetik ist die Ausführung numerischer Rechnungen durch technische Hülfsmittel.

Die Alten, welche die Zahlen nicht dem System ihrer Vertheilung in Classen gemäß bezeichneten, waren mehr als wir eines mechanischen Hülfsmittels bedürftig, welches dasselbe leistete, was uns unsere Ziffern leisten. Die Römer waren besonders in diesem Falle, da ihre Bezeichnungsart für die Zahlen die allerunbequemste ist. Sie gebrauchten einen Abacus, eine Rechentafel, worauf sie die verschiedenen Einheiten durch Merkzeichen von einander unterscheiden konnten. Marcus Welser, ein Augsburger Patrizier, hat einen solchen Abacus gehabt, den er in einem Briefe an Lipsius beschreibt. (Marci Velseri Opera, Norib. 1682. pag. 819.) Er war von Metall, und hatte acht längere und acht kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In

den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der längern fünf Stück, in den übrigen vier, in den kürzern eines. Die längern Einschnitte waren bezeichnet mit ⊖.I.X.C.∞CCIOO.CCCCIOOO.I×I. Der Gebrauch dieser Rechentafel ist leicht einzusehen. Die Stifte oder Knöpfchen in den längern Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Classe, die einzelnen Knöpfe galten 5 solcher Einheiten. Der mit ⊖ bezeichnete Einschnitt enthielt die asses, die übrigen die uncias oder sestertios, Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. In dem erstern Einschnitte konnte man bis 11 bemerken, und wenn noch mehrere dazu kamen, statt 12 daselbst 1 in dem Einschnitt I. angeben. In den folgenden 7 Einschnitten konnte man bis 9 Einheiten in jeder Classe von den Einern bis zu Millionen bezeichnen, wenn man die Knöpfe von dem untern Ende eines Einschnittes bis zu dem obern verschob, um sie dadurch zu bedeutenden Zahlzeichen zu machen. So zeigten 2 verschobene Knöpfe in einem längern Einschnitte, und der einzelne in dem zugehörigen kürzern fortgerückte die Zahl 7 in der zugehörigen Classe an. Neben dem längern Einschnitte für die asses finden sich noch drey kleine, mit zwey oder einem Knöpfchen, und gewissen Beyzeichen. Vermuthlich dienten sie zu einer Bruchrechnung.

Die Chineser bedienen sich eines ähnlichen Instruments zum Rechnen, nur daß sie knöcherne oder elfenbeinerne Kügelchen auf Drathsaiten gezogen gebrauchen. Ihre Rechentafel hat eine Scheidung jenseits der Mitte. Die zwey Kügelchen, die in der kleinern befindlich sind, gelten jedes 5, die in der größern jedes Eins in seiner Classe. Sie rechnen, wie du Halde bezeugt, mit den Kügelchen so geschwind, daß ein Europäer mit der Zifferrechnung es ihnen nicht gleich thun würde.

Im sechszehnten Jahrhundert rechnete man in Deutschland häufig auf gleiche Art mit Rechenpfennigen, welche man auf parallele Linien und in die Zwischenräume legte. Die erstern bedeuteten die Einheiten in der Classe

der Einer, der Zehner u. s. f. nach der Reihe, die in den Zwischenräumen bedeuteten je fünf dieser Einheiten. Die Rechenbücher damahliger Zeit führen gewöhnlich den Titel, Rechenbuch auf der Linie und Feder, oder auf Linien und mit Ziffern. Zu Geldrechnungen bekamen die kleinen Münzsorten als Groschen und Pfennige, neben der Hauptsorte, ihre besondere Abtheilung. Adam Riese, im 16ten Jahrh., der noch in ganz neuen Zeiten als ein braver Rechenmeister bekannt geblieben ist, sagt in seiner Rechnung auf der Linie und Feder, Frankfurt 1544, zweyte Ausg., er habe in Unterweisung der Jugend befunden, daß alle, die auf den Linien anheben, das Rechnen fertiger erlernen, als wenn sie mit den Ziffern, die Feder genannt, anfangen. Auf den Linien schöpften sie einen bessern Grund, und möchten alsdann mit geringer Mühe auf den Ziffern ihre Rechnung vollbringen.

Leupold erzählt in seinem Schauplatze der Rechen- und Meßkunst (Leipzig 1727), daß er in seiner Jugend noch einige Verwalter und Beamte auf den Linien habe rechnen sehen. Zu Dechales Zeiten (Mundus mathematicus, 1674.) war die Rechnung auf Linien bey den Kaufleuten in Frankreich sehr in Gebrauch.

Neper, der durch die Erfindung und Anwendung der Logarithmen sich so verdient gemacht hat, hat auch ein nützliches Erleichterungsmittel für gemeine Rechnungen durch seine Rechenstäbe geliefert. Sie enthalten, wie bekannt genug ist, die Vielfachen der einzelnen Ziffern bis zum Neunfachen, so daß die Einer unter der Diagonale jedes Faches zur Rechten, die Zehner aber über derselben zur Linken stehen. Man kann also von jeder Zahl sich ganz leicht eine Tabelle ihrer Vielfachen bis zum Neunfachen (einen Rechenknecht) zusammensetzen, welchen man bey der Multiplication und noch mehr bey der Division oft gut benutzen kann, besonders wenn ein Multiplicandus oder ein Divisor mehrmals angewandt werden. Z. B. das 6fache der Zahl 473897 erscheint auf den neben einander gelegten, mit den Ziffern dieser Zahl bezeichneten, Stäben folgendergestalt:

2 4 1 4 5 4
4 2 8 8 4 2

woraus man leicht das 6fache dekadisch geordnet abschreibt, nämlich 2 8 4 3 3 8 2.

Neper hat sein Rechnungs-Hülfsmittel für werth gehalten, es in einer besondern Schrift zu beschreiben: Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo: Cum appendice de expeditissimo multiplicationis promtuario. Quibus accessit et Arithmeticae localis liber unus. Authore et inventore Io. Nepero, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi 1617. 154 S. gr. 12. Es sind davon zwey Nachdrücke gemacht, eine italiänische Übersetzung zu Verona 1623, und zwey deutsche, 1619 und 1623. Ob die letztern vollständig sind, kann ich nicht sagen. Das auf dem Titel angezeigte Promtuarium ist eine kunstreiche, aber umständliche Stäbchenrechnung. Auf langen schmalen Platten sind die Vielfachen der ersten neun Zahlen auf eine eigene Art in Quadraten mit 18 dreyseitigen Fächern, wiederholt vertheilt. Bey dem Gebrauch werden die ausgesuchten Platten neben einander, und darauf andere quer über gelegt, worauf bloß leere Fächer gezeichnet sind, von welchen einige ausgeschnitten worden. Nun erscheinen die Vielfachen des Multiplicandus durch die offenen Fächer eben so wie bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Rechenstäbe. Die Arithmetica localis ist eine dyadische Rechnung mit Marken. Bey der Addition und Subtraction genügt ein bloßes Lineal; bey der Multiplication werden die Vielfachen nach dyadischer Ordnung auf die Felder eines wie ein Schachbrett eingetheilten Vielecks gelegt, und darauf summirt. In der ersten Reihe unten bedeuten sie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, etc., in der zweyten das doppelte, in der dritten das vierfache, in der vierten das achtfache, u. s. f. Hier findet man den ältesten Gebrauch der Dyadik. Das kunstreiche Büchlein verdiente diese Anzeige, da Kästners Nachricht in der Geschichte der Mathematik, III. S. 95 zu unvollständig ist.

Die von Neper angewiesene Art, die Vielfachen einer Zahl zu finden ist schon in einem deutschen Rechenbuche aus dem 16ten Jahrhundert gelehrt. Es hat den Titel: Ein Newe vnd wol gegrundte vnderweysung aller Kaufmans Rechnung in dreien buchern mit schönen Regeln und Fragstucken begriffen. — Durch Petrum Apianum von Leysnick, der Astronomie zu Ingolstadt Ordinarium, verfertiget. Aufs new durchaus übersehen — vnd gebessert. Anno M.D.XLIII. Auf dem Bogen P sind zwey Multiplications-Exempel völlig nach dem Verfahren mit den Neperischen Stäben vorgestellt Die Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus stehen in Quadraten unter jeder Ziffer, durch eine Diagonale gesondert. Nur nimmt Apian keine beweglichen Stäbe, und setzt bloß die Vielfachen durch die Ziffern des Multiplicators unter einander. Auch sagt er: Nicht von nutz oder von kürtz wegen, hab ich diese zwo nachfolgende figuren der Multiplication gesetzt, sondern allein von wegen der fürwitzigen Schüler, das sie do mit jre köpff spitzen. — Man ist in Deutschland Nepern mit seiner Stäberechnung beynahe so zuvorgekommen, wie der Schweitzer Just Byrg mit seinen Logarithmen, die freylich noch nicht die bequeme Anwendbarkeit hatten, welche Neper schon den seinigen gab.

Caspar Schott hat die Rechenstäbchen in cylindrische verwandelt, und auf jedem Cylinder die Vielfachen der Zahlen 1 bis 9 und der 0 verzeichnet. Die Cylinder liegen in einem Kästchen neben einander, und sind auf Zapfchen durch ein äußeres Knöpfchen beweglich, so daß alle Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus zum Vorschein gebracht werden können.

Leupold hat die Vielfachen der Ziffern nach Art der Neperischen Stäbchen auf die schmale Seite vieleckiger oder runder Scheiben getragen, welche auf eine Achse gesteckt und in ein Kästchen eingeschlossen werden. Jede ist für sich beweglich, und kann durch einen Stift unbeweglich gemacht werden. Er hat diese Einrichtung in seinem Theatro arithm. beschrieben. Daselbst ist §. 35.

noch eine, wie es scheint künstliche, mechanische Verbindung der Neperischen Stäbchen aus dem Iournal des Scavans, 1678. p. 170. beschrieben. Ihr Erfinder heißt Grillet.

Reyher, Professor der Rechte in Kiel, hat im Jahr 1688 in einer deutschen und einer lateinischen Schrift gezeigt, wie die Vielfachen der Zahlen von 1 bis 60 nach der Sexagesimal-Abtheilung auf Stäbchen getragen werden, zur Nachahmung der Neperischen Stäbe. Ein Holsteinischer Edelmann, von Qualen, hat es zuerst angegeben.

Die künstlichsten Hülfsmittel zum Rechnen sind die Rechenmaschinen, welche nur das Stellen der Ziffern in den aufgegebenen Zahlen, und bloßes Drehen erfordern. Die erste dieser Art ist eine von Pascal erfundene, als er erst 19 Jahre alt war. Sie ist in dem Recueil des machines approuvées par l'Académie des Sciences abgebildet und beschrieben, allein so dunkel, daß, wie der Verfasser des Artikels, Machine arithmétique, in der Encyclopédie méthodique (Diderot) sagt, es fast so schwer ist, diese Beschreibung zu verstehen, als eine solche Maschine zu erfinden. Die Beschreibung in dem gedachten encyklopädischen Wörterbuche ist auch schwer zu verstehen, wenigstens in dem italiänischen Nachdruck, wo die Figuren nicht zu der Beschreibung passen.

Im Jahr 1725 ist eine Rechenmaschine von l'Epine verfertigt, die einfacher ist, als die von Pascal erfundene, und als andere, die derselben nachgeahmt waren. Sie ist in der gedachten Sammlung von Maschinen befindlich, wo noch eine andere von Boitissendeau beschrieben ist. Die Akademie urtheilt von beiden rühmlich.

Leibnitz bemerkte einige Unvollkommenheiten an der Pascalschen Rechenmaschine, und sann auf eine neue Einrichtung. Diese zeigte er schon im Jahr 1673 der Londoner Societät vor, und als er ihr noch Verbesserungen gegeben hatte, der Pariser Akademie der Wissenschaften, von der sie mit Beyfall aufgenommen ward. Das Äußere und das Verfahren bey dem Gebrauche hat Leibnitz

in den Miscellaneis Berol. a. a. 1709 beschrieben und mit einer Abbildung erläutert. Er ist aber doch mit seiner Rechenmaschine nie völlig zu Stande gekommen, ob er gleich einige tausend Thaler, ja nach Einiger Angaben 24000, daran gewendet hat. Da er selbst kein Mechanikus, und wie es scheint, auch ein schlechter Zeichner war, so mochte er sich den Künstlern nicht gehörig verständlich machen können. Er hat, wie Leupold an dem a. O. erzählt, seine Maschine an einen geschickten Mechanikus, M. Teubert in Zeitz, geschickt, daß dieser versuchen sollte, sie völlig in Stand zu setzen. Da aber nach Leibnitzens Tode die Erben dazu kein Geld hergeben, selbst den Vorschuß jenes Mannes nicht vergüten wollten, so ist das Werk ganz liegen geblieben. Ein Exemplar der Maschine, aber nicht vollendetes, ist vor diesem in Hannover auf der königlichen Bibliothek befindlich gewesen, und hernach nach Göttingen geschickt. Ich erinnere mich, da ich sie in Göttingen gesehen habe, daß die Getriebe ungleich lange Triebstecken, wie die Ordinaten an einer cylindrischen Spirale, hatten, um die Räder mittelst ihrer Stifte oder Zähne mehr oder weniger zu drehen. Kästner hat eine Beschreibung derselben zu Pütters akademischen Gelehrtengeschichte der Georgaugustus-Universität geliefert. Eine kurze Nachricht giebt derselbe in seiner Fortsetzung der Rechenkunst S. 568. ff. Das göttingische Exemplar ist vollständiger als das von Leibnitz selbst in den Misc. Berol. beschriebene, welches auch in Leupolds Theater angeführt ist. In der Sammlung der Leibnitzischen Werke, Th. III. N. 74. ist die Beschreibung aus der Berliner Sammlung eingerückt.

Polenus, Professor zu Padua, der durch Nachrichten von Pascals und Leibnitzens Rechenmaschinen gereitzt wurde, über die Einrichtung eines solchen Werks nachzudenken, erfand eine andere, die er in seinen Miscellaneis, Venet. 1709. bekannt machte. Leupold hat die Beschreibung in sein Theater eingerückt. Sie hat mehrere Gewichte, und ein Pendel gleich einer Uhr, scheint aber wegen ihrer Größe unbequem zu seyn.

So ward auch Leupold, da er sein Verlangen, den Bau einer Rechenmaschine zu sehen, nicht befriedigen konnte, dadurch veranlaßt, selbst eine zu erfinden, die er in dem mehrmals angeführten Werke beschreibt, und auch nach ihrer Einrichtung abbildet. Sie hat im Äußern manches Ähnliche mit der Müllerischen, wovon unten Nachricht ertheilt wird.

Der wirtembergische Pfarrer Hahn hat eine Rechenmaschine erfunden, vermittelst welcher man bis 100 Millionen in den vier Species rechnen kann. Eine Beschreibung des Äußern dieser Maschine ist in dem deutschen Merkur, May 1779, anzutreffen. Ein Exemplar besitzt der Leibmedicus Beireis in Helmstädt.

Der Hessen-Darmstädtische Ingenieur-Hauptmann Müller erfand eine Rechenmaschine, deren Beschreibung 1786 herausgekommen ist, mit einer Abbildung des Äußern begleitet. Der Gebrauch ist sehr deutlich gezeigt. Sie muß eine sehr einfache Einrichtung haben. Es sind viele Proben damit gegen Rechnungen mit Ziffern von einem sehr fertigen Rechner angestellt. Bey kleinen Exempeln ward der Rechner etwas eher fertig als die Maschine, bey großen aber ist die Maschine schneller. Wenn die Zeit aller berechneten Exempel (an der Zahl 103), vom größten bis zum kleinsten, zusammen addirt wird, so ist die von dem Rechner zugebrachte Zeit 4 St. 32 Min. 49. Sec., mittelst der Maschine aber nur 2 St. 50 Min. 23 Sec. In jener Zeit ist die auf der Probe der Rechnung zugebrachte Zeit mit begriffen. Die Maschine kann Resultate bis zu 14 Ziffern liefern. Sie kann auch zu Rechnungen mit benannten Zahlen verschiedener Sorten angewandt werden. In derselben ist ein Warnungsglöckchen angebracht, welches anzeigt, wenn bey dem Gebrauche ein Versehen gemacht ist. Es sind auch noch einige Vorrichtungen vorhanden, wodurch mögliche fehlerhafte Behandlungen verhütet werden. Eine Vergleichung der Müllerschen und Hahnischen Maschine ist in dem Göttingischen Magazin herausgegeben von Lichtenberg und G. Forster III. Bd. 5s. St. anzutreffen.

Hahn suchte die Vorzüge seiner Maschine vor der Müllerischen zu zeigen im deutschen Merkur, Jun. 1785. Müller hat den Bau der seinigen und ihre Wirkungen der Göttingischen Societät der Wissenschaften gezeigt, wovon die Götting. gel. Anz. 1784. St. 120. Nachricht ertheilen.

Lambert hat in seiner Jugend, da er Pascals Rechenmaschine erwähnt gefunden hatte, auch eine erdacht, von der aber weiter nichts bekannt geworden ist. Diese Anzeige ist aus Lamberts gelehrtem Briefwechsel, II. S. 12.

Rechenmaschinen sind ohne Zweifel zu großen Rechnungen, oder zur Prüfung solcher sehr brauchbar, vorausgesetzt, daß sie zuverläßig sind, und auch nicht leicht durch fehlerhafte Behandlung unrichtige Resultate geben können. Müller empfiehlt seine Maschine besonders zur Verfertigung weitläuftiger Tabellen, wozu sie sehr geschickt sey.

Rechnungen mittelst einiger Maaßstäbe zu vollführen, zeigte Michael Scheffelt in einer deutschen Schrift, betitelt: Pes mechanicus artificialis, oder Maaßstab, auf welchem alle Proportiones der ganzen Matheseos ohne mühsames Rechnen, allein durch Hülfe eines Handzirkels gefunden werden. Ulm. 1699 in 4. Es sind acht Maaßstäbe, für die Längen unmittelbar, für ihre Quadrate, Würfel, Kreisflächen, für die Chorden der Winkel, die Sinus, die Tangenten und für die Logarithmen. Die letztere heißt die arithmetische Linie. Die Längen selbst verhalten sich wie die Mantissen in den Logarithmen der beygezeichneten Zahlen. Dadurch dient dieser Maaßstaab zum Multipliciren und Dividiren. Auf ähnliche Art sind die andern Maaßstäbe bezeichnet. Der quadratische giebt die Größe der Quadrate der darauf getragenen Längen, der cubische ihre Würfel an, u. s. f. Es braucht nicht erinnert zu werden, daß ein solcher Maaßstab wenig Genauigkeit gewährt; für Handwerker und ungeübte Mechaniker könnte er nützlich seyn, für welche auch der Verfasser dieses Instrument insbesondere bestimmt hat. Es ist viel wolfeiler als der Proportionalzirkel.

Eine von Grüson im Jahr 1791 verfertigte Rechenmaschine, oder vielmehr Rechenscheibe, enthält auf den Sectoren eines Kreisringes die Vielfachen der Zahlen 2 bis 9 in der Richtung eines Halbmessers, und darunter die Summen jedes Vielfachen und der Zahlen 1 bis zu der vervielfachten Zahl weniger Eins, d. i. wenn n eine der Zahlen 2 bis 9 ist, die Producte 1n bis 9n, darunter die Summen $n + 1$ bis $9n + 1$, darunter die Summen $n + 2$ bis $9n + 2$, u. s. f. zuletzt die Summen $2n - 1$ bis $10n - 1$. Man kann diese Rechenscheibe bequem in ein Rechteck verwandeln.

Eine aus papiernen Scheiben zusammengesetzte, sogenannte machina arithmetica portatilis gab Prahll in Kupfer gestochen heraus, wovon in den Götting. gel. Anzeigen 1790. St. 104. Nachricht zu finden ist.

Integral ist eine Function einer veränderlichen Größe oder mehrerer in Beziehung auf ein gegebenes Differential, das aus jener Function entsteht, z. B. x^m ist das Integral von $mx^{m-1}\partial x$; oder $\sqrt{(aa + xx)}$ von $\frac{x\partial x}{\sqrt{(aa + xx)}}$; und $ax^2 + by^2 + cxy$ von $(2ax + cy)\partial x + (2by + cx)\partial y$.

Da eine Differentialgleichung aufs neue wieder differentiirt werden, und dieses noch mehrere mahle geschehen kann, so kann ein Integral noch Differentiale enthalten. Nämlich das Integral eines Differentials vom zweyten Grade enthält Differentiale vom ersten Grade, so daß das Integral immer Differentiale enthält, die einen Grad niedriger sind, als die in der Differentialgleichung, worauf sich das Integral unmittelbar bezieht. Doch ist Integral schlechtweg die endliche Function, worauf man durch die successiven Integrationen kommt.

Ein Integral wird in Beziehung auf das zugehörige Differential durch das diesem vorgesetzte $\int$ bezeichnet, z. B. $\int x^m \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$; oder $\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(aa + xx)}}$

$\sqrt{(aa + xx)}$; oder $\int(2ax + cy)\partial x + \int(2by + cx)\partial y = ax^2 + by^2 + cxy$; oder $\int \sin\varphi . \partial\varphi^2 = -\cos\varphi . \partial\varphi$; oder $\int e^x \partial x^2 = e^x \partial x$. Diese Bezeichnung vertritt die Stelle der endlichen Function, wenn das Integral noch erst zu finden ist, oder nicht vollständig ausgedruckt werden kann, auf ähnliche Art, wie $\sqrt[m]{a}$ die mte Wurzel aus a vollständig anzeigt, insbesondere bey allgemeinen Formeln, wenn die Function, die in ein Differential multiplicirt ist, unbestimmt gelassen wird. So bezeichnet $\int X \partial x$ den Flächeninhalt zwischen zwey Ordinaten einer Curve, des zwischen ihnen liegenden Stücks der Abscissenlinie und des Bogens der Curve, da X die Ordinate als Function von x bedeutet.

Das Integral, $\int X \partial x$, ist die veränderliche Größe, auf deren Differential sich das Differential von x bezieht. Wenn in der Rechnung, wodurch jene Größe gefunden wird, dieselbe auch nicht durch ein besonderes Symbol bezeichnet wird, so muß man doch in Gedanken immer eine Function y setzen, von der Beschaffenheit, daß $\frac{\partial y}{\partial x} = X$ sey. Denn ein Differential ist keine selbstständige oder absolute Größe, sondern hat nur einen relativen Werth in Vergleichung mit andern Differentialen. S. Th. I. S. 812.

Das Zeichen $\int$ deutet ursprünglich auf eine Summe. Allein ein Integral ist keine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen, da Differentiale für sich allein genommen keine Quantität haben. Das Zeichen rührt von Leibnitz her, s. Th. I. S. 843. Es wäre schicklicher der Buchstab *J* dafür gewesen, den Johann Bernoulli anfangs gewählt hatte, wie man aus dem Commercio phil. et mathem. Leibnitii et Bernoullii sieht. Aus Gefälligkeit gegen Leibnitz nahm er die Bezeichnung durch $\int$ an.

Wenn der Werth eines Integrals gefunden ist, sofern daraus das Differential entsteht, so ist noch eine

Constante zuzusetzen, weil bey der Differentiation der unveränderliche Theil in einer Function wegfällt, oder man muß sich versichern, daß die Constante Null sey. Ihr Werth wird dadurch bestimmt, wenn man den Werth des Integrals für einen gewissen Werth der veränderlichen Größe bestimmen kann. Der leichteste und häufigste Fall ist, da ein Integral $y = o$ ist, wenn die dazu gehörige $x = o$ genommen wird.

Integrale höherer Differentiale enthalten mehrere Constanten. Ist das Differential vom zweyten Grade, so kommt in das erste Integral eine Constante, und in das zweyte noch eine. So viel successive Integrationen, so viele Constanten.

Ein negatives Integral bedeutet, daß der absolute Werth von einer Constante abzuziehen ist. Wenn nämlich X eine Function von x ist, so haben X und $C - X$ einerley Differentiale in Beziehung auf ∂x, nur entgegengesetzte; also ist, wenn bey einem positiven ∂x das Integral von ∂X negativ ist, dieses $= C - X$.

Ein vollständiges Integral ist dasjenige, worin die gesuchte Function in ihrer ganzen Ausdehnung mit einer willkührlichen Constante dargestellt wird. Ein particuläres Integral ist dasjenige, worin die Constante auf eine gewisse Weise bestimmt worden ist. So erklärt sich Euler in den Institt. Calc. integr. §. 36. Aber ebendas. §. 540. schränkt er die Bedeutung des Ausdrucks, particuläres Integral, darauf ein, daß es eine solche Relation der veränderlichen Größen sey, welche der gegebenen Differentialgleichung Genüge thut, ohne eine neue Constante zu enthalten, doch müsse es in dem vollständigen Integral enthalten seyn. Jene erstere Erklärung ist vorzuziehen, da sie diese andere auch in sich begreift, wenn nämlich die zugefügte Constante $= o$ genommen wird. Diese andere kann zu einem Mißverstande Anlaß geben. Es giebt Differentialgleichungen, die durch eine gewisse Relation der veränderlichen Größen erfüllt werden, ohne eine willkührliche Constante, und ohne daß diese Relation für ein Integral der Gleichung gehalten

werden kann. Euler erinnert dieses allerdings, und hat das 4te Kap. der 2. Section im 1. Theile der Untersuchung gewidmet, wie man bestimmen möge, ob eine gefundene Relation, die der Differentialgleichung Genüge thut, zugleich ein wahres particuläres Integral ist, ohne daß man das vollständige Integral kennt.

Eine Differentialgleichung kann nämlich in zwey Theile zerfallen, deren jedem durch eine gewisse Function von x und y Genüge geschieht, ohne daß diese die eigentliche Integralgleichung ist. Oder die endlichen Differentialfactoren der Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, können einen gemeinschaftlichen Factor haben, der also, wenn er $= 0$ gesetzt wird, die Gleichung erfüllt. Oder in der ursprünglichen endlichen Gleichung, $V = 0$, werde eine der darin enthaltenen unveränderlichen Größen a, als eine veränderliche behandelt, so daß dadurch die Differentialgleichung werde, $P\partial x + Q\partial y + R\partial a = 0$, wo R eine Function von a sey. Setzt man hier $R = 0$, so erhält man, wenn der daraus hervorgehende Werth von a in P und Q gesetzt wird, eine Differentialgleichung für x und y allein, deren Integral auch, bey gehöriger Bestimmung der Constante der Gleichung $P\partial x + Q\partial y = 0$ Genüge thut.

Z. B. die Gleichung
$x\partial x + y\partial y \pm \partial y \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} = 0$ zerfällt in zwey Theile, die durch die Annahme, $x^2 + y^2 - b^2 = 0$, jeder Null werden. Die eigentliche Integralgleichung ist, $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$, und die einfachere Differentialgleichung ist, $x\partial x - a\partial y = 0$. Setzt man aus der endlichen Gleichung den Werth von a in die Differentialgleichung, so wird jene vorgegebene erhalten. Differentiirt man die endliche Integralgleichung, so daß a zugleich als veränderlich betrachtet wird, so erhält man $x\partial x - a\partial y - y\partial a - a\partial a = 0$. Nimmt man $a + y = 0$, und setzt für a seinen Werth in dem zweyten Terminus, so ist $x\partial x + y\partial y = 0$, also $x^2 + y^2 =$ const. Setzt man const. $= + b^2$, so ist
$x^2 + y^2 - b^2 = 0$ die Function, welche der vorgegebe-

nen Gleichung genügt. Beide entstehen aus derselben endlichen Gleichung durch Elimination derselben Größe a.

Ein anderes Beyspiel ist die Gleichung,

$$y - ax - b\sqrt{(1 + aa)} = 0.$$

Hieraus ist $\partial y - a\partial x = 0$, und aus beiden, durch Wegschaffung von a,

$$(xx - bb)\partial y - xy\partial x \pm b\partial x\sqrt{(xx + yy - bb)} = 0.$$

Dieser thut die Gleichung, $xx + yy - bb = 0$, Genüge. Man findet diese Relation auch durch die Differentiation der endlichen Gleichung, wenn a veränderlich genommen wird. Nach dem gezeigten Verfahren ist $a = \frac{x}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$,

wodurch wird $\partial y - \frac{x\partial x}{\sqrt{(bb - xx)}} = 0$, und

$y + \sqrt{(bb - xx)} = 0$, wenn die Constante der neuen Differentialgleichung Null gesetzt wird.

Man wird mit la Place uud la Croix die Functionen, welche der Differentialgleichung Genüge thun, ohne in der eigentlichen Integralgleichung enthalten zu seyn, lieber particuläre Auflösungen nennen, weil sie nicht auf dem Wege der Integration aus der vorgegebenen Differentialgleichung gefunden werden.

Es möchte schicklicher seyn, anstatt vollständiges Integral zu setzen, allgemeines, weil dem Vollständigen dasjenige entgegensteht, woran etwas fehlt, dem Allgemeinen aber das besondere entgegen gesetzt wird. Wenn keine willkührliche Constante dem Integral beygefügt ist, ohne daß der Werth Null für die Constante ausdrücklich bestimmt wird, so möchte man es ein unvollständiges, und das mit einer Constante begleitete ein vollständiges nennen.

Clairaut hat in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1734 die Bemerkung gemacht, daß es Differentialgleichungen gebe, welche man durch neue Differentiation integriren kann, daß aber die solchergestalt gefundenen Integrale nie unter den vollständigen begriffen sind, welche die gewöhnlichen Regeln der Integration geben. Hernach

haben sich die Analysten viel mit den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen beschäftigt. Euler in den Schriften der Berliner Akad. 1756, und in dem Werke über die Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. IV.; d'Alembert in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1769; allgemeiner Laplace in denselben 1772; Lagrange in den M. de l'Ac. de Berlin 1774, und in der Théorie des fonctions anal. nr. 69.; Trembley in den Schriften der Turiner Gesellschaft für 1790. 91. Man sehe auch Kästners Analysis des Unendl. S. 575.

Eine duplicirte Integralformel ist eine solche, die eine zweyfache Integration nach einander erfordert. Das dazu gehörige Differential hat die Form $Z\partial x\partial y$, worin Z irgend eine Function von x und y ist. Das Integral davon wird durch $\int\int Z\partial x\partial y$ bezeichnet. Bey der ersten Integration wird eine der veränderlichen Größen, sie sey x, als unveränderlich betrachtet, und die Integration bloß in Absicht auf die andere, y, vorgenommen. In diesem ersten Integral wird x allein veränderlich gesetzt, wenn nämlich x und y nicht von einander abhängen; die willkührlichen zuzusetzenden Functionen sind eine von x und eine von y. Wenn aber x und y in irgend einer Verbindung stehen, so muß das erste Integral so genommen werden, daß es alle Werthe von y begreift; und in der mit ∂x behafteten Differentialformel wird nun für y sein Werth durch x gesetzt, um sie in Beziehung auf x zu integriren. Euler hat von diesen Integralformeln eine Abhandlung in den Comm. novis Acad. Petr. T. XIV. geliefert, die in den 4. Theil der Integralrechnung eingerückt ist. Er gebraucht sie zu einigen künstlichen Cubirungen und Complanationen. Die Florentinische Aufgabe hat er dadurch auf einem von geometrischen Constructionen ganz befreyeten Wege, und sehr allgemein, aufgelöset. Bey der Rechnung über die Anziehung eines Körpers auf einen andern kommen auch triplicirte Integrale vor. Jedes Element eines Körpers mag als ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angesehen werden, dessen Seiten die Differentiale dreyer rechtwinklichten Coordina-

ten x, y, z sind, und der ganze Körper mag durch $\int\int\int \partial x \partial x \partial z$ bezeichnet werden, oder die anziehende Kraft desselben durch $\int\int\int V \partial x \partial y \partial z$. S. la Place Théorie du mouvement et de la figure des Planètes.

Joh. Bernoulli gebraucht auch das vervielfachte Integrationszeichen, aber in einer andern Bedeutung als die von Euler angenommene, in dem Commercio epistolico Leibnitii et Io. Bernoullii, T. I. p. 75. 76. Bey ihm ist $\int z = \frac{z^2}{1.2\partial z}$; $\int^2 z = \frac{z^3}{1.2.3\partial z^2}$; $\int^3 z = \frac{z^4}{1.2.3.4\partial z^3}$, u. s. f. wo ∂z constant ist. Deutlicher und allgemeiner ist folgende Erklärung dieser Notation. Es sey Z eine Function von z, und $\int Z\partial z = P$; $\int P\partial z = Q$; $\int Q\partial z = R$, u. s. f. so ist $P\partial z = \partial z \int Z\partial z = \int Z\partial z^2$. Denn da ∂z constant ist, so kann man es, wie jede constante Größe, vor oder unter das Integralzeichen setzen. Folglich ist $\int\int Z\partial z^2$ oder $\int^2 Z\partial z^2 = Q$. Ferner ist $\int Q\partial z$, oder $\int^2 P\partial z^2$, oder $\int^3 Z\partial z^3 = R$, u. s. f.

Bernoulli betrachtet auch die Integrationen verschiedener Ordnungen als Differentiationen im entgegengesetzten Verstande in Beziehung auf die eigentlichen, und bezeichnet sie dem zu folge. Also ist $\partial^{-1} z = \int z$; $\partial^{-2} z = \int^2 z$; $\partial^{-3} z = \int^3 z$, u. s. f. Deutlicher: $\partial^{-1} z = \frac{\int z\partial z}{\partial z}$; $\partial^{-2} z = \frac{\int^2 z\partial z^2}{\partial z^2}$; $\partial^{-3} z = \frac{\int^3 z\partial z^3}{\partial z^3}$, u. s. f.

Integralrechnung ist die Methode, aus der gegebenen Relation der Differentiale zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen die Relation dieser Größen zu finden. Das Verfahren, wodurch man dazu gelangt, heißt die Integration.

Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differentialrechnung, da die letztere aus der Relation der ver-

änderlichen Größen das Verhältniß ihrer Differentiale, es sey der ersten oder der höhern sucht. Jene aber ist schwer und noch unvollendet, diese ist leicht und mag als geschlossen betrachtet werden. Zu jeder Function kann man leicht ihr Differential in Beziehung auf die Differentiale der darin enthaltenen veränderlichen Größen finden; allein von jedem Differential läßt sich nicht das Integral angeben. Es ist hier, aber auf eine viel höhere Art, ein Fall, wie in der gemeinen Arithmetik mit den Irrationalzahlen. Nicht aus jeder Zahl läßt sich die Wurzel von einem gegebenen Grade vollständig angeben. Ja es können Differentialgleichungen so beschaffen seyn, daß gar keine Relation der veränderlichen Größen möglich ist, woraus jene entständen, und daß sie erst durch einen zugesetzten Factor eine Form erhalten, bey welcher ein reales Integral Statt hat.

Die Differentialgleichungen enthalten entweder nur zwey veränderliche Größen, oder mehrere. Dieses giebt zwey Hauptabtheilungen der Integralrechnung. Jede derselben enthält zwey Theile. In dem ersten wird die Integration solcher Differentialgleichungen gesucht, worin nur Differentiale vom ersten Grade vorkommen; in dem andern solcher, worin Differentiale vom zweyten Grade und höhern enthalten sind. Der erste Theil der ersten Hauptabtheilung ist bisher am vorzüglichsten bearbeitet worden; der zweyte Theil noch nicht hinlänglich. Die zweyte Hauptabtheilung aber, und insbesondere der zweyte Theil derselben, ist so schwierig, daß dasjenige, was darin geleistet worden, unbeträchtlich ist gegen dasjenige, was noch darin zu wünschen übrig bleibt.

Der erste Theil der ersten Hauptabtheilung enthält drey Abschnitte zu Folge der Beschaffenheit der dahin gehörigen Differentialgleichungen, zwischen zwey veränderlichen Größen x und y.

Erster Abschnitt. Die Differentialgleichung habe die Form, $\partial y = X \partial x$, wo X irgend eine Function von x ist. Dieser Abschnitt ist der leichteste, der in den deutschen Lehrbüchern beynahe nur allein vorgetragen wird.

Euler nennt den Ausdruck, worin eine Function von x mit dem Differential von x verbunden ist, eine Differential-Formel.

Zweyter Abschnitt. Die Differentialgleichung habe die Form: $P\partial x + Q\partial y = 0$, wo P und Q jede irgendwelche Functionen von x und y sind. Hier hat man noch keine allgemeine Methoden, sondern nur für besondere Fälle Auflösungen gefunden. Ist P bloß von x eine Function, und Q von y, so läßt sich die Integration durch die Methoden in dem ersten Abschnitte bewerkstelligen. Differentialgleichungen, worin die veränderlichen Größen und ihre Differentiale nicht gesondert sind, heißen insbesondere Differentialgleichungen.

Dritter Abschnitt. Die Differentialgleichung enthalte Potenzen von ∂x und ∂y, und Producte dieser Differentiale. Dieser Fall ist so schwierig, daß nur äußerst wenig bisher darin geleistet worden ist.

Der zweyte Theil der ersten Hauptabtheilung betrifft die Auflösung solcher Differentialgleichungen, worin nebst den veränderlichen x und y und ihren ersten Differentialen noch höhere vorkommen. Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; u. s. w., so ist hier die Frage, wie aus einer Gleichung zwischen x, y, p, q, r, etc. die Gleichung zwischen x und y gefunden werden möge.

Die zweyte Hauptabtheilung, worin Gleichungen mit mehr als zwey veränderlichen Größen behandelt werden, enthält die Rechnung mit partiellen Differentialen, wie man sie in Frankreich besonders zu nennen pflegt. Die Differentialgleichung sey diese: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z sind, so ist die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = 0$ eine partielle, weil nach derselben die veränderliche z als unveränderlich betrachtet wird. So auch die Gleichungen $P\partial x + R\partial z = 0$, und $Q\partial y + R\partial z = 0$. Es bedeute

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf x allein, und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf y allein, so enthält der erste Theil der zweyten Hauptabtheilung solche Aufgaben, worin eine gewisse Relation zwischen den Größen x, y, z, und $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ vorgelegt wird, um daraus eine Gleichung zwischen x, y, z allein herzuleiten.

In dem zweyten Theile kommen außer den Formeln $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch folgende Formeln $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial y}\right)$ in Rechnung, von welchen die erste bedeutet den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Beziehung auf x allein; die zweyte den für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Absicht auf y, oder welches dasselbe ist, den von $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in Absicht auf x (zufolge Differentialgleichung, 12); und die dritte Formel den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wieder in Beziehung auf y allein. Nun sey eine Gleichung zwischen x, y, z, den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und den zuletzt angezeigten des zweyten Grades gegeben, so ist die aufzulösende Aufgabe, daraus eine Gleichung zwischen x, y und z allein herzuleiten. Dergleichen Aufgaben kommen in der höhern Mechanik und Hydrodynamik häufig vor, daher die Methoden zu ihrer Auflösung sehr wichtig sind.

Zu Gleichungen mit höhern Differentialen ist noch bisher keine Veranlassung gewesen.

Wenn die Functionen, welche durch die Integralrechnung gesucht werden, algebraisch nicht können dargestellt werden, so sind sie transscendente. Doch werden logarithmische und circulare Functionen mit den algebraischen fast für gleichgeltend genommen, weil man hier die zusammengehörigen Größen mittelst der Tafeln oder der entwickelten Formeln immer hinlänglich genau eine aus der andern bestimmen kann. Daher wird eine Integration für vollendet angesehen, wenn sie auf logarithmische oder circulare Functionen, es sey allein oder in Verbindung mit algebraischen gebracht ist.

Bey der Integration einer Gleichung von der Form, $\partial y = X \partial x$ läßt sich das Integral y oder die gesuchte Function von x oft nicht anders, als durch eine Reihe näherungsweise angeben. Diese Functionen mag man als algebraische irrationale betrachten. Die andern Differentialgleichungen, wenn sie nicht algebraische Integrale, oder auch circulare oder logarithmische haben, führen auf eigene Gattungen von transscendenten Functionen, deren Anzahl unbestimmbar bleibt.

Geschichte der Integralrechnung.

Es ist schwer eine Geschichte der Integralrechnung abzufassen. Die Methoden der Integrationen mit allen dazu gehörigen Untersuchungen sind theils in sehr vielen einzelnen Abhandlungen enthalten, theils in den Schriften über die höhere Geometrie, Mechanik und physische Astronomie zerstreut, woraus man die allmählige Ausbildung und Erweiterung der Methoden hervorziehen müßte. Dabey würde man nicht umhin können, sich auf die Rechnungen selbst etwas einzulassen, um zu zeigen, worin eine Entdeckung oder Erweiterung bestanden habe, wenn man auch sich nicht vornähme, den Leser von den Gegenständen zu unterrichten, sondern ihn deshalb auf gute Bücher verwiese. Hier möchte es manchmal schwer seyn, entweder nicht unverständlich oder nicht zu ausführlich zu wer-

den. Montucla beengt sich in seiner Geschichte der Mathematik, auch bey der Integralrechnung, den Raum dadurch, daß er dem Leser zugleich Unterricht von den Elementen der Wissenschaft ertheilt, der doch nur unvollständig seyn kann.

In dem Artikel: Differentialrechnung, Th. I. S. 832. ist gezeigt, daß Newton seine Schrift: Methodus fluxionum et serierum infinitarum schon im J. 1671 aufgesetzt habe. In dieser macht die Anwendung der Integralrechnung auf Quadraturen und Rectificationen der Curven den größten Theil aus, daher Horsley in seiner Ausgabe der Newtonschen Werke ihr den Titel giebt: Artis analyticae specimina, vel Geometria analytica. Die Abhandlung: de quadratura curvarum, welche 1704 mit der Optik heraus kam, enthält allgemeinere Integrations-Formeln, als jene Abhandlung, welche durch viele Exempel die neue Methode erklärt. Doch haben beide die Tafeln für gewisse algebraische Integrale, und solche, die auf Quadratur der Ellipse oder Hyperbel gebracht werden können, gemein. Übrigens sind auch die Principien der Naturwissenschaft, die Newton 1686 zuerst herausgab, ein Beweis, daß ihr Verfasser die Integralrechnung, wenigstens so fern sie die Formen, wie $X\partial x$, betrifft, im Besitz hatte. Die Differentialgleichungen, in welchen die veränderlichen Größen nicht gesondert sind, löset Newton in der ersten Schrift, der Methodus fluxionum, durch Verwandlung der einen veränderlichen Größe in eine, nach Potenzen der andern geordnete, Reihe auf, wovon er ein Glied nach dem andern findet, aber doch auf eine nicht bequeme Art. Es würde leichter seyn, eine Reihe mit unbestimmt gelassenen Coefficienten zu gebrauchen, eine Methode, die Newton nicht entgehen konnte, wenn er sie nicht aus gewissen Gründen zurücksetzte. Eine besondere Methode, durch eine endliche Anzahl von Ordinaten eine Curve fast genau zu quadriren, lehrte Newton in der Schrift: Methodus differentialis.

In England blieben Newtons Methoden noch unbekannt, oder wurden nur wenigen anvertraut. Erst im

J. 1699 erschienen Newtons Briefe an Leibnitz in dem dritten Theile der Werke von Wallis. Die zwey Übersetzungen der von Newton gebrauchten geheimen Schrift waren selbst noch Räthsel. Craig bediente sich in seiner zweyten Schrift über die Quadratur der krummen Linien (London, 1693) der Leibnitzischen Differentialrechnung. Er nahm dabey eine zweyte Curve zu Hülfe, an welcher die Subnormalen den Ordinaten der vorgegebenen Curve, bey gemeinschaftlicher Abscisse, gleich sind; daher das Quadrat einer Ordinate an der zweyten Curve das doppelte der zugehörigen Area an der vorgegebenen ist. Das Quadrat diente ihm statt des Integrals, die Subnormale statt des Differentials. Er nahm die Form des Integrals an, differentirte es, verglich dieses Differential mit dem vorgegebenen, und bestimmte dadurch die Coefficienten in der angenommenen Form.

In Deutschland zeigte Leibnitz die Anwendung seiner Infinitesimalrechnung, ganz unabhängig von Newtons noch nicht bekannten Entdeckungen, durch mancherley wichtige und schwere Aufgaben aus der Geometrie und Physik. Dadurch machte er einen der scharfsinnigsten Geometer seiner Zeit, Jakob Bernoulli, auf seine Methode aufmerksam, und erwarb an diesem und dessen Bruder, Johann Bernoulli, für den neuen, hernach so wichtig gewordenen Theil der Analysis die eifrigsten Beförderer, für sich selbst an dem ietztern einen sehr warmen Freund und Vertheidiger. Er selbst, durch vielerley Beschäftigungen zerstreut, konnte nur seine Gedanken flüchtig in Zeitschriften hinwerfen. Auch hat er für die Integralrechnung selbst wenig gethan. In einem Aufsatze in den Actis Erud. 1684 zeigte er an, daß er eine Methode habe, Curven zu quadriren mittelst anderer Curven, erklärte sie aber nicht. Im J. 1686 sagt er daselbst, die Quadraturen seyn ihm nur ein besonderer Fall einer viel größern Aufgabe, welche er die umgekehrte Methode der Berührenden nenne. Wieder nichts, als etwas hingeworfen! Endlich im J. 1693 erklärt er in dem Supplemento Geometriae dimensoriae seine Methode

der Quadraturen, die auf die Construction einer andern Curve ankommt, deren Ordinaten den Flächenräumen der zu quadrirenden proportional sind. Diese Curve soll durch eine gewisse Bewegung beschrieben werden. Leibnitz hatte also damahls noch keine Methode unmittelbar zu integriren. In den A. Er. 1694 giebt er die Construction der Isochrona paracentrica; aber das Integral, $\int \partial z : \sqrt{(a^3 z - a z^3)}$, worauf sie beruht, findet er nur durch Construction einer Curve, deren Rectification von diesem Integral abhängt. Das heißt freylich nur die Form des Differentials verwandeln, nicht es integriren. In einem Aufsatze, Supplementum Geometriae practicae, cet. A. Er. 1693 gebraucht Leibnitz die Methode des Unbestimmten zur Integration durch Reihen, und macht die Anwendung auf Logarithmen und den Kreis. Aus einer ganz kurzen Bemerkung in den A. Er. 1696. Mart. über eine von Jakob Bernoulli vorgegebene ungesonderte Differentialgleichung sieht man, daß er nicht allein diese nicht leichte Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen wußte, sondern auch darin die veränderlichen Größen sondern konnte, welche Methode er aber nur in Briefen andern mitgetheilt hat. In dem Aufsatze: Specimen novum Analyseos, cet. A. Er. 1702 zeigt Leibnitz, wie rationale gebrochene Functionen in einfache zerlegt werden, aber auf eine undeutliche Art. Hierauf gründet er die Integration der Differentialformeln $X \partial x$, wo X ein solcher Bruch ist. Er bemerkt, daß bey unmöglichen Wurzeln des Nenners jedes Paar einen quadratischen Factor giebt, macht sich aber wegen Nenner, wie $x^4 + a^4$; $x^8 + a^8$ eine Schwierigkeit, da er sie nicht in quadratische zu zerlegen weiß. (Th. I. S. 163) Freylich können sie nicht in binomische, aber wohl in trinomische, quadratische Factoren zerlegt werden. S. Th. I. S. 158. ff. mit Zuziehung von Goniometrie, IX.

In dem Commercio epistolico Leibnitii et Io. Bernoullii findet man, wie manche Integrations-Methoden durch die gegenseitige Mittheilung dieser beiden scharfsinnigen Männer entwickelt worden sind. Bernoulli möchte den größten Antheil daran haben; er konnte aber

auch sich der neuen Analysis ohne Zerstreuung widmen. Man muß diese für die literarische Geschichte der Mathematik und Physik in dem Zeitraume dieses Briefwechsels reichhaltige Sammlung selbst nachsehen. Nur ein paar Bemerkungen von Leibnitz lassen sich hier in der Kurze anführen. Er zeigt (p. 21), wie die Integration der Formel $x^m (lx)^n \partial x$ erhalten wird. Er differentiirt das Product $x^p (lx)^q$, welches ein zweytheiliges Differential giebt. Nun werden successiv für q die ganzen Zahlen von 1 an gesetzt, wodurch für ein gegebenes n das Integral mittelst der für kleinere Werthe des Exponenten gefundenen Integrale erhalten wird. Diese Reductions-Methode ist bequem, und auch auf andere Formen der Differentiale anwendbar. Joh. Bernoulli scheint sich ihrer auch bey der Differentialformel $x^n \partial x : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$, bedient zu haben, da er (p. 285) meldet, daß er die Fälle angeben könne, wo sie schlechthin integrirbar ist, wo sie die Rectification der Kreisbogen erfordert, und wo weder das eine noch das andere Statt hat. Von der Reihe, die Bernoulli für das Integral der Formel, $y \partial x$, angegeben hatte, nahm Leibnitz Veranlassung eine dergleichen Reihe auch zur ersten Integration einer höhern Differentialformel: $x^m \partial^n y$, zu suchen, wobey er einen Rechnungsfehler begieng, den Bernoulli verbesserte.

Durch die Aufgabe von der Isochrona (der Linie des gleichförmigen Falles), die Leibnitz im J. 1687 vorlegte, erkannte Jakob Bernoulli die Brauchbarkeit der neuen Analysis. Sein erster Versuch in derselben betraf diese Curve, in den A. Er. 1690. Die Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung, die leicht zu integriren ist. Er selbst aber gab dagegen eine schwerere auf, die von der Figur einer an zwey Puncten aufgehangenen, schweren, vollkommen biegsamen Linie, ohne doch schon die Auflösung gefunden zu haben, zufolge der Nachricht, die Joh. Bernoulli in seiner nachher gefundenen Auflösung (A. Er. 1691. Iun., Opp. T. I. p. 48) von der Veranlassung der Aufgabe giebt. Diese Aufgabe überzeugte die Geometer von der Kraft der neuen Analysis. Die Differentialglei-

chung für die Curve führt auf ein logarithmisches Integral. Die horizontalen Ordinaten verhalten sich wie die Logarithmen einer Function der Abscisse. Hierauf folgten im J. 1691 Anwendungen der Integralrechnung auf die Geometrie der Curven, als die spiralische Parabel, die logarithmische Spirale, die loxodromische Linie, die Flächen sphärischer Dreyecke und eine Erweiterung der Aufgabe von der Kettenlinie auf ungleich schwere oder dehnbare Fäden. Er gab zugleich die Frage von der Figur der elastischen, durch ein Gewicht gekrümmten Linie mit der in Chiffern versteckten Auflösung auf, und erwähnte auch der Segellinie, oder der Figur eines vom Winde gespannten Segels. Hierbey bemerkte er, daß durch keine andere Methode, als durch die Leibnitzische Infinitesimalrechnung es möglich sey, dergleichen Aufgaben aufzulösen, und legte dieser Rechnung großen Vorzug vor der Barrowschen bey. Von der Krümmung eines Segels, als einer einfach gekrümmten Linie betrachtet, gab er 1692 die Resultate; in demselben Jahre auch die Auflösung der Vivianischen Aufgabe von dem Gewölbe mit vier Öffnungen, und der Aufgabe von der Jahreszeit der kürzesten Dämmerung. Im J. 1694 machte er seine Construction der elastischen Linie nach einem unbestimmt gelassenen Gesetze der Dehnung in Beziehung auf die dehnende Kraft bekannt, und insbesondere für den Fall, da die Dehnung sich wie die dehnende Kraft verhält. Er gebraucht dazu im Allgemeinen die Quadratur einer andern Curve, die dabey vorausgesetzt wird. Für den besondern vorher erwähnten Fall integrirt er aber die Gleichung,

$\partial y = \frac{xx\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, schon durch Verwandlung des Factors von ∂x in eine Reihe, und sagt (p. 647), daß er dieses durch die von Wallis gelehrte Interpolations-Methode gefunden habe; zufolge einer feinen Bemerkung von Leibnitz werde die Reihe auch durch Erhebung des Binomium auf eine unbestimmte Potenz erhalten. Nach dieser Methode integrirt er auch das Differential des Bogens der Elastica. Zu gleicher Zeit gab er die Construction

der von Leibnitz aufgegebenen Curva isochrona paracentrica (der Curve der gleichförmigen Annäherung oder Abrückung in Beziehung auf einen fixen Punct), welche die Integration der Formel $\frac{\partial u}{\sqrt{(1 - u^4)}}$ erfordert. Er construirt sie mittelst der Rectification der Elastica, auch durch eine algebraische Curve vom vierten Grade. Im J. 1695 legte er die Aufgabe vor, die ungesonderte Differentialgleichung, $a\partial y = yp\partial x + by^n q\partial x$, worin p und q Functionen von x sind, zu construiren, wenigstens durch Quadraturen, das ist, die veränderlichen Größen zu sondern. Die Auflösung gab er in dem folgenden Jahre, nachdem er statt jener Gleichung diese: $a\partial y = y\partial x + q\partial x$, gesetzt hatte, worauf sich jene, wie er sagt, bringen lasse. Im J. 1698 bediente Bernoulli zur Integrirung von Differentialformeln mit einem irrationalen Factor sich noch der Methode durch Substitution diese rational zu machen. Bey der Bestimmung der Länge auf der Loxodromica wird dieses Verfahren weitläufig, da drey Substitutionen nöthig sind; doch findet er zugleich bessere Substitutionen. Im J. 1704 zeigt er in einer akademischen Schrift die Verwandlung der Wurzeln aus Binomien in eine Reihe, und dadurch die Integration der damit behafteten Differentiale.

Was Jakob Bernoulli vorzüglich als einen scharfsinnigen Analysten zeigt, ist das berühmte isoperimetrische Problem, wozu er durch seines Bruders Aufgabe von der Linie des schnellsten Falles (1696) veranlaßt wurde, dasselbe, was beyde Brüder so sehr entzweyte. Eine Aufgabe ähnlicher Art hatte Newton schon aufgelöset, in so fern, daß er die Differentialgleichung für dieselbe gefunden hatte, nämlich die Aufgabe von der Figur des Körpers, bey welcher der Widerstand des Mittels, worin er sich bewegt, am kleinsten wird. Jakob Bernoulli fand nicht allein eine kurze und feine Auflösung jener Aufgabe, sondern legte zugleich eine viel allgemeinere vor, diese: unter allen Curven gleichen Umfanges über einer gemeinschaftli-

chen Grundlinie diejenige zu finden, durch deren Ordinaten oder Bogen die Ordinaten einer andern Curve nach irgend einem zusammengesetzten oder getheilten Verhältnisse zu einer gegebenen geraden so bestimmt werden, daß diese zweyte Curve den größten Raum einschließe. In der Schrift: Analysis magni problematis isoperimetrici (Basileae, 1701), bemerkt Bernoulli mit Recht, daß diese Aufgabe zu einer höhern Classe gehöre, als die bis dahin behandelten, und daß dadurch neue Gegenden der Wissenschaft entdeckt würden. Es genügt bey derselben nicht an zwey Elementen einer Curve, sondern es sind drey neben einander liegende zu betrachten, oder es ist eine hiemit gleichgeltende Bedingung einzuführen. Diese Schrift wird für ein Meisterstück der Erfindung und des Scharfsinns gehalten.

Joh. Bernoulli war zwar in der Auflösung dieser neuen schweren Aufgabe nicht so glücklich als sein Bruder, da er noch einen wichtigen Umstand aus der Acht ließ, allein in vielen andern Stücken hat er die Rechnung des Unendlichen ungemein erweitert. Die erste Probe von seiner Bekanntschaft mit der Infinitesimalrechnung war die mit einer ausführlichen Anzeige ihrer Eigenschaften begleitete Auflösung der Aufgabe von der Kettenlinie in den A. Er. 1691, wo die Analysis noch nicht beygefügt war. Die Lectiones mathematicae, welche er während seines Aufenthalts in Paris in den Jahren 1691 und 1692 für den Marquis de l'Hopital aufsetzte, enthalten schon einen sehr methodischen, und wegen der vielen Anwendungen auf geometrische und dynamische Aufgaben noch jetzt zu empfehlenden Unterricht von der Integralrechnung, weil man darin nicht bloß Differentiale zu integriren vorgelegt bekommt, sondern zugleich die Veranlassungen zu den Differentialen selbst. Die Differentialformeln, die darin integrirt werden, sind solche, die entweder integrirbar sind, oder von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel abhangen. Unter der Rubrik: methodus tangentium inversa, werden Methoden zur Integrirung von mancherley Differentialgleichungen, auch einige von

höhern Graden, vorgetragen. Von der Absonderung der veränderlichen Größen nur ein leichtes Beyspiel. Wichtige Bemerkung, daß den Differentialgleichungen manchmahl ein Factor oder Divisor beyzufügen ist, um sie integrirbar zu machen. Zuletzt wird einiges von dem Gebrauche unendlicher Reihen zu Integrationen beygebracht, auch der binomische Lehrsatz in seiner Allgemeinheit wird hiebey, doch ohne Beweis, angeführt. Wenn dieses Werk gleich anfangs so beschaffen gewesen ist, wie es in der Sammlung aller Werke seines Verfassers im J. 1742 erschienen ist, so hat derselbe den Geist der Integralrechnung gleich anfangs vollkommen gefaßt. Sein Bruder und Leibnitz selbst behalfen sich mit Quadraturen und Rectificationen statt wirklicher Integrationen, dagegen Joh. Bernoulli meistens durch Rechnung und Reduction auf Kreis und Hyperbel die Integration vollführt. Als Beweis, daß in den Lectionen nichts verbessert sey, könnte dienen, daß das $\int \frac{\partial x}{x} =$ infin. gesetzt wird, als pag. 388, 417, 420, dagegen es schon in einem Aufsatze vom J. 1697 heißt, daß $\frac{\partial x}{x}$ das Differential des Logarithmen zu der Zahl x ist. Im Jahr 1694 machte Bernoulli eine allgemeine Reihe für $\int X \partial x$ bekannt, diese: $\int X \partial x =$

$$Xx - \frac{x^2 \partial X}{1.2 \partial x} + \frac{x^3 \partial^2 X}{1.2.3 \partial x^2} - \frac{x^4 \partial^3 X}{1..4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

Die Methode hiezu, welche sehr einfach ist, wandte er in der Folge auf Integrationen von allerhand Formeln an. Im J. 1696 legte er die schöne Aufgabe von der Linie des schnellesten Falles vor. Er scheint durch die Untersuchung über die Trajectoria eines Lichtstrahls darauf gekommen zu seyn, bey welcher angenommen ward, daß der Strahl von einem Puncte in dem einem Mittel zu einem Puncte in dem andern Mittel in der kürzesten Zeit bey einem gegebenen Verhältnisse der Geschwindigkeiten gelange. Da durch das Gesetz der Geschwindigkeiten die

Trajectoria des Lichts in jener Hypothese gegeben ist, so ist auf gleiche Art die Linie des schnellsten Falles gegeben, weil auf einer Fall-Linie die Geschwindigkeiten den Wurzeln aus den Fallhöhen proportional sind. Hernach ist er auf einen directen Beweis aus dynamischen Gründen gekommen. Er theilte aber nur den indirecten, aus optischen Principien hergeleiteten, mit, um jenen noch geheim zu halten. Mit der Absonderung der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung beschäftigte B. sich früh. Im J. 1694 schrieb er an Leibnitz, daß er dazu mehrere besondere Wege habe. Im J. 1697 zeigte er, wie dieses bey der Gleichung, $ady = ypdx + by^n qdx$, wo p und q Functionen von x sind, geschehen könne, die Integration gegebener Differentialformeln zu dem Ende voraus gesetzt. Die Größen x und y werden durch eine dritte eingeführte veränderliche gefunden. Auf ähnliche Art construirt er die Curve für das Solidum des geringsten Widerstandes. Er findet für dasselbe die Differentialgleichung, $ydy^3dx = ads^4$, wo dy constant ist. Nach geraumer Zeit gab er eine Methode an, homogene Differentialgleichungen zu integriren, in den Petersb. Commentarien, 1726. Hier behandelt er umständlich die Gleichung $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, und diese. $xdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, welche man in Paris um die Zeit, als Bernoulli sich da aufhielt, noch nicht hatte integriren können. Auch mag bemerkt werden, daß Bernoulli aus gegebenen Reihen ungesonderte Differentialgleichungen herleitete, in einem Briefe an Leibnitz vom Decemb. 1696. Im J. 1702. zeigte er in den Mém. de l'Acad. des Sc. die Integration der Formel $\frac{Pdx}{Q}$, wo P und Q rationale Functionen von x sind, deutlicher als es Leibnitz zu derselben Zeit in den A. Er. that. Im Jahr 1719 lehrte er die Integrationen der Formeln, $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q})$ und $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q} + hz^{3q})$, die Taylor aufgegeben hatte, wo m ein positiver oder negativer Bruch ist, dessen Nenner eine

Potenz der 2 ist. Zugleich zeigte er an, in welchen Fällen die Formel $x^m \partial x : (e + f x^q)^n$ integrirbar ist, oder von der Integration einer einfachern Formel abhängt. In den geometrischen und mechanischen Untersuchungen hat B. noch manche scharfsinnige Anwendungen der Integralrechnung gemacht. Auf die von Newton so glücklich angefangene hohe Mechanik der Weltkörper hat er sich aber nicht eingelassen, es sey aus unrichtigen Vorstellungen von der Physik des Weltsystems, oder aus Abneigung mit einem Geometer wie Newton hierin einen Wettstreit einzugehen. Nur die umgekehrte Aufgabe der Centralkräfte lösete er allgemein auf. (Mém. de l'Ac. des Sc. 1710.). Newton hatte eigentlich nur bewiesen, was das Gesetz der Schwerkraft ist, wenn der Körper sich in einem Kegelschnitte bewegt, und der Mittelpunct der Kraft in dem (einen) Brennpuncte ist. Bey dem umgekehrten Satze hatte er angenommen, daß der Körper sich nicht anders als in einem Kegelschnitte bewegen könne, und nur die Gattung desselben gesucht.

Roger Cotes, der Erfinder eines geometrischen Satzes, wodurch die Binomien $a^n - x^n$ und $a^n + x^n$ in einfache Factoren zerlegt werden, bemerkte, daß anstatt der Quadratur der Hyperbel und der Ellipse bey Integrationen besser Logarithmen und Kreisbogen gebraucht werden. Jenes Verfahren ist wirklich zur Anwendung ganz unbrauchbar, und bringt nur eine Aufgabe auf eine andere. Es bleibt dabey ja noch die Frage, wie ein hyperbolischer oder elliptischer Raum, der durch gewisse Coordinaten gegeben wird, durch das Quadrat einer gegebenen Linie ausgedruckt werden möge. Dazu dienen die Logarithmen und Winkel oder Kreisbogen, für welche Tafeln berechnet sind, so daß man zu jedem Verhältnisse oder jeder Zahl den zugehörigen Logarithmen oder umgekehrt, so wie zu jedem Winkel die zugehörigen trigonometrischen (cyklometrischen) Linien, oder diese aus jenen hinlänglich genau finden kann. Cotes hat den Weg zu der gegenwärtigen Form der Integralrechnung für die Fälle, wo das Integral von Logarithmen oder Winkeln abhängt,

gebahnt. Er machte seine Lehrsätze in den Schriften der Londoner Gesellschaft 1714, Nro. 338, unter dem Titel: Logometria, bekannt. Es waren 18 Formen von Differentialen, worin der Differential-Factor eine Potenz von z enthält; zugleich mit einem Binomium $e + fz^{\eta}$ im Divisor, oder der Quadratwurzel aus einem solchen Binomium, oder zweyerley Binomien, einem rationalen und einem quadratisch irrationalen, auch zwey irrationalen, ferner mit einem Trinomium oder der Quadratwurzel daraus, auch mit einem Binomium verbunden. Bey der weitern Ausführung ward Cotes durch einen frühzeitigen Tod (1716) unterbrochen. Robert Smith, Professor zu Cambridge vollendete nach Anleitung der von Cotes nachgelassenen Papiere das angefangene Werk, welches man als das erste völligere über die Integralrechnung anzusehen hat. Er gab es zugleich mit den von Cotes schon in den Transactionen darüber gelieferten Aufsätzen zu Cambridge 1722 heraus, unter dem Titel: Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae, 250 S. in 4. nebst einem Anhange kleiner Abhandlungen von Cotes. 126 S. Was hier mensurae heißen, sind Logarithmen von Verhältnissen mit ihrem Modulus, und Kreisbogen für zugehörige Winkel mit ihrem Halbmesser. Die Harmonie dieser Maaße beruht darauf, daß Integrale, die nach dem einem dieser Maaße unmögliche Größen sind, nach dem andern möglich werden, so daß die analytische äußere Form dieselbe bleibt. (S. Differentialformeln, III.). Cotes bezeichnete in den von ihm selbst ausgearbeiteten Integralformeln beiderley Maaße auf einerley Art. Z. B. das Integral von $\frac{z^{\frac{1}{2}\eta - 1}\,\partial z}{e + fz^{\eta}}$ giebt Cotes an durch

$$\frac{2}{\eta e} R \left| \frac{R + T}{S}\right., \text{ wo } R = \sqrt{\frac{-e}{f}};\ T = z^{\frac{1}{2}\eta};$$

$S = \sqrt{\frac{e + fz^{\eta}}{f}}$ ist. Bey der Berechnung wird aber

$R = \sqrt{\frac{e}{f}}$ genommen. Diese Formel bedeutet

$\frac{2}{\eta e} \cdot \sqrt{\frac{e}{f}} \cdot \text{Ang. tang } z^{\frac{1}{2}\eta} \sqrt{\frac{f}{e}}$. Ist $\frac{e}{f}$ negativ, so giebt Cotes das Integral ganz durch dieselbe Formel an. Sie bedeutet aber nun $\frac{2}{\eta e} R \log. \text{nat.} \frac{R+T}{S}$, wo $S = \sqrt{\frac{f z^{\eta} - e}{f}}$ ist. Man sieht, daß die Bezeichnungsart noch unbequem und gezwungen ist. Auch hat Smith sie in dem von ihm allein ausgearbeiteten Werke geändert. Er bezeichnet den natürlichen Logarithmen eines Verhältnisses m:n durch (m:n) mit Vorsetzung des Modulus; die Tangente eines Winkels PBO durch (PBO) mit Vorsetzung des Radius, indem der Winkel selbst durch einen Kreisbogen mit dem Halbmesser als Einheit ausgedrückt wird. Er hat 94 Formen mit Einschluß der darunter aufgenommenen 18 Formen, die Cotes schon bearbeitet hat. Diese bringt er auf 11 Classen verwandter Formen. Für jede Form ist eine Tabelle berechnet, nach den verschiedenen Werthen des Exponenten der veränderlichen Größe außer dem binomischen oder trinomischen Factor, mit einer Anweisung die Tabelle zu erweitern. Das Werk ist uns gegenwärtig noch brauchbar als ein Repertorium für viele, zum Theil verwickelte Integrale, wenn man nur die Bezeichnungen ändert. Da nur einige Erläuterungen, aber keine Beweise beygefügt sind, so hat Walmesley, ein engländischer Benedictiner, dem Werke eine neue Gestalt durch die Entwickelung der Integrale gegeben. Diese Bearbeitung hat den Titel: Analyse des mesures des rapports et des angles, ou reductions des Intégrales aux Logarithmes et aux arcs de cercle, par D. C. Walmesley, B. A. à Paris, 1753. S. 445 in 4. Die Tafeln für die Formen von Cotes sind hierin enthalten. Auch hat W. die Theorie derjenigen Fälle beygefügt, wo die von Cotes gebrauchte

Methode die Integrale nicht gab. Die Rechnungen sind noch nicht genug geschmeidig, und die Bezeichnungsart noch unbequem, besonders was die cyklometrischen betrifft, inzwischen war ohne Zweifel das Werk zu seiner Zeit sehr nützlich, und mag auch jetzt dienlich seyn, sich daraus in schweren Fällen Raths zu erholen.

Cotes fand durch Hülfe seines analytisch-geometrischen Lehrsatzes die Integration der Differentialformel:

$$\frac{z^{\theta\eta+\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\partial z}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}},$$ für den Fall, da der Nenner

sich nicht in zwey binomische Factoren zerlegen läßt, wofern nur λ eine der Zahlen aus der Reihe 2, 4, 8, 16, etc. und δ eine ganze Zahl ist. Die durch θ bezeichnete Zahl ist eine ganze bejahte oder verneinte. Für $\lambda = 2$ und 4 sind die Integrale in den Formen XXX und XXXII von Smith angegeben. Diese Integration schien in England wichtig genug, daß Taylor sie allen Mathematikern außer England aufgab. Joh. Bernoulli leistete sie in den Act. Erud. 1719, doch ohne die Theilung eines Winkels zu gebrauchen. Auch von Hermann erschien in den A. Er. desselben Jahres eine Auflösung, wozu in den Petersburger Commentarien T. VI. ein Nachtrag folgte. Die Einschränkung der Auflösung wegen der Form von λ hob Moivre durch seine Erweiterung des Cotesischen Lehrsatzes (Th. I. S. 564.), so daß der Exponent von z jede gebrochene Zahl seyn darf, in den Miscellaneis analyticis, Londini 1730. L. I. Probl. V., L. III. Probl. XII. Zur Erläuterung diene folgendes. Wenn die Function $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ sich in in zwey reale binomische Factoren auflösen läßt, welches möglich ist, wenn $ff > 4eg$ ist, so läßt sich der Differential-Factor in zwey Brüche zerlegen, die rational werden, wenn x^{λ} für z^{η} gesetzt wird. Läßt sich aber jene Function nicht in zwey reale binomische zerlegen, so muß sie in trinomische zerfällt werden Ist λ eine Potenz der Zwey, und wird

x^λ statt z^n gesetzt, so läßt sich die Function $e + fx^\lambda + gx^{2\lambda}$ in zwey trinomische Factoren von derselben Form zerlegen, so daß die Exponenten von x Potenzen von 2 bleiben. Durch fortgesetzte Zerlegung kommt man solchergestalt auf Factoren, wie $a \pm bx^2 + cx^4$, und die Integration des zufolge der gefundenen Factoren zerlegten Differentials wird nun möglich. Ist aber λ eine andere Zahl als eine Potenz der Zwey, so bekommen die trinomischen Factoren eine andere Form als die vorgegebene. Hier war es, wo Cotes sich aufgehalten fand. Man sehe das von Walmesley angeführte Werk. S. 200. ff. Auch hat Thomas Simpson in den Essays on several subjects in speculative and mix'd Mathematiks, (London, 1740. Nr. XIII.) eine Auflösung für den Fall, da der Nenner des Differentialfactors nicht in zwey reale binomische Factoren zerlegbar ist, gegeben, wobey der von Moivre erweiterte Cotesische Lehrsatz gebraucht ist. Doch ist diese Auflösung weitläufig. In den englischen Transactionen, Nr. 417. ist eine Auflösung von Klingenstierna, ohne Beweis, enthalten.

Die fernere Erzählung von dem Fortgange der Integralrechnung wird kürzer seyn müssen, als die von ihrer anfänglichen Bearbeitung. Diese war gleichsam ein Besuch bey den Quellen eines großen Flusses.

Taylor war ein sehr scharfsinniger Analyst, wenn gleich Joh. Bernoulli ihn aus Leidenschaft wegen eines nationalen Zwistes zwischen ihnen herabzusetzen sucht. Der nach ihm genannte Lehrsatz ist nicht allein ein vortreffliches Mittel zur Entwickelung einer veränderlichen Größe durch die ihr zugehörige, sondern dient auch aus einer Differentialgleichung die eine der veränderlichen Größen durch die andere darzustellen, wenn gleich die Reihe nicht immer convergent seyn kann. In seiner Schrift, Methodus incrementorum. Londini 1715. giebt er S. 38. noch zwey Reihen für ein Integral, $\int y\,dx$ an, wenn y eine Function von x ist, die auch mittelbar durch eine Differentialgleichung gegeben seyn mag. Es wird dazu eine

willkürliche Function w von x eingeführt, die so zu wählen ist, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden seyn. Davon in dem Artikel: Integralformeln. In dem zweyten Abschnitte jenes Buchs macht Taylor die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf einige geometrische und physiko-mathematische wichtige Aufgaben. Es ist nur übel, daß das Werk durch die zu große Kürze und unbequeme Bezeichnungsart dunkel ist.

In Italien ward die Integralrechnung mit Fleiß und glücklich bearbeitet. Gabriel Manfredi gab 1707 eine Schrift über die Construction der Differentialgleichungen vom ersten Grade heraus, die wegen der Geschicklichkeit in der Behandlung gerühmt wird. In den Abhandlungen des Bononischen Instituts und in Zeitschriften sind von ihm gute Aufsätze enthalten. Der Conte Giacomo Riccati und sein Sohn Vincent haben über die Integralrechnung viele tiefsinnige Abhandlungen geliefert. Der erstere gerieth auf eine Differentialgleichung vom ersten Grade, zwischen zwey veränderlichen Größen, eine dem Ansehen nach sehr einfache, die er nicht allgemein auflösen konnte, und sie daher den Analysten in den Act. Er. 1722. T. VIII. supplem. vorlegte. Sie hat daher von ihm ihren Namen erhalten. Jakob Bernoulli hatte schon einige besondere Fälle derselben aufgelöset. Drey Bernoulli, Nikolaus und Daniel (Söhne von Johannes) und Nikolaus der Neffe, und Goldbach haben sich damit nach verschiedenen Methoden beschäftigt. Die Gleichung ist diese: $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$. Für eine gewisse Form des Exponenten m lassen sich die veränderlichen Größen von einander sondern, wodurch die Aufgabe auf die Integration einer Differentialformel gebracht wird. Bossut vergleicht die Riccatische Gleichung mit der Quadratur des Kreises in der Geometrie. Wenn eine Aufgabe auf die Auflösung derselben gebracht ist, so wird sie als aufgelöset angesehen.

Unter den italienischen Mathematikern in der ersten Hälfte des 18ten Jahrhunderts zeichnete sich auch der Conte Fagnano durch manche Untersuchungen höherer Art seit etwa 1720 aus, insbesondere durch die Bestimmung elliptischer oder hyperbolischer Bogen, deren Unterschied eine algebraische Größe ist. Leibnitz und Johann Bernoulli, die dasselbe versucht hatten, urtheilten, daß die neue Rechnung nicht darauf anwendbar sey. Euler hat in der Folge diese Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art nach einer andern Methode behandelt. (Comm. Ac. Petr. T. VIII.) Mit der Curve, die man Lemniscata nennt, beschäftigte sich Fagnano so viel, daß er sie vor der Sammlung seiner Werke (Produzioni matematiche, in Pesaro, 1750. 2 Voll. in 4.) auf dem Titel abbilden ließ.

Maclaurin lehrt in seinem Werke über die Fluxionen (Edinburg 1742) viele Anwendungen der Integralrechnung auf geometrische und mechanische Aufgaben, die aber mehr in Absicht auf die Gegenstände und die Kunst der Behandlung, als für die Rechnung selbst wichtig seyn möchten. Diese ist auch gegenwärtig in der Form bequemer eingerichtet, da sie von der ehemaligen Lehnsverbindung mit der Geometrie befreyt ist. Unter den Artikeln, welche von der Integralrechnung selbst handeln, wird derjenige am merkwürdigsten seyn, worin gezeigt wird, welche Integrale sich auf die Rectification eines hyperbolischen und elliptischen Bogens mit einander verbunden bringen lassen. Man vergleiche mit Maclaurins geometrisch synthetischer Methode die rein analytische von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746 u. 1748. Vincent Riccati hat sich sehr umständlich mit der Integration der Differentialformel $\frac{\partial x \sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(a+bxx)}}$ beschäftigt. Das Integral ist in einigen Fällen ein Bogen einer Ellipse, in andern einer Hyperbel, in andern eines Aggregats von beiden, oder ist keiner dieser Formen fähig. (Vinc. Riccati, S. I. Opuscula. Luccae 1757-1772,

tomi 2.). Landen hat in seinen Mathematical Lucubrations, London 1755. einige hieher gehörige merkwürdige Integrale ohne Beweis mitgetheilt. Die Reduction eines Integrals auf Bogen einer Curve ist freylich nur der Aufgabe eine solche Gestalt geben, wodurch die Auflösung faßlicher wird.

Die Integration der Differentialformeln bedurfte noch mancher Verbesserungen und Erweiterungen. Diese erhielt sie vornämlich, ja fast gänzlich, durch Euler, dessen unerschöpflich fruchtbarem Geiste die ganze Analysis einen großen Theil ihres Reichthums, und fast ganz ihre gegenwärtige Gestalt zu danken hat. Er kündigte sich schon im 20sten Jahre seines Alters (1727) durch eine schöne Auflösung der Aufgabe von den reciproken Trajectorien an, woraus Joh. Bernoulli, sein Lehrer, die künftige Größe seines Zöglings vorher sagte. In dem folgenden Jahre zeigte er eine neue und allgemeine Methode an, ganze Classen von Differentialgleichungen des zweyten Grades, mit Voraussetzung gewisser Bedingungen, zu integriren. Nicht allein in einer langen Reihe von Jahren (er starb 1783) sondern auch noch gegenwärtig nach seinem Tode durch seine zahlreichen hinterlassenen Abhandlungen hat Euler die Analysis theils durch neue Untersuchungen erweitert, theils den nach ihm gekommenen ihm am Geist ähnlichen Geometern die Wege eröffnet, theils die von andern gefundenen Methoden verbessert, erleichtert, und sowohl allgemeiner als zur Anwendung geschmeidiger gemacht. Die Anwendungen analytischer Rechnungen, welche Euler auf die schwersten Fragen in der mathematischen Physik und der physischen Astronomie insbesondere machte, sind alle zugleich Erweiterungen der Analysis selbst. Denn das Physikalische macht hier nur die Bedingungen der Aufgabe aus, und sobald diese auf irgend eine Art durch Gleichungen ausgedruckt sind, geht die ganze Bearbeitung in das Gebiet der reinen Analysis über. Dadurch werden die Fortschritte in der höhern mathematischen Physik zugleich Erweiterungen jener, und die Schwierigkeiten,

die in jener zu lösen sind, werden Veranlassungen zu neuen analytischen Aufgaben.

Euler hat alle seine Untersuchungen über die Integralrechnung bis gegen das Jahr 1770 selbst gesammelt, und in Verbindung mit den von andern Analysten gefundenen Methoden systematisch bearbeitet, in einem großen Werke, Institutiones Calculi Integralis, Petropoli 1768-1770, 3 vol. in 4. Nach seinem Tode ist eine neue Ausgabe dieses Werks mit Verbesserungen, aber mit derselben Anzahl der Paragraphen, herausgekommen, und mit einem vierten Bande vermehrt. Dieser enthält die zur Integralrechnung gehörigen Abhandlungen von Euler, welche theils noch nach der ersten Ausgabe jenes Werks in die Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften eingerückt sind, theils handschriftlich vorhanden waren, in allem 27 Abhandlungen. Die neue Ausgabe ist von den Jahren 1792-1794. Das Verzeichniß aller Werke und einzelnen Abhandlungen Eulers findet man hinter der schönen Gedächtnißrede von Fuß, Petersburg, 1783.

Die Integration der Differentialgleichungen ist hauptsächlich von den Geometern des Continents betrieben worden. Leibnitz und die beiden Bernoulli hatten die Wege eröffnet. Goldbach, Hermann und Nicolaus Bernoulli, fanden die Integrationen verschiedener vieltheiliger Differentialgleichungen, die bis dahin noch nicht versucht waren. Ihre Aufsätze findet man in den ersten Bänden der ältern Petersburger Commentarien. Unter den ältern französischen Analysten beschäftigten sich Carré, Nicole und Saurin mehr mit Anwendungen der Integralrechnung, als daß sie dieselbe erweitert hätten. Clairaut und Fontaine fanden die Bedingungen der Integrabilität für Gleichungen vom ersten Grade, wiewohl Euler sie noch etwas früher schon angewandt hat, wovon im I Th. S. 885 ff. gehandelt ist. Von einer allgemeinern, die Euler gefunden hat, s. Th. I. S. 905.

Clairaut gab in dem Memoire von 1740, wo er von den Bedingungsgleichungen handelt, einige Regeln

zur Entdeckung des schicklichen Factors, die aber gar nicht allgemein, und dabey sehr unbequem in der Anwendung sind. In Eulers Werke über die Integralrechnung ist sowohl für Gleichungen vom ersten Grade als von höhern hierin vieles geleistet. Er hat die Methode sehr vervollkommnet, so daß la Croix sie ihm auch zuschreibt. Am Ende jenes Werks zeigt Euler noch in einem Anhange, wie vorzüglich die Methode vermittelst Multiplicatoren zu integriren sey. Uebrigens ist Clairauts Werk über die Gestalt der Erde (Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'Hydrostatique, 1743) wegen der dabey angewandten Integralrechnung auch für diese wichtig, und zum Theil ein Commentar über Maclaurins synthetische Darstellung. Seine Theorie der gegenseitigen Störungen der Planeten und der Ungleichheiten des Mondlaufes gehören beide zu den ersten genauen Auflösungen der schwersten Aufgabe aus der analytischen Mechanik. Es verdient noch angeführt zu werden, daß Clairaut Differentialgleichungen des ersten Grades in einigen Fällen mittelst einer zweyten Differentiation integrirt hat, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ $(=p)$ aus der zweyten Differentialgleichung durch Division herausgeht, so daß man eine Gleichung für p erhält, welche mit der vorgegebenen verbunden wird, um p wegzuschaffen, worauf eine endliche Gleichung zwischen den veränderlichen Größen allein erhalten wird. Euler hat dieses in der Folge mehr auseinander gesetzt.

D'Alembert hat in seinen vielen Schriften über Dynamik und physische Astronomie aus dem Innersten der Analysis die Hülfsmittel zu den feinsten Untersuchungen geholt. Sehr häufig fand er neue Wege zur Integration verwickelter Differentialgleichungen. Auch hat man ihm die Einführung einer neuen Art zu integriren zu danken, die nicht allein in der abstracten Rechnung, sondern auch in der höhern mathematischen Physik von der größten Wichtigkeit ist, die Integration der Gleichungen mit partiellen

Differentialen. Euler war freylich schon daraufgerathen, in einer Abhandlung in dem 7ten Theile der Petersburger Commentarien für 1734. T. VII. und hatte auch bey seiner ganz allgemeinen Auflösung der Aufgabe von der curva synchrona (Mechanicae T. II. §. 106.) davon Gebrauch gemacht, allein er vernachlässigte gleichsam diese neue Ansicht von allgemeinen Auflösungen, bis daß d'Alembert in seiner Schrift: sur la cause générale des vents 1747. und in den Untersuchungen über schwingende Saiten sie benutzte, welches er noch mehr in der Schrift über den Widerstand flüssiger Mittel that. Nun sah Euler ein, daß die Auflösungen verschiedener Aufgaben, die er für allgemein gehalten hatte, es noch nicht waren. Er bemächtigte sich nun gleichsam seines Eigenthums wieder, und gab der neuen Methode eine bessere und einfachere Form, als in welcher d'Alembert sie eingeführt hatte, und in dieser verbesserten Gestalt wird sie von allen Analysten gebraucht. Euler hat ihr den ganzen dritten Theil seines Werks über die Integralrechnung gewidmet. Vorher hatte er schon in einer wichtigen Abhandlung: Investigatio functionum ex data differentialium conditione, (Novi Comm. Acad. Petrop. T. IX. a. a. 1762.) diese Methode von Grund aus entwickelt, und den Algorithmus derselben angegeben.

Die Integrirung der Gleichungen mit partiellen Differentialen veranlaßte eine Untersuchung, über welche die größten Analysten sich nicht ganz vereinigten. Sie betraf die Beschaffenheit der willkürlichen Functionen, welche in die Integralgleichung einzuführen sind, wie die constanten Größen in den gewöhnlichen zwischen zwey veränderlichen Größen. D'Alembert behauptete, daß die willkürlichen Functionen dem Gesetze der Stetigkeit unterworfen bleiben müßten, daß sie durch irgend eine Curve dargestellt werden könnten, daß diese aber einen stetigen Zug haben müsse, so daß sie ganz durch eine und dieselbe Gleichung zwischen ihren Coordinaten ausgedruckt würde. Euler hingegen behauptete, daß jene Functionen auch unstetige (discontinuae) seyn dürften, oder daß die abbil-

bende Curve auch eine gesetzlose, wie eine aus freyer Hand gezogene seyn möchte. Den Schriftwechsel darüber zwischen beiden findet man in den Berliner und Petersburger Abhandlungen, und in den Opuscules von d'Alembert. La Grange trat (Miscell. Taurinensia, T. I. II.) zuerst Eulern ganz bey, schränkte aber in der Folge die Gesetzlosigkeit etwas ein. Condorcet gab sie auch nur mit gewissen Einschränkungen zu. Die Curve möchte aus Portionen von verschiedener Form bestehen, diese sollten aber zusammenhängen, und bey Gleichungen vom zweyten Grade an ihren Endpuncten eine gemeinschaftliche Berührende haben. (Mém. de Paris, 1772). La Place gab zu, daß bey der Aufgabe von schwingenden Saiten, wobey die Frage entstanden war, die unstetigen Functionen Statt haben könnten, und schränkte überhaupt die Zulässigkeit derselben nur auf gewisse Weise ein. (Mém. de Paris, 1779). Arbogast vertheidigte in der Preisschrift, die von der Petersburger Akademie 1790 gekrönt ward, Eulers Behauptung.

Integrationen einzelner Differentialgleichungen von d'Alembert findet man in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1746, 1748, 1750, und in der Sammlung seiner Opuscules. Von jenen ist schon vorher etwas angeführt. Eben daselbst (1748) zeigt er, wie Differentialgleichungen integrirt werden, worin außer dem Differentialquotienten $dx : dy$ nur x und y in der ersten Potenz vorkommen, wie $x = y\varphi z + \varphi' z$, wo $z = \frac{dx}{dy}$ ist, und φ, φ' Functionszeichen sind. Noch daselbst, wie ein System von zwey Gleichungen,

$$\partial x + (Cx + Dy)\,\partial t = 0,$$
$$\partial x + (Kx + Ly)\,\partial t = 0,$$

oder ein System von noch mehrern solchen, worin mehrere veränderliche Größen enthalten sind, integrirt werden kann. Er ist darauf durch seine Untersuchungen über die Ursachen der Winde, und den Widerstand flüssiger Mittel

geleitet. Montücla schreibt ihm auch eine Methode zu, die Gleichung,
$AXy^n dy + By^{n+1} X' \partial x + Cy^q X'' dx = 0$, zu integriren (Hist. des Mathém. T. III. p. 177.) Es sind hier X, X', X'' Functionen von x, und A, B, C, unveränderliche Größen. Die Methode findet man in Bougainville's Traité du Calcul intégral, T. II. Ch. 7. Man vergleiche die Auflösung der Gleichung,

$$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x,$$

in Eulers Integralrechnung, T. I. §. 429. Hier sind P und Q Functionen von x. In den genannten Memoiren ist eine Methode von Alembert, Gleichungen von höhern Graden, wie
$\partial^n y + a\partial^{n-1} y\partial x + b\partial^{n-2} y\partial x^2 \ldots + X\partial x^n = 0$, zu integriren. Euler hatte schon in dem 7ten Bande der Miscell. Berol. 1743. die Gleichung, $0 = Ay + \frac{B\partial y}{\partial x} + \frac{C\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{D\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc}$, aufgelöset, wo das Glied X, eine Function von x, noch fehlte. Hernach aber hat er diese Einschränkung beseitigt, und in den neuen Petersb. Commentarien gezeigt, wie eine solche Gleichung allgemein, ohne daß $X = 0$ ist, integrirt wird. Man sehe auch die Instit. Calc. integr. T. II. Cap. 2 et 3. La Grange hat in den Mém. de Berlin 1772 sogar die Bedingungen gefunden, unter welchen eine solche Gleichung selbst bey veränderlichen Coefficienten integrirbar ist.

Der Staatsrath Fuß in Petersburg, Eulers Zögling und arbeitsamer Gehülfe in den vielen Jahren seiner Blindheit, hat in den Schriften der dortigen Akademie der Wissenschaften viele wichtige Abhandlungen zur höhern Analysis des Unendlichen geliefert.

Die beiden ersten Analysten unserer Zeit, la Grange und la Place, haben sowohl durch ihre Untersuchungen über die Integralrechnung unmittelbar, als durch die höchst feinen Rechnungen in der physischen Astronomie

mehr geleistet als man vor einiger Zeit noch vielleicht nicht erwarten durfte. Ich muß es dem künftigen Verfasser einer ausführlichern Geschichte der Integralrechnung, als in diesem Artikel möglich war, überlassen, die Verdienste dieser beiden Analysten würdig darzustellen. Aus dem unten anzuzeigenden Werke von la Croix, über Differential- und Integralrechnung, kann man sich von ihren Erweiterungen der höhern Analysis am vollständigsten und bequemsten unterrichten. Das Register liefert eine sehr gute Uebersicht derselben. In Absicht auf die physische Astronomie findet man ihre wichtigsten Untersuchungen ziemlich ausführlich angezeigt in dem vierten Theile der Geschichte der Mathematik von Montüela, die durch la Lande vollendet ist.

la Grange ist der Erfinder einer neuen und sehr verbesserten Methode die Veränderungen in der Relation zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen zu betrachten. Zwey veränderliche Größen x und y haben irgend eine Relation, wodurch für jedes x die zugehörige y bestimmt wird. Giebt man allen y oder einigen y Werthe, die unendlich wenig von den durch jene Relation bestimmten Werthen verschieden sind, so sind die Unterschiede der Werthe das, was Variationen heißen. Die ganze Untersuchung von der Erfindung einer Function, welcher eine gewisse Eigenschaft im größten oder kleinsten Maaße zukommt, beruht auf dieser Methode. Die beiden Bernoulli hatten Fragen dieser Art aufgelöset, aber nicht sowohl nach einer sichern Methode, als durch eine sehr scharfsinnige Bemerkung des Eigenthümlichen der Frage, worauf sie sehr künstlich die Auflösung gründeten. Euler hatte in seiner vortrefflichen Schrift über das isoperimetrische Problem im allgemeinsten genommen, 1744, viel geleistet, aber die Methode noch zu sehr an die Geometrie gebunden. la Grange gab seinen ersten Entwurf in den Abhandlungen der Turiner Gesellschaft für 1760 und 1761. Euler erkannte die Vorzüge dieser ganz analytischen Methode, und setzte sie mit mehrerer Deutlichkeit auseinander, gab ihr auch den Namen, Calculus variationum, in den Petersburger Commentarien für 1766. Eine ausführliche

Behandlung derselben ist in dem dritten Theile seiner Integralrechnung befindlich. Aus dem 16ten Bande der Petersburger Schriften für 1772 ist in den Supplementen eine Abhandlung darüber beygefügt.

Noch eine Nachricht von einigen allgemeinen, aber nur vorgeschlagenen, Integrations-Methoden.

Hermann lehrt eine gewisse Methode für alle Differentialgleichungen, (Comm. vet. Acad. Petrop. T. I.), und wendet sie auch auf leichte Fälle an; allein sie erfordert zu vieles Herumsuchen, und ist auch nicht allgemein hinreichend, daher auch nicht weiter befolgt.

Mit den beiden von Fontaine angegebenen Methoden ist es eben so gegangen. Man hat sie gerühmt, und sich ihrer nicht bedient.

Condorcet hat in seinem Werke über die Integralrechnung (1765) den Abriß einer allgemeinen Integrations-Methode, für jeden Grad der Gleichung und jede Anzahl veränderlicher Größen, geliefert. In dem Dictionnaire encyclopédique ist dieser Abriß auch mitgetheilt. Er verlangt gewisse Hülfstafeln, wozu er den Entwurf giebt. Aber niemand hat es gewagt, sich auf diese Arbeit einzulassen. Die Methode scheint mehr wegen des dadurch gezeigten Scharfsinns gerühmt, als für ausführbar erkannt zu seyn.

Der Freyherr von Pacassi hat in einer Abhandlung über eine neue Methode zu integriren, Wien 1785, und in einem Aufsatze, der in die physikalischen Arbeiten der einträchtigen Freunde zu Wien, 2ter Jahrg. 1786, eingerückt ist, eine allgemeine Integrationsmethode angeben wollen, wovon in Lamberts gelehrten Briefwechsel, Bd. V. S. 344. ff, eine von L. Oberreit verfaßte Nachricht und Beurtheilung zu finden ist.

Einige Annäherungs-Methoden, das $\int X \partial x$ durch einzelne berechnete Werthe von X zu finden, lehrten Newton in der Methodus differentialis; Thomas Simpson in Mathematical dissertations, 1743; Lambert in seinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, Th. II. Nro. IX.

Verzeichniß einiger Werke zur Integralrechnung.

D'Alembert schlägt in dem von ihm herrührenden ganz kurzen Artikel, Integral, in dem Dictionn. encyclopédique, folgende Werke zum Nachlesen vor, etwa in der Ordnung, wie sie genannt sind. Zuerst die Lectiones von Joh. Bernoulli, die schon oben von mir empfohlen sind. Nach diesen der zweyte Theil von Maclaurins treatise on fluxions, wovon eine französische Uebersetzung vorhanden ist. Ferner die Abhandlung von Newton de quadratura curvarum, und das Werk von Cotes: Harmonia mensurarum, wozu man in den Act. Er. 1718, 1719, und in den Petersb. Comment. T. VI. gute Erläuterungen finde, mehr in dem auch schon angeführten Werke von Walmesley. Insbesondere empfiehlt er den Traité du Calcul intégral par de Bougainville, le jeune, à Paris 1754, 1756. 2 Voll. in 4. Der zweyte Theil dieses Werks, der von den Differentialgleichungen handelt, scheint mir sehr gut abgefaßt zu seyn, und das beste, was bis dahin über die Integration derselben bekannt war, zu enthalten. Der erste Theil, von den Differentialformeln, möchte hin und wieder kürzer und netter seyn können. Montücla rühmt auch das Werk wegen der guten Methode und der Klarheit des Vortrages.

Die PP. Lesueur und Jacquier, aus dem französischen Hause der Minimen zu Rom, gaben 1768. zu Parma in zwey Quartbänden heraus: Elémens du calcul intégral, welche Montücla auch wegen der Ordnung und Deutlichkeit rühmt. Einige neue Theorien, die um die Zeit der Ausgabe dieses Werks nur erst waren gegründet worden, sind darin schon aufgenommen. Von dem Werke ist eine neue Auflage 1782 zu Parma und Leipzig (bey Weidmanns Erben und Reich) erschienen.

Von Eulers großem Werke über die Integralrechnung ist schon oben Nachricht gegeben. Die Deutlichkeit des Vortrages dieser schweren und weitläuftigen Wissenschaft ist ein merkwürdiger und auszeichnender Vorzug dieses Werks.

Den gegenwärtigen Zustand der Integralrechnung nach den Methoden und Erweiterungen durch die französischen Analysten lernt man aus folgenden Werken kennen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par J. A. J. Cousin, à Paris, l'an IV. 1796. 2 voll. in 4. 320 u. 284 S. Die erste Ausgabe erschien im Jahr 1777 in zwey Octavbänden. Man verbinde damit zur Anwendung der allgemeinen Rechnung die Introduction à l'étude de l'Astronomie physique desselben Verfassers, à Paris 1787. in 4. 324 S.

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par *S. F. la Croix*, à Paris, An. V. = 1797. VI. = 1798. 2 voll. in 4. 520 u. 732 S. Damit ist verbunden Traité des différences et des séries, à Paris, An VIII. = 1800. in 4. 578 S. Die Nummern der Paragraphen laufen aus jenem Werke in dieses fort. Ein ausführliches Real-Register von 34 Seiten erleichtert den Gebrauch dieses Werkes gar sehr.

Traités du Calcul différentiel et du Calcul intégral par Charles Bossut, à Paris An VI. 2 Tom. in 8. 600 und 562 S. So schätzbar auch das Werk durch manches dem Verfasser Eigene ist, so sieht man doch auch, daß er sich mehr nach ältern Analysten gebildet hat. Daher findet man auch in Absicht auf die Integrationsmethoden nicht die Allgemeinheit und Vollständigkeit bey ihm, wie bey la Croix, dem er überhaupt an philosophischer Behandlungsart nachsteht.

In Deutschland fehlt es zwar nicht an guten Lehrbüchern über die Integralrechnung, allein wir besitzen noch kein ausführliches System, das dem jetzigen Zustande der Wissenschaft angemessen wäre. Die Leichtigkeit, womit wir uns ausländischer Werke bedienen, ist vielleicht Schuld daran. Kästners Analysis des Unendlichen kam zuerst 1761 heraus. Die neuern Theorien konnten in den folgenden Ausgaben nur kurz eingeschaltet werden. Um dieselbe Zeit (1760) kam Karstens erstes Lehrbuch der Mathematik, Mathesis theoretica elementaris et subli-

nior, 1760. heraus, worin die Eulerischen Schriften sehr gut benutzt sind, und die Integralrechnung einen beträchtlichen Theil einnimmt. Segner hat in seinem Cursu mathematico nur den Anfang zur Integralrechnung in dem 5ten und letzten Bande geliefert. Zum ersten Unterricht ist zu empfehlen: Pasquichs mathematische Analysis, zweyter Band, Leipzig 1791, und zur weitern Ausbildung, desselben Verfassers: Elementa Analyseos et Geometriae sublimioris, ex evidentissimis notionibus principiisque deducta, Lipsiae 1799, 4, wozu als zweyter Band eine Sammlung von statisch-mechanischen Abhandlungen gehört.

Integralformel ist die Function einer einzigen veränderlichen Größe, die durch die Integration einer Differentialformel entstanden ist. Wenn nämlich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ eine Function von x allein, $= X$ ist, so ist $X \partial x$ eine Differentialformel, und diejenige Function von x, welche dem Werthe von y gleich ist, ist die Integralformel, welche sich auf jene Differentialformel bezieht, oder auch, wie man gewöhnlich es ausdrückt, das Integral von $X \partial x$. Man bezeichnet sie so: $y = \int X \partial x$.

Die Function X ist entweder eine algebraische oder transscendente. Die algebraischen Functionen sind entweder rationale oder irrationale. Die rationalen Functionen sind entweder ganze oder gebrochne. Die transscendenten sind solche, die Logarithmen oder Exponentialgrößen, oder Winkel und trigonometrische Functionen enthalten. Zufolge dieser Eintheilung der Functionen wird auch die Eintheilung der Differentialformeln mit ihren Integralformeln am bequemsten gemacht.

Durch schickliche Substitutionen kann man dem Differentialfactor oft eine bequemere Form geben. Z. B. in dem Differential $\frac{a \partial x}{bb - xx}$ setze man $x = \frac{z-1}{z+1} b$, so

verwandelt es sich in $\frac{a\partial z}{2bz}$. Ferner in dem Differential $\frac{\partial x}{\sqrt{(x+bbxx)}}$ setze man $x = \frac{1}{zz-bb}$, so entsteht daraus $\frac{2\partial z}{bb-zz}$. Oder es sey $\partial y = \frac{\partial x}{x\sqrt{(ax-xx)}}$, so setze man $ax - xx = \frac{aaxx}{uu}$ und es ist $dy = \frac{2\partial u}{uu}$. Noch sey $\partial y = \frac{x\partial x\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}}$, und $aa + xx = uu$, so ist $\partial y = \partial u\sqrt{(2aa-uu)}$.

Unter den Integralformeln hat man sich besonders diejenigen zu merken, durch deren Hülfe andere mehr zusammengesetzte gefunden werden. Ein Integral ist häufig aus mehrern Integralen zusammen gesetzt, so daß man es stückweise findet, zuerst einen Theil P nebst einem Theile Q, der ein noch nicht entwickeltes Integral ist, woran blos durch das Zeichen $\int$ die damit vorzunehmende Operation bezeichnet wird. Dieses involutorische Integral, wie man es nennen mag, enthalte wiederum zwey Theile, Q' und R, von welchen R auf gleiche Weise in zwey Theile R' und S zerfalle, und so ferner, bis man auf eine Elementarformel kommt, die entweder ein algebraisches Integral giebt, oder auf logarithmische oder circulare Functionen führt, welche man durch die berechneten Tafeln hinlänglich genau finden kann, oder die eine transscendente Function anderer Art anzeigt, bey welcher weiter keine Reduction auf jene Functionen sich entdecken läßt.

Den Gang dieser Entwicklung kann man folgendergestalt darstellen. Es seyn X und Z Functionen von x, und $\partial y = Z\partial X$, so ist $y = ZX - \int X\partial Z$. Setzt man $X\partial Z = Z'\partial X'$, indem man das Differential $X\partial Z$ in zwey andere Factoren zerlegt, von welchen $\partial X'$ das Differential ∂x enthält, so ist $\int Z'\partial X' = Z'X' - \int X'\partial Z'$,

und es ist $y = ZX - Z'X' + \int X' \partial Z'$. Auf die gezeigte Art wird mit der Zerlegung fortgefahren.

I. Classe, in welcher der Differentialfactor eine rationale Function von x ist.

1. $\partial y = x^m \partial x$.

$$y = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + \text{Const.}$$

Aus Differentialformeln (1.). Die Function gilt für jede Beschaffenheit von m. Eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten braucht bey einer eintheiligen formlosen Größe nicht als irrational angesehen zu werden, da x selbst nicht nothwendig eine rationale Größe ist.

Beyspiele.

$$\int x^3 \partial x = \tfrac{1}{4} x^4 + C; \quad \int x^{-3} \partial x = C - \tfrac{1}{2} x^{-2}.$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} \partial x = \tfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C; \quad \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x = C - 2 x^{-\frac{1}{2}}.$$

2. $\partial y = (a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + \text{etc.})\, \partial x$.

$$y = C + \frac{1}{\alpha+1} a x^{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} b x^{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} c x^{\gamma+1} + \text{etc.}$$

3. $\partial y = \frac{\partial x}{x}$.

$$y = \log.\text{nat.} \frac{x}{\text{const.}}.$$

(Aus Diff. Formeln 14.). Die Constans eines logarithmischen Integrals wird am bequemsten als ein Logarithmus angenommen, dessen Zahl ein Multiplicator oder Divisor der zu dem veränderlichen Logarithmen gehörigen Größe ist. Wenn in dem obigen Integral x eine Linie oder sonst eine benannte Größe ist, so ist dazu als Constante im Nenner eine Größe derselben Art zu setzen, da

Logarithmen sich immer auf absolute Zahlen beziehen. In Integralformeln werden immer die natürlichen Logarithmen verstanden, wenn es auch nicht ausdrücklich bemerkt wird.

4. $\partial y = (a + bx^n)^m x^{n-1} \partial x.$

$$y = \frac{1}{n(m+1)b}(a + bx^n)^{m+1} + C.$$

Die Formel gilt auch für negative und gebrochne Exponenten, s. Differential-Formeln (8.).

5. $\partial y = \frac{\partial x}{a + bx}.$

$$y = \frac{1}{b} \log. \frac{a + bx}{\text{const.}}.$$

6. $\partial y = \frac{\partial x}{x(a + bx)}.$

$$y = \frac{1}{a} \log. \frac{x}{a + bx} + C.$$

Das Integral in (5.) aus (3.) durch Substitution, $a + bx = u$. Das Integral in (6.) durch Zerlegung in die Brüche $\frac{\partial x}{ax} - \frac{b \partial x}{a(a + bx)}$.

7. Das $\int \frac{x^m \partial x}{a + bx}$ wird gefunden, wenn x^m durch $bx + a$ dividirt wird, bis zu dem Reste, der kein x enthält. Die Theile des Quotienten von der Potenz x^{m-1} an bis zu x geben Integrale wie in (2.), die Ergänzung des Quotienten giebt ein Integral wie in (5.).

Das $\int \frac{dx}{x^m(a + bx)}$ zu finden, dividire man x^{-m} durch $a + bx$ bis zu dem Reste, der x^{-1} enthält, so geben die entwickelten Theile des Quotienten Integrale wie in (2.), die Ergänzung ein Integral, wie in (6.).

8. I. $\partial y = \frac{\partial x}{(a+x)(b+x)}$.

$$y = \frac{1}{b-a} \log. \frac{a+x}{b+x} = \frac{1}{a-b} \log. \frac{b+x}{a+x}.$$

Durch Zerfällung des Differentialfactors in die beiden Brüche, $\frac{1}{(b-a)(a+x)} - \frac{1}{(b-a)(b+x)}$.

II. $\partial y = \frac{\partial x}{(a+x)(b-x)}$.

$$y = \frac{1}{a+b} \log. \frac{a+x}{b-x}.$$

Die Constante ist noch beyzufügen.

9. $\int \frac{\partial x}{xx - aa} = \frac{1}{2a} \log. \frac{x-a}{x+a} + C.$

10. $\int \frac{x \partial x}{xx - aa} = \frac{1}{2} \log. \frac{xx - aa}{\text{const.}}.$

11. $\int \frac{\partial x}{x(xx - aa)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx - aa}{xx} + C.$

12. $\int \frac{\partial x}{aa - xx} = \frac{1}{2a} \log. \frac{a+x}{a-x} + C.$

13. $\int \frac{x \partial x}{aa - xx} = \frac{1}{2} \log. \frac{\text{const.}}{aa - xx}.$

14. $\int \frac{\partial x}{x(aa - xx)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa - xx} + C.$

15. $\int \frac{\partial x}{aa + xx} = \frac{1}{a} \text{Ang. tang} \frac{x}{a} + C.$

16. $\int \frac{x \partial x}{aa + xx} = \frac{1}{2} \log. \frac{aa + xx}{\text{const.}}.$

17. $\int \frac{\partial x}{x(aa+xx)} = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa+xx} + C.$

Die logarithmischen Integrale durch Zerlegung des Differentialfactors in zwey Brüche, außer 13 und 16, welches Formeln wie (3.) sind. Die Factoren in (14. u. 17.) müssen in die Brüche, $\frac{1}{aax} \pm \frac{x}{aa(aa \mp xx)}$, zerlegt werden, worauf statt log. x gesetzt wird $\frac{1}{2} \log x^2$. Die Formel 15. aus Differentialformel 31. oder 38.

18. Wenn in den Differentialformeln 8 bis 17. das Quadrat oder höhere Potenzen von x als Factoren im Zähler oder im Nenner vorkommen, so sondert man sie auf eine ähnliche Art ab wie in 7. durch die Division.

19. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{(a+bx)^n}$, wo m und n ganze positive Zahlen sind, wie in den folgenden Formeln.

$$y = \text{Const.} + \frac{1}{(m-n+1)b} \cdot \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$
$$- \frac{ma}{(m-n+1)b} \cdot \int \frac{x^{m-1} \partial x}{(a+bx)^n}.$$

Bey der stückweise vorzunehmenden Integration kommt man zuletzt auf das Integral,

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^n} = - \frac{1}{(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bx)^{n-1}}.$$

Bey dieser und einigen folgenden Formeln genüge es, daß man sich durch die Differentiation von der Richtigkeit der Integration versichere. In dem folgenden Abschnitte wird im Allgemeinen gezeigt, wie dergleichen Integrale durch einen algebraischen und durch einen involutorischen (summatorischen) Theil ausgedruckt werden.

Durch die Substitution, $a+bx=z$, verwandelt sich das Differential in dieses, $\partial y=\frac{(z-a)^m \partial z}{b^{m+1} z^n}$.

Nach der in der Einleitung zu diesem Artikel angegebenen Methode ist auch

$$y=\text{Const.}-\frac{m}{(n-1)b}\cdot\frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$
$$+\frac{m}{(n-1)b}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{n-1}}.$$

Wenn n kleiner als m ist, so ist diese Integralformel brauchbar, weil man dadurch zuletzt auf das $\int\frac{x^\mu dx}{a+bx}$ kommt, welches nach (7.) gefunden wird.

20. $\partial y=\frac{\partial x}{x^m(a+bx)^n}$.

$$y=\text{Const.}-\frac{1}{(m-1)a}\cdot\frac{1}{x^{m-1}(a+bx)^{n-1}}$$
$$-\frac{(m+n-2)b}{(m-1)a}\cdot\int\frac{\partial x}{x^{m-1}(a+bx)^n}.$$

Durch die Substitution, $x=\frac{1}{u}$, verwandelt sich das Differential in dieses, $\partial y=-\frac{u^{m+n-2}\partial u}{(au+b)^n}$.

21. $\partial y=\frac{\partial x}{(a+bxx)^n}$.

$$y=\text{Const.}+\frac{1}{2(n-1)a}\cdot\frac{x}{(a+bxx)^{n-1}}$$
$$+\frac{2n-3}{2(n-1)a}\cdot\int\frac{\partial x}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

Bey der Entwicklung dieser involutorischen Formel kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{dx}{a+bxx}$, welches aus einer der Formeln, 9, 12, 15, gefunden wird.

22. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{(a+bxx)^n}$.

$$\text{I. } y = C. + \frac{1}{(m-2n+1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bxx)^{n-1}}$$
$$- \frac{(m-1)a}{(m-2n+1)b} \cdot \int \frac{x^{m-2} \partial x}{(a+bxx)^n}.$$

Für ein ungerades m kommt man in dem $\frac{1}{2}(m+1)$ten Gliede auf das Integral,

$$\int \frac{x dx}{(a+bxx)^n} = - \frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{1}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

Für ein gerades m erhält man in dem $(\frac{1}{2}m+1)$ten Gliede das Integral, $\int \frac{\partial x}{(a+bxx)^n}$, welches durch eine neue Reihe zufolge (21.) entwickelt wird, und von den Logarithmen oder von Winkeln abhängt.

$$\text{II. } y = C. - \frac{1}{2(n-1)b} \cdot \frac{x^{m-1}}{(a+bxx)^{n-1}}$$
$$+ \frac{m-1}{2(n-1)b} \cdot \int \frac{x^{m-2} \partial x}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

Diese Form für y ist bey einem geraden n dadurch brauchbar, daß mit dem Exponenten von x zugleich der Exponent des Binomium abnimmt, wodurch man auf eine der Elementarformeln, 9 — 17, kommt.

$$\text{III. } y = C. + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{x^{m+1}}{(a+bxx)^{n-1}}$$
$$- \frac{m-2n+3}{2(n-1)a} \cdot \int \frac{x^m \partial x}{(a+bxx)^{n-1}}.$$

$$23.\quad \partial y = \frac{\partial x}{x^m (a + bxx)^n}.$$

$$y = C. - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}(a+bxx)^{n-1}}$$

$$- \frac{(m+2n-3)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2}(a+bxx)^n}.$$

Durch diese involutorische Formel wird der Exponent von x successiv um 2 vermindert. Ist m eine gerade Zahl, so kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{\partial x}{(a+bxx)^n}$. Ist m ungerade, so würde für $\int \frac{\partial x}{x(a+bxx)^n}$ der Divisor in den Coefficienten beider Theile des Integrals nach jener Formel Null. In diesem Falle dient die nächstfolgende Formel, nachdem man auf das gedachte Integral gekommen ist.

$$24.\quad \partial y = \frac{\partial x}{x(a+bxx)^n}.$$

$$y = C. + \frac{1}{2(n-1)a} \cdot \frac{1}{(a+bxx)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x(a+bxx)^{n-1}}.$$

Hierdurch kommt man zuletzt auf das Integral, $\int \frac{\partial x}{x(a+bxx)}$, welches in einer der Formeln 11, 14, 17, gefunden ist.

$$25.\quad \partial y = \frac{\partial x}{aa + 2bx + xx},$$ wo $aa \lessgtr bb$ oder subtractiv ist.

$$y = C. + \frac{1}{2\sqrt{(bb-aa)}} \log. \frac{x+b-\sqrt{(bb-aa)}}{x+b+\sqrt{(bb-aa)}}.$$

Denn es sey $aa + 2bx + xx = (p+x)(q+x)$, so ist $pq = aa$; $p+q = 2b$, und $\partial y = \frac{\partial x}{(p+x)(q+x)}$.

Dadurch ist $y = \frac{1}{p-q} \log \frac{q+x}{p+x}$. (8. I.) Nun ist aus den beiden Gleichungen für p und q, die eine $p = b + \sqrt{(bb-aa)}$, wenn die andere $q = b - \sqrt{(bb-aa)}$ ist. Aus diesen Werthen wird die für y aufgestellte Formel erhalten.

26. $\partial y = \frac{\partial x}{aa + 2bx - xx}$.

$$y = C. + \frac{1}{2\sqrt{(aa+bb)}} \log. \frac{\sqrt{(aa+bb)} - b + x}{\sqrt{(aa+bb)} + b - x}.$$

Denn es sey $aa + 2bx - xx = (p+x)(q-x)$, so ist $pq = aa$; $q - p = 2b$, und $\partial y = \frac{\partial x}{(p+x)(q-x)}$.

Dadurch ist $y = \frac{1}{p+q} \log. \frac{p+x}{q-x}$ (8. II.). Aus den beiden Gleichungen für p und q folgt, daß $p = -b + \sqrt{(aa+bb)}$, und $q = b + \sqrt{(aa+bb)}$, welche Werthe in die Formel für y gesetzt, diejenige des Satzes geben.

27. $\partial y = \frac{\partial x}{aa + 2bx + xx}$, wo $aa > bb$ ist.

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang} \frac{b+x}{\sqrt{(aa-bb)}} + C.$$

oder

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang} \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx} + C.$$

Denn man setze $x = u - b$, so verwandelt sich das Differential in $\frac{\partial u}{uu+aa-bb}$; also ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang.} \frac{u}{\sqrt{(aa-bb)}},$$ aus (15.), woraus der angegebene Werth für y sogleich folgt. — Das Integral konnte auch unmittelbar aus 37. des Art. Differentialformeln gefunden werden.

Da Ang. tang. $\frac{b+x}{\sqrt{(aa-bb)}}$ den Winkel zu der Tangente $\frac{b}{\sqrt{(aa-bb)}}$ enthält, welcher unter der Constante begriffen werden mag, so nehme man den Unterschied dieser Winkel, welcher ist

Ang. tang $\frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx}$ (Goniometrie, 33.), und es erhält nun y den zweyten angegebenen Werth, welcher von dem erstern in der Constante verschieden ist.

$$28. \quad \int \frac{\partial x}{aa+2ax+xx} = C. - \frac{1}{a+x}.$$

Dieses algebraische Integral macht den Übergang von einem der transscendenten Integrale (25, 27.) zu dem andern.

$$29. \quad \partial y = \frac{cx\partial x}{aa+2bx+cxx},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\log.(aa+2bx+cxx) - \int \frac{b\partial x}{aa+2bx+cxx} + \text{Const.}$$

Erhellt sogleich durch die Differentiation. Der zweyte Theil wird aus den Formeln (25 — 27.) gefunden.

$$30.\quad \partial y = \frac{\partial x}{x(aa + 2bx + cxx)}.$$

$$y = \frac{1}{2aa} \log. \frac{xx}{aa + 2bx + cxx}$$
$$- \frac{b}{aa} \int \frac{\partial x}{aa + 2bx + cxx} + \text{Const.}$$

Der Differentialfactor wird in zwey Brüche,

$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{aa + 2bx + cxx}$, zerlegt, wo $Aaa = 1$; $B = -Ac$; $C = -2Ab$ ist.

$$31.\quad \partial y = \frac{x^m \partial x}{aa + 2bx + cxx},$$

wo m eine ganze, positive oder negative, Zahl ist.

Das Integral wird gefunden, wenn mittelst der Division der Exponent von x bis auf 1 oder 0 gebracht wird.

$$32.\quad \partial y = \frac{\partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}.$$

Zur Abkürzung sey $aa + 2bx + cxx = u$, so ist

$$y = \frac{1}{2(n-1)(caa-bb)} \left\{ \frac{b + cx}{u^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{c\partial x}{u^{n-1}} \right\}.$$

Denn man setze $cx = z - b$, so ist

$\partial y = \frac{\partial z : c}{(aa - bb : c + zz : c)}$. Nun folgt das Integral aus (21.), wenn für z wieder desselben Werth gesetzt wird, mit Beybehaltung der Bezeichnung u. Das In-

tegral $\int \frac{\partial x}{u^{n-1}}$ wird auf ähnliche Art gefunden, und so ferner bis zu dem $\int \frac{\partial x}{u}$ aus den Formeln in (25 — 27.).

$$33.\quad \partial y = \frac{x \partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}.$$

Es sey wiederum die Wurzelgröße $= u$, so ist

$$y = -\frac{1}{2(n-1)cu^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{\partial x}{u^n}.$$

$$34.\quad \partial y = \frac{(A + Bx)\partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n},$$

wo A und B gegebene Größen sind. Die Function y wird mittelst (32. 33.) gefunden.

35. $\partial y = \frac{M}{N} \partial x$, wo M und N rationale ganze Functionen von x sind. Auch sey die höchste Potenz von x in der Function M niedriger als die höchste in N. Sollte dieses nicht seyn, so sind durch Division die höhern Potenzen abzusondern, so daß die Function im Zähler einen niedrigern Grad erhalte als die Function im Nenner. Der abgesonderte Theil gehört für den Fall in (2.).

I. Die Function N werde in ein Product aus Factoren von der Form $x \pm p$, oder $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, verwandelt, dadurch daß man $N = 0$ setzt und die Wurzeln dieser Gleichung sucht. Jede mögliche Wurzel p giebt einen Factor $x - p$; je zwey unmögliche, deren Summe möglich ist, geben einen trinomischen Factor. Sind zwey unmögliche Wurzeln, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, so geben diese den Factor $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. (Gleichung, 42.), welchem man auch die Form, $x^2 - 2ax\cos\zeta + aa$, geben kann.

II. Nun werde der Bruch $\frac{M}{N}$ in partielle Brüche zerlegt. Sind alle Factoren ungleich, so entsteht aus

jedem einfachen Factor von N ein partieller Bruch $\frac{A}{x+p}$, und aus einem Doppelfactor der partielle Bruch, $\frac{(A+Bx)\partial x}{x^2-2axcos\zeta+aa}$. Sind zwey gleiche einfache Factoren in N vorhanden, so entstehen daraus die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^2}+\frac{B}{(x+p)}$, und aus zwey gleichen Doppelfactoren die partiellen Brüche,

$$\frac{A+Bx}{(xx-2axcos\zeta+aa)^2}+\frac{C+Dx}{xx-2axcos\zeta+aa}.$$

Aus drey gleichen einfachen Factoren entstehen die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3}+\frac{B}{(x+p)^2}+\frac{C}{x+p}$, und aus drey gleichen Doppelfactoren, die man zur Abkürzung durch u bezeichne, die Brüche, $\frac{A+Bx}{u^3}+\frac{C+Dx}{u^2}+\frac{E+Fx}{u}$. Auf ähnliche Art entstehen aus vier oder mehr gleichen Factoren vier oder mehrere solcher Brüche, deren Nenner Potenzen von dem Factor sind. S. Function, (28. ff.)

III. Die Integration jeder der Differentialformeln mit einem Factor zu ∂x, der ein Bruch, wie die in II. angegebenen, ist, ergiebt sich aus den vorher behandelten Formeln.

IV. Es wird hiebey vorausgesetzt, daß die Wurzeln der Gleichung, $N=o$, alle gefunden werden können. Dieses ist freylich durch bestimmte Methoden nur für Gleichungen bis zum vierten Grade möglich, und bey höhern Graden muß man mit Annäherungen zufrieden seyn, wie es selbst bey jenen niedrigern wegen der Irrationalität der Wurzeln der Fall ist. Bey den Fortschritten in der höhern Analysis muß das, was sie aus der niedern voraussetzt, als vollkommen gegeben betrachtet

werden. Es kommt hier nicht auf Erweise von Sätzen an, sondern auf Methoden. Die Integration der Formel $\frac{M}{N}\partial x$ leidet dadurch als Methode nicht, wenn man auch in einem und dem andern Falle die Factoren von N nicht angeben könnte. Das gehört nicht für die Integralrechnung, sondern für die Algebra.

36. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n + a^n}$, wo $m < n$ ist, und beide ganze positive Zahlen sind.

Der Nenner hat $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare trinomischer Factoren von der Form $xx - 2ax\cos\varphi + aa$, wo $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ ist, und $2k+1$ jede der ungeraden Zahlen von 1 bis $n-1$ oder bis $n-2$ bedeutet. Jeder dieser Factoren giebt einen partiellen Bruch,

$$\frac{(A+Bx)\partial x}{xx - 2ax\cos\varphi + aa}, \text{ worin ist}$$

$$A = +\frac{2a^{m+2}}{na^n}\cos\frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = -\frac{2a^{m+1}}{na^n}\cos\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Für ein ungerades n kommt zu den $\frac{1}{2}(n-1)$ Brüchen mit dreytheiligem Nenner noch der Bruch,

$\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{\partial x}{x+a}$, hinzu. Wie die Werthe von A und B bequem gefunden werden, s. in dem Zusatze zu diesem Abschnitte.

Aus den partiellen Brüchen findet man mittelst (25. ff.) die Integrale.

37. Exempel. $\int \frac{\partial x}{x^4+1} =$

$$-\tfrac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}\log\sqrt{(xx-2x\cos\frac{\pi}{4}+1)}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(\pi:4)}{1-x\cos(\pi:4)}$$
$$-\tfrac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\log\sqrt{(xx-2x\cos\frac{3\pi}{4}+1)}$$
$$+\tfrac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(3\pi:4)}{1-x\cos(3\pi:4)}.$$

Es ist der Logarithme von der Wurzel des Trinomium genommen, und dagegen der Factor 2 vorgesetzt, um die numerischen Coefficienten gleich groß zu haben.

38. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n - a^n}$, wo $m < n$ ist.

Der Nenner hat, wenn n gerade ist, $\frac{1}{2}(n-2)$ Paare trinomischer Factoren von der Form, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$, nebst den beiden einfachen $x+a$ und $x-a$. Ist n ungerade, so ist die Anzahl jener $=\frac{1}{2}(n-1)$, wozu der Factor $(x-a)$ kommt. Der Winkel φ hat die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo $2k$ alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder bis $n-1$ bedeutet. In dem partiellen Bruche $\frac{(A+Bx)\partial x}{xx-2ax\cos\varphi+aa}$ ist

$$A = -\frac{2a^{m+2}}{na^n}\cos\frac{m}{n}2k\pi,$$

$$B = +\frac{2a^{m+1}}{na^n}\cos\frac{m+1}{n}2k\pi.$$

Für ein gerades n kommen hinzu die partiellen Brüche,

$$\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)} - \frac{(-a)^m\partial x}{na^{n-1}(x+a)};$$

für ein ungerades n der Bruch $\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)}$.

39. Exempel I. $\partial y = \frac{\partial x}{x^4 - 1}$, das ist,

$$\partial y = \tfrac{1}{4}\frac{\partial x}{x-1} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\partial x}{x+1} - \tfrac{2}{4}\cdot\frac{\partial x}{xx+1}.$$

Der trinomische Factor ist hier in einen binomischen übergegangen, weil $\cos\varphi = \cos\frac{2\pi}{4} = 0$ ist. Es ist $A = -\frac{2}{4}.1$; $B = 0$. Die Integration dieser Brüche giebt $y = \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1) - \frac{2}{4}$ Ang. tang x.

Exempel II. $\partial y = \frac{\partial x}{x^5 - 1}$, das ist

$$\partial y = \tfrac{1}{5}\cdot\frac{\partial x}{x-1} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{(-1 + x\cos 72^\circ)\partial x}{xx - 2x\cos 72^\circ + 1}$$

$$+ \tfrac{2}{5}\cdot\frac{(-1 + \cos 144^\circ)\partial x}{xx - 2x\cos 144^\circ + 1}, \text{ wo}$$

$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ$, und $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ$ ist. Zufolge (27, 29.), da $aa - bb$ in (27.) hier ist $1 - \cos\varphi^2 = \sin\varphi^2$, ist hieraus

$$\begin{aligned} y = &+ \tfrac{1}{5}\log(x-1) \\ &- \tfrac{2}{5}\sin 72^\circ.\ \text{Ang. tang}\frac{x\sin 72^\circ}{1 - x\cos 72^\circ} \\ &+ \tfrac{2}{5}\cos 72^\circ.\log\sqrt{(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1)} \\ &- \tfrac{2}{5}\sin 144^\circ.\ \text{Ang. tang}\frac{x\sin 144^\circ}{1 - x\cos 144^\circ} \\ &+ \tfrac{2}{5}\cos 144^\circ.\log\sqrt{(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1)}. \end{aligned}$$

40. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{1 - 2x^n\cos\alpha + x^{2n}}$.

Der Differentialfactor läßt sich in n partielle Brüche von der Form, $\frac{A + Bx}{1 - 2x\cos\varphi + xx}$, zerlegen, wo φ die

Werthe, $\frac{\alpha}{n}, \frac{2\pi+\alpha}{n}, \frac{4\pi+\alpha}{n}$, etc. hat. (S. unten 47.). Dadurch wird die Integration auf die in (25. ff) gewiesenen gebracht.

41. $\partial y = \frac{x^{pn:q-1}\partial x}{1-2x^n \cos\alpha + x^{2n}}$, wo p, q, n, ganze Zahlen sind.

Man setze $x^n = z^q$, so ist $x^{\frac{pn}{q}} = z^p$, und $\frac{pn}{q} x^{\frac{pn}{q}-1} \partial x = p z^{p-1} \partial z$. Daraus ist

$$\partial y = \frac{q}{n} \cdot \frac{z^{p-1}\partial z}{1-2z^q \cos\alpha + z^{2q}},$$

welches die Differentialformel in (40) ist.

Oder man setze $x = z^q$, so ist

$$\partial y = \frac{q z^{pn-1}\partial z}{1-2z^{qn}\cos\alpha + z^{2qn}}.$$

42. Wenn in (41.) der Factor q in dem Exponenten qn und 2qn der zweyten Formel eine Potenz der Zahl 2 ist, so läßt sich der Nenner in zwey trinomische Factoren zerlegen, worin die Exponenten von 2 halb so groß sind, als in jenem, also Potenzen von 2 bleiben. Denn es sey die Function

$a^2 + bu^2 + u^4 = (f + gu + u^2)(f - gu + u^2)$,

so ist $f^2 = a^2$, und $2f - g^2 = b$, also $g^2 = 2a - b$, und die Zerlegung ist möglich, wenn $2a > b$ ist. Bey einem negativen b, das ist für die Function $a^2 - bu^2 + u^4$, ist sie immer möglich. Diese Fälle sind in (41.) vorhanden.

Der Bruch $\frac{1}{a^2 + bu^2 + u^2}$ wird nun in die Brüche, $\frac{A+Bu}{f+gu+u^2} + \frac{C+Du}{f-gu+u^2}$, zerlegt. Man

setze $u^2 = z^{qn}$, so ist $u = z^{qn:2}$, wo der Exponent $qn:2$ eine ganze Zahl bleibt. Mit den durch diese Substitution erhaltenen beiden Brüchen wird eben so verfahren, wie mit dem Bruche $\frac{1}{a^2 + bu^2 + u^4}$, und so ferner, bis daß man auf Nenner, wie $1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}$, kommt. Zuletzt werden alle partiellen Brüche mit dem Zähler in ∂y, nämlich $qz^{pn-1}\partial z$, multiplicirt. Dadurch erhält man Differentialformeln von der Form $\frac{z^{rn-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$, deren Integration von derjenigen der Formel $\frac{z^{n-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$ abhängt.

Dieses weitläuftigere Verfahren als dasjenige, welches in (40.) angegeben ist, hat Cotes gebraucht, da ihm das letztere noch nicht bekannt war. Man sehe in der Harmonia mensurarum, Forma XXIX, XXX. cas. 2. und die Analyse des mesures par Walmesley, pag. 202.

43. Hier sieht man, wie man die Potenzen der x mit gebrochnem Exponenten wegschaffen könne. Die Differentialformel sey $\partial y = \frac{x^{m:r-1}\partial x}{a + bx^n}$. Haben m und n keinen gemeinschaftlichen Factor, so setze man $x = z^r$, so ist $x^m = z^{mr}$; $x^{m:r} = z^m$, und

$$\frac{m}{r} x^{m:r-1}\partial x = mz^{m-1}\partial z, \text{ also } \partial y = \frac{rz^{m-1}\partial z}{a + bx^{nr}}.$$

Haben m und n einen gemeinschaftlichen Factor, so daß $m = \mu\eta$; $n = \nu\eta$, so setze man $x^\eta = z^r$, und es ist $x^{m:r} = z^\mu$; $x^n = z^{\nu r}$, und $\partial y = \frac{r}{\eta} \cdot \frac{z^{\mu-1}\partial z}{a + z^{\nu r}}$.

Zusatz.

Die Zerlegung gebrochner rationaler Functionen.

44. Aufg. Es sind M, N, P, Q, R, S, rationale ganze Functionen von x, und $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$. Die Function M sey von einem niedrigern Grade als N, und N enthalte jeden Factor nur einfach, auf welchen Grad er auch steige: es soll der Zähler P des partiellen Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus dem Nenner desselben gefunden werden, ohne daß es nöthig sey, den andern Nenner S zu kennen.

I. Es ist

$$M = PS + QR.$$
$$N = QS.$$
$$\partial N = S\partial Q + Q\partial S.$$

Da PS von keinem höhern Grade als M, also von einem niedrigern als N, das ist QS, ist, so ist P von einem niedrigern Grade als Q.

II. Es sey p eine der Wurzeln der Gleichung $Q = 0$, so ist, wenn $x = p$ gesetzt wird, und M', P', S', so wie $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$ die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$ sind, wodurch $Q = 0$ wird,

$$M' : S' = P'; \qquad \partial N' : \partial Q' = S';$$

also $M'(\partial Q' : \partial N') = P'$.

III. Es sey zuerst $Q = x - p$, so ist P eine bestimmte Größe A. Dadurch ist $P' = P$, und $P = A = M'(\partial x : \partial N')$.

IV. Es sey zweytens Q ein trinomischer Factor, $xx - 2ax + b$, und die Wurzeln der Gleichung, $Q = 0$, seyn, p, q; die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$

seyn wie vorher M', P', S', $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$, und für $x = q$ seyn dieselben M'', P'', S'', $\frac{\partial N''}{\partial Q''}$, so ist $P' = M'(\partial Q' : \partial N')$; $P'' = M''(\partial Q'' : \partial N'')$.

V. Nun ist P eine Function des ersten Grades von x, oder $P = A + Bx$, wo A und B zu bestimmen sind. Es ist

$$P' = A + Bp,$$
$$P'' = A + Bq.$$

Daher $A = \frac{pP'' - qP'}{p - q}$,

$$B = \frac{P' - P''}{p - q}.$$

Das ist

$$A = -\frac{qM'}{p-q} \cdot \frac{\partial Q'}{\partial N'} + \frac{pM''}{p-q} \cdot \frac{\partial Q''}{\partial N''}.$$

$$B = \frac{M'}{p-q} \cdot \frac{\partial Q'}{\partial N'} - \frac{M''}{p-q} \cdot \frac{\partial Q''}{\partial N''}.$$

VI. Es ist $\partial Q = (2x - 2a)\partial x$, also $\partial Q' = (2p - 2a)\partial x$; $\partial Q'' = (2q - 2a)\partial x$. Nun ist $p + q = 2a$ (Gleichung, 40.), also $\partial Q' = (p-q)\partial x$; $\partial Q'' = (q - p)\partial x$. Dadurch ist

$$A = -qM' \cdot \frac{\partial x}{\partial N'} - pM'' \cdot \frac{\partial x}{\partial N''},$$

$$B = M' \cdot \frac{\partial x}{\partial N'} + M'' \cdot \frac{\partial x}{\partial N''}.$$

Sind p und q unmögliche Größen, so muß sich das unmögliche in den Werthen von A und B aufheben.

VII. Auf ähnliche Art kann man die Function P finden, wenn Q einen höhern Grad als den zweyten hat,

wofern nur die Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ sich bequem angeben lassen.

VIII. Die Function P muß von einem niedrigern Grade als Q seyn, weil zur Bestimmung derselben nicht mehr Gleichungen gegeben werden, als Factoren in Q sind. Daher kann P nicht mehr Glieder, als Q Factoren enthalten. Da das erste Glied eine bestimmte Größe ist, so ist die höchste Potenz von x in P niedriger, als die höchste in Q. Aber es hindert nichts, daß R nicht höhern Grades seyn dürfte, als S, da der Zähler R gar nicht in Rechnung kommt. Daher darf auch M höhern Grades seyn als N, wofern man nur nicht alle partiellen Brüche auf die hier für den Bruch $\frac{P}{Q}$ gewiesene Art suchen will. Den letzten muß man, wenn M höhern Grades als N ist, durch Absonderung der gefundenen Brüche von $\frac{M}{N}$ bestimmen.

45. I. Es sey $Q = (x-p)^2$, so ist (Function, 28.) der Bruch $\frac{M}{N}$ zu zerlegen in die Brüche,

$\frac{A}{(x-p)^2} + \frac{B}{x-p} + \frac{R}{S}$. Es ist also $P = A + B(x-p)$, und $M = AS + BS(x-p) + R(x-p)^2$. Daraus ist $M' = AS'$, aber S' kann aus der Gleichung, $\partial N = S\partial Q + Q\partial S$, nicht gefunden werden, da ∂Q wie $Q = 0$ ist, für $x = p$. Man nehme das zweyte Differential von N, nämlich

$$\partial^2 N = S\partial^2 Q + 2\partial S.\partial Q + \partial^2 S.Q,$$

so ist

$$\partial^2 N' : \partial^2 Q' = S' \quad \text{oder} \quad \partial^2 N' : 2\partial x^2 = S',$$

also $A = M'(2\partial x^2 : \partial^2 N')$.

II. Ferner werde M differentiirt, so ist

$$\partial M = P\partial S + S\partial P + Q\partial R + R\partial Q,$$

und $\partial M' = P'\partial S' + S'\partial P'$,

das ist $\partial M' = A\partial S' + S'.B\partial x$.

III. Um $\partial S'$ zu erhalten, differentiire man N zum drittenmahle. Es ist

$\partial^3 N = S.\ \partial^3 Q + 3\partial S.\ \partial^2 Q + 3\partial^2 S.\ \partial Q + \partial^3 S.\ Q$.

Daraus ist $\partial^3 N' = 3\partial S'.\partial^2 Q'$, weil $\partial^3 Q = 0$, also $\partial S' = \partial^3 N' : 3\partial^2 Q'$, oder $\partial S' = \partial^3 N' : 6\partial x^2$.

IV. Hierdurch ist $\partial M' = A(\partial^3 N' : 6\partial x^2) + B(\partial^2 N' : 2\partial x)$, so daß

$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - A(\partial^3 N' : 3\partial^2 N'\partial x)$.

oder

$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - 2M'(\partial^3 N'\partial x : 3(\partial^2 N')^2)$.

V. Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{x^m}{3x^4 - 4x^3 + 1}$. Ein Quadratfactor des Nenners ist $Q = (x-1)^2$. Es ist $\partial N = -12x^2\partial x + 12x^3\partial x$; $\partial^2 N = -24x\partial x^2 + 36x^2\partial x^2$; $\partial^3 N = -24\partial x^3 + 72x\partial x^3$, also ist $\partial N' = 0$; $\partial^2 N' = +12\partial x^2$; $\partial^3 N' = +48\partial x^3$. Ferner ist $\partial M = mx^{m-1}\partial x$; $M' = 1$; $\partial M' = m\partial x$.

Daraus $A = +\frac{1}{6}$; $B = \frac{m}{6} - \frac{2}{9}$, und der partielle Bruch, der aus dem Factor $(x-1)^2$ des Nenners N entsteht, ist $\frac{1}{6(x-1)^2} + \frac{3m-4}{18(x-1)}$.

Dieses Beyspiel kann zur Erläuterung von 44. VIII. dienen, wenn m größer als 4 genommen wird.

VI. Aus der für den Factor $(x-p)^2$ gezeigten Methode wird man abnehmen, wie man für höhere Potenzialfactoren den zugehörigen Zähler des partiellen Bruches finden könne, wenn man nicht unmittelbar den Factor S in Rechnung bringen will, der allerdings aus dem Nenner N durch den Factor Q gefunden werden kann.

VII. Nach derselben Methode kann man auch die Zähler der partiellen Brüche suchen, die aus dem Qua-

drate oder einer höhern Potenz des trinomischen Factors, $xx + ax + b$, entstehen. Wenn N das Quadrat desselben enthält, so entstehen daraus zwey Brüche,

$$\frac{A + Bx}{(xx + ax + b)^2} + \frac{C + Dx}{xx + ax + b}.$$

Hier müßte man zuerst die beiden Theile A und C zu bestimmen suchen, mittelst der Wurzeln p und q der Gleichung, $xx + ax + b = 0$, eben so wie es in (44. IV—VI.) geschehen ist. Dann würde man die Coefficienten B und D suchen, jeden durch dieselben Wurzeln p und q, so wie vorher in (IV.) B gefunden ist.

VIII. Das hier gezeigte Verfahren ist ein anderes, als das von Euler in der Differentialrechnung P. II. Cap. XVIII. gelehrte, wovon in dem Artikel, Function (52—55.) etwas mitgetheilt ist. Für Doppelfactoren scheint jenes deutlicher zu seyn. Bey Potenzialfactoren gebraucht Euler den Factor S zur Berechnung des Zählers P, ob er gleich Anfangs (§. 403.) es als einen Vorzug der Methode durch Differentiiren die partiellen Brüche zu finden, angiebt, daß man nicht nöthig habe, den zweyten Factor des Nenners zu suchen.

Die folgenden Zerlegungen dienen zu Beyspielen der hier gezeigten Methode, und liegen zugleich bey den Integrationen (36. ff.) zum Grunde. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Analysis, VI. und VII. ist schon von diesen Zerlegungen gehandelt. Wegen der bessern Übersicht des Ganzen sey hier eine Wiederholung gestattet, die aber auch ihr eigenes hat.

46. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{x^n \pm a^n}$ in partielle Brüche mit binomischen oder trinomischen Nennern zu zerlegen. Der Exponent m sey kleiner als n.

I. Aus Goniometrie (100.) ist

$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$,

oder

$(a \cos\varphi \pm a \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = a^n (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1})$. Man setze $\sin n\varphi = 0$, so ist $\cos n\varphi = +1$, oder $\cos n\varphi = -1$, jenes, wenn $n\varphi = 2k\pi$, dieses wenn $n\varphi = (2k+1)\pi$, ist und

$$(a \cos\varphi \pm a \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = a^n,$$

oder $$(a \cos\varphi \pm a \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = -a^n.$$

II. Der $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ erhalten in beiden Fällen n verschiedene Werthe (Goniometrie. V.). Diejenigen Winkel, welche verschiedene Sinus und Cosinus geben, sind, wenn $\cos n\varphi = +1$ genommen wird, für ein gerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-2}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-2}{n}\pi.$$

Ist $\cos\varphi = -1$, so sind diese Winkel für ein gerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-1}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-1}{n}\pi.$$

Die Winkel, deren Summe vier Rechte oder 2π beträgt, haben einerley Cosinus, und gleiche aber entgegengesetzte Sinus. Man hat also, außer den Winkeln 0 und π, nur die Winkel unter zwey Rechten zu nehmen nöthig, und für die Sinus derer über zwey Rechte zu setzen $-\sin\varphi$. Solchergestalt sind für $\pm a^n$ je zwey Factoren, $\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ und $\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, worin φ denselben Werth hat. In den Werthen von φ, sie seyn $\frac{2k\pi}{n}$ oder $\frac{2k+1}{n}\pi$, ist $2k$ so wie $2k+1$ nicht größer als n zu nehmen.

III. Man bezeichne jeden der n Factoren in $(a \cos\varphi \pm a \sin\varphi . \sqrt{-1})^n$ durch x, wie in einer Gleichung jede ihrer Wurzeln durch dasselbe Zeichen bedeutet wird, so daß ein Paar Wurzeln, mit demselben Werthe von φ, sey

$$x = a \cos\varphi + a \sin\varphi . \sqrt{-1},$$
$$x = a \cos\varphi - a \sin\varphi . \sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man diese bestimmten Werthe von x durch p und q, so sind p und q zwey Wurzeln der Gleichung, $x^n - a^n = 0$, oder der Gleichung, $x^n + a^n = 0$, und die Functionen, $x^n - a^n$; $x^n + a^n$, haben die einfachen Factoren, $x - p$; $x - q$, oder den Doppelfactor, $x^2 - (p+q)x + pq$, das ist, $x^2 - 2ax\cos\varphi + aa$. Ist $\varphi = 0$ oder π, so hat die Function den Factor $x - a$ oder $x + a$. Die Function $x^n - a^n$ hat für ein gerades n die Factoren $x - a$ und $x + a$, für ein ungerades n den Factor $x - a$. In jenem Falle ist für $\sin\varphi = 0$ der Werth von $x = \pm a$, in diesem bloß $x = +a$. Die Function $x^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen einfachen Factor, für ein ungerades den $x + a$. Hier ist bloß für ein ungerades n der Werth $\sin\varphi = 0$, und $x = -a$.

IV. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n + a^n}$ werde in die partiellen, $\frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$, zerlegt, und Q sey ein trinomischer Factor, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$. In der Formel (44. VII.) ist $M = x^m$, $N = x^n + a^n$; $M' = p^m$; $M'' = q^m$; $\partial N = nx^{n-1}\partial x$; $\frac{\partial x}{\partial N'} = \frac{1}{np^{n-1}}$; $\frac{\partial x}{\partial N''} = \frac{1}{nq^{n-1}}$, also

$$A = -\frac{qp^m}{np^{n-1}} - \frac{pq^m}{nq^{n-1}},$$

$$B = \frac{p^m}{np^{n-1}} + \frac{q^m}{nq^{n-1}}.$$

Da $p = a(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})$,
$q = a(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})$,

so ist $pq = aa$, also $p = \frac{aa}{q}$, und $q = \frac{aa}{p}$.

Dadurch $A = -\frac{1}{n} a^2 (p^{m-n} + q^{m-n})$

$= -\frac{1}{n} . \frac{a^2}{a^{2n-2m}} (q^{n-m} + p^{n-m})$,

und $B = \frac{1}{n} . \frac{a^2}{a^{2n-2m}} (q^{n-m-1} + p^{n-m-1})$.

Nun ist

$p^{n-m} = a^{n-m} (\cos(n-m)\varphi + \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1})$,
$q^{n-m} = a^{n-m} (\cos(n-m)\varphi - \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1})$.

Also

$p^{n-m} + q^{n-m} = 2a^{n-m} \cos(n-m)\varphi$,
$p^{n-m-1} + q^{n-m-1} = 2a^{n-m-1} \cos(n-m-1)\varphi$.

Dadurch ist

$$A = -\frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos(n-m)\varphi,$$

$$B = +\frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos(n-m-1)\varphi.$$

Da für die Function $x^n + a^n$ zu setzen ist $\cos n\varphi = -1$, so ist $n\varphi = (2k+1)\pi$, und $(n-m)\varphi$ $= (2k+1)\pi - \frac{m}{n}(2k+1)\pi$. Daher $\cos(n-m)\varphi$ $= -\cos\frac{m}{n}(2k+1)\pi$, (Goniometrie, 17.). Eben so ist $\cos(n-m-1)\varphi = -\cos\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi$.

Folglich

$$A = + \frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos \frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = - \frac{2a}{na^{n-m}} \cos \frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Solchergestalt wird jeder partielle Bruch von der Form $\frac{A+Bx}{xx-2ax\cos\varphi+aa}$, der aus $\frac{x^m}{x^n+a^n}$ entsteht, gefunden. Für $2k+1$ werden alle ungerade Zahlen von 1 bis $n-1$ oder $n-2$ gesetzt. In dem Falle, da n ungerade ist, giebt der Factor $x+a$ der Function x^n+a^n nach (44. II.) den partiellen Bruch $\frac{(-a)^m}{n(-a)^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$, oder $\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$. Es ist nämlich $\partial N = nx^{n-1}\partial x$, und $\partial N' = n(-a)^{n-1}\partial x$.

V. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n-a^n}$ wird auf gleiche Art zerlegt. Nur hat φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo für die trinomischen Nenner $2k$ alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder $n-1$ bedeutet, da die Werthe 0 und n für die binomischen Nenner gehören. Es ist nun $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{m}{n}.2k\pi$, und $\cos(n-m)\varphi = \cos\frac{m}{n}.2k\pi$, (Goniometrie, 17.) so wie $\cos(n-m-1)\varphi = \cos\frac{m+1}{n}2k\pi$. Dadurch ist

$$A = - \frac{2aa}{na^{n-m}} \cos \frac{m}{n}.2k\pi,$$

$$B = + \frac{2a}{na^{n-m}} \cos \frac{m+1}{n}.2k\pi.$$

Für ein gerades n geben die Factoren $x - a$ und $x + a$ der Function $x^n - a^n$ noch die partiellen Brüche, $\frac{(+a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$. Für ein ungerades n giebt der Factor $x - a$ den partiellen Bruch $+ \frac{(+a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x-a}$.

VI. Der Bruch $\frac{x^m}{a^n - x^n}$ wird in dieselben Brüche, wie der in V. zerlegt, nur daß die Werthe derselben den daselbst gefundenen entgegengesetzt sind, und daß $a - x$ statt $x - a$ zu setzen ist.

47. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{1 - 2x^n \cos\alpha + x^{2n}}$ in partielle Brüche von der Form $\frac{A + Bx}{1 - 2xc\cos\varphi + xx}$ zu zerlegen.

Es ist $1 - 2x^n \cos\alpha + x^{2n}$ ein Product aus n Factoren, $1 - 2ax + xx$; $1 - 2bx + xx$; $1 - 2cx + xx$; u. s. f., so daß $a = \cos\frac{\alpha}{n}$; $b = \cos\frac{2\pi + \alpha}{n}$; $c = \cos\frac{4\pi + \alpha}{n}$, u. s. w. (Goniometrie 107. 108.). Man bezeichne die Winkel dieser Cosinus überhaupt durch φ, so ist der Nenner eines der partiellen Brüche $= 1 - 2x\cos\varphi + xx$. Es ist also in der Aufgabe (44.) für diesen Fall $M = x^m$; $N = 1 - 2x^n \cos\alpha + x^{2n}$; $Q = 1 - 2x\cos\varphi + xx$; $M' = p^m$; $M'' = q^m$, wenn p und q die Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ bedeuten; $\frac{\partial N'}{\partial x} = 2np^{n-1}$; $(p^n - \cos\alpha)$; $\frac{\partial N''}{\partial x} = 2nq^{n-1}(q^n - \cos\alpha)$. Da p und q Wurzeln der

Gleichung, $1 - 2x \cos\varphi + xx = 0$, und auch der $1 - 2x^n \cos\alpha + x^{2n} = 0$, sind, so ist $pq = 1$, und $p^n + q^n = 2 \cos\alpha$. (Zu vergl. am angef. O. 107.). Dadurch ist $\frac{\partial N'}{\partial x} = np^{n-1}(p^n - q^n)$;

$\frac{\partial N''}{\partial x} = nq^{n-1}(q^n - p^n)$, und

$$A = \frac{p^{n-m} - q^{n-m}}{n(p^n - q^n)};$$

$$B = \frac{-p^{n-m-1} + q^{n-m-1}}{n(p^n - q^n)}.$$

Da ferner die Wurzeln der Gleichung, $xx - 2x\cos\varphi + 1 = 0$, sind $p = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$. und $q = \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, so ist $p^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, und $q^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, also $p^n - q^n = 2 \sin n\varphi . \sqrt{-1}$. Eben so ist $p^{n-m} - q^{n-m} = 2 \sin(n-m)\varphi . \sqrt{-1}$; und $p^{n-m-1} - q^{n-m-1} = 2 \sin(n-m-1)\varphi . \sqrt{-1}$. Der $\sin n\varphi$ ist immer $= \sin\alpha$, für jeden Werth von φ. Also ist

$$A = \frac{\sin(n-m)\varphi}{n \sin\alpha},$$

$$B = -\frac{\sin(n-m-1)\varphi}{n \sin\alpha},$$

wo für φ nach der Reihe die Werthe $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{2\pi + \alpha}{n}$, $\frac{4\pi + \alpha}{n}$, etc. zu setzen sind, bis daß man n derselben genommen hat. Irgend einer dieser Winkel, $\frac{2k\pi + \alpha}{n}$, giebt $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{2mk\pi - (n-m)\alpha}{n}$, also $\sin(n-m)\varphi = -\sin\frac{2mk\pi - (n-m)\alpha}{n}$. (Go-

niometrie, 16). Setzt man $n - k$ statt k, so ist $\sin(n-m)\varphi = -\sin\left(2m\pi - \frac{2mk\pi + (n-m)\alpha}{n}\right) = + \sin\frac{2mk\pi + (n-m)\alpha}{n}$. In dem Coefficienten B ist $m + 1$ statt m zu setzen. Man sehe noch Eulers Differentialrechnung, p. 879.

Eine von diesen Methoden, rationale Brüche in einfache aufzulösen, ganz verschiedene, hat Euler in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. vorgetragen.

II. Classe, in welcher der Differentialquotient eine irrationale Function von x ist.

48. Die mit Wurzelgrößen behafteten Differentialformeln können manchmahl rational gemacht werden, wie in folgenden Beyspielen.

I. Die Formel $X\partial x(a + bx)^{\mu:\nu}$, worin X eine Function von x ist, wird eine rationale dadurch, daß $a + bx = z^\nu$ gesetzt wird. Dieses giebt $x = \frac{z^\nu - a}{b}$, und $\partial x = \frac{\nu}{b} z^{\nu-1}\partial z$. Durch die Substitution für x wird X eine rationale Function von z, die Z heiße, und es erhält daher die Formel die Gestalt $\frac{\nu}{b} Z z^{\mu+\nu-1}\partial z$.

II. Es sey $\partial y = X\partial x\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\mu:\nu}$. Man setze $\frac{a+bx}{f+gx} = z^\nu$, so ist $x = \frac{a - fz^\nu}{gz^\nu - b}$, und $\partial x = \frac{\nu(bf - ag)z^{\nu-1}dz}{(gz^\nu - b)^2}$. Durch die Substitutionen dieser Werthe wird die Differentialformel rational.

III. Es sey $\partial y = x^{m-1} \partial x \, (a + b x^n)^{\mu : \nu}$. Man setze $a + b x^n = u^\nu$, so verwandelt sich die Formel in $\frac{\nu}{n} u^{\mu + \nu - 1} du \left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$. Diese ist rational, wenn $\frac{m-n}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, positive oder negative, ist.

Oder man setze $a + b x^n = x^n z^\nu$, so wird dadurch die Formel verwandelt in $\frac{-\nu a^{m:n + \mu:\nu} z^{\mu + \nu - 1} \partial z}{n (z^\nu - b)^{m:n + \mu:\nu + 1}}$. Sie ist rational, wenn $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist.

IV. Es sey $\partial y = \frac{X \partial x}{\sqrt{(a + b x + x x)}}$. Man setze die Wurzelgröße $= x + z$, so ist, durch Erhebung aufs Quadrat, $a + b x = 2 z x + z z$, und $x = \frac{a - z z}{2 z - b}$, wovon das Differential $\partial x = -\frac{2(a - b z + z z) z \partial z}{(2 z - b)^2}$. Vermittelst dieser Werthe wird $\partial y = Z \partial z$, wo Z eine rationale Function von z ist.

V. Es sey $\partial y = X \sqrt{(a + b x - x x)}$. Man setze $x x - b x - a = (x - p)(x + q)$, so sind p und $-q$ die möglichen Wurzeln der Gleichung, $x x - b x - a = 0$, und es ist $a + b x - x x = (p - x)(q + x)$. Nun sey $\sqrt{(p - x)(q + x)} = (p - x) z$, so ist durch Erhebung, $q + x = (p - x) z^2$, also $x = \frac{p z^2 - q}{z z + 1}$. Dadurch wird $\partial y = Z \partial z$, wo Z eine rationale Function von z ist.

VI. Es sey $\partial y = \partial x \sqrt{(a + 2bx + cxx)}$.

Man setze $a + 2bx + cxx = \frac{bb - ac}{uu - c}$,

oder $ac + 2bcx + c^2x^2 = \frac{bbc - acc}{uu - c}$,

so ist

$$bb + 2bcx + c^2x^2 = \frac{(bb - ac)uu}{uu - c},$$

und, $bb - ac = e^2$ gesetzt, wenn nämlich $bb > ac$ ist,

$$b + cx = \frac{eu}{\sqrt{(uu - c)}},$$

$$c\partial x = \frac{e\partial u}{\sqrt{(uu - c)}} - \frac{eu^2\partial u}{(uu - c)^{\frac{3}{2}}},$$

$$c\partial y = \frac{e^2\partial u}{uu - c} - \frac{e^2u^2\partial u}{(uu - c)^2}.$$

Ist $b^2 < ac$, so sey $ac - bb = ee$, und

$a + 2bx + cxx = \frac{ee}{c - uu}$. Dadurch ist

$$c\partial y = \frac{ee\partial u}{c - uu} + \frac{eeuu\partial u}{(c - uu)^2}.$$

Auf gleiche Weise ist

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(a + 2bcx + cxx)}} = \partial u - \frac{uu\partial u}{uu - c},$$

in beiden Fällen des Verhaltens zwischen ac und bb.

VII. Wenn X in dem Differential $X\partial x$ ausser $\sqrt{(a + bxx)}$, und den ganzen Potenzen dieser Wurzel keine andere irrationale Function von x, noch eine transscendente enthält, so setze man $\sqrt{(a + bx^2)} = \frac{z^2 + a}{2z}$,

und es ist $x = \frac{zz - a}{2z\sqrt{b}}$; $\partial x = \frac{(zz + a)\partial z}{2zz\sqrt{b}}$,

und $z = x\sqrt{b} + \sqrt{(a + bxx)}$.

VIII. Mehrere Arten der Substitution sehe man in Eulers Abhandlung: de integratione formularum differentialium irrationalium. Acta Acad. Petrop. T. IV. Noch eine hieher gehörige Abhandlung aus Eulers Nachlaß ist in dem vierten Theile der neuen Ausgabe der Integralrechnung, S. 48 — 59. anzutreffen.

Die gegenwärtige Absicht geht aber mehr dahin, unmittelbar die Integrale zu finden, als auf jenem Wege, der wieder eine Zurückbringung von x nöthig machen kann. Mit den einfachsten Integrationen, deren Gebrauch am häufigsten ist, wird es dienlich seyn, anzufangen, da die allgemeinern auf sie zurückgebracht werden. Die Beweise sind aus dem Artickel, Differentialformel, zu nehmen.

$$49.\ \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}.$$

$$y = \text{Ang. sin}\ \frac{x}{a} + C.$$

Ist $\partial y = -\frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$), so ist

$y = \text{Ang. cos}\ \frac{x}{a} + C$, wo $C = -\frac{1}{2}\pi$ ist, wenn y mit x zugleich $= 0$ seyn soll.

$$50.\ \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa + xx)}},$$

$$y = \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} + x}{\text{const.}} = \log. \frac{aa : C}{\sqrt{(aa + xx)} - x}$$

Es sey $\frac{x}{a} = \text{tang}\ \varphi$, so ist $\sqrt{(aa + xx)} + x$ $= a(\sec\varphi + \text{tang}\varphi) = a\ \text{tang}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ (Goniometrie, 48.), und

$$y = \log. \text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$$

51. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx - aa)}}$.

$$y = \log. \frac{x + \sqrt{(xx - aa)}}{\text{const.}} = \log \frac{aa.C}{x - \sqrt{(xx - aa)}}.$$

Ist $\frac{x}{a} = \sec \varphi$, so ist

$$y = \log. \tang (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$$

52. $\partial y = \frac{a \partial x}{x \sqrt{(aa - xx)}}$.

$$y = \log. \frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{x} + C. = \log \frac{x}{a + \sqrt{(aa - xx)}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{a + \sqrt{(aa - xx)}}.$$

Die dritte Formel für y entsteht durch Halbirung der Summe der beiden ersten.

Ist $\frac{x}{a} = \sin \varphi$, so ist $y = \log. \tang \frac{1}{2} \varphi + C$.

Denn $\frac{a - \sqrt{(aa - xx)}}{x} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} =$ $\tang \frac{1}{2} \varphi$, (Goniometrie. 38.). Der dritte Ausdruck für y verwandelt sich in $\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$.

53. $\partial y = \frac{a \partial x}{x \sqrt{(aa + xx)}}$.

$$y = \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} - a}{x} + C$$

$$= \log. \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)} + a} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{\sqrt{(aa + xx)} - a}{\sqrt{(aa + xx)} + a}.$$

Ist $\frac{x}{a} = \tang \varphi$, so ist $y = \log. \tang \frac{1}{2} \varphi + C$.

54. $\partial y = \frac{a\,\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}}$.

$y = \text{Ang. sec}\,\frac{x}{a} + C = \text{Ang. cos}\,\frac{a}{x} + C.$

55. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

$y = \text{Ang. sin verf.}\,\frac{x}{a} + C = \text{Ang. cos}\,\frac{a-x}{a} + C.$

56. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax+xx)}}$.

$y = \log.\,\frac{a+x+\sqrt{(2ax+xx)}}{\text{const.}}$.

Es sey $\frac{a+x}{a} = \sec\varphi$, so ist $\tang\varphi^2$

$= \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - 1 = \frac{2ax+xx}{a^2}$, und

$y = \log.\,\tang\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$

57. $\partial y = \partial x\sqrt{(a+bxx)}$.

$y = \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{(a+bxx)} + \tfrac{1}{2}\,a\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$.

Erhellt durch die Differentiation, oder aus (59. V.)

58. $\partial y = \partial x\sqrt{(2ax+bx^2)}$.

$y = \frac{a+bx}{2b}\sqrt{(2ax+bx^2)}$

$- \frac{a^2}{2b}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}$.

59. Es sey $\partial y = x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$, wo m, n, p ganze oder gebrochne, positive oder negative Zahlen, seyn mögen. Sind $m-1$ und n gebrochne rationale Zahlen, jene $= \frac{\alpha}{\beta}$, diese $= \frac{\gamma}{\delta}$, so setze man

$x = u^{\beta\delta}$, und es ist $x^{\alpha:\beta} = u^{\alpha\delta}$, und $x^{\gamma:\delta} = u^{\beta\gamma}$; $\partial x = \beta\delta u^{\beta\delta-1}\partial u$, wodurch die Exponenten der eintheiligen Größen alle ganze Zahlen werden. (Vergl. 37.)

Es sollen nun alle Arten gefunden werden, wie das vorgegebene Differential auf die Integration eines einfachern Differentials zurück geführt werden kann, entweder durch Verminderung des Exponenten von x in dem monomischen Factor, oder durch Verminderung des Exponenten von dem Binomium, oder beider.

Man differentiire das Product $x^\alpha(a+bx^n)^\beta = v$, und setze noch zur Abkürzung $a + bx^n = z$, so daß $x^\alpha z^\beta = v$. Es ist

$$\alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + \beta x^\alpha z^{\beta-1}\partial z = \partial v,$$

also, für ∂z seinen Werth gesetzt,

$$\text{I.}\quad \alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + n\beta b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

In dem ersten Gliede des ersten Theils setze man $(a+bx^n)z^{\beta-1}$ für z^β, so ist

$$\text{II.}\quad \alpha a x^{\alpha-1} z^{\beta-1}\partial x + (\alpha+n\beta) b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

In dem zweyten Gliede des ersten Theils (I.) setze man $z - a$ für bx^n, so ist

$$\text{III.}\quad (\alpha+n\beta)x^{\alpha-1} z^\beta \partial x - n\beta a x^{\alpha-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

Hieraus ergeben sich, indem ∂y den einen oder den andern Theil von ∂v bedeuten kann, drey Paare Differentialformeln, deren Integrale einen algebraischen und einen involutorischen (summatorischen) Theil enthalten.

$$\text{I.}\quad \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x = \frac{1}{m} x^m (a+bx^n)^p - \frac{npb}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

$$\text{II. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{n(p+1)b}x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}$$
$$-\frac{m-n}{n(p+1)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\,\partial x.$$

$$\text{III. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^{p+1}$$
$$-\frac{(m+np+n)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\,\partial x.$$

$$\text{IV. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{(m+np)b}x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}$$
$$-\frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,\partial x.$$

$$\text{V. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{m+np}x^m(a+bx^n)^p$$
$$+\frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\,\partial x.$$

$$\text{VI. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = -\frac{1}{n(p+1)a}x^m(a+bx^n)^{p+1}$$
$$+\frac{m+np+n}{n(p+1)a}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}\,\partial x.$$

60. I. Es sey $m-kn-1=\mu-1$, wo k eine ganze positive Zahl ist, so wird nach den Formeln II. oder IV. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p+k}\,\partial x$ oder die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ gebracht. Ist nun $\mu=n$, das ist, $m=(k+1)n$, so ist das Integral algebraisch nach (4.). Der zweyte Theil enthält den Coefficienten $\mu-n=0$.

II. Es sey $m+kn-1=\mu-1$, so wird durch successive Integration nach den Formeln, I. oder III. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p-k}\,\partial x$ oder auf die von

$x^{\mu-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Ist $\mu=n$, so ist in dem ersten Falle (I.) das Integral algebraisch. Ist $\mu+np+n=0$, so ist in III. der Coefficient des zweyten Theils $=0$, und das Integral ist algebraisch, nämlich $=\frac{1}{\mu a}x^{\mu}(a+bx^n)^{p+1}$. In diesem zweyten Falle ist $m=-(k+p+1)n$, oder $\frac{m}{n}+p=-k-1$.

III. Es sey $p+k=q$, und $m+n(q+1)=0$. Nach der Formel VI. wird die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Da $m+n(q+1)=0$, so ist das Integral algebraisch, und $=-\frac{1}{n(q+1)a}x^m(a+bx^n)^{q+1}$. In diesem Falle ist $p=-\left(\frac{m}{n}+k+1\right)$. Die Bedingung ist dieselbe mit der nächst vorher gemachten.

IV. Ist p eine ganze positive Zahl, so wird der binomische Differentialfactor in eine endliche Reihe verwandelt, nach dem binomischen Lehrsatze, und das Differential ist aus einer endlichen Reihe monomischer Potenzen von x zusammen gesetzt, wovon das Integral nach (2.) leicht gefunden wird.

V. Ist p eine ganze negative Zahl, und sind m und n ganze Zahlen, oder werden auf solche gebracht, so wird nach den Formeln II. oder VI. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $\frac{x^{m-p}\partial x}{a+bx^n}$ oder von $\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$ gebracht, welche in (36. 38.) gezeigt ist.

VI. Ist $n=2$ und p ein Bruch von der Form $\pm\frac{2k+1}{2}$ so wird nach den Formeln I. V. ein posi-

tiver Exponent des Binomium, und ein negativer nach den Formeln II. VI. successiv um 1 vermindert, so daß man zuletzt auf ein Differential $\frac{x^r \partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ kommt. Dieses läßt sich durch successive Verminderung des Exponenten r, wenn dieser eine ganze, positive oder negative Zahl ist, auf dieses, $\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$, oder auf $\frac{\partial x}{x\sqrt{(a+bx^2)}}$ bringen, wovon die Integrale in (52. 53. 54.) angegeben sind.

VII. Ist $n = 2r$, und m durch r theilbar, so setze man $x^r = u$, so ist $x^n = u^2$, und $x^m = u^{m:r}$; $m x^{m-1} \partial x = \frac{m}{r} u^{m:r-1} \partial u$, oder $x^{m-1} \partial x = \frac{1}{r} u^{m:r-1} \partial u$. Daher läßt sich in diesem Falle das Differential $x^{m-1}(a+bx^n)^p \partial x$ auf eine der gleich vorher bemerkten Formen bringen.

VIII. Differentialformeln von der Form, $x^m(1-xx)^{p:2} \partial x$, wo p eine ungerade ganze Zahl ist, lassen sich vollständig durch Functionen eines Winkels integriren, die Exponenten m und p, mögen positiv oder negativ seyn, nur sey m wie p eine ganze Zahl. Man setze $x = \sin\varphi$, so ist $\sqrt{(1-xx)} = \cos\varphi$, und $\partial x = \partial\varphi \cos\varphi$, folglich jenes Differential $= \partial\varphi \sin\varphi^m . \cos\varphi^{p-1}$, wovon die Integration in dem vierten Abschnitte dieses Artikels gezeigt wird. Das Differential $x^m(aa-bbxx)^{p:2} \partial x$ läßt sich leicht auf jene Form bringen. Die Differentiale, $x^m(1+xx)^{p:2} \partial x$, und $x^m(xx-1)^{p:2} \partial x$, lassen sich auf ähnliche Art durch Functionen von hyperbolischen Sinus und Cosinus vollständig integriren, da der Sector einer gleichseitigen Hyperbel ist $\int \frac{\partial x}{2\sqrt{(xx+1)}}$, wenn x der hyperbolische

Sinus ist, und $= \int \frac{\partial x}{2\sqrt{(xx-1)}}$, wenn x der hyperbolische Cosinus ist. Es müßten nur für die hyperbolischen Sectoren Tafeln berechnet seyn, wie man sie für Kreissectoren oder Kreisbogen hat.

61. $$\partial y = \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

$$y = \frac{1}{(m-1)b} x^{m-2}\sqrt{(a+bxx)} - \frac{(m-2)a}{(m-1)b}\int \frac{x^{m-3}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

62. Hieraus fließen folgende Formeln, die oft gebraucht werden. Der Kürze wegen sey $\sqrt{(1-xx)} = z$.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \text{Ang. sin } x.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \tfrac{1}{2}\text{Ang. sin } x - \tfrac{1}{2}xz.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\text{Ang. sin } x - \frac{1.3}{2.4}xz - \tfrac{1}{4}x^3z.$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{Ang. sin } x - \frac{1.3.5}{2.4.6}xz - \frac{1.5}{4.6}x^3z - \tfrac{1}{6}x^5z.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\text{Ang. sin } x - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}xz - \frac{1.5.7}{4.6.8}x^3z - \frac{1.7}{6.8}x^5z - \tfrac{1}{8}x^7z.$$

u. s. f. Die Constante ist noch beyzufügen. Soll das Integral mit $x = 0$ anfangen, so ist die Constante $= 0$.

63. Daher ferner folgende Integrale.

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{2}{3}z - \tfrac{1}{3}x^2 z.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{2.4}{3.5}z - \frac{1.4}{3.5}x^2 z - \tfrac{1}{5}x^4 z.$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{2.4.6}{3.5.7}z - \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 z$$
$$- \frac{1.6}{5.7}x^4 z - \tfrac{1}{7}x^6 z.$$

Soll das Integral mit $x = 0$ anfangen, so ist $C = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}$, wenn $2n+1$ der Exponent von x ist. Für $x = 0$ ist $z = 1$.

64. Das Integral, $\int \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$ sey $= 0$ für $x = 0$, so ist für $x = 1$ der Werth desselben $= \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1.}{2.4.6.8\ldots 2n}.\ \tfrac{1}{2}\pi.$

Bey eben dieser Voraussetzung ist der Werth des Integrals,

$$\int \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}.$$

Wird n unendlich groß genommen, so ist es einerley, ob man das eine oder das andere Integral nimmt. Dadurch ist $\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}$, wie in dem Artikel, Cyklometrie, 29; und dem Art. Einschalten, 49.

65. $\partial y = \frac{\partial x}{x^m\sqrt{(a+bxx)}}.$

$$y = \text{Const.} - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{\sqrt{(a+bxx)}}{x^{m-1}}$$
$$- \frac{(m-2)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2}\sqrt{(a+bxx)}}.$$

Das Integral ist algebraisch, wenn m gerade ist, nach (60. II.), und hängt vom Kreise oder von den Logarithmen ab, wenn m ungerade ist.

66. Es sey $x = \sin\varphi$, und $\sqrt{(1-xx)} = z$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(1-xx)}} = C + \log.\tan\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{x^2} + \tfrac{1}{2}\log.\tan\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{z}{x^4} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z}{x^2}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\log.\tan\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7\sqrt{(1-xx)}} = C - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{z}{x^6} - \frac{1.5}{4.6}\cdot\frac{z}{x^4}$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\log.\tan\tfrac{1}{2}\varphi.$$

u. s. f.

67. $$\int \frac{\partial x}{x^2\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{x^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6\sqrt{(1-xx)}} = C - \frac{1}{5}\cdot\frac{z}{x^5} - \frac{1.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x^3}$$
$$- \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{z}{x}.$$

u. s. f.

68. Es ist, wenn $\sqrt{(x-1)}=u$ gesetzt wird,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(xx-1)}} = \text{Ang. cos}\,\frac{a}{x}, \text{ aus (54.).}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(xx-1)}} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Ang. cos}\,\frac{a}{x},$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(xx-1)}} = +\frac{1}{4}\cdot\frac{u}{x^4} + \frac{1.3.}{2.4}\cdot\frac{u}{x^2}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\,\text{Ang. cos}\,\frac{a}{x}.$$

u. s. f.

69. $$\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{(m+1)b}\cdot$$
$$x^{m-2}(a+bxx)^{\frac{3}{2}} - \frac{(m-2)a}{(m+1)b}\int x^{m-3}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x.$$

Für den involutorischen Theil dienen die Formeln,

$$\int x\partial x\sqrt{(a+bxx)} = \frac{1}{3b}(a+bxx)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int \partial x\sqrt{(a+bxx)} = \tfrac{1}{2}x(a+bxx)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

Das Integral in der zweyten Formel ist in einer der Formeln, 49. 50. 51. enthalten. Auf das eine oder das andere jener beiden Integrale kommt man durch die successive Verminderung des Exponenten von x.

Es ist auch $\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x$

$$= \frac{1}{m+1}x^m(a+bxx)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{m+1}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bxx)^{\frac{1}{2}}},$$

wovon der zweyte Theil durch die Formel in (61.) gefunden wird.

70. $\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^m}$.

$$y = C - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{(a+bxx)^{\frac{3}{2}}}{x^{m-1}}$$
$$- \frac{(m-4)b}{(m-1)a} \int \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^{m-2}}.$$

71. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}$.

$$y = C + \frac{1}{mb} x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)}$$
$$- \frac{(2m-1)a}{mb} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

72. $\partial y = \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(2ax+bxx)}}$.

$$y = C - \frac{1}{(2m-1)a} \cdot \frac{\sqrt{(2ax+bxx)}}{x^m}$$
$$- \frac{(m-1)b}{(2m-1)a} \int \frac{\partial x}{x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

73. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+xx)}}$.

$$y = \log(b+x+\sqrt{(a+2bx+xx)}) + C.$$

Man setze $x = u - b$, so wird

$\partial y = \frac{\partial u}{\sqrt{(uu+a-bb)}}$. Davon ist das Integral in (50.) oder (51.) angegeben, nach dem a größer oder kleiner als bb ist. Setzt man darin für u seinen Werth durch x zurück, so erhält man die hier aufgestellte Integralformel.

Oder man setze, um die Formel rational zu machen, $xx + 2bx + a = (x+z)^2$, so ist $x = \frac{zz-a}{2(b-z)}$, und $x + z = \frac{2bz - zz - a}{2(b-z)}$. Ferner $\partial x = \frac{2bz - zz - a}{2(b-z)^2}\partial z$. Also ist $\partial y = \frac{\partial z}{b-z}$, und $y = \log \frac{1}{b-z}$. Für z werde dessen Werth aus der Gleichung, $zz + 2xz = 2bx + a$, gesetzt, so erhält man dieselbe Integralformel für y.

$$74.\quad \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a + 2bx - xx)}}.$$

$$y = \text{Ang. sin}\,\frac{x-b}{\sqrt{(a+bb)}} + C.$$

$$\text{oder}\quad y = \text{Ang. cos}\,\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}} + C.$$

Denn man setze $x = u + b$, so ist $\partial y = \frac{\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, und $y = \text{Ang. sin}\,\frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$ aus (49.). Setzt man $x = b - u$, so ist auch $\partial y = \frac{-\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, also $y = \text{Ang. cos}\,\frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Constanten in den beiden Werthen von y sind verschieden. Es ist nämlich nach der ersten Formel, $y = C - \text{Ang. sin}\,\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$ $= C - \frac{1}{2}\pi + \text{Ang. cos}\,\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Constan-

te in der zweyten Formel werde durch die Bezeichnung C' unterschieden, so ist $C' = C - \frac{1}{2}\pi$, und $C - C' = \frac{1}{2}\pi$.

75. Um die Formel rational zu machen, setze man $a + 2bx - xx = (p + x)(q - x)$, so ist $pq = a$; $q - p = 2b$. Ist a positiv, so sind p und q mögliche Größen (Gleichung, 34.); ist a negativ, so ist p negativ zu nehmen, so daß $pq = a$; $q + p = 2b$, daher (nach Gleichung 36.) $a < bb$ seyn muß. In dem Falle, da $a > bb$ ist, hätte die Function $a - 2bx + xx$ keine andere als positive Werthe (Gleichung, 46.), die Function $-a + 2bx - xx$ also durchaus negative, und das Differentialverhältniß $\partial y : \partial x$ wäre für jeden Werth von x ein unmögliches.

Man setze $\frac{p + x}{q - x} = zz$, so ist $x = \frac{qzz - p}{1 + zz}$,

und $\partial x = \frac{2(p + q)z\partial z}{(1 + zz)^2}$. Da

$\sqrt{(a + 2bx - xx)} = (q - x)z = \frac{(p + q)z}{1 + zz}$ ist,

so ist $\partial y = \frac{2\partial z}{1 + zz}$, und

$y = 2$ Ang. tang z, das ist

$$y = 2 \text{ Ang. tang } \frac{\sqrt{(p + x)}}{\sqrt{(q - x)}} + C,$$

oder $y = \text{Ang. cos } \frac{q - p - 2x}{p + q} + C.$

Es ist nämlich, wenn φ den Winkel zu der Tangente $\frac{\sqrt{(p + x)}}{\sqrt{(q - x)}}$ bezeichnet, $\sec \varphi^2 = \frac{p + q}{q - x}$;

$\cos \varphi^2 = \frac{q - x}{p + q}$; $\cos 2\varphi = 2 \cos \varphi^2 - 1$

$= \frac{q - p - 2x}{p + q}$, (Goniometrie, 36.).

Da $pq = a$; $q - p = 2b$; so ist $(q+p)^2 = (q-p)^2 + 4pq = 4b^2 + 4a$. Dadurch wird erhalten $y = \text{Ang. cos} \frac{b-x}{\sqrt{(a+bb}}$, wie nach der ersten Auflösung.

$$76.\quad \partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(xx+2bx-aa)}}.$$

$$y = \text{Ang. sin} \frac{bx-aa}{cx} + C.$$

wo $c = \sqrt{(aa+bb)}$ ist.

Das Integral folgt aus der Vergleichung der Differentialformel in Th. I. S. 873. Nr. 36. mit der vorgegebenen.

Es ist auch $y = \text{Ang. cos} \frac{aa-bx}{cx} + C$,

wo aber die Constante eine andere als in der erstern Formel ist. Denn in dieser setze man $C = C' + \frac{1}{2}\pi$, so ist

$$y = C' + \tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin} \frac{aa-bx}{cx} =$$

$$C' + \text{Ang. cos} \frac{aa-bx}{cx}.$$

$$77.\quad \partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(xx+2bx+aa)}}.$$

$$y = \log \frac{\pm a\sqrt{(xx+2bx+aa)} \mp bx \mp aa)}{cx} + C,$$

wo $cc = aa - bb$, oder $cc = bb - aa$ ist, jenes für das obere Vorzeichen, dieses für das untere.

I. Denn man setze $\frac{bx+aa}{cx} = z$, so ist

$\partial z = -\frac{aa\partial x}{cxx}$, und $\sqrt{(zz+1)} =$

$\frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn $cc+bb=aa$ ist.

Es ist also $\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz+1)}}$, und $y = \log(\sqrt{(zz+1)}-z)$, (50.), da überhaupt $\log\frac{\alpha}{\beta} = -\log\frac{\beta}{\alpha}$ ist. Setzt man für z desselben Werth, so entsteht die angegebene Formel.

II. Es bleibe $z = \frac{bx+aa}{cx}$, so ist

$\sqrt{(zz-1)} = \frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn hier $bb-cc=aa$ genommen wird. Nun ist

$\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz-1)}}$, und daher $y = \log(z-\sqrt{(zz-1)})$ aus (51.). Setzt man hier für z desselben Werth, so wird das angegebene Integral mit den untern Vorzeichen erhalten.

78. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(aa+2bx-xx)}}$.

$$y = \log.\frac{aa+bx-a\sqrt{(aa+2bx-xx)}}{cx},$$

wo $cc=aa+bb$ ist.

Die Rechnung ist der in (77.) ähnlich.

79. Durch Hülfe der Formeln (73 — 78.) läßt sich das Integral von $\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}}$ finden.

Denn es sey $\sqrt{(a+2bx+cxx)} = R$, und $y = x^{m-1}R$, so ist

$$\partial y = (m-1)x^{m-2}R\partial x + x^{m-1}\partial R,$$

oder

$$\partial y = \frac{(m-1)x^{m-2}R^2\partial x}{R} + \frac{(b+cx)x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Für R^2 werde dessen Werth gesetzt, so ist

$$\partial y = [(m-1)ax^{m-2}\partial x + (2m-1)bx^{m-1}\partial x + mcx^m\partial x] : R,$$

und

$$\int\frac{cx^m\partial x}{R} = \frac{1}{m}x^{m-1}R - \frac{(m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R} - \frac{(2m-1)b}{m}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Das Integral $\int\frac{x^m\partial x}{R}$ wird also aus den Integralen $\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R}$ und $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}$, gefunden. Für $m = 1$, sind diese aus den vorher gefundenen Formeln bekannt. Dadurch wird das $\int\frac{x\partial x}{R}$ gefunden. Aus diesem und $\int\frac{\partial x}{R}$ wird das $\int\frac{x^2\partial x}{R}$ hergeleitet, und so weiter für alle folgende ganze Exponenten m.

Aus dem entwickelten Werthe von ∂y läßt sich auch das $\int\frac{\partial x}{x^m R}$ herleiten.

Euler hat nach einer andern Methode dieses Integral zu finden gelehrt, in den Actis Acad. Petrop. T. VI. P. II.

80. Die in der Form $\int x^{m:2}(a+bx+cxx)^{p:2}\partial x$ begriffenen Integrale, wo m und p ungerade, positive oder negative, ganze Zahlen bedeuten, hängen von der Rectification eines oder mehrerer Kegelschnitte ab. In einigen

Fällen hängt auch das Integral von

$$\frac{\partial x}{x^n \sqrt{(a + bx + cx^2 + \partial x^3)}}$$ davon ab. Sonst ist es ein Integral von einer höhern transscendenten Gattung, als jene sind, die man irrational transscendente von der logarithmischen oder circularen Gattung nennen möchte. Umständlich handelt von diesen Integrationen d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin. T. II. a. 1746. und T. IV. a. 1748.

81. Über die Integration der Formel

$$\frac{P \partial x}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}}$$ haben La Grange (Mém. de l'Acad. de Turin, 1784, 85.) und Le Gendre Untersuchungen angestellt. Die Methode des letztern, welche in einer einzeln gedruckten Abhandlung sur les transcendantes elliptiques vorgetragen ist, hat La Croix in seinem Werke über Differential- und Integralrechnung Th. II. S. 52 f. f. mitgetheilt. Die Vergleichung der Functionen, die unter der gedachten Form enthalten sind, für verschiedene veränderliche Größen, wie daselbst x ist, hat Euler entdeckt, in den Novis Comment. Act. Petrop. T. XII. und sie daraus in das Werk von der Integralrechnung P. I. Sect. II. cap. 6. übergetragen. Sie gehört zu der Lehre von den Differentialgleichungen.

82. Wenn der Differentialfactor die Form

$\partial x \left(\frac{a + bx^n}{e + fx^n}\right)^p$ hat, so muß der Zähler, $(a + bx^n)^p$, in eine Reihe aufgelöset werden, wodurch eine Reihe Differentiale von der Form $\frac{x^m \partial x}{(e + fx^n)^p}$ erhalten wird. Dies ist z. B. der Fall bey der Rectification der Ellipse. Hier ist das Differential des Bogens

$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(1 - e^2 x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ wo x die Abscisse von dem

Mittelpuncte aus genommen, und e die Excentricität, für die halbe große Axe als Einheit, ist. So verfährt man auch mit dem Differential $\frac{\partial x}{(a+bx^n)^p(e+fx^r)^q}$, wo man die Potenz $(a+bx^n)^{-p}$ oder $(e+fx^r)^{-q}$, in eine Reihe auflöset. Eine solche Formel kommt bey der Bestimmung der Zeit des Schwunges eines einfachen Pendels vor, nämlich $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)(aa-xx)}}$, wo a und x die Sinus der halben Winkel sind, welche das Pendel beym Anfange des Falles, und in irgend einem Theile seines Weges mit der Verticalen macht. Der Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ wird hier in eine Reihe verwandelt.

Es kann auch dienlich seyn, in dieser so wie in der ersten Form beide Potenzen in eine Reihe aufzulösen, und den ganzen Differentialfactor durch die Multiplication beider Reihen in eine einzige zu verwandeln. Für die gemeine elastische Linie ist die Differentialgleichung zwischen den Coordinaten diese:

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(c^2-x^2)^2)}}, \text{ oder}$$

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^2+c^2-x^2)(a^2-c^2+x^2)}},$$ wo x der Abstand eines Punctes der Curve von der Richtung der spannenden Kraft ist, oder die y als Abscissen in dieser Richtung genommen werden.

83. Wenn das Integral von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ weder algebraisch ist, noch sich auf Logarithmen oder Winkelfunctionen bringen läßt, so macht es eine eigene Art von transscendenten Functionen aus. In solchen Fällen ist der Differentialfactor in eine Reihe zu verwandeln, bey welcher man die Einrichtung so zu treffen hat, daß sie con-

vergent sey, auf ähnliche Art, wie man es bey Logarithmen und Winkeln möglich gemacht hat.

84. Man kann zu diesem Zwecke erstlich die Potenz des Binomium in eine Reihe verwandeln, wobey man entweder a oder bx^n zum ersten Gliede des Binomium nimmt. Geschieht jenes, so ist die Reihe der Exponenten: $0, n, 2n, 3n$, etc. Nimmt man bx^n zum ersten Gliede, so ist die Reihe der Exponenten: $np, np-n, np-2n, np-3n$, etc. Das Differential ∂z wird dadurch in eine Reihe von Potenzen der x verwandelt, deren Exponenten den Unterschied $\pm n$ haben. Das Integral wird ohne Mühe nach (2.) gefunden. Ist p ein Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und a oder b negativ, so kann man diese nicht zum ersten Gliede des Binomium setzen, weil dadurch unmögliche Größen entstanden.

85. Die involutorischen Ausdrücke des Integrals III. IV. in 59. geben noch eine andere Form der Reihen für dasselbe, welche auch schon oben in besondern Fällen gebraucht sind. Die Potenz des Binomium bleibt in allen Gliedern der Reihe als Factor.

I. In der Integralformel III. setze man $p-1$ statt p, so ist

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^p - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.})\,(a+bx^n)^p,$$

da die Exponenten der Potenzen von x in dem involutorischen Theile jedesmahl um n zunehmen. Es erhellt leicht, daß

$$A = \frac{1}{ma}; \quad B = -\frac{(m+np)b}{(m+n)a} A;$$

$$C = -\frac{(m+n+np)b}{(m+2n)a} B;$$

$$D = -\frac{(m+2n+np)b}{(m+3n)a} C;$$

etc.

II. In der Integralformel IV. setze man auch $p-1$ statt p, so ist, wenn zur Abkürzung $a+bx^n = u$ gesetzt wird,

$$\int x^{m-1} u^{p-1} \partial x = \frac{1}{(m-n+np)b} x^{m-n} u^p - \frac{(m-n)a}{(m-n+np)b} \int x^{m-n-1} u^{p-1} \partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

so erhellt, wie vorher, daß

$$A = \frac{1}{(m-n+np)b};$$

$$B = -\frac{(m-n)a}{(m-2n+np)b} A;$$

$$C = -\frac{(m-2n)a}{(m-3n+np)b} B;$$

$$D = -\frac{(m-3n)a}{(m-4n+np)b} C;$$

etc.

Die Coefficienten bilden eine Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner aus Factoren in arithmetischer Fortschreitung bestehen, so daß die Anzahl der Factoren

der Stellenzahl nach dem ersten A gleich ist, verbunden mit den Gliedern der geometrischen Reihe, $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}$, etc. und dem ersten Gliede A.

In Eulers Integralrechnung, T. I. §. 159. sind diese Reihen nach einer andern Methode gefunden. Euler differentiirt das Product $(a + bx^n)^p z$, und setzt es dem $x^{m-1}(a + bx^n)^{p-1} \partial x$ gleich. Für z nimmt er eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten an, setzt diese in die erhaltene Differentialgleichung, und bestimmt nun aus den Gleichungen, welche die Coefficienten der zusammengesetzten Reihe geben, diejenigen der angenommenen.

Zu merken ist, daß die durch die eine oder die andere Methode erhaltenen Reihen kein vollständiges Integral geben, da die Constante fehlt. Wie diese allgemein zu bestimmen sey, zeigt Euler a. a. O. §. 164. Er findet sie $= \alpha a^p$, wo α eine willkührliche Größe ist.

86. La Grange hat eine besondere Methode angegeben, das Integral einer Reihe zu finden, worin ein Differential aufgelöset ist, so daß es von einem einfachen Integral abhange. Die Reihe sey

$$(A + A'U + A''U^2 + A'''U^3 + \text{etc.})V\partial x,$$

wo U und V Functionen von x, und A, A', A'', etc. gegebene Größen sind. Man nehme neben dieser Reihe noch diese an:

$$(1 + aU + a^2U^2 + a^3U^3 + \text{etc.})V\partial x,$$

worin die Coefficienten eine geometrische Reihe ausmachen. Diese Reihe entsteht durch die Entwicklung der gebrochnen Function $\frac{V\partial x}{1 - aU}$. Das Integral dieser Function besteht also aus allen einzelnen Integralen der Theile jener Reihe, welches so bezeichnet wird:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0 \int V\partial x + a\int UV\partial x + a^2\int U^2 V\partial x$$
$$+ a^3\int U^3 V\partial x + \text{etc.}$$

Kann man nun das $\int \frac{V\partial x}{1-aU}$ angeben, so sey dieses $= X$. Dieses werde nicht nach den Potenzen von x, sondern nach Potenzen von a in eine Reihe geordnet, und die Function X oder jenes Integral werde nach dieser Form so bezeichnet:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0 X1 + aX2 + a^2 X3 + a^3 X4$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Functionen $X1$, $X2$, $X3$, $X4$, etc. sind von a ganz unabhängig, da sie kein a enthalten, sondern hängen bloß von V und U ab. Nun ist durch Vergleichnng mit dem vorher stückweise angegebenen Integral

$$\int V\partial x = X1 \;;\quad \int UV\partial x = X2;$$
$$\int U^2 V\partial x = X3;\quad \int U^3 V\partial x = X4;$$

u. s. f.

Folglich werden nun diese Integrale durch die Functionen $X1$, $X2$, etc. bekannt; daher wird auch das Integral der zuerst vorgegebenen Reihe durch die Integrale ihrer Theile gefunden.

Diese Methode hat La Grange in den Mém. de Turin 1784—85. vorgetragen, woraus sie La Croix in seiner Integralrechnung §. 417. 418. mittheilt. Ich habe das Verfahren einleuchtender darzustellen gesucht. Die beiden Beispiele, welche La Croix von der Methode giebt, sind aber nicht geschickt, ihre Brauchbarkeit zu zeigen. Bey dem zweyten ist eine Verwirrung vorgegangen, die durch die in den Verbesserungen angezeigte Veränderung noch verschlimmert wird.

La Croix giebt eben daselbst einen Abriß der Methode, welche La Grange angewandt hat, das Integral der

Formel $\frac{P\partial x}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$ zu finden, wenigstens durch eine sichere Annäherung, mittelst einer oder mehrerer Umwandelungen. Er rühmt sie als eine der meisterhaftesten.

87. Aus Eulers handschriftlichen Nachlaß ist in dem vierten Theile seiner Integralrechnung eine Abhandlung eingerückt, über die Auflösung der Integralformel, $\int x^{m-1}\partial x(\Delta+x^n)^\lambda$ in eine für jeden Fall convergirende Reihe. Es ist Δ eine unveränderliche Größe. Die Methode verdient wegen ihrer Einfachheit hier angeführt zu werden.

Der Werth des Integrals soll sich von $x=0$ bis zu $x=a$ erstrecken, das heißt, es soll $=0$ seyn, wenn $x=0$ ist, und der Werth wird gesucht, den es für $x=a$ erhält.

Man verwandle die Formel $\Delta+x^n$ in diese, $(\Delta+a^n)(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n})$, so wird die vorgegebene Integralformel diese:

$$(\Delta+a^n)^\lambda\int x^{m-1}\partial x(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n})^\lambda.$$

Die Binomialpotenz entwickelt ist $=$

$$1-\frac{\lambda}{1}\left(\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)+\frac{\lambda.\lambda-1.}{1.2}\left(\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^2-\text{etc.}$$

Dadurch ist die geforderte Integration auf die von der Formel $x^{m-1}\partial x(a^n-x^n)^\theta$ gebracht. Nun sey das Integral davon gefunden, und werde durch V bezeichnet, so soll daraus das $\int x^{m-1}\partial x(a^n-x^n)^{\theta+1}$ hergeleitet werden. Dazu dient die Formel V. in 59.

Nach dieser ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{1}{m+n(\theta+1)}\, x^m(a^n-x^n)^{\theta+1}$$

$$+\frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta}\partial x.$$

Da das Integral für $x=a$ gesucht wird, so ist der erste Theil $=0$, und es ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\, V.$$

$$\text{Für } \theta=0 \text{ ist } V = \frac{n}{m(m+n)}\, a^{m+n},$$

also ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^2\partial x = \frac{n.2n}{m.m+n.m+2n.}\, a^{m+2n}.$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^3\partial x = \frac{n.2n.3n}{m.m+n.m+2n.m+3n.} \times a^{m+3n}$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^4\partial x = \frac{n.2n.3n.4n}{m.m+n\ldots m+4n.} \times a^{m+4n}.$$

u. s. f.

Hieraus ergiebt sich nun das Integral

$$(\Delta+a^n)^\lambda \int x^{m-1}\partial x\left(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^\lambda,$$

für $x=a$, nach Versetzung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{a^m}{m}$, folgendergestalt:

$$\frac{a^m}{m}(\Delta + a^n)^\lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda n}{m+n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right) \right.$$

$$+ \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda - 1)n}{m+2n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right)^2$$

$$\left. - \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda-1)n}{m+2n} \cdot \frac{(\lambda-2)n}{m+3n}\left(\frac{a^n}{\Delta + a^n}\right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

Setzt man hier x statt a, so erhält man den Werth des Integrals so, daß es mit $x = 0$ zugleich anfängt.

Euler macht hievon noch Anwendungen auf einige künstliche Summirungen von Reihen.

88. Durch dieses Verfahren läßt sich nun auch für das $\int x^{m-1} \partial x \sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}$, oder das $\int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}}$, immer eine convergirende Reihe finden, da man die trinomische Größe unter dem Wurzelzeichen auf eine binomische von der Form $a^4 + x^4$ bringen kann. Dieses Verfahren wird leichter, als das von La Grange gebrauchte seyn.

89. Man sieht hier, wie die von Kramp so genannten numerischen Facultäten mit Integrationsformeln zusammen hangen. Eine Facultät wie $\frac{r.\,r+n.\,r+2n.\,\text{etc.}}{m.\,m+n.\,m+2n.\,\text{etc.}}$ entsteht durch die Division von $\int x^{m-1}(a^n - x^n)^p \partial x$ durch $\int x^{r-1}(a^n - x^n)^p \partial x$.

90. Zu den in (82) angeführten Integrationsmethoden dienen folgende sehr nützliche Beyspiele.

I. Das Integral, $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}} = X$, zu finden, für den Werth $x = a$, wenn es für $x = 0$ anfängt.

Man entwickele den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, oder die Potenz $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nach binomischer Lehrsatz, 13. IV. und setze sie zur Abkürzung $= 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. so ist

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \alpha \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$+ \beta \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \gamma \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \text{etc.}$$

Diese Integrale sind $= 0$ für $x = 0$, wenn keine Constante zugesetzt wird, und für $x = a$ ist, nach (64.).

$$X = (1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 a^4 + \gamma^2 a^6 + \delta^2 a^8 + \text{etc.}) . \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man diese Größe $= A$, die Länge eines einfachen Pendels $= r$, die Höhe des freyen Falles in einer Secunde $= g$, so ist die Zeit eines Schwunges (eines Hin- oder Herganges) $= 2A\sqrt{\frac{r}{2g}}$. Die Bedeutungen von a und x für diese Anwendung sind in (82.) angegeben.

II. Das Integral, $\frac{\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} \partial x = X$, zu finden, für $x = 1$, wenn es für $x = 0$ anfängt.

Es sey wiederum $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. so ist $\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \alpha e^2 x^2 - \frac{1}{3}\beta e^4 x^4 - \frac{1}{5}\gamma e^6 x^6 - \frac{1}{7}\delta e^8 x^8 -$ etc. Also

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \alpha e^2 \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$- \tfrac{1}{3}\beta e^4 \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \tfrac{1}{5}\gamma e^6 \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \text{etc.}$$

Diese Integrale sind $= 0$ für $x = 0$, wenn Const. $= 0$ genommen wird, und für $x = 1$ ist

$$X = (1 - \alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{3}\beta^2 e^4 - \tfrac{1}{5}\gamma^2 e^6 - \tfrac{1}{7}\delta^2 e^8 - \text{etc.})\tfrac{1}{2}\pi.$$

Dieser Werth von X ist der elliptische Quadrant für die halbe große Axe = 1, und Excentricität = e.

III. Classe, worin der Differential-Factor eine logarithmische oder exponentielle Function ist.

91. Die einfachsten Formen eines Differential-Factors von der hier angezeigten Beschaffenheit sind:

$$X \log x\,;\ \frac{\partial X}{\partial x};\ (\log x)^n\,;\ \frac{X}{(lx)^n}\,;\ a^x X\,;\ x^{nx}.$$

92. $\partial y = X \partial x \log x.$

Zufolge der Bemerkung in der Einleitung zu dem gegenwärtigen Artikel ist

$$y = \log x.\ X\partial x - \int(\int X \partial x).\frac{\partial x}{X},$$

da $\partial . \log x = \frac{\partial x}{x}$ ist. Oder, wenn zur mehrern Deutlichkeit gesetzt wird, $\int X \partial x = Z$,

$$y = Z \log x - \int \frac{Z \partial x}{x}.$$

Ist z eine Function von x, die keine Logarithmen enthält, so ist die Integration auf einen der Fälle der beiden ersten Classen gebracht. Sonst muß man gleich von Anfang das Differential in eine Reihe auflösen.

93. $\partial y = x^n \partial x \log x.$

$$y = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\log x - \frac{1}{n+1}) + \text{Const.}$$

94. $\partial y = \frac{\partial x}{1-x} . \log x$

$$y = l \frac{1}{1-x} . lx - x - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{25}x^5 - \text{etc.}$$

Hier ist $Z = \int \frac{\partial x}{1-x} = -\log.(1-x)$

und $\frac{Z\partial x}{x} = -\frac{\partial x}{x}\log.(1-x)$. Es ist aber

$\log.(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.})$

(s. Logarithmen, oder Differenzenrechnung 24. wenn daselbst $x = 1$; $u = -x$ gesetzt wird); also

$\frac{Z\partial x}{x} = (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.})\partial x$, und

$\int \frac{Z\partial x}{x} = x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \text{etc.}$

So wird der angegebene Werth von y erhalten, wenn nur noch $-\log.(1-x)$ mit $+\log.\frac{1}{1-x}$ vertauscht wird.

Für $x = 0$ ist das Integral $= 0$. Denn $\log\frac{1}{1-x}$, welcher alsdenn $= 0$ ist, macht das Product $\log\frac{1}{1-x}.\log.x = 0$, wenn gleich $\log.x$ unendlich groß ist. Der Logarithme einer unendlich großen, so wie einer unendlich kleinen Zahl ist mit $\frac{1}{0}$ nicht vergleichbar, und wird durch die Division mit $\frac{1}{0}$ Null, s. Logarithmen.

95. $\partial y = \partial P(lx)^n$, wo P eine Function von x ist.

$$y = P(lx)^n - nQ(lx)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)R(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2)S(lx)^{n-3}$$
$$+ \text{etc.}$$

wo $Q = \int \frac{P\partial x}{x}$; $R = \int \frac{Q\partial x}{x}$; $S = \int \frac{R\partial x}{x}$; u.s.f.

Denn es ist (nach der angeführten Formel)

$$y = P(lx)^n - \int P\partial(lx)^n.$$

Da $\partial(lx)^n = n(lx)^{n-1}.\ \frac{\partial x}{x}$,

so ist $y = P(lx)^n - n\int \frac{P\partial x}{x}(lx)^{n-1}$.

Man setze $\frac{P\partial x}{x} = \partial Q$, so ist auf gleiche Art

$$\int \partial Q(lx)^{n-1} = Q(lx)^{n-1} - (n-1)\int \frac{Q\partial x}{x}(lx)^{n-2}.$$

Wiederum setze man $\frac{Q\partial x}{x} = \partial R$, so ist

$$\int \partial R(lx)^{n-2} = R(lx)^{n-2} - (n-2)\int \frac{R\partial x}{x}(lx)^{n-3}.$$

Durch diese fortgesetzten Entwickelungen und Substitutionen wird das angegebene Integral erhalten.

96. $\partial y = x^{m-1}(lx)^n \partial x.$

$$y = x^m\left(\frac{(lx)^n}{m} - \frac{n(lx)^{n-1}}{m^2} + \frac{n.n-1.(lx)^{n-2}}{m^3} - \frac{n.n-1.n-2.(lx)^{n-3}}{m^4} + \text{etc.}\right) + C.$$

Leibnitz fand dieses Integral, s. Commerc. epist. Leibnitii et Bernoullii T. I. p. 8.

97. $\partial y = \frac{X\partial x}{(lx)^n}.$

$$y = \text{Const.} - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \text{etc.}$$

wo $P = \frac{\partial(Xx)}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial(Px)}{\partial x}$; u. s. f.

Man kann diese Formel auf gleiche Weise behandeln, wie die in (95.), aber auch auf eine andere Art, wodurch das angegebene Integral erhalten wird. Man drücke die Differentialformel so aus: $Xx. \frac{\partial x}{x(lx)^n}$, und bezeichne das $\int \frac{\partial x}{x(lx)^n}$ durch u, so ist:

$$\int Xx.\partial u = Xx.u - \int u\,\partial(Xx).$$

Es ist $u = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$; also ist

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\partial(Xx)}{(lx)^{n-1}}.$$

Setzt man $\partial(Xx) = P\partial x$, so ist

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{P\partial x}{(lx)^{n-1}}.$$

Der zweyte Theil ist das Integral einer Differentialformel von derselben Gestalt als die vorgegebene ist, und wird auf gleiche Art auf das $\int \frac{Q\partial x}{(lx)^{n-2}}$ gebracht. So wird fortgefahren, bis daß man auf das Integral $\int \frac{V\partial x}{lx}$ kommt, welches nicht einfacher dargestellt werden kann.

98. $\partial y = \frac{x^{m-1}\partial x}{(lx)^n}$.

$$y = C - \frac{x^m}{(n-1)(lz)^{n-1}} - \frac{mx^m}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$

$$- \frac{m^2 x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots$$

$$+ \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{lx}.$$

In dem letzten Theil, der Ergänzung, setze man $x^m = z$, so verwandelt sich $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{lx}$ in $\int \frac{\partial z}{lz}$. Dieses ist eine eigene Gattung transscendenter Functionen.

99. $\partial y = a^x X \partial x$.

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q$$

$$- \frac{1}{(la)^4} a^x R + \text{etc.}$$

wo $P = \frac{\partial X}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$; $R = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

u. s. f.

Denn da $\partial . a^x = a^x \partial x . la$ (Differentialformeln, 15.) so ist $\int a^x \partial x = \frac{a^x}{la}$ und es ist nach der bisher gebrauchten Formel,

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la} \int a^x \partial x.$$

Setzt man $\partial X = P \partial X$, so ist

$$\int a^x P \partial x = \frac{1}{la} a^x P - \frac{1}{la} \int a^x \partial P,$$

$$\text{also } y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P$$
$$+ \frac{1}{(la)^2} \int a^x \partial P.$$

Auf gleiche Art werden die folgenden Theile des Integrals gefunden.

100. I. $\partial y = a^x x^n \partial x$, wo n eine ganze positive Zahl ist.

$$y = a^x \left(\frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n.n-1.x^{n-2}}{(la)^3} \right.$$
$$\left. - \frac{n.n-1.n-2.x^{n-3}}{(la)^4} + \text{etc.} \right) + C.$$

Zufolge der allgemeinen Formel (99.)

$$\text{II. } \partial y = \frac{a^x \partial x}{x^n}.$$

$$y = C - \frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x \partial x}{x^{n-1}}.$$

Hier ist die Differentialformel in die Factoren a^x und $\frac{\partial x}{x^n}$ zerlegt, da sie für $a^x x^n \partial x$ in $a^x \partial x$ und x^n zerlegt worden. Die fortgesetzte Entwickelung des involutorischen Integrals führt zuletzt auf $\int \frac{a^x \partial x}{x}$, welches nur durch eine Reihe dargestellt werden kann.

101. $\partial y = \frac{a^x \partial x}{x}$.

$$y = C + lx + \frac{x la}{1} + \frac{x^2 (la)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (la)^3}{1.2.3.3}$$
$$+ \frac{x^4 (la)^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.}$$

Die Exponentialgröße a^x wird in die Reihe,

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

aufgelöset. (Logarithmen, oder auch Differenzenrechnung, 24. 25. *) Diese Reihe mit $\frac{\partial x}{x}$ multiplicirt, und darauf integrirt, giebt die für y.

102. In dem jetzt gefundenen Integral nehme man für a die Basis der natürlichen Logarithmen, e, so ist $le = 1$, und

$$\int \frac{e^x \partial x}{x} = C + lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Nun sey $e^x = z$, die Zahl, deren natürlicher Logarithme $= x$ ist, oder $x = \log z$; so ist $\partial x = \frac{\partial z}{z}$ und $\frac{e^x \partial x}{x} = \frac{\partial z}{lz}$, also

$$\int \frac{\partial z}{lz} = C + llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lz)^2}{1.2}$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Für $z = 1$ ist das Integral unendlich groß, weil $lz = l1 = 0$, und $l0 = \infty$ oder unendlich ist.

*) Man bezeichne den Logarithmen von $1 + u$ in dem System, dessen Basis $= a$ ist, durch $L(1+u)$, in dem natürlichen durch $l(1+u)$, so ist in Differenzenrechnung (24.), $x = 1$; $lx = 0$, und, wenn die in c multiplicirte Reihe U heißt, $L(1+u) = cU$; und $l(1+u) = U$, also $c = L(1+u) : l(1+u)$. Setzt man $1 + u = a$, so wird $c = \frac{1}{la}$.

103. $\partial y = x^{nx} \partial x$.

$$y = x\left(1 - \frac{nx}{2^2} + \frac{n^2x^2}{3^3} - \frac{n^3x^3}{4^4} + \frac{n^4x^4}{5^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{nx^2 lx}{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{nx}{3^2} + \frac{n^2x^2}{4^3} - \frac{n^3x^3}{5^4} + \frac{n^4x^4}{6^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{n^2x^5(lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3} - \frac{nx}{4^2} + \frac{n^2x^2}{5^3} - \frac{n^3x^3}{6^4} + \frac{n^4x^4}{7^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{n^3x^4(lx^3)}{1.2.3}\left(\frac{1}{4} - \frac{nx}{5^2} + \frac{n^2x^2}{6^3} - \frac{n^3x^3}{7^4} + \frac{n^4x^4}{8^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Das Integral fängt für $x = 0$ auch an. Dieses Integral wird dadurch gefunden, daß die Exponentialgröße x^{nx} in eine Reihe verwandelt wird, nämlich,

$$x^{nx} = 1 + nx\,lx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{1.2.3}$$

$$+ \frac{n^4x^4(lx)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Hiezu wird das Differential ∂x als Factor gesetzt, worauf die Integration nach (96.) vorgenommen wird. Die Particularreihen werden dann nach den Potenzen von lx zerlegt, und zu neuen Reihen gebildet.

Man sehe den Briefwechsel zwischen Leibnitz und Joh. Bernoulli, Th. I. S. 8. 12. 20.

104. Das Integral (103.) erhält für $x = 1$ den Werth

$$1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \frac{n^4}{5^5} - \text{etc.}$$

eine durch ihre Form merkwürdige Reihe. Man sehe Io. Bernoullii Opera T. I. p. 184.

105. Von diesen Integrationen handelt Euler in der Integralrechnung, Th. I. §. 189-233. Lacroix,

Th. II. S. 89-100. Noch hieher gehörige spätere Abhandlungen von Euler finden sich in den Novis Comm. Ac. Petrop. T, XVI. XIX. Actis ej. Acad. T. I. P. II. Novis Actis T. IV. VIII.

IV. Classe, worin der Differentialfactor Winkel oder Sinus oder Tangenten von Winkeln enthält.

106. $\partial y = X \partial x \text{ Ang. } \sin x.$

$$y = P \text{ Ang. } \sin x - \int \frac{P \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

wo $P = \int X \partial x$ ist.

Die Integration geschieht nach der in der Einleitung gewiesenen, und in dem vorhergehenden Abschnitte angewandten Methode.

107. $\partial y = X \partial x . \varphi^n$, und φ ein Winkel, dessen Sinus oder Tangente eine Function von x ist, so daß $\partial \varphi = u \partial x$ sey.

$$y = \varphi^n P - n \int P u \partial x . \varphi^{n-1},$$

wo $P = \int X \partial x$ ist.

Das $\int P u \partial x . \varphi^{n-1}$ wird auf gleiche Art zerlegt in $\varphi^{n-1} Q - (n-1) \int Q u \partial x . \varphi^{n-2}$, wo $Q = \int P u \partial x$ ist. Solchergestalt werden die Potenzen von φ immer fort erniedrigt, so daß man zuletzt auf eine Formel ohne φ kommt. Allein wenn die Integrale P, Q, etc. sich nicht angeben lassen, so ist die Integration von $X \partial x . \varphi^n$ auch nicht ausführbar.

108. Exempel. Es sey φ ein Winkel, dessen Sinus $= x$ ist, daher $\partial \varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}}$, so ist

$$\int \varphi \partial x = \varphi x + \sqrt{(1 - xx)} - 1.$$

$$\int \varphi^2 \partial x = \varphi^2 x + 2 \varphi \sqrt{(1 - xx)} - 2.1x.$$

$$\int \varphi^3 \partial x = \varphi^3 x + 3 \varphi^2 \sqrt{(1 - xx)} - 3.2 \varphi x$$
$$- 3.2.1 \sqrt{(1 - xx)} + 6. \quad \text{u. s. f.}$$

Die Integrale sind so genommen, daß sie für $x = 0$ auch $= 0$ sind. Es ist hier

$$P = x; \quad Q = -\sqrt{(1 - xx)}; \quad R = -x;$$
$$S = +\sqrt{(1 - xx)}; \quad T = +x; \quad \text{u. s. f.}$$

109. In dem Artikel, Differentialformeln (38.) setze man $n\varphi$ statt φ, so erhält man daraus folgende elementare Integrationsformeln.

$$\int \partial\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{n} \sin n\varphi.$$

$$\int \partial\varphi \sin n\varphi = -\frac{1}{n} \cos n\varphi.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n} \tang n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n} \cot n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n \sin n\varphi}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin n\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n \cos n\varphi}.$$

In der letzten Formel a. a. O. ist noch $\frac{1}{\cos\varphi}$ statt $\sec\varphi$, und $\frac{1}{\sin\varphi}$ statt $\operatorname{cosec}\varphi$ gesetzt.

110. $$\partial y = (A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$$

$$y = A\varphi + B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

111. $$\partial y = (A + B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$$

$$y = A\varphi - B\cos\varphi - \tfrac{1}{2}C\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}D\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}E\cos 4\varphi - \text{etc.}$$

112. $\partial y = \partial \varphi \sin \varphi^m$.

Die Integration kann auf zweyerley Weise bewerkstelliget werden. Erstlich, man verwandelt $\sin \varphi^m$ in eine Reihe, nach den Sinus der vielfachen von φ für ein ungerades m, oder nach den Cosinus derselben für ein gerades m, zufolge Goniometrie (137.), worauf die Integration nach (110. 111.) bewerkstelligt wird. Zweytens wird die Integration stückweise vorgenommen, indem man das Differential folgeweise auf andere mit einer niedrigern Potenz von $\sin \varphi$ bringt.

Nämlich da $\partial \varphi = \frac{\partial \sin \varphi}{\cos \varphi}$ ist, so ist

$\partial y = \frac{\sin \varphi^m . \partial \sin \varphi}{\cos \varphi}$, und, wenn $\sin \varphi = x$ gesetzt wird, also $\cos \varphi = \sqrt{(1 - xx)}$ ist, $\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}}$.

Das involutorische Integral ist in (61.) angegeben; eine Reihe von entwickelten Werthen desselben in (62, 63.). Das Integral ist für ein ungerades m algebraisch.

113. In diesem Falle kann man das Integral noch auf eine andere Art ausdrucken. Nämlich nach der Formel II. in (59) ist

$$\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1 - xx)}} = C - x^{m-1} (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{m-1}{1} \int x^{m-2} (1 - xx)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Oder, wenn zur Abkürzung gesetzt wird $\sqrt{(1 - xx)} = z$,

$$\int \frac{x^m \partial x}{z} = C - x^{m-1} z + \frac{m-1}{1} \int x^{m-2} z \, \partial x.$$

$$\int x^{m-2} z \, \partial x = -\tfrac{1}{3} x^{m-3} z^3 + \frac{m-3}{3} \int x^{m-4} z^3 \partial x$$

$$\int x^{m-4} z^3 \partial x = -\frac{1}{5} x^{m-5} z^5 + \frac{m-5}{5} \int x^{m-6} z^5 \partial x.$$

$$\int x^{m-6} z \partial x = -\frac{1}{7} x^{m-7} z^7 + \frac{m-7}{7} \int x^{m-8} z^7 \partial x.$$

u. s. f.

Exempel.

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^2 z - \frac{2}{3} z^3.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^4 z - \frac{4}{3} x^2 z^3 - \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} z^5.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^6 z - \frac{6}{3} x^4 z^3 - \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^2 z^5$$
$$- \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} z^7.$$

u. s. f.

114. Auf gleiche Art wird $\int \partial \varphi \cos \varphi^m$ gefunden. Setzt man $\cos \varphi = z$, so ist $\partial \varphi = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, und $\int \partial \varphi \cos \varphi^m = -\int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Das Integral ist daher das Entgegengesetzte von dem Werthe des $\int \partial \varphi \sin \varphi^m$; nur ist zu merken, daß $-\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}} = + \operatorname{Ang} \cos z$ ist. Daher behält für gerade m das Glied, welches den Winkel φ enthält, in beiderley Integralen dasselbe Vorzeichen $+$.

115. $\partial y = \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n$.

Man setze $\sin\varphi = x$, so ist $\cos\varphi = \sqrt{(1-xx)}$, und $\partial\varphi \cos\varphi = \partial \sin\varphi = \partial x$, also

$\partial y = x^m (1-xx)^{\frac{n-1}{2}} \partial x$. Aus (59. IV. V.) ist, wenn $\sqrt{(1-xx)} = z$ zur Abkürzung gesetzt wird,

$$\text{I. } y = -\frac{1}{m+n} x^{m-1} z^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int x^{m-2} z^{n-1} \partial x.$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{m+n} x^{m+1} z^{n-1} + \frac{n-1}{m+n} \int x^m z^{n-3} \partial x.$$

Man setze für x und z wieder ihre Werthe, so ist

$$\text{I. } \int \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n = -\frac{1}{m+n} \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n.$$

$$\text{II. } \int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n = \frac{1}{m+n-2} \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n-2} + \frac{n-1}{m+n-2} \int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^{n-2}.$$

In der zweyten Formel ist $m-2$ statt m gesetzt, damit man durch dieselbe sogleich den involutorischen Theil in der ersten Formel erhalte. Durch beide wird das Integral $\int \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n$ auf das $\int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^{n-2}$ gebracht.

116. Exempel. $\int \partial\varphi \sin\varphi^6 \cos\varphi^5$

$$= -\frac{1}{11} \sin\varphi^5 \cos\varphi^6 + \frac{5 \cdot 1}{11 \cdot 9} \sin\varphi^5 \cos\varphi^4$$

$$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7} \sin\varphi^5 \cos\varphi^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} \sin\varphi^3 \cos\varphi^2$$

$$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin\varphi \cos\varphi^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin\varphi.$$

117. I. $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \log. \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \text{l. tang} \frac{1}{2} \varphi.$

II. $\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi} = \log. \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \text{l. tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi).$

III. $\int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} = \log. \sin \varphi.$

IV. $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = - \log. \cos \varphi = \log. \sec. \varphi.$

V. $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi . \cos \varphi} = \log. \tan \varphi.$

VI. $\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi.$

Denn man setze $\sin \varphi = x$, so ist

$\frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\partial x}{x \sqrt{(1 - xx)}}$, wovon das Integral in (52.) gefunden ist.

Zweytens sey $\varphi = 90^\circ - \omega$, so ist

$\frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = - \frac{\partial \omega}{\cos \omega}$; und $\int \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} = \log. \frac{1 - \sin \omega}{\cos \omega}$

$= - \log. \frac{\cos \omega}{1 - \sin \omega}$; also $\int \frac{\partial \omega}{\cos \omega} = \log. \frac{\cos \omega}{1 - \sin \omega}$.

Vertauscht man das Symbol ω mit φ, so erhält man die Formel II.

Die Formel III. zu erhalten, setze man $\sin \varphi = x$, so wird das Differential $= \frac{\partial x}{x}$, und das Integral $= \log. x = \log. \sin \varphi$. Die Formel IV. entsteht aus III. durch Vertauschung von φ mit $90^\circ - \varphi$. Die Formel V. aus III. und IV. durch Addition. Die Formel VI. aus Differentialformeln (38.).

118. $\partial y = \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^n}$.

Man setze $\sin \varphi = x$, und $\cos \varphi$ oder $\sqrt{(1-xx)} = z$,

so ist $\partial y = \frac{x^m \partial x}{z^{n+1}}$, und (59. IV. VI.)

I. $y = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{z^{n+1}}$.

II. $y = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{x^m \partial x}{z^{n-1}}$.

Das ist,

I. $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^n} = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{\sin \varphi^{m-1}}{\cos \varphi^{n-1}}$
$+ \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi^n}$.

II. $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin \varphi^{m-1}}{\cos \varphi^{n-1}}$
$- \frac{m-n}{n-1} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi^{n-2}}$.

Durch beide Operationen zusammen fortgesetzt werden die Exponenten von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ jedesmahl um 2 vermindert, so daß das Integral auf eine der Formen, $\int \partial \varphi \sin \varphi^r$, oder $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^r}{\cos \varphi}$, oder $\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^r}$, oder $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi^r}$, gebracht wird. Das erste zu finden, ist vorher gewiesen. Das letzte ist algebraisch, nämlich $= \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{\cos \varphi^{r-1}}$.

119. Wenn $m = n$ ist, so hat man in (118.) zuerst die Reduction nach II. und dann die nach I. vorzunehmen. Es ist

$$\text{I.} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^m} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin \varphi^{m+1}}{\cos \varphi^{m-1}}$$

$$- \frac{2}{m-1} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^{m-2}};$$

$$\text{II.} \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi^{m-2}} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \varphi^{m-1}}{\cos \varphi^{m-3}}$$

$$+ \frac{m-1}{2} \cdot \int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi^{m-2}};$$

Dadurch wird die Integration zuletzt auf $\int \partial \varphi$ oder $\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi}$ gebracht. Jenes Integral ist φ, dieses ist $-$ log. cos φ.

120. $\partial y = \frac{\partial \varphi \sin \varphi^m}{\cos \varphi}$.

Die erste Reduction in (118.) giebt

$$y = - \frac{1}{m-1} \cdot \sin \varphi^{m-1} + \int \frac{\partial \varphi . \sin \varphi^{m-2}}{\cos \varphi}.$$

Daher ist

$$\int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi} = \log. \tang (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi).$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = - \log \cos \varphi = + \log \sec \varphi.$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^2}{\cos \varphi} = - \sin \varphi + \int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi}.$$

$$\int \frac{\partial \varphi \sin \varphi^3}{\cos \varphi} = - \tfrac{1}{2} \sin \varphi^2 + \mathrm{l} \sec \varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^4}{\cos\varphi} = -\tfrac{1}{3}\sin\varphi^3 - \sin\varphi + \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

u. s. f.

121. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n}$.

Nach der zweyten Formel in (118.), wenn darin $m = 2$ gesetzt wird, ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Exempel.

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^5} + \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

122. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n}$.

Die Reduction auf kleinere Exponenten geschieht mittelst der Formeln III. und VI. in (59.). Es sey $\sin\varphi = x$; und $\cos\varphi = \sqrt{(1 - xx)} = z$, so ist

$$\partial y = \frac{\partial x}{x^m z^{n+1}}, \text{ und}$$

I. $$y = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1} z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2} z^{n+1}}.$$

II. $$y = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1} z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{\partial x}{x^m z^{n-1}}.$$

Das ist,

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^m . \cos\varphi^n} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin\varphi^{m-1} . \cos\varphi^{n-1}}$$

$$+ \frac{m+n-2}{m-1} . \int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2} . \cos\varphi^n} .$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2} . \cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin\varphi^{m-3} . \cos\varphi^{n-1}}$$

$$+ \frac{m+n-4}{n-1} \int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^{n-2}} .$$

123. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{a + b\cos\varphi}$.

Man setze $\cos\varphi = \frac{1-xx}{1+xx}$, so ist

$\sin\varphi = \sqrt{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)} = \frac{2x}{1+xx}$, und

$\partial\varphi = \frac{\partial \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\partial x}{1+xx}$. Dadurch ist

$$\frac{\partial\varphi}{a + b\cos\varphi} = \frac{2\partial x}{a+b+(a-b)xx} .$$

Das Integral von dieser Formel ist nach (15.), wenn $a > b$ ist,

$$y = \frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang} \frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}} ;$$

und nach (12.), wenn $a < b$ ist,

$$y = \frac{1}{\sqrt{(bb-aa)}} \log. \frac{\sqrt{(bb-aa)} + x(b-a)}{\sqrt{(bb-aa)} - x(b-a)} .$$

Um in diesen Integralen den Werth von x wieder herzustellen, bemerke man, daß

$x = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ ist. Ferner ist

$$2\,\text{Ang. tang}\,\frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}} = \text{Ang. tang}\,\frac{2x\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)xx}.$$

Setzt man hier für x seinen Werth, im Zähler nach der zweyten Form, im Nenner nach der ersten, so ist, wenn noch $\sqrt{(aa-bb)} = c$ gesetzt wird,

$$\int \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\,\text{Ang. tang}\,\frac{c\sin\varphi}{a\cos\varphi+b}$$

$$= \frac{1}{c}\,\text{Ang. cos}\,\frac{a\cos\varphi+b}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\,\text{Ang. sin}\,\frac{c\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

Für den Fall, da $a > b$ ist, wenn hier $\sqrt{(bb-aa)} = c$ gesetzt wird, durch Substitution des ersten Werthes von x,

$$\int \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\,\log.\,\frac{a\cos\varphi+b+c\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

124. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi^2}$.

$$y = -\frac{b}{aa-bb}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$$
$$+\frac{a}{aa-bb}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

Dieses Integral wird unten (129.) in Form einer Reihe gefunden.

125. Die Integration von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ hat einige Schwierigkeit, weil sich keine Function findet, deren Differential aus zwey Differentialen von jener Form besteht. Es ist

$$\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}} =$$
$$\frac{(n-1)b+a\cos\varphi-(n-2)b\cos\varphi^2)\,\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}.$$

Dieses Differential zerlege man in zwey Differentiale von einerley Form,

$$\frac{(f+g\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}+\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}},$$

in deren ersterm f und g gegeben, in dem andern B und C zu bestimmen sind. Bringt man beide Brüche auf einerley Nenner, so erhält man ein Differential von derselben Form, wie das $\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$. Die drey Coefficienten von 1; $\cos\varphi$; $\cos\varphi^2$ geben drey Gleichungen, zufolge der Methode der Unbestimmten. Da aber nur zwey unbekannte, B, C, vorhanden sind, so setze man zu der Function von φ und deren Differential noch einen unbestimmten Factor A, und es geben nun die drey Gleichungen die Werthe von A, B, C. Dadurch wird die Integration von $\frac{(f+g\cos\varphi)\,\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ auf die von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gebracht. Setzt man zuerst $f=1$; $g=0$, so wird das Integral von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ durch das von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gefunden, dieses durch das von $\frac{(D+E\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-2}}$ worin D und E auf dieselbe Weise, wie vorher B und C bestimmt werden, und dieser Prozeß wird fortgesetzt, bis daß man auf die Formel $\frac{(M+N\cos\varphi)\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}$ kommt, wovon das Integral ist

$$=\frac{N}{b}\varphi+\frac{bM-aN}{b}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

126. Durch die Auflösung des Differentialfactors $\frac{1}{a + b \cos\varphi}$ in eine Reihe, die nach den Cosinus der Vielfachen von φ fortgeht, wird das Integral in einer besonders zu astronomischen Rechnungen bequemern Form erhalten. Der Radius Vector in einer Ellipse hat den Werth $\frac{1 - ee}{1 - e\cos\varphi}$, wenn die halbe große Axe $= 1$, die Excentricität $= e$, und φ der Winkel des Radius Vector mit der Linie des größten Abstandes ist. Sollte φ der Winkel des Radius mit der Linie des kleinsten Abstandes seyn, so wird e negativ genommen. (Ellipse, 12.).

Es ist nach der gewöhnlichen Entwickelung eines Quotienten,

$$\frac{1}{1 + n\cos\varphi} = 1 - n\cos\varphi + n^2\cos\varphi^2 - n^3\cos\varphi^3 + n^4\cos\varphi^4 - \text{etc.}$$

Hieraus ließe sich $\int \frac{\partial\varphi}{1 + n\cos\varphi}$ mittelst des Verfahrens in (112. 114.) finden. Allein zu der angezeigten Absicht ist folgendes besser.

Man setze (aus Goniometrie, 141.) für die Potenzen der Cosinus ihre Werthe, und bezeichne den Quotienten $\frac{1}{1 + n\cos\varphi}$ durch

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

so ist

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 + \frac{1..7}{2..8}n^8 + \text{etc.}$$

$$B = 2n\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}n^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$C = \tfrac{1}{2}n^2\left(1 + \frac{3.4}{2.6}n^2 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}n^4 + \frac{3.4.5.6.7.8}{2.6.4.8.6.10}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$D = \tfrac{1}{4}n^3\left(1 + \frac{4.5}{2.8}n^2 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}n^4 + \frac{4.5.6.7.8.9}{2.8.4.10.6.12}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$E = \tfrac{1}{8}n^4\left(1 + \frac{5.6}{2.10}n^2 + \frac{5.6.7.8}{2.10.4.12}n^4 + \frac{5.6.7.8.9.10}{2.10.4.12.6.14}n^6 + \text{etc.}\right).$$

u. s. f.

Es ist zu merken, daß der erste Coefficient

$A = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}$, und der zweyte

$B = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} - 1\right)$ ist. Ferner machen die übrigen Coefficienten eine rücklaufende Reihe aus, nachdem die beiden ersten bestimmt sind. Denn man multiplicire den Quotienten,

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.}$$

durch $\{1 + n\cos\varphi$, so ist, weil

$\cos\varphi . \cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}\cos(\lambda - 1)\varphi + \frac{1}{2}\cos(\lambda + 1)\varphi$

ist, (Goniometrie 27.),

$$1 = A - \tfrac{1}{2} n B$$
$$- \tfrac{1}{2}(2B - 2nA - nC)\cos\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2C - nB - nD)\cos 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{2}(2D - nC - nE)\cos 3\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2E - nD - nF)\cos 4\varphi$$
$$- \text{etc.}$$

Dadurch ist, weil für jeden Werth von φ die Reihe $= 1$ seyn muß, jeder Coefficient eines Cosinus $= 0$, so daß

$$B = \frac{2}{n}(A - 1); \qquad E = \frac{2D - nC}{n};$$

$$C = \frac{2B - 2nA}{n}; \qquad F = \frac{2E - nD}{n};$$

$$D = \frac{2C - nB}{n}; \quad \text{u. s. f.}$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{1 + n\cos\varphi} = A\varphi - B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi - \text{etc.}$$

127. $\partial y = \partial\varphi(1 + n\cos\varphi)^{\nu}$.

Die Entwickelung des Differentialfactors nach dem binomischen Lehrsatze giebt

$$(1 + n\cos\varphi)^{\nu} = 1 + \mathfrak{A} n\cos\varphi + \mathfrak{B} n^2\cos\varphi^2$$
$$+ \mathfrak{C} n^3\cos\varphi^3 + \mathfrak{D} n^4\cos\varphi^4 + \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. die Binomialcoefficienten in der νten Potenz sind. Entwickelt man die Potenzen der Cosinus nach Goniometrie (141.), so wird

$$(1 + n\cos\varphi)^{\nu} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi$$
$$+ D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.}$$

Die Coefficienten machen auch hier eine rücklaufende Reihe, worin nur die beiden ersten aus der entwickelten ersten Reihe bestimmt zu werden brauchen. Man differentiire nämlich

die Potenz des Binomium, und ihren in der Reihe enthaltenen Werth, so ist, nach Absonderung des Differentials $\partial\varphi$,

$$\frac{\nu n(1+n\cos\varphi)^{\nu}\sin\varphi}{1+n\cos\varphi}=B\sin\varphi+2C\sin 2\varphi$$

$$+3D\sin 3\varphi+4E\sin 4\varphi+5F\sin 5\varphi+\text{etc.}$$

Diese Reihe multiplicire man mit $1+n\cos\varphi$, und die erstere, woraus sie entstanden ist, mit $\nu n\sin\varphi$, so werden zwey sich gleiche Reihen erhalten. Nun zerlege man noch die Producte der Sinus und Cosinus. Es ist $\sin\lambda\varphi.\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi+\frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$, und $\cos\lambda\varphi.\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi-\frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$. (Goniometrie, 27.) Man ordne die Glieder nach den Sinus der Vielfachen von φ, und fasse sie in eine Reihe zusammen. Diese ist

$$0=(B+\tfrac{2}{2}Cn-\nu An+\frac{\nu}{2}Cn)\sin\varphi$$

$$+(2C+\tfrac{1}{2}Bn+\tfrac{3}{2}Dn-\frac{\nu}{2}Bn+\frac{\nu}{2}Dn)\sin 2\varphi$$

$$+(3D+\tfrac{2}{2}Cn+\tfrac{4}{2}En-\frac{\nu}{2}Cn+\frac{\nu}{2}En)\sin 3\varphi$$

$$+(4E+\tfrac{3}{2}Dn+\tfrac{5}{2}Fn-\frac{\nu}{2}Dn+\frac{\nu}{2}Fn)\sin 4\varphi$$

$$+\text{etc.}$$

Hieraus ist

$$C=\frac{2\nu An-2B}{(\nu+2)n};\quad E=\frac{(\nu-2)Cn-6D}{(\nu+4)n};$$

$$D=\frac{(\nu-1)Bn-4C}{(\nu+3)n};\quad F=\frac{(\nu-3)Dn-8E}{(\nu+5)n};$$

u. s. f.

Die Coefficienten A und B werden auf dieselbe Art gefunden, wie in (126.). Man hat nur nöthig, statt

$$-n;\ +n^2;\ -n^3;\ +n^4;\ -n^5;\ +n^6;\ \text{etc.}$$

daselbst hier zu setzen

$$+\mathfrak{A}n;\ +\mathfrak{B}n^2;\ +\mathfrak{C}n^3;\ +\mathfrak{D}n^4;\ \mathfrak{E}n^5;\ +\mathfrak{F}n^6;\ \text{etc.}$$

und $-B$ mit $+B$ zu vertauschen, so wird aus den Reihen für A und B in (126.) hier

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}n^2 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{D}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.}$$

$$B = 2n(\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C}n^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{E}n^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathfrak{G}n^6 + \text{etc.}).$$

Durch dieselben Vertauschungen lassen sich auch die Werthe von den folgenden Coefficienten aus den gleichnamigen in (126.) finden, nur muß man bemerken, daß die in den geraden Stellen daselbst das Vorzeichen $-$, hier aber $+$ haben.

Es ist

$$C = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}n^2 + \frac{3.4}{2.6}\mathfrak{D}n^4 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.})$$

$$D = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{C}n^3 + \frac{4.5}{2.8}\mathfrak{E}n^5 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}\mathfrak{G}n^7 + \text{etc.})$$

$$E = \tfrac{1}{8}(\mathfrak{D}n^4 + \frac{5.6}{2.10}\mathfrak{F}n^6 + \frac{5.6.7.8}{2.10.4.12}\mathfrak{H}n^8 + \text{etc.})$$

u. s. f.

Diese Werthe dienen, wenn der Exponent ν des Binomium eine ganze negative Zahl ist. In diesem Falle wird in einem der Glieder der rücklaufenden Reihe sowohl Zähler als Nenner $= 0$, daher dessen Werth unbestimmt

bleibt, oder hier auf eine mühsame Art gesucht werden müßte. Für positive ν mag man sich dieser Reihen-Ausdrücke, oder der rücklaufenden Reihe bedienen.

Nach der Bestimmung der Coefficienten A, B, C, etc. wird

$$\int \partial\varphi(1+n\cos\varphi)^{\nu} = A\varphi + B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

128. Exempel. Für $\nu = 2$ ist

$\mathfrak{A} = 2$; $\mathfrak{B} = 1$; $\mathfrak{C} = 0$, u. s. f. Also ist

$A = 1 + \frac{1}{2}n^2$; $B = 2n$; $C = \frac{1}{2}n^2$,

und

$$\int \partial\varphi(1+n\cos\varphi)^2 = (1+\tfrac{1}{2}n^2)\varphi + 2n\sin\varphi + \tfrac{1}{4}n^2\sin 2\varphi.$$

Auf gleiche Art ist

$$\int \partial\varphi(1+n\cos\varphi)^3 = (1+\tfrac{3}{2}n^2)\varphi + (3n+\tfrac{3}{4}n^2)\sin\varphi + \tfrac{3}{4}n^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{12}n^3\sin 3\varphi.$$

129. Exempel. $\partial y = \dfrac{\partial\varphi}{(1+n\cos\varphi)^2}$.

Hier ist $\nu = -2$, also $\mathfrak{A} = -2$; $\mathfrak{B} = +3$; $\mathfrak{C} = -4$; $\mathfrak{D} = +5$; $\mathfrak{E} = -6$; u. s. f. Dadurch ist

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}.3n^2 + \frac{1.3}{2.4}5n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.7n^6 + \text{etc.}$$

$$B = -2(\tfrac{1}{2}.2n + \frac{1.3}{2.4}.4n^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.6n^5 + \frac{1.3.5.7}{3.4.6.8}.8n^7 + \text{etc.}).$$

$$C = +\tfrac{1}{2}(1.3n^2 + \frac{3.4}{2.6}.5n^4 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}.7n^6 + \text{etc.}).$$

$$D = -\tfrac{1}{4}(1.4n^3 + \frac{4.5}{2.8}.6n^5 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}.8n^7 + \text{etc.}).$$

$$E = +\tfrac{1}{8}(1.5n^4 + \frac{5.6}{2.10}.7n^6 + \text{etc.}).$$

$$F = -\tfrac{1}{16}(1.6n^5 + \frac{6.7}{2.12}.8n^7 + \text{etc.}).$$

$$G = +\tfrac{1}{32}(1.7n^6 + \text{etc.})$$

Die mittlere Anomalie in der Bahn eines Planeten ist $= (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int \frac{\partial\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2}$, wo e und φ die in (126.) schon angeführten Bedeutungen haben.

130. Euler hat noch einige merkwürdige Relationen für diese Coefficienten entdeckt. I. Es ist, wenn n als eine veränderliche Größe behandelt wird,

$$B = \frac{2(\nu+2)}{n} \int An\partial n - 2An,$$

wo das Integral so zu nehmen ist, daß es verschwinde, wenn $n = 0$ gesetzt wird.

II. Es sey ν negativ und $= -\mu$, so daß

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^\mu} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Ferner sey

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu+1}} = A' + B'\cos\varphi + C'\cos 2\varphi + D'\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

so verhalten sich die gleichnamigen Coefficienten in beiden Reihen folgendergestalt:

$$A' = A + \frac{n\partial A}{\mu\partial n}.$$

$$B' = B + \frac{n\partial B}{\mu\partial n}.$$

$$C' = C + \frac{n\partial C}{\mu\partial n}, \text{ u. s. f.}$$

Zugleich ist

$$B' = \frac{2(A - A')}{n}; C' = \frac{2(B - B') - 2A'n}{n};$$

$$D' = \frac{2(C - C') - B'n}{n}; E' = \frac{2(D - D') - C'n}{n};$$

u, s. f.

III. Es sey, wie vorher, $(1 + n \cos\varphi)^{\nu} = A + B\cos\varphi + C\cos n\varphi + \text{etc.}$ und $(1 + n\cos\varphi)^{-\nu-1} = {}'A + {}'B\cos\varphi + {}'C\cos 2\varphi + \text{etc.}$ so ist $A = {}'A(1 - nn)^{\nu + \frac{1}{2}}$. Dadurch kann man den Coefficienten A auf zweyerley Art finden, entweder durch die Formel

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\nu . \nu - 1.}{1 . 2} n^2 + \frac{1 . 3}{2 . 4} \cdot \frac{\nu .. \nu - 3.}{1 .. 4} n^4 + \text{etc.}$$

oder durch diese,

$$A = (1 - nn)^{\nu + \frac{1}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{\nu + 1 . \nu + 2.}{1 . 2} n^2 + \frac{1 . 3.}{2 . 4} \cdot \frac{\nu + 1 .. \nu + 4.}{1 .. 4} n^4 + \text{etc.}\right).$$

durch jene für kleine n, durch diese für n, die nahe = 1 sind.

IV. Euler zeigt noch (§. 292.) auf eine sinnreiche Art, wie man für solche n, die wenig von der Einheit verschieden sind, die Reihe convergent machen könne, durch Herausstoßung mehrerer Coefficienten. Lacroix hat diese Methode in seiner Integralrechnung, nr. 465. 466. vorgetragen mit einigen Erläuterungen, die aber aus nähern Quellen sich hätten schöpfen lassen.

Fuß hat in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. p. 390. sqq. eine sehr feine Entwickelung des Binomium $(1 - n\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ gewiesen, und für die Coefficienten B, C, D, etc. sehr bequeme genäherte Werthe zum Gebrauch in der Astronomie gegeben.

Arbogast hat in seinem Calcul des dérivations, §. 413 gezeigt, wie eine Function der Reihe, $\alpha + \beta \cos\varphi + \gamma \cos\varphi^2 + \delta \cos\varphi^3 +$ etc. in die Reihe $A + B \cos\varphi + C \cos 2\varphi + D \cos 3\varphi +$ etc. umgewandelt wird, und leitet daraus für den besondern Fall, $(1 - \beta \cos\varphi)^{-m}$, die Entwicklung her. Er gebraucht dazu den Satz, daß $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})$ ist (Differentialformeln, 48.). Daher werden die Potenzen von $\cos\varphi$ aus Theilen von der Form, $\frac{1}{2}(e^{r\varphi\sqrt{-1}} + e^{-r\varphi\sqrt{-1}})$, zusammengesetzt, wozu bey geraden Potenzen eine gegebene mögliche Zahl kommt. Für jeden solchen binomischen Theil ist der Werth $= \cos r\varphi$.

131. $\partial y = e^{\alpha\varphi} \partial\varphi.$

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}.$$

Aus Differentialformeln, 14. Es ist e die Basis der natürlichen Logarithmen.

132. $\partial y = e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \sin\varphi.$

$$y = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha \sin\varphi - \cos\varphi)}{1 + \alpha\alpha} + C.$$

Wenn y mit φ zugleich $= 0$ seyn soll, so ist

$$\text{Const.} = + \frac{1}{1 + \alpha\alpha}.$$

Nach der Formel in der Einleitung ist

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi,$$

und wiederum

$$\int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} \sin\varphi \, \partial\varphi.$$

Also $y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} y$.

Daraus wird sogleich der angegebene Werth von y erhalten.

133. Auf gleiche Art ist

$$\int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi + \sin\varphi)}{1 + \alpha\alpha}.$$

134. Aus diesen Elementarformeln werden die Integrale von $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi \sin\varphi^n$, und $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi\cos\varphi^n$, durch ein ähnliches Verfahren wie in (132.), gefunden, indem die Exponenten von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ bey jeder successiven Integration um 2 erniedrigt werden. Euleri Calc. integr. T. I. § 266. 270.

Man kann auch die Potenzen der Sinus und Cosinus in Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ auflösen, wodurch die Integration auf die Formeln in (131. 132.) gebracht wird. Durch diese Entwicklung wird auch das Integral von $e^{\alpha\varphi} \sin\varphi^m \cos\varphi^n$ gefunden.

134*. Aus Eulers handschriftlichen Nachlasse sind noch in der neuen Ausgabe seiner Integralrechnung vier Abhandlungen über die Integration sehr schwieriger Differentialformeln mit Winkelfunctionen eingerückt. Drey derselben betreffen das $\int \frac{\partial\varphi . \cos\lambda\varphi}{(1 + aa - 2a\cos\varphi)^n}$, welches Euler zuerst nur durch Induction finden konnte.

V. Allgemeine Methoden, Integrale durch Annäherung zu finden.

135. Es sey X eine Function von x. Man nehme eine nicht stetige Reihe der Werthe von X für die Werthe, a, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, $a + 3\alpha$, ... $a + (m - 1)\alpha$, $a + m\alpha$, von x, und bezeichne dieselben durch (0), (1), (2), (3) ..... (m − 1), (m); die Reihe selbst durch (A). Die in den Klammern eingeschlossenen Zah-

len sind die Stellenzahlen für die Glieder der Reihe (A). Die Reihe der X sey eine durchgehends entweder zunehmende oder abnehmende. In der Reihe (A) schalte man mehrere Glieder, in jedem Intervall gleich viele, nach dem Gesetz der Function ein, und setze für diese den Abstand der Glieder oder den Unterschied der zugehörigen $x = \Delta x$. Diese zweyte Reihe bezeichne man durch (B). In der Reihe (A) multiplicire man jedes Glied, außer dem letzten (m), mit dem Abstande zweyer nächsten Glieder, und bezeichne die Summe der Producte durch Σ; in der interpolirten Reihe mit Δx, das letzte Glied gleichfalls ausgeschlossen, und bezeichne die Summe der Producte durch S. Die Reihe der X sey zuerst eine zunehmende, so ist Σ kleiner als S, weil die eingeschalteten Glieder in der Reihe (B) größer sind, als das ihnen zunächst vorhergehende Glied in der Reihe (A). Multiplicirt man aber die Glieder der Reihe (A) von dem Gliede (1) an bis zu dem Gliede (m) mit α, so ist die Summe der Producte, oder $\Sigma - \alpha(0) + \alpha(m)$, größer als S, so daß S zwischen die Summen,

$$\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots + \alpha(m-1),$$
$$\text{und } \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots + \alpha(m)$$

fällt. Die Reihe (B) wird eine stetige, wenn Δx unendlich klein genommen wird, und die endliche Differenz der Reihe S, nehmlich $X\Delta x$, wo X das letzte Glied (m) bedeutet, verwandelt sich in $X\partial x$. Also ist $\partial S = X\partial x$, folglich die Summe der stetigen Reihe $S = \int X\partial x$. Demnach liegt der Werth von $\int X\partial x$ zwischen den vorher angegebenen Gränzen. Je kleiner der Abstand x zweyer Glieder der nicht stetigen Reihe genommen wird, desto näher kommen sich beide Gränzen einander und dem Werthe von $\int X\partial x$.

Ist die Reihe der X eine abnehmende, so ist die Reihe, $\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots + \alpha(m-1)$ die größere Gränze, und $\alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) \ldots + \alpha(m)$ die kleinere.

136. Diese Methode, ein Integral zu finden, ist die schon von Archimedes und in den neueren Zeiten von Cavaleri, und besonders von Wallis, gebrauchte Summations-Methode. Kann man die beiden Summen, und die zwischen ihnen liegende gemeinschaftliche Gränze, in endlichen Ausdrücken angeben, so erhält man eben das Resultat, welches die Integralrechnung giebt. Daher ist die Benennung, Integralrechnung und Integriren, wofür man auch Summiren gebraucht hat, und die Bezeichnung der Operation durch $\int$ entstanden. Es ist aber dieser Begriff zu eingeschränkt, nur auf Differentialformeln anwendbar. Allein auch bey diesen beruht die ganze Theorie der Integration nicht auf dem Begriffe vom Summiren, sondern auf dem Rückgange von den Differentialverhältnissen zwischen einer veränderlichen Größe und ihrer Function zu der Relation zwischen ihnen selbst.

137. Exempel. Die Gränzen für $\int x^3 \partial x$ zu finden. Hier ist $X = x^3$, und $\Sigma = (0 + \alpha^3 + (2\alpha)^3 + (3\alpha)^3 \ldots + (m-1)^3 \alpha^3)\alpha = \frac{1}{4} m^2 (m-1)^2 \alpha^3 . \alpha$. (Differenzenrechnung, 72. oder Arithmetische Reihen höherer Ordn. 15.). Setzt man x für $m\alpha$, so ist $\Sigma = \frac{1}{4} x^2 (x-\alpha)^2$. Dieses ist die kleinere Gränze für $\int x^3 \partial x$. Die andere ist $= \Sigma + (ma)^3 \alpha = \frac{1}{4} m^2 (m+1)^2 \alpha^4 = \frac{1}{4} x^2 (x+\alpha)^2$. Die gemeinschaftliche Grenze für beide ist $\frac{1}{4} x^4 = \int x^3 \partial x$.

138. Exempel. Es sey $y = \int \frac{\partial x}{x^n}$; es soll der Werth durch eine Reihe näherungsweise von $x = a$ bis $x = a + b$ ausgedruckt werden.

Der Werth von y fällt zwischen

$$\alpha\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{(a+\alpha)^n} + \frac{1}{(a+2\alpha)^n} \ldots\ldots \ldots\ldots + \frac{1}{(a+(m-1)\alpha)^n}\right),$$

und

$$\alpha\left(\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right).$$

Das Mittel beider ist =

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right)-\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right),$$

wo der subtractive Theil beygefügt ist, weil in dem ersten Theile anstatt der Hälfte des ersten und letzten Gliedes die ganzen genommen sind. Dieses ist ein genäherter Werth von $\int\frac{\partial x}{x^n}$. Setzt man für α dessen Werth $\alpha=\frac{b}{m}$, so ist nach der Division durch m^n und durch α oder dessen Werth, auch Versetzung des subtractiven Theils,

$$\frac{1}{(ma)^n}+\frac{1}{(ma+b)^n}+\frac{1}{(ma+2b)^n}\cdots\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(ma+mb)^n}=\frac{m}{m^n b}\int\frac{\partial x}{x^n}+\frac{1}{2(ma)^n}-$$

$$+\frac{1}{2(ma+mb)^n},$$ desto genauer, je größer m genommen wird.

Die Integralrechnung giebt $\int\frac{\partial x}{x^n}=$

$$\text{Const.}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

wenn es $=0$ ist, für $x=a$. Für $x=a+b$, ist

$$\int\frac{\partial x}{x^n}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{(a+b)^{n-1}}\right).$$

Nimmt man $n=1$, so ist $\int\frac{\partial x}{x}=\log\frac{a+b}{a}$, und

dadurch $\frac{1}{ma} + \frac{1}{ma+b} + \frac{1}{ma+2b} + \frac{1}{ma+3b}$

$$\ldots + \frac{1}{ma+mb} = \frac{m}{b} \log. \frac{a+b}{a} + \frac{2a+b}{2ma(a+b)},$$

desto genauer je größer m genommen wird.

139. Man wird das erklärte Verfahren eher gebrauchen können, um Reihen durch Annäherung zu summiren, als Integrale durch Reihen auszudrucken, weil, wo man nicht integriren kann, (die circularen und logarithmischen Functionen den algebraischen als gleichgültig gerechnet,) man auch nicht wird summiren können. Der Taylorsche Lehrsatz aber giebt ein bequemes Mittel Integrale durch Annäherung zu finden. In dem Artikel Differenzen-Rechnung (38. vergl. 17. das.) ist gefunden, daß

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo f ein Functionszeichen ist.

Setzt man u negativ, so ist

$$f(x-u) = fx - \frac{\partial fx}{\partial x} . u + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \frac{u^2}{1.2}$$
$$- \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

140. Es sey $\partial y = X \partial x$ und X die Function von x, welche in jenen Formeln durch $\frac{\partial fx}{\partial x}$ bezeichnet ist, so daß $y = fx$ ist. Man finde, oder nehme an, daß für $x = a$ die Function fx den Werth A habe, ob man gleich nicht angeben kann, wie A aus a zusammen gesetzt wird, weil dieses voraussetzt, daß man die Formel $X \partial x$ integriren könne. Man setze $\partial X = P \partial x$; $\partial P = Q \partial x$;

$\partial Q = R\partial x$, u. s. f. so sind P, Q, R, etc. unbestimmte Werthe von Functionen, deren Formen gegeben werden, und es ist

$$f(x+u) = fx + Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 + \tfrac{1}{6}Qu^3 + \tfrac{1}{24}Ru^4 + \text{etc.}$$

$$f(x-u) = fx - Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 - \tfrac{1}{6}Qu^3 + \tfrac{1}{24}Ru^4 - \text{etc.}$$

141. Man lasse x unbestimmt, setze aber $x - u = a$, also $u = x - a$, so ist, da $fa = A$ gesetzt worden, aus der zweyten Formel,

$$fx = A + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}Q(x-a)^3 - \tfrac{1}{24}R(x-a)^4 + \text{etc.}$$

Hieraus wird, mittelst des als bekannt gesetzten Werthes A der Function fa der Werth der mit ihr gleichartigen Function fx gefunden, ohne die Form derselben zu kennen.

142. Man setze in der ersten Formel $x + u = z$, so daß $u = z - x$ sey. Für $x = a$ verwandelen sich die Functionen X, P, Q, R, etc. in B, C, D, E, etc. Nun ist die erstere Formel

$$fz = A + B(z-a) + \tfrac{1}{2}C(z-a)^2 + \tfrac{1}{6}D(z-a)^3 + \tfrac{1}{24}E(z-a)^4 + \text{etc.}$$

Hier wird ebenfalls vermittelst des für die Function fa gesetzten Werthes der Werth der mit ihr gleichartigen Function fz gefunden, ohne die Beschaffenheit derselben zu kennen. Da die Bezeichnung der veränderlichen Functionalgröße willkührlich ist, so setze man x statt z, oder das z in der letztern Formel dem x in der erstern gleich, und es ist

$$fx = A + B(x-a) + \tfrac{1}{2}C(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}D(x-a)^3 + \tfrac{1}{24}E(x-a)^4 + \text{etc.}$$

143. Nimmt man das Mittel von beiden Bestimmungen der Function fx, so wird man einen mehr genäherten Werth erhalten, als durch eine einzelne dieser Formeln. Wäre das Intervall $x - a$ beträchtlich, oder wären die Differentialquotienten ansehnlich groß, so müßte man jenes

Intervall in einige Theile theilen, und den Werth von fx durch eben so viele Paare von Formeln successiv suchen. Nämlich wenn $x - a = m\alpha$ ist, so suche man zuerst den Werth von $f(a + \alpha)$, daraus den von $f(a + 2\alpha)$, aus diesem den von $f(a + 3\alpha)$, u. s. f. bis zu dem $f(a + m\alpha)$.

144. Es werde z. B. das Intervall $x - a$ in drey gleiche Theile α getheilt, so daß $x = a + 3\alpha$ sey. In der Formel (140.) ist nun successiv für a zu setzen: a, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, und für x ist mit diesen zustimmend zu setzen: $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, $a + 3\alpha$. Die Function fx und die Differentialquotienten X, P, Q, R, etc. seyn für diese Werthe von x folgende:

x	fx	X	P	Q	R	etc.
a	A	B	C	D	E	=
$a + \alpha$	A'	B'	C'	D'	E'	=
$a + 2\alpha$	A''	B''	C''	D''	E''	=
$a + 3\alpha$	A'''	B'''	C'''	D'''	E'''	=

Nach diesen Bezeichnungen wird die Formel in (141.) für jeden der drey letztern Werthe von x:

$$A' = A + B'\alpha - \tfrac{1}{2}C'\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A'' = A' + B''\alpha - \tfrac{1}{2}C''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E''\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A''' = A'' + B'''\alpha - \tfrac{1}{2}C'''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'''\alpha^4 + \text{etc.}$$

Aus allen drey Formeln zusammen genommen entsteht

$$A''' = A + \alpha(B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha^2(C' + C'' + C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{24}\alpha^4(E' + E'' + E''') + \text{etc.}$$

In der Formel (142.) setze man ebenfalls für a successiv a, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, und für x mit diesen zustimmend $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, $a + 3\alpha$, so entstehen daraus drey Formeln, welche nach der Reihe die Coefficienten B, B', B'';

C, C′, C″, etc. für die Werthe a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$ von a enthalten. Durch die Addition dieser Formeln entsteht folgende:

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'') + \tfrac{1}{2}\alpha^2(C + C' + C'') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'') + \tfrac{1}{24}\alpha^4(E + E' + E'') + \text{etc.}$$

Das Mittel von beiden Formeln ist

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha(B + B''') + \tfrac{1}{4}\alpha^2(C - C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{12}\alpha^3(D + D''') + \tfrac{1}{48}\alpha^4(E - E''') + \text{etc.}$$

Hier ist A‴ der Werth des Integrals, $\int X\partial x$ für $x = a + 3\alpha$.

145. Exempel. Es sey $\partial y = \frac{\partial x}{x}$, also $y = \log\frac{x}{a}$, wo die Constante a genommen ist, daß $y = 0$ ist, wenn $x = a$ gesetzt wird. Hier ist $A = 0$; $X = \frac{1}{x}$; also $B = \frac{1}{a}$; $B' = \frac{1}{a+\alpha}$, u. s. f. $P = -\frac{1}{x^2}$, also $C = -\frac{1}{a^2}$, $C' = -\frac{1}{(a+\alpha)^2}$, u. s. f. $Q = +\frac{2}{x^3}$, und $D = \frac{2}{a^3}$, $D' = \frac{2}{(a+\alpha)^3}$ u. s. f. $R = -\frac{2.3}{x^4}$; daher $E = -\frac{2.3}{a^4}$, u. s. f.

Es sey $x = a + m\alpha$, so ist

$$\log x = \alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\alpha} \cdot\cdot + \frac{1}{a+ma}\right) - \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+\alpha)^3}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^3}\right)$$

$$-\tfrac{1}{6}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{x^3}\right)-\tfrac{1}{8}\alpha^4\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{x^4}\right)$$

$$+\tfrac{1}{5}\alpha^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{(a+\alpha)^5}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^5}\right)$$

$$-\tfrac{1}{10}\alpha^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{x^5}\right)-\tfrac{1}{12}\alpha^6\left(\frac{1}{a^6}-\frac{1}{x^6}\right)$$

$$+\text{ etc.}$$

145. Die Methode, welche Joh. Bernoulli angegeben hat, das $\int X\partial x$ zu finden, beruht auf der in der Einleitung gewiesenen. Es ist $\int X\partial x = Xx - \int x\partial X$. Der zweyte Theil werde so ausgedruckt: $\int\frac{\partial X}{\partial x}x\partial x$, so ist davon das Integral $=\frac{1}{2}x^2.\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{1}{2}\int x^2.\frac{\partial^2 X}{\partial x}$, wenn ∂x unveränderlich genommen wird, d. i. wenn x gleichförmig wächst oder abnimmt. Eben so ist

$$\int x^2.\frac{\partial^2 X}{\partial x}=\int\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.x^2\partial x=\tfrac{1}{3}x^3.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}-\tfrac{1}{3}\int x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^2}.$$

Ferner ist $\int x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^2}=\int\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}.x^3\partial x=\frac{1}{4}x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$ $-\frac{1}{4}\int x^4.\frac{\partial^4 X}{\partial x^3}$, u. s. f.

Aus diesen successiven Integrationen entsteht

$$\int X\partial x=\text{Const.}+X.\frac{x}{1}-\frac{\partial X}{\partial x}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}.\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Die Formel ist in der allgemeinen (141.) enthalten, und entsteht daraus, wenn $a=0$ genommen wird, so daß A der Werth des Integrals für $x=0$ ist, und die Constante giebt

Eine andere Form gab Bernoulli seiner Reihe dadurch, daß er sie nach den Potenzen der Function von x ordnete, und das Differential derselben constant setzte. Es sey u eine Function von x, so ist, wenn ∂u unveränderlich genommen wird,

$$\int u \partial x = \int u \partial u . \frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2} u^2 . \frac{\partial x}{\partial u} - \tfrac{1}{2} \int u^2 . \frac{\partial^2 x}{\partial u}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\int u^2 . \frac{\partial^2 x}{\partial u} = \int u^2 \partial u . \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \tfrac{1}{3} u^3 . \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \tfrac{1}{3} \int u^3 . \frac{\partial^3 x}{\partial u^2}.$$

Ferner

$$\int u^3 . \frac{\partial^3 x}{\partial u^2} = \int u^3 \partial u . \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = \tfrac{1}{4} u^4 . \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} - \tfrac{1}{4} \int u^4 . \frac{\partial^4 x}{\partial u^3},$$

u. s. f. Daher ist

$$\int u \partial x = \text{Const.} + \tfrac{1}{2} . \frac{\partial x}{\partial u} u^2 - \frac{1.1}{2.3} . \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u^3$$

$$+ \frac{1.1.1}{2.3.4} . \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} u^4 - \frac{1.1.1.1}{2.3.4.5} . \frac{\partial^4 x}{\partial u^4} u^5 + \text{etc.}$$

Man sehe Leibn. et Bern. Commerc. epist. T. I. p. 16. 22. 28. 75. und Io. Bernoulli Opp. T. I. p. 125. T. III. p. 488.

147. Taylor hat in seiner Methodus incrementorum p. 38, ein Verfahren angegeben, welches zur Abkürzung der Berechnung nach der Bernoullischen Formel sehr dienlich ist. Es ist erstlich

$$\int X \partial x = Xx - \int x \partial X.$$

Man bezeichne eine noch unbestimmte willkührliche Function von x durch w, setze ihr Differential constant, und führe dieses in jene Formel ein, so daß

$$\int X \partial x = Xx - \int \frac{\partial X}{\partial w} . x \partial w.$$

Es sey $\int x \partial w = p$, so ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial w} \cdot \partial p = p \cdot \frac{\partial X}{\partial w} - \int p \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial w} = p \cdot \frac{\partial X}{\partial w} - \int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} \cdot p \partial w.$$

Man setze $\int p \partial w = q$, so ist

$$\int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} \cdot \partial q = q \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int q \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial w^2}$$

$$= q \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int \frac{\partial^3 X}{\partial w^3} \cdot q \partial w.$$

Auf gleiche Weise sey $\int q \partial w = r$; $\int r \partial w = s$; $\int s \partial w = t$, u. s. f.
und es ergiebt sich

$$\int X \partial x = Xx - p \cdot \frac{\partial X}{\partial w} + q \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - r \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial w^3}$$

$$+ s \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial w^4} - t \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial w^5} + \text{etc.}$$

Die Function w ist so zu wählen, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial X}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden seyn.

148. Exempel. Es sey $X = \sqrt{(aa - xx)}$, so ist $\partial X = -\frac{x \partial x}{X}$. Setzt man $\partial w = + x \partial x$, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{1}{X}; \quad \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} = + \frac{1}{X^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{1}{X^3};$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial w^3} = + \frac{3}{X^4} \cdot \frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{3}{X^5}; \quad \frac{\partial^4 X}{\partial w^4}$$

$$= + \frac{3 \cdot 5}{X^6} \cdot \frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{3 \cdot 5}{X^7}, \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist $p = \int x^2 \partial x = \frac{1}{3} x^3$; $q =$

$\frac{1}{3} \int x^4 \partial x = \frac{1}{3 \cdot 5} x^5$; $r = \frac{1}{3 \cdot 5} \int x^6 \partial x$

$= \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7$, u. s. f.

Also ist, wenn die Bezeichnung X beybehalten wird,

$$\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = Xx + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{X} - \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{X^3}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{X^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{x^9}{X^7} + \text{etc.}$$

Dieselbe Reihe wird nach der Formel I. in (59.) gefunden. Nach der Bernoullischen Formel ist die Rechnung beschwerlich.

149. Taylor giebt noch eine Formel, worin statt der successiven Differentiale von X die von x gebraucht werden. Nämlich es sey nun $X \partial w = \partial p$; $p \partial w = \partial q$; $q \partial w = \partial r$; $r \partial w = \partial s$; u. s. f.; so ist

$$\int X \partial x = \int \frac{\partial x}{\partial w} . X \partial w = p . \frac{\partial x}{\partial w} - \int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w} .$$

Ferner $\int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w} = \int \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} . p \partial w =$

$q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} - \int q . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2}$. Fährt man mit diesen Reductionen fort, so ist

$$\int X \partial x = \text{Const.} + p . \frac{\partial x}{\partial w} - q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}$$

$$+ r . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2} - s . \frac{\partial^4 x}{\partial w^4} + \text{etc.}$$

150. Exempel. Es sey wiederum $X = \sqrt{(aa - xx)}$. Man setze $\partial w = x \partial x$, oder $\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{x}$, so ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = -\frac{1}{x^3}; \quad \frac{\partial^3 x}{\partial w^3} = +\frac{3}{x^5}, \text{ u. s. f.}$$

Da $\partial X = -\frac{x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ist, so ist $\partial w = -X \partial X$, also $X \partial w = -X^2 \partial X$, und $p = -\frac{1}{3} X^3$. Ferner $p \partial w = +\frac{1}{3} X^4 \partial X$, also $q = +\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} X^5$. Weiter ist $q \partial w = -\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} X^6 \partial X$, dadurch $r = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7} X^7$, u. s. f. Also ist, mit Beybehaltung der Bezeichnung X,

$$\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = \text{Const.} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{X^3}{x} + \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{X^5}{x^3} - \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 7} \cdot \frac{X^7}{x^5} + \frac{1 \cdot 1}{7 \cdot 9} \cdot \frac{X^9}{x^7} - \frac{1 \cdot 1}{9 \cdot 11} \cdot \frac{X^{11}}{x^9} + \text{etc.}$$

151. Newtons allgemeine Methode zu integriren, oder wie er es ausdruckt, jede Curve zu quadriren, beruht auf der Interpolation einer gegebenen Reihe von Größen, wozu er in der Methodus differentialis eine Anweisung giebt, (Einschalten S. 51.). Man betrachte in der Differentialformel, $X \partial x$ den Factor X als die Ordinate einer Curve, so ist $\int X \partial x$ die Area derselben für die Abscisse x. Man nehme die Curve für eine parabolische, deren Ordinaten y sind, mit denen einige X übereinkommen. Die Ordinate für $x = 0$ sey $= A$, die Anfangsglieder der Unterschieds-

reihen seyn a, b, c, d, etc, und die Abstände der Glieder gleich groß, so ist (Arithm. Reihen höherer Ordnungen, 7.)

$$y = A + ax + \tfrac{1}{2}b(x^2 - x) + \tfrac{1}{6}c(x^3 - 3x^2 + 2x) + \tfrac{1}{24}d(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) + \text{etc.}$$

Daraus ist

$$\int y\,\partial x = Ax + \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{12}b(2x^3 - 3x^2) + \tfrac{1}{24}c(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \tfrac{1}{720}d(6x^5 - 45x^4 + 110x^3 - 90x^2) + \text{etc.}$$

Die Ordinaten der Curve, oder die Glieder der Reihe, für $x = 0; 1; 2; 3; 4;$ etc. seyn A, B, C, D, E, etc. so ist

$a = B - A;$ $b = C - 2B + A;$

$c = D - 3C + 3B - A;$

$d = E - 4D + 6C - 4B + A;$

u. s. f. (a. a. O. 2.)

Nimmt man drey, vier, fünf, u. m. Glieder, und setzt $x = 2; 3; 4;$ etc. dem Abstande der äussersten Glieder, wenn der Abstand zweyer nächsten zur Einheit genommen wird, so ist, nach der zur Seite bemerkten Anzahl von Gliedern, das Integral $\int y\,\partial x =$

3). $\tfrac{1}{3}(6A + 6a + b)$.

4). $\tfrac{1}{8}(24A + 36a + 18b + 3c)$.

5). $\tfrac{1}{45}(180A + 360a + 300b + 120c + 14d)$.

Setzt man für die Anfangsglieder der Differenzreihen, a, b, c, d, ihre Werthe, so ist das Integral

3). $\tfrac{1}{3}(A + C + 4B)$.

4). $\tfrac{3}{8}(A + D + 3(B + C))$.

5). $\tfrac{1}{45}(14(A + E) + 64(B + D) + 24C)$.

Newton giebt als Beyspiel nur die Formel für vier Ordinaten. Montücla führt in seiner Geschichte der Mathematik Th. III. S. 201. fünf Formeln an, für drey bis

sieben Ordinaten, ohne anzugeben, wer sie berechnet hat. Ich setze die beiden letzten zu den hier berechneten, mit den von mir gebrauchten Bezeichnungen,

6). $\frac{5}{288}(19(A+F)+75(B+E)+50(C+D))$

7). $\frac{6}{840}(41(A+G)+216(B+F)$
$+27(C+E)+272D)$

152. Exempel. Es werden an einer gleichseitigen Hyperbel die Abscissen auf der einen Asymptote genommen, und die Ordinaten der andern parallel gezogen, wie in Fig. 58. Tab. IV. Th. I. Die erste der Ordinaten gehe durch den Scheitelpunct A, so ist (wegen $ACB = 45°$) die Ordinate $AB =$ der Abscisse CB. Eine andere Abscisse CD sey $= 2CB$, so ist die Ordinate $DE = \frac{1}{2}AB$. Man setze $CB = 1$, also $BD = 1$; $AB = 1$; $DE = \frac{1}{2}$. Zwischen AB und ED schalte man fünf Ordinaten ein in gleichen Abständen, so sind diese $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{11}$, da sich die Ordinaten umgekehrt wie ihre Abscissen verhalten; die beiden äussersten sind 1 und $\frac{1}{2}$. Berechnet man die hyperbolische Area ABDM nach der letzten Formel, so ist ihr Werth $= 0,693147\ldots$ welcher bis auf die letzte Ziffer richtig ist. Die Integralrechnung giebt

$$\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x} = l\,\frac{x}{\text{const.}} = lx,$$

wenn die Area bey AB, für $x = 1$, anfängt. Für $x = 2$ ist sie $= \log 2$. Der natürliche Logarithme von 2 ist $= 0,69314718\ldots$

Integralgleichung ist die endliche Gleichung zwischen zwey oder mehreren veränderlichen Größen, die durch die Integrirung einer Differentialgleichung entstanden ist. Wenn die Differentialgleichung vom zweyten oder einem höhern Grade ist, so mag man auch die niedrigern Differentialgleichungen, die aus der höhern hergeleitet sind, relativ Integralgleichungen nennen. Absolut genommen ist Integralgleichung die endliche Gleichung, welche durch die successiven Integrationen hervorgeht.

Daß zur Integration der Differentialgleichungen keine allgemeine Methoden für jede Gattung derselben vorhanden sind, ist in dem Artikel, Integralrechnung, schon bemerkt. In dem gegenwärtigen Artikel insbesondere werden zu den höhern Gleichungen nur einzelne Beyspiele von den nöthigsten Fällen angegeben werden können.

1. Sonderung der veränderlichen Größen in den Differentialgleichungen des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

1. Wenn eine Differentialgleichung die Form $Y\partial y = X\partial x$ hat oder erhält, worin X eine Function von x allein, und eben so Y von y allein ist, so sind die veränderlichen Größen gesondert.

Alsdann wird nach den in dem Artikel, Integralformel, gelehrten Methoden, jede der beiden Differentialformeln integrirt, und man erhält bey Zufügung der Constante, eine endliche Gleichung zwischen x und y. Denn zwey Functionen, deren Differentiale sich gleich sind, sind sich gleich, oder um eine Constante verschieden.

2. Es sey $P\partial x = Q\partial y$, und P so wie Q, sey eine Function von x und y zugleich, so aber, daß jede ein Product von zwey Functionen, einer von x, und einer von y allein sey, so ist die Sonderung sogleich bewerkstelligt, wenn man durch die Division die Function von y aus P, und die von x aus Q wegschafft.

3. Es seyn in der Gleichung, $P\partial x = Q\partial y$, die Functionen P und Q gleichartige, nämlich solche, worin beide veränderliche Größen auf denselben Grad steigen. Man setze $y = ux$, so wird dadurch $\frac{P}{Q} = U$, einer Function von u, und dadurch $\partial y = U\partial x$. Nun ist auch $\partial y = u\partial x + x\partial u$, also ist $u\partial x + x\partial u = U\partial x$, und daher

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{U - u}, \text{ also}$$

$$\log x = \int \frac{\partial u}{U - u}.$$

Nachdem das Integral, $\int \frac{\partial u}{U - u}$, gefunden ist, setzt man darin für u seinen Werth, $\frac{y}{x}$, wodurch die Integralgleichung zwischen x und y erhalten wird. Ist die Function U der veränderlichen u so beschaffen, daß das Integral, $\int \frac{\partial u}{U - u}$, der Logarithmus einer algebraischen Function von u ist, so ist x dieser Function gleich, und die Gleichung zwischen x und u ist algebraisch, daher auch die zwischen x und y.

4. Exempel. Es sey

$$(\alpha x + \beta y)\partial x = (\gamma x + \delta y)\partial y.$$

Die Substitution $y = ux$ giebt hier

$$U = \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}; \; U - u = \frac{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}{\gamma + \delta u},$$

$$\text{und } \frac{\partial x}{x} = \frac{(\gamma + \delta u)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(\delta u + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\beta)\partial u + (\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\beta)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Daher

$$\log x = C - \log \sqrt{(\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\int \frac{\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Das Integral in dem zweyten Gliede des zweyten Theils wird aus Integralformel (25-28.) gefunden. Es sind hier

drey Fälle zu unterscheiden, wenn der Nenner zwey ungleiche reale, zwey gleiche oder zwey unmögliche Factoren hat. In dem ersten ist das Integral logarithmisch, daher die Gleichung zwischen x und u, so wie die zwischen x und y, algebraisch. In dem zweyten ist das Integral des zweyten Gliedes algebraisch: in dem dritten hängt es von Winkeln ab; in beiden Fällen ist die Gleichung zwischen x und y transscendent.

Wenn $\gamma = \beta$ ist, so ist die Gleichung zwischen x und u, also zwischen x und y, algebraisch.

5. Die Differentialgleichung sey

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\partial y.$$

Man setze $\alpha + \beta x + \gamma y = t$,

$$\delta + \varepsilon x + \zeta y = u,$$

so ist

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)x = \zeta t - \gamma u - \alpha\zeta + \gamma\delta,$$

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)y = \beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta.$$

Daher $\partial x : \partial y = \zeta\partial t - \gamma\partial u : \beta\partial u - \varepsilon\partial t$. Zugleich ist $\partial x : \partial y = u : t$. Hieraus ergiebt sich die homogene Gleichung,

$$(\zeta t + \varepsilon u)\partial t = (\beta u + \gamma t)\partial u,$$

deren Integration in (4) gewiesen ist.

6. Wenn $\beta\zeta = \gamma\varepsilon$ ist, so würde die in (5.) gebrauchte Substitution unendlich grosse Werthe für x und y geben. Man setze $\zeta = n\gamma$, (d. i. $n\beta = \varepsilon$) so wird die vorgegebene Gleichung diese,

$$\alpha\partial x + (\beta x + \gamma y)\partial x = \delta\partial y + n(\beta x + \gamma y)\partial y.$$

In dieser setze man $\beta x + \gamma y = z$, so ist

$$(\alpha + z)\partial x = (\delta + nz)\partial y.$$

Aus der angenommenen Gleichung ist $\gamma\partial y = \partial z - \beta\partial x$, also verwandelt sich jene Gleichung in diese,

$$(\alpha\gamma + \beta\delta + \gamma z + n\beta z)\partial x = (\delta + nz)\partial z,$$

oder

$$(\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z)\partial x=(\delta+nz)\partial z.$$

Dadurch ist

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z}.$$

Da der Zähler hier von demselben Grade mit dem Nenner ist, so sondere man durch die Division den unveränderlichen Theil ab. Zur Abkürzung setze man

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{fz+g}, \text{ so ist}$$

$$\partial x=\frac{n\partial z}{f}+\frac{(\delta f-ng)\partial z}{f(fz+g)},$$

und x ist zum Theil eine logarithmische Größe.

7. Ist $\varepsilon=-\gamma$, so daß

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=(\delta-\gamma x+\zeta y)\partial y$$

ist, so ist die Integralgleichung,

$$\tfrac{1}{2}\beta x^2-\tfrac{1}{2}\zeta y^2+\gamma xy+\alpha x-\delta y+\text{Const.}=0,$$

eine Gleichung für einen Kegelschnitt, die in besondern Fällen auch für ein System zweyer geraden Linien seyn, das ist, das Product zweyer Factoren, $a+bx+cy$ und $A+Bx+Cy$, seyn kann.

Der Fall, da hier $\varepsilon=-\gamma$ ist, ist derselbe, da in (4.) $\gamma=-\beta$ ist, wodurch die Integralgleichung algebraisch ist.

8. Es seyn ε und $\zeta=0$, und die Gleichung

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=\partial y.$$

Man setze $\beta x+\gamma y=z$, so wird erhalten,

$$(\alpha\gamma+\beta+\gamma z)\partial x=\partial z,$$

und daraus

$$\gamma x=\log\frac{\alpha\gamma+\beta+\gamma z}{C}.$$

Für z seinen Werth gesetzt, ist

$$\gamma x = \log \frac{\alpha\gamma + \beta + \beta\gamma x + \gamma\gamma y}{C},$$

oder

$$\beta + \gamma(\alpha + \beta x + \gamma y) = Ce^{\gamma x},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

9. Joh. Bernoulli, der zuerst die Integration der homogenen Gleichungen durch die Substitution, $y = ux$, gelehrt hat, gab in den Petersburger Commentarien T. I. (Opp. T. III. p. 108.) noch eine andere Methode an, solche Gleichungen ohne Sonderung der veränderlichen Größen zu integriren. Zu der Differentialgleichung vom ersten Grade,

$$(ax + by)\partial x + (cx + ey)\partial y = 0,$$

gehöre die Integralgleichung,

$$(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau} = C,$$

so sind die vier Größen, α, β, π, τ, zu bestimmen. Man nehme das Differential derselben, mittelst der Logarithmen,

$$\frac{\pi\partial x + \alpha\pi\partial y}{x + \alpha y} + \frac{\tau\partial x + \beta\tau\partial y}{x + \beta y} = 0.$$

Schafft man die Nenner weg durch die Multiplication mit denselben, und vergleicht die Coefficienten von $x\partial x$, $y\partial x$, $x\partial y$, $y\partial y$ mit denen in der vorgegebenen Gleichung, so bestimmen sich die gesuchten Werthe. Bernoulli findet, wenn zur Abkürzung gesetzt wird,

$$\sqrt{(bb + 2bc + cc - 4ac)} = m,$$

daß die gesuchte Integralgleichung ist,

$$(2ax + (b + c - m)y)^{b-c+m}$$
$$\times (2ax + (b + c + m)y)^{c-b+m} = \text{Const.}$$

Den Fall, da $m = 0$ ist, erklärt Bernoulli nicht richtig oder zu unvollständig. Er sagt, die endliche Gleichung, welche der Differentialgleichung Genüge leiste, sey

$2ax + (b + c)y = \text{Const.}$ Vielmehr sind in diesem Falle zwey solche, eigentlich das Product beider, welche die Gleichung auflösen.

Bernoulli bemerkt, daß jede homogene Gleichung durch eine einfache, die für eine gerade Linie, aufgelöset werde. Man setze $y = nx$, also $\partial y = n\partial x$, wo n eine bestimmte Größe ist, die inzwischen mehrerer Werthe fähig ist. Durch diese Substitutionen gehen die veränderlichen Größen aus der Gleichung heraus, und es bleibt eine zwischen den gegebenen Coefficienten und der unbekannten n.

10. In der Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, sind P und Q Functionen von x allein; es sollen die veränderlichen Größen gesondert werden.

Man setze $y = Xu$, wo X eine noch zu bestimmende Function von x ist. Dadurch ist

$$X\partial u + u\partial X = Q\partial x.$$
$$+ PXu\partial x$$

Ist die Function X eine solche Function, daß $\partial X + PX\partial x = 0$ ist, so bleibt $X\partial u = Q\partial x$; also ist $\partial u = \frac{Q\partial x}{X}$, wo der zweyte Theil der Gleichung eine Differentialformel ist, deren Integral sich, wo nicht vollständig, doch durch Annäherung angeben läßt.

Da $\frac{\partial X}{X} = -P\partial x$ ist, so ist $\log X = -\int P\partial x$, und $X = e^{-\int P\partial x}$. Dadurch ist $\partial u = e^{\int P\partial x}.Q\partial x$, und $u = \int e^{\int P\partial x}.Q\partial x$, folglich $y = e^{-\int P\partial x}\int e^{\int P\partial x}.Q\partial x$. Eine Constante braucht in dem Integral, $\int P\partial x$, nicht beygefügt zu werden, nur in dem $\int e^{\int P\partial x}Q\partial x$.

Diese Gleichung gehört zu der Gattung derjenigen, die man linearische genannt hat, solcher, worin die eine der veränderlichen Größen, y, und ihre Diffe-

rentiale nur in der ersten Potenz vorkommen. Der Ausdruck ist aber nicht schicklich gewählt. s. Linearisch.

11. Exempel. $\partial y + \frac{ny\partial x}{\sqrt{(1+xx)}} = a\partial x.$

Hier ist $P = \frac{n}{\sqrt{(1+xx)}}$; $Q = a$;

$\int P\partial x = n\log(\sqrt{(1+xx)}+x)$;

$e^{\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}+x)^n$;

$e^{-\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n$, weil

überhaupt $\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{aa-bb}$ ist. Folglich ist

$y = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n \int a\partial x(\sqrt{(1+xx)}+x)^n.$

Den summatorischen Factor zu entwickeln setze man $\sqrt{(1+xx)}+x = u$, so ist

$x = \frac{uu-1}{2u}$; $\partial x = \frac{(1+uu)\partial u}{2uu}$; also

$\int u^n \partial x = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C.$

Da $(\sqrt{(1+xx)}-x)^n = u^{-n}$, so ist

$y = Cu^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n-1)} + \frac{au}{2(n+1)}.$

Für u sein Werth gesetzt, wird

$y = C(\sqrt{(1+xx)}-x)^n + \frac{na}{nn-1}\sqrt{(1+xx)}$

$- \frac{ax}{nn-1}.$

12. Die Differentialgleichung sey

$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x,$

wo P und Q Functionen von x allein sind.

Man setze $\frac{1}{y^n} = z$, so ist $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial z}{nz}$ und die Gleichung verwandelt sich in diese:

$$-\frac{\partial z}{nz} + P\partial x = \frac{Q\partial x}{z}, \text{ oder}$$

$$\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x.$$

Diese hat dieselbe Form, wie die in (9.) behandelte.

Mit dieser Gleichung haben sich beide Bernoulli und Leibnitz beschäftigt. S. Acta erudit. 1695. 1696. 1697.

13. Die Differentialgleichung sey

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y + x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y) = 0.$$

Man dividire die ganze Gleichung durch xy, so erhält sie die Gestalt:

$$\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} + x^m y^n\left(\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y}\right) = 0.$$

Da $\frac{\alpha\partial x}{x} = \alpha\partial\log. x = \partial\log. x^\alpha$ ist, und so auch die übrigen hier vorkommenden Differentiale, so setze man $x^\alpha y^\beta = t$, und $x^\gamma y^\delta = u$. Es ist $\alpha lx + \beta ly = lt$, also $\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} = \frac{\partial t}{t}$. Eben so $\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y} = \frac{\partial u}{u}$. Dadurch ist

$$\frac{\partial t}{t} + x^m y^n . \frac{\partial u}{u} = 0.$$

Nun hat man noch für x und y ihre Werthe durch t und u zu setzen. Wenn man zur Abkürzung setzt $\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda$, $\delta m - \gamma n = \mu$; $\alpha n - \beta m = \nu$, so ist

$$\frac{\partial t}{t} + t^{\frac{\mu}{\lambda}} . u^{\frac{\nu}{\lambda}} . \frac{\partial u}{u} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{-\partial t}{t^{\mu:\lambda+1}} + u^{\nu:\lambda-1}\partial u = 0.$$

Hierzu ist die Integralgleichung:

$$-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{t^{\mu:\lambda}} + \frac{1}{\nu}u^{\nu:\lambda} = C.$$

14. Die Differentialgleichung sey

$$(y-x)\partial y = \frac{n(1+yy)^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Durch die Substitution $y = \frac{x-u}{1+xu}$ wird die zweyfach irrationale Größe $\sqrt{\frac{1+yy}{1+xx}}$ in die einfach irrationale, $\frac{\sqrt{(1+uu)}}{1+xu}$, verwandelt. Man gebrauche also diese Substitution, um y und ∂y wegzuschaffen, so erhält man die gesonderte Gleichung:

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{u\partial u}{(1+uu)(n\sqrt{(1+uu)}+u)}.$$

Die Gleichung einfacher zu machen, setze man

$$\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+zz}{2z}, \text{ so ist}$$

$$u = \frac{1-zz}{2z};\ \partial u = -\frac{(1+zz)\partial z}{2z^2}.$$

Durch diese Substitutionen wird

$$\frac{\partial x}{1+xx} = -\frac{2(1-zz)\partial z}{(1+zz)(n+1+(n-1)zz)},$$

oder

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{2n\partial z}{n+1+(n-1)zz} - \frac{2\partial z}{1+zz}.$$

Die Integration der Formeln, woraus diese Gleichung besteht, ergiebt sich aus Integralformel (15. 12.)

15. Die Differentialgleichung sey:

$$\partial y + byy\partial x = ax^m \partial x.$$

Dieses ist die von Riccati herrührende, womit die Analysten sich viel beschäftiget haben, s. oben S. 770.

I. Man suche, für welchen Werth von m die Gleichung homogen gemacht werden kann. Zu dem Ende setze man $y = z^n$, so verwandelt sich die Gleichung in diese:

$$nz^{n-1}\partial z + bz^{2n}\partial x = ax^m \partial x.$$

Damit die Exponenten von z und x gleich groß seyn, muß $n = -1$ und $m = -2$ gesetzt werden. Die verwandelte Gleichung ist nun

$$(az^2 - bx^2)\partial x = x^2 \partial z.$$

Setzt man $z = ux$, so wird nach (3.) erhalten:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{auu - u - b},$$

wo beide Theile integrirbar sind.

II. Behält man einen unbestimmten Werth für m, setzt aber $n = -1$, oder $y = \frac{1}{z}$, so ist

$$-\frac{\partial z}{zz} + \frac{b\partial x}{zz} = ax^m \partial x, \text{ oder}$$

$$-\partial z + b\partial x = az^2 x^m \partial x.$$

Man setze $x^m \partial x = f\partial t$, um die Gleichung der vorgegebenen ähnlich zu machen, und dadurch die Integration der einen auf die der andern zu gründen. So ist $\frac{1}{m+1} x^{m+1} = ft$.

Nimmt man $f = \frac{1}{m+1}$, so ist $x^{m+1} = t$; also

$$\partial x = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\partial t}{x^m} = \frac{1}{m+1} \cdot t^{-m:(m+1)} \partial t,$$

und die verwandelte Gleichung ist

$$\partial z + \frac{a}{m+1} \cdot z^2 \partial t = \frac{b}{m+1} t^{-m:(m+1)} \partial t.$$

Diese Gleichung ist der vorgegebenen ähnlich. Kann in einer von beiden die Sonderung der veränderlichen Größen bewerkstelligt werden, so wird die andere mittelst jener aufgelöset. Hat m in jener (der zwischen x und y) den bestimmten Werth m′, in dieser den Werth m″, so ist

$$m'' = \frac{-m'}{m'+1}.$$

III. Man setze allgemeiner $y = Ax^p + x^q z$, und bestimme p, q, A so, daß die verwandelte Gleichung drey Glieder wie die vorgegebene enthalte. Man wird finden, daß zu dem Ende gesetzt werden muß

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{xx}.$$ Dadurch ist

$$\partial y = -\frac{\partial x}{bxx} + \frac{\partial z}{xx} - \frac{2z\partial x}{x^3}, \text{ und}$$

$$yy = \frac{1}{b^2x^2} + \frac{2z}{bx^3} + \frac{z^2}{x^4}.$$ Die vorgegebene Gleichung ist daher diese:

$$\partial z + \frac{bzz\partial x}{xx} = ax^{m+2}\partial x.$$

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, daher $\partial x = -\frac{\partial t}{tt}$, so ist

$$\partial z - bz^2\partial t = -at^{-m-4}\partial t,$$

oder, wenn z mit −z vertauscht wird,

$$\partial z + bz^2\partial t = at^{-m-4}\partial t,$$

eine Gleichung, welche der vorgegebenen ganz ähnlich ist. Ist die eine von beiden integrirbar, so ist es die andere mittelst der hier angewandten Substitutionen auch. Nun ist, für $m = 0$, die Gleichung,

$\partial y + byy\partial x = a\partial x$, integrirbar, da aus derselben ist $\frac{\partial y}{a - byy} = \partial x$. Also ist auch die Gleichung, $\partial z + bz^2\partial t = at^{-4}\partial t$, integrirbar durch die Substitutionen, $t = \frac{1}{x}$, und $z = \frac{1}{bt} - \frac{y}{tt}$, welche dieselbe Form haben, wie diejenigen, durch welche die verwandelte Gleichung aus der erstern entstanden ist. Dadurch wird sie in die erstere verwandelt.

IV. Die Werthe von m, für welche die vorgegebene Gleichung integrirbar ist, sind also 1) $m^{1} = 0$. 2) $m^{11} = -4$. 3) $m^{111} = \frac{+4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$. 4) $m^{1v} = +\frac{3}{4} - 4 = -\frac{8}{3}$. 5) $m^{v} = \frac{+8:3}{-8:3+1} = -\frac{8}{5}$. 6) $m^{v1} = +\frac{8}{5} - 4 = -\frac{12}{5}$. 7) $m^{v11} = \frac{+12:5}{-12:5+1} = -\frac{12}{7}$. u. s. f.

Alle diese Exponenten sind unter den beiden Formen $-\frac{4i}{2i-1}$ und $-\frac{4i}{2i+1}$ begriffen. Durch wiederholte Substitutionen, wie die in II und III. angegebenen sind, welche wechselsweise angewandt werden, kommt man zuletzt auf die Differentialgleichung von der Form $\partial y + byy\partial x = a\partial x$. Z. B. für $m = -\frac{8}{5}$ sind vier solche Operationen erforderlich.

16. Die Methode der Substitutionen, um in einer Differentialgleichung die veränderlichen Größen zu sondern, ist von eingeschränkten Nutzen, weil sie nur selten angewandt werden kann, besonders bey Gleichungen mit mehr als drey Gliedern, man müßte denn zufälliger Weise eine schickliche Substitution errathen. Bey höhern Differentialgleichungen ist sie nicht brauchbar. Hingegen ist die

Methode, durch Hinzufügung eines Factors, der eine gewisse Function der veränderlichen Größen ist, eine Differentialgleichung integrirbar zu machen, der geradeste und natürlichste Weg zur Integration, und auch bey höheren Gleichungen anwendbar.

Es ist freylich auch noch keine allgemeine Methode zur Entdeckung des integrirenden Factors gefunden.

II. Integration der Differentialgleichung durch Multiplication mit einer Function der veränderlichen Größen.

17. In dem Artikel, Differentialgleichung (12—14.), ist bewiesen, daß aus der Gleichung, $\partial V = P \partial x + Q \partial y$, welche aus einer Function V von x und y unmittelbar hergeleitet ist, folget $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Diese letztere Gleichung ist das Kennzeichen derjenigen Differentialgleichungen, welche sich unmittelbar, ohne Umwandlungen, integriren lassen. Um es dazu anzuwenden, müssen P und Q endliche Functionen von x und y seyn.

18. Eine Differentialgleichung kann aber auf verschiedene Art in der Form verändert werden, wodurch die Gleichheit der partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, aufgehoben wird. Es sey $M + aN = b$, eine ursprüngliche Gleichung zwischen x und y, so daß M und N irgend welche Functionen von x und y seyn. Die Differentialgleichung ist $\partial M + a \partial N = 0$. Man schaffe die Constante a durch Verbindung mit der endlichen Gleichung heraus, so wird erhalten: $\partial M + \frac{b - M}{N} \partial N = 0$, oder auch $N \partial M + (b - M) \partial N = 0$. Bey dieser Gleichung kann der Charakter der unmittelbar integrirbaren Gleichungen nicht mehr Statt haben, weil darin der

Differential-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ von der Constante b abhängig gemacht wird, von welcher er nicht abhängen darf, da b bey der Differentiation herausgeht. Die Form der Verhältnißglieder wird dadurch geändert, so aber, daß das Verhältniß $\partial x : \partial y$ für dieselben x und y dasselbe bleibt, wie in der unmittelbaren Differentialgleichung. Wird $b = 0$ genommen, so ist durch Wegschaffung von a, die Differentialgleichung, $N\partial M - M\partial N = 0$, worin ebenfalls die Form des Verhältnisses verändert wird.

Zu der unmittelbaren Differentialgleichung kann auch das Product der endlichen ursprünglichen Gleichung in eine willkührliche Differentialformel, $p\partial x + q\partial y$, additiv oder subtractiv gesetzt werden, wo p und q Functionen von x und y sind. Man sehe von den Umwandlungen der Differentialgleichungen Eulers Differentialrechnung, Th. I. Kap. IX.

19. Die Differentialgleichung, welche unmittelbar aus einer endlichen Gleichung $U = \text{Const.}$ entsteht, sey $M\partial x + N dy = 0$. Sie werden multiplicirt mit einer Function L von x und y, so ist $LM\partial x + LN\delta y = 0$. Man setze $LM = P$; $LN = Q$, so daß $P\partial x + Q\partial y = 0$ ist. Nun sind die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Hieraus folgt, weil $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) - N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right).$$

Sollte $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ seyn, so wäre

$M : N = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)$. Dieses letztere kann nicht Statt finden, wenn nicht L die Function selbst ist, woraus die Differentialgleichung, $M\partial x + N\partial y = 0$, entsteht.

Da L eine jede Function von x und y, oder einer von ihnen seyn kann, so giebt es für jede endliche Gleichung unzählig viele Differentialgleichungen, die alle in der Form verschieden sind, aber in dem Differential-Quotienten übereinkommen.

20. Eine gegebene Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, erfülle die Bedingung der Integrabilität nicht, weil ein Factor (oder Divisor), der eine Function von x und y, oder einer von ihnen ist, weggefallen ist. Dieser Factor (einen Divisor unter dieser Benennung mit begriffen), sey $= R$, so daß die Gleichung, $LP\partial x + LQ\partial y = 0$, der Bedingung der Integrabilität gemäß sey. (Daß L hier das umgekehrte von L in 19. ist, wird keine Irrung machen). Dadurch ist $\left(\frac{\partial . LP}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . LQ}{\partial x}\right)$, das ist,

$$P\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

also

$$L\left(\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right) = Q\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichung für L wird gewöhnlich nicht leichter aufzulösen seyn, als die vorgegebene selbst, weil die Function L nicht allein von zwey veränderlichen Größen, sondern auch von zwey partiellen Differentialquotienten abhängt.

Wenn in (19.) für M gesetzt wird $\frac{P}{L}$, und für N dessen Werth $\frac{Q}{L}$, so wird eben eine solche Gleichung, wie

die hier gefundene erhalten, nur daß der zweyte Theil entgegengesetzt ist.

21. Man pflegt vorauszusetzen, daß zu jeder Differentialgleichung zwischen zwey veränderlichen Größen eine endliche Gleichung gehöre, woraus sie unmittelbar oder mittelbar hergeleitet sey. Euler sagt zwar am Ende des dritten Bandes der Integralrechnung, in dem Supplement, §. 2. er habe sonst schon gezeigt, daß für jede Differentialgleichung, es sey vom ersten oder von einem höheren Grade, ein Factor möglich sey, durch welchen sie integrirbar werde, allein ich habe nicht finden können, wo er dieses ausgeführt hat. D'Alembert sagt in den Opuscules T. IV. p. 255. (1768) ihm sey nicht bekannt, daß jemand bewiesen habe, daß für jede Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y es eine Function derselben gebe, durch welche die Gleichung multiplicirt ein vollständiges Differential werde. Er giebt hierauf einen Beweis, mit Zuziehung geometrischer Vorstellungen, der aber zu dunkel ist. Durch die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = 0$, ist das Differentialverhältniß $\partial x : \partial y$ für jedes x durch das zugehörige, hier freylich noch unbekannte y, bestimmt. Setzt man für $x = a$, die zugehörige $y = b$, welches wegen der noch willkührlichen Constante geschehen darf, so ist dadurch in einer stetigen Reihe das unmittelbar folgende y bestimmt. Daraus ergiebt sich wegen des bestimmten Differentialverhältnisses das auf jenes unmittelbar folgende y, und so immer fortgehend. Eine Curve in derselben Ebene wird durch die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abscissen oder für irgend eine gegebene Abscisse, und durch die Richtungen in jedem folgenden Puncte (das Verhältniß $\partial x : \partial y$) bestimmt. Auch folgen die Halbmesser der Krümmung successiv aus dem in dem Anfangspuncte angenommenen.

22. Ist ein integrirender Factor für eine Differentialgleichung gefunden, so kann man unzählig viele andere finden. Die Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = 0$, der in-

tegrirende Factor $= L$, so daß $LP\partial x + LQ\partial y = \partial Z$, und die Function Z sich durch Integration finden lasse. Es sey φZ irgend eine Function von Z, so ist $(LP\partial x + LQ\partial y)\,\varphi Z = \varphi Z.\,\partial Z$. Der zweyte Theil ist als eine Differentialformel mit einer einzigen veränderlichen Größe auf eine oder andere Art integrirbar. Folglich ist die Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, durch den Factor φZ integrirbar, wenn sie es durch den Factor Z wird.

23. Durch $\int P\partial x$ wird immer ein Integral bezeichnet, das bloß in Absicht auf diejenige veränderliche Größe, deren Differentialzeichen beygefügt ist, genommen wird, wenn gleich P eine Function von zwey oder mehrern veränderlichen Größen ist. Man nenne es kurz ein relatives Integral. Z. B. $\int x^m y^n \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y^n$.

24. Eine Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, sey entweder für sich integrirbar, oder durch einen integrirenden Factor es geworden: es soll die Integralgleichung zu derselben gefunden werden.

Es sey Z die endliche Function, deren Differential $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$. Die Gleichung werde bloß in Absicht auf x integrirt, so ist $Z = \int P\partial x + Y$, wo Y eine Function von y allein, mit einer willkührlichen Constante ist, da y bey dieser Integration als eine unveränderliche Größe behandelt wird. Es enthält also Y alle Glieder der Gleichung, welche von der veränderlichen x frey sind. Nun differentiire man Z in Absicht auf x und y zugleich, so ist

$$\partial Z = P\partial x + V\partial y + \partial Y,$$

wo $V\partial y$ der Theil des Differentials von $\int P\partial x$ ist, der durch die Veränderlichkeit von y entsteht, so wie $P\partial x$ durch die Veränderlichkeit von x erhalten wird. Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen, so ist

$V\partial y + \partial Y = Q\partial y$, also $\partial Y = (Q - V)\,\partial y$, und $Y = \int (Q - V)\,\partial y$.

Folglich ist

$$Z = \int P\partial x + \int (Q - V)\,\partial y,$$

wo $Q - V$ eine Function von y allein ist, weil Y eine solche ist.

24. Integrirt man zuerst in Absicht auf y allein, und bezeichnet das partielle Differential von $\int Q\partial y$ in Absicht auf x durch $U\partial x$, so ist

$$Z = \int Q\partial y + \int (P - U)\,\partial x,$$

wo $P - U$ eine Function von x allein ist.

25. Es ist der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Denn es sey Z eine solche Function von x und y, daß $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Nun ist $Z = \int P\partial x + Y$, und

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y}, \text{ oder } Q = V + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

wo V zur Abkürzung für das erste Glied des zweyten Theils gesetzt ist. Hieraus ist $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, also

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right), \text{ und integrirt } V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Nämlich so wie in dem Differential ∂V bloß x als veränlich betrachtet wird, so auch in der Größe unter dem Integralzeichen.

Oder: es ist $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P$, und $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Aus der Gleichung $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$ folgt auch

$$\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial y\,\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right); \text{ daher ist } \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

und $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wie vorher.

Die Constante zu dem durch V bezeichneten Integral kann eine Function von y seyn, eben so wie die Constante zu $\int P\,\partial x$.

26. Exempel. Es sey $Z = x^m y^n + x^\mu + y^\nu + a$, welche Function alle Arten von Gliedern enthält, die in einer rationalen ganzen algebraischen vorkommen können. Hieraus ist $P = m\,x^{m-1} y^n + \mu x^{\mu-1}$; $Q = n x^m y^{n-1} + \nu y^{\nu-1}$; ferner $V = n x^m y^{n-1}$, also $Q - V = \nu y^{\nu-1}$, und nun rückwärts $Z = \int P\,\partial x + \int (Q - V)\,\partial y = x^m y^n + x^\mu + y^\nu$, wie es angenommen worden.

Auch ist hier $\left(\frac{\partial . \int P\,\partial x}{dy}\right) = n x^m y^{n-1}$, und

$$\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int m n x^{m-1} y^{n-1}\,\partial x = n x^m y^{n-1}.$$

27. Exempel. Es sey $Z = \log\left(x + \sqrt{(xx+yy)}\right)$, so ist (Differentialformel, 14.)

$$\partial Z = \frac{1 + x : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}}\,\partial x + \frac{y : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}}\,dy.$$

Multiplicirt man in dem ersten Bruche Zähler und Nenner durch $\sqrt{(xx+yy)}$, in dem zweyten durch dasselbe und durch $\sqrt{(xx+yy)} - x$, so wird

$$\partial Z = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}\right)dy.$$

Hier ist $\int P\partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(xx+yy)}} =$

$l(x+\sqrt{(xx+yy)})$, und $V = \frac{y:\sqrt{(xx+yy)}}{x+\sqrt{(xx+yy)}}$.

Daher $V = Q$, und $Q - V = 0$, so daß

$Z = \log\left(x+\sqrt{(xx+yy)}\right) + \text{Const.}$

Auch ist hier $\left(\frac{\partial.\int P\partial x}{\partial y}\right) = \frac{y:\sqrt{(xx+yy)}}{x+\sqrt{(xx+yy)}}$

$= \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$; und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$= \int \frac{-y\partial x}{(xx+yy)^{3:2}} = \text{Const} - \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$,

wo die Constante eine Function von y seyn kann, in diesem Falle $= \frac{1}{y}$ ist.

28. Exempel. Die Differentialgleichung,

$(aa+2xy+xx)\,\partial x + (xx+yy-aa)\,\partial y = 0$,

zu integriren.

Hier ist $P = aa + 2xy + xx$; und

$Q = xx + yy - aa$, also $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2x$; und

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2x$, daher die Gleichung an sich integrirbar ist. Nun ist $\int P\partial x = aax + xxy + \frac{1}{3}x^3$, und $V\partial y = xx\partial y$, also $(Q - V)\,\partial y = (yy - aa)\,\partial y$, und $\int (Q - V)\,\partial y = \frac{1}{3}y^3 - aay$, folglich ist die Integralgleichung:

$$aax + xxy + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}y^3 - aay = \text{Const.}$$

In diesem Beyspiele ist es leicht zu bemerken, daß die beiden Glieder, $2xy\partial x + xx\partial y$, aus xxy entstehen. Die übrigen sind alle Differentiale von einer einzigen veränderlichen Größe, daher die Integration ohne eine künstliche Methode sich ergiebt.

29. Zur Erläuterung des angewiesenen Verfahrens bemerke man, daß darum, weil bey der Integrirung von $P\partial x$ die veränderliche Größe y als unveränderlich angesehen wird, das Differential, welches aus derselben entsteht, durch ein gleiches entgegengesetztes gehoben werden muß. Dieses ist das durch $V\partial y$ bezeichnete. Da $Q - V$ eine Function von y allein ist, so ist das Integral, $\int(Q - V)\partial y$ entweder in einer endlichen Gestalt, oder durch eine Reihe zu finden möglich.

30. Wenn das Integral $\int P\partial x$ den Factor $x - f$, oder eine Potenz von $x - f$ als Factor enthält, so ist derselbe Factor auch in $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ enthalten.

Denn es sey $\int P\partial x = U$, einer Function von x und y, und $U = (x - f)^n T$, wo T eine Function von x und y ist. Nun ist $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x - f)^n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, also $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (x - f)^n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, nach (25.). Beide Integrale, $\int P\partial x$ und $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, sind also für $x = f$ zugleich Null, und die Bestimmung der Constante in dem einen bringt zugleich die Bestimmung der Constante in dem andern mit sich.

Euler macht diese Bemerkung allgemeiner. Wenn $\int P\partial x$ für $x = f$ Null ist, so ist, ihm zufolge, für denselben Werth von x auch $\int\partial x\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ Null. Calc. In-

tegr. T. 1. §. 457. Man wird die Bestimmmung, $\int P \partial x = 0$, darauf einschränken müssen, daß sie durch einen gegebenen Werth von x, nicht durch einen von y abhangenden erfüllt werde. Denn in dem Exempel (27.) ist $\int P \partial x = 0$, wenn $x + \sqrt{(xx + yy)} = 1$ ist, aber das Integral $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wird gar nicht Null.

31. Aufg. Für eine gleichartige Gleichung, $P \partial x + Q \partial y = 0$, den integrirenden Factor zu finden.

Es seyn P und Q jede Functionen von n Dimensionen, in Beziehung auf x und y, da die unveränderlichen Größen hier nur bloße Zahlgrößen sind. Durch die Substitution $y = ux$, wird $P = x^n U$, und $Q = x^n V$, wo U und V Functionen von u allein sind. Da $\partial y = u \partial x + x \partial u$ ist, so ist

$$P \partial x + Q \partial y = x^n (U + Vu) \partial x + x^{n+1} V \partial u.$$

Hier ist nach den gemachten Substitutionen, $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$. Dividirt man die Gleichung auf der einen Seite durch $Px + Qy$, auf der andern durch $x^{n-1}(U + Vu)$, so ist

$$\frac{P \partial x + Q \partial y}{Px + Qy} = \frac{\partial x}{x} + \frac{V \partial u}{U + Vu}.$$

Der Theil rechter Hand ist an sich integrirbar, daher auch der Theil linker Hand und der gesuchte integrirende Factor ist $\frac{1}{Px + Qy}$.

32. Es muß also, wenn der Kürze wegen $\frac{P}{Px + Qy} = R$, und $\frac{Q}{Px + Qy} = S$ gesetzt wird, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ seyn. Es verlohnt sich der Mühe, dieses aus der Natur der homogenen Gleichungen herzuleiten.

In dem Artikel, Differentialgleichung, (10.), ist gezeigt, daß, wenn V eine gleichartige Function von n Dimensionen, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$ ist, daraus $Px + Qy = nV$ folget. Nun läßt sich das Differential der unbestimmten Functionen P, Q, folgendergestalt durch die partiellen Differentiale derselben ausdrücken:

$$\partial P = \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\partial Q = \partial x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Daraus ist, nach dem angeführten Satze,

$$nP = x\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$nQ = x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[(Px+Qy)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Px\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right] : [Px+Qy]^2,$$

das ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\right] :$$
$$[Px+Qy]^2.$$

Eben so ist, wenn P und Q, x und y gegenseitig vertauscht werden,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \left[Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - PQ\right] :$$
$$[Px+Qy]^2.$$

Die Werthe von nP und nQ multiplicire man, jenen mit Q, diesen mit P, so geben die beiden gleichen Werthe von nPQ die Gleichung,

$$Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Daher sind die partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, einander gleich.

33. Mit der verwandelten Gleichung, $R\partial x+S\partial y=0$, verfährt man nun so, wie in (24.) angewiesen ist. Es wird meistens bequemer seyn, sich der Methode durch Scheidung der veränderlichen Größen in (3.) zu bedienen, als dieser durch einen integrirenden Factor. Die Gleichung,

$$(\alpha x+\beta y)\,\partial x+(\gamma x+\delta y)\,\partial y=0,$$

welche in (4.) durch Sonderung integrirt ist, würde mittelst eines integrirenden Factors sehr viele Mühe machen. In einzelnen Fällen aber kann es bequem seyn, sich eines solchen zu bedienen.

34. Ex. Die Gleichung $\alpha y\partial x+\beta x\partial y=0$, zu integriren. Hier ist der integrirende Factor $=\frac{1}{(\alpha+\beta)xy}$ oder mit Weglassung des unveränderlichen Factors $=\frac{1}{xy}$, wodurch die verwandelte Gleichung ist, $\frac{\alpha\partial x}{x}+\frac{\beta\partial y}{y}=0$. Die Integrale ist $\alpha lx+\beta ly=C$, oder $lx^{\alpha}y^{\beta}=C$, oder $x^{\alpha}y^{\beta}=C$.

35. Für die Gleichung,

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\,\partial x=(\delta+\varepsilon x+\zeta y)\,\partial y,$$

den integrirenden Factor zu finden, setze man, wie in (5.) geschehen ist, $\alpha+\beta x+\gamma y=t$, und $\delta+\varepsilon x+\zeta y=u$, so ist $(\zeta t+\varepsilon u)\,\partial t=(\beta u+\gamma t)\,du$.

Dieses ist eine gleichartige Gleichung, und daher durch Zufügung eines Factors integrirbar, da sie es im Allgemeinen nicht ist. Setzt man in (31.) t und u für x und y; ferner $P = \zeta t + \varepsilon u$; $Q = -\beta u - \gamma t$, so ist der integrirende Divisor $= \zeta tt + (\varepsilon - \gamma) tu - \beta uu$, in welchem nun wieder für t und u ihre Werthe zu setzen sind.

36. Zuweilen bietet sich der integrirende Factor oder Divisor gleich dar, wie bey der Gleichung, $Xy\partial x + \partial y = 0$, wo dieser Divisor ist y, wenn nämlich X eine Function von x allein ist. Es ist dadurch

$$X\partial x + \frac{\partial y}{y} = 0, \text{ und die Integrale ist}$$

$\int X\partial x + ly = C$. Da $\log. e^z = z$, so ist die Gleichung auch $\log. e^{\int X\partial x} + \log. y = C$ oder $\log. e^{\int X\partial x} y = C$. Daher ist auch $e^{\int X\partial x} y = C$, und $e^{\int X\partial x}$ ist ein Multiplicator, der die Differentialgleichung integrirbar macht.

Es entsteht nämlich aus der endlichen Gleichung, $e^u y = C$. die Differentialgleichung $e^u y\partial u + e^u \partial y = 0$, das ist, $y\partial u + dy = 0$. Hier ist $u = \int X\partial x$; $\partial u = X\partial x$.

37. Aufg. Zu der Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, worin P und Q Functionen von x allein sind, den integrirenden Factor zu finden.

Da der zweyte Theil bloß x enthält, und der erste die Formel in (36.) ist, welche durch die Multiplication mit $e^{\int P\partial x}$ integrirbar wird, so wird die ganze Gleichung durch diesen Factor integrirbar.

Die Integralgleichung ist nun

$$e^{\int P\partial x} y = \int e^{\int P\partial x} Q\partial x,$$

wie in (9.) schon gefunden ist.

38. Exempel. In Joh. Bernoulli Hydraulik, Opp. T. IV. p. 408. kommt folgende Gleichung vor:

$$\alpha z\partial x + (\beta + \gamma x)\partial z = (\varepsilon + \theta x)\partial x.$$

Man gebe dieser die Gestalt,

$$\partial z + \frac{\alpha z \partial x}{\beta + \gamma x} = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x} \partial x,$$

so ist hier $P = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x}$; $Q = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x}$,

und $\int P \partial x = \frac{\alpha}{\gamma} \log (\beta + \gamma x)$. Zur Abkürzung sey $\beta + \gamma x = u^{\gamma : \alpha}$, so ist $\int P \partial x = \log u$, und $e^{\int P \partial x} = e^{\log u} = u$. (Es ist nämlich $\log u$ der Logarithme dieser Exponentialgröße). Also ist der integrirende Factor u oder $(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Es sey $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, so ist

$$\beta + \gamma x = u^m; \; x = \frac{u^m - \beta}{\gamma}; \; \partial x = \frac{1}{\alpha} u^{m-1} \partial u;$$

und die Gleichung ist

$$\partial z + \frac{z \partial u}{u} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{u} + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \frac{\partial u}{u},$$

und durch die Multiplication mit u,

$$u \partial z + z \partial u = \frac{\varepsilon}{\alpha} \partial u + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \partial u.$$

Die Integralgleichung ist

$$u z = \frac{\gamma \varepsilon - \beta \theta}{\alpha \gamma} u + \frac{\theta}{(\alpha + \gamma) \gamma} u^{m+1} + C.$$

Wird x wieder eingeführt, so ist, nach gehöriger Reduction,

$$z = \frac{\varepsilon (\alpha + \gamma) - \beta \theta}{\alpha (\alpha + \gamma)} + \frac{\theta x}{\alpha + \gamma} + C.$$

Man sieht, daß eine sehr einfache endliche Gleichung eine ziemlich zusammengesetzte Differentialgleichung geben kann. Es sind in jener eigentlich nur zwey gegebene Größen. Diese sind aus mehrern zusammengesetzt, und

darauf vertheilt worden. Dann ist vor der Differentiation eine Potenzialgröße als Factor zugesetzt.

39. Die Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x$, wird durch die Substitution $\frac{1}{y^n} = z$ in diese:

$$\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x,$$

verwandelt, und wird also durch einen Factor von derselben Form, wie der in (37.) gefundene integrirt.

40. Auch die Gleichung, $\partial Y + PY\partial x = Q\partial x$, wird durch den Factor $e^{\int x\partial x}$ integrirbar.

41. Aufg. Zu der Differentialgleichung,

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y = x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y),$$

den integrirenden Factor zu finden.

Man suche zuerst für jeden der beiden Theile den einfachsten Factor, und nehme dann den allgemeinen unbestimmten nach (22.) so, daß für beide Theile der Factor derselbe werde. Für den ersten Theil ist nach (34.) ein integrirender Factor $\frac{1}{xy}$, und das Integral $= x^\alpha y^\beta$; daher ein unbestimmter allgemeiner Factor $= \frac{1}{xy}\varphi x^\alpha y^\beta$. Für den zweyten Theil ist der einfachste Factor $= \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$, als wodurch derselbe wird $\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y}$, wovon das Integral ist $\log x^\gamma y^\delta$, oder auch $x^\gamma y^\delta$, weil beides einer unbestimmten Constante gleich seyn muß. Der allgemeine integrirende Factor ist nun hier $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\varphi x^\gamma y^\delta$. Die Functionen seyn die eine die μte Potenz, die andere die νte der Functionalgröße, so muß seyn

$$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}=x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}.$$

Daraus folgt $\mu\alpha=\nu\gamma-m$, und $\mu\beta=\nu\delta-n$, so daß $\mu=\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$; $\nu=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$. Werden nun die beiden Theile der Gleichung, der erste mit $x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}$, der andere mit $x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}$ multiplicirt, so ist die Gleichung integrirbar und, die Integrale ist

$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+$ Const. wo für μ und ν ihre obigen Werthe zu setzen sind.

42. Wenn $\mu=0$, so ist $\log. x^{\alpha}y^{\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+C$. Und auf gleiche Art ist, wenn $\nu=0$ ist, $\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\log. x^{\nu}y^{\delta}+C$.

Ist $\alpha\delta=\beta\gamma$, so verwandelt sich die allgemeine Gleichung in diese:

$$(\alpha y\partial x+\beta x\partial y)(1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n})=0.$$

Dadurch ist theils $\alpha y\partial x+\beta x\partial y=0$, theils $1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n}=0$, also sowohl $x^{\alpha}y^{\beta}=$ Const. als $x^{m}y^{n}=\frac{\alpha}{\gamma}$. Beide Gleichungen geben $x^{\alpha-m}y^{\beta-n}=\frac{C\gamma}{\alpha}$. Dieser Fall entsteht, wenn in der allgemeinen Integralgleichung (40.) die Constante $=0$ gesetzt wird.

43. Wenn für eine Differential-Gleichung sich kein integrirender Factor finden läßt, so versuche man eine Substitution für die veränderlichen Größen, durch welche

die Sonderung möglich wird. Die vorgegebene Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = 0$. Durch die Einführung zweyer andern veränderlichen Größen, t und u, die Functionen von x und y sind, werde eine Gleichung, $R\partial t + S\partial u = 0$, erhalten, welche durch die Division mit einer Function V von t und u eine gesonderte werde, so daß $\frac{R}{V}$ eine Function von t allein, und $\frac{S}{V}$ eine Function von u allein sey. Da nun die Formel, $\frac{R\partial t + S\partial u}{V}$, an sich integrirbar ist, so ist auch die Formel, $\frac{P\partial x + Q\partial y}{V}$, integrirbar, nachdem in der Function V für t und u ihre Werthe durch x und y zurückgesetzt sind.

44. Wenn also eine Differentialgleichung sich in eine gesonderte verwandeln läßt, so ist für sie ein integrirender Factor zu finden möglich. Im Gegentheil wird aber nicht immer eine Sonderung möglich seyn, wo ein integrirender Factor sich angeben läßt. Die Methode, durch Factoren zu integriren erstreckt sich also weiter als die der Sonderung.

45. Da sich keine bestimmte Vorschriften geben lassen, den integrirenden Factor für jeden Fall zu finden, so ist es sehr nützlich, umgekehrt aus einer angenommenen Form des integrirenden Factors die Functionen von x und y zu bestimmen, welche eine durch jenen Factor integrirbare Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, geben. Euler hat die Methode in der Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. III. abgehandelt, womit man nach Lacroix Integralrechnung §. 561—565. vergleichen mag. Die Methode hiezu ist im allgemeinen folgende. Die Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = 0$; der angenommene Factor $= V$, so ist $\left(\frac{\partial . PV}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . QV}{\partial x}\right)$, also $V\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$

$-V\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0$. In P, Q, V sey die Zusammensetzung aus y und x bestimmt, so aber, daß die darin befindlichen Functionen von x, die durch X, X^{1}, X^{11} etc. bezeichnet werden, unbestimmt gelassen werden. Z. B. $P=Xy$ oder $Xy+X^{1}$, oder $X+y$, oder $X+y^{2}$. Auf gleiche Art verhalte es sich mit Q, und eben so mit V, als $V=y^{5}+Xy^{2}+X^{1}y$, oder $\frac{y^{m}}{(1+Xy)^{n}}$, oder $(yy+Xy+X^{1})^{n}$. Ordnet man in der Gleichung für die partiellen Differentialquotienten die Glieder nach den Potenzen von y, und setzt das Aggregat der zu derselben Potenz gehörigen $=0$, so erhält man Bedingungsgleichungen für die Formen der unbestimmt gelassenen Functionen von X, deren also gerade so viele seyn müssen, als man Bedingungsgleichungen erhalten hat.

46. Läßt man in der Gleichung, $P\partial x+Q\partial y=0$, die Functionen P und Q beide auf eine unbestimmte Art sowohl x als y enthalten, und nimmt zum integrirenden Factor die Formel $Px+Qy$, so werden die Functionen P und Q auf folgende Art bestimmt.

In der Formel $\frac{P\partial x+Q\partial y}{Px+Qy}$ setze man $Q=PR$, so wird sie diese: $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$. Um die partiellen Differentiale dieser Function bezeichnen zu können, setze man $\partial R=M\partial x+N\partial y$, wo die Relation zwischen M und N noch zu bestimmen ist. Da die Function $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$ an sich integrirbar seyn soll, so ist zufolge der Bedingungsgleichung für diese Beschaffenheit,

$\frac{1}{\partial y}\partial.\frac{1}{x+Ry}=\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{R}{+Ry}$, weil nun anstatt

P und Q die Functionen $\frac{1}{x+Ry}$ und $\frac{R}{x+Ry}$ gesetzt sind. Folglich ist $\frac{-R-Ny}{(x+Ry)^2} = \frac{Mx-R}{(x+Ry)^2}$. Es ist nämlich $\left(\frac{\partial . Ry}{\partial y}\right) = N+R$; $\left(\frac{\partial . Ry}{\partial x}\right) = Mx$; $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = M$. Die gefundene Gleichung giebt $Mx = -Ny$. Daher ist $\partial R = M\partial x - \frac{Mx\partial y}{y}$ $= My . \frac{y\partial x - x\partial y}{yy} = My . d\frac{x}{y}$.

Damit diese Formel integrirbar sey, muß My eine Function von $\frac{x}{y}$, seyn. Daher ist auch R, eine Function von $\frac{x}{y}$, das ist, R ist eine gebrochne Function von x und y, in welcher die Dimensionen des Zählers und Nenners sich gleich sind. Also ist $\frac{Q}{P}$, als der Werth von R, auch eine solche Function von x und y, und die Functionen P und Q sind gleichartige von derselben Dimension, übereinstimmig mit dem, was in (31.) gefunden ist.

47. Wenn man eine endliche Gleichung zwischen x und y so annimmt, daß sie in zwey Theile zerfällt, in welchen x und y ganz auf einerley Art enthalten sind, so kommt man durch Differentiation auf zwey Differentialformeln für x und y, die völlig ähnlich und sich gleich sind.

48. Eine solche Gleichung ist

M) $\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0$.

Diese differentiirt wird

$$2\beta(\partial x + \partial y) + 2\gamma(x\partial x + y\partial y) + 2\delta y\partial x + 2\delta x\partial y = 0,$$

oder

$$\frac{\partial x}{\beta+\gamma y+\delta x}+\frac{\partial y}{\beta+\gamma x+\delta y}=0.$$

Die Nenner suche man nun so zu bestimmen, daß der erstere bloß von x, der andere bloß von y eine Function sey, und zwar von der Form

$\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}$ und $\sqrt{(A+2By+Cyy)}$.

Es sey $\beta+\gamma x+\delta y=p$; und $\beta+\gamma y+\delta x=q$, so ist erstlich

$$pp=\beta\beta+2\beta(\gamma x+\delta y)+\gamma\gamma xx+\delta\delta yy+2\gamma\delta xy.$$

Von dem Theile rechter Hand ziehe man die mit γ multiplicirte Gleichung M) ab, so ist

$$pp=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy.$$

Eben so ist

$$qq=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx.$$

Es haben also die Nenner p, q die verlangte Form, und es ist nur nöthig, die Größen α, β, γ, δ, durch A, B, C zu bestimmen. Eine von jenen ist willkührlich, und giebt die unbestimmte Constante, wodurch die Integralgleichung eine vollständige wird. Es ist

$$\beta\beta-\alpha\gamma=A;\ \beta(\delta-\gamma)=B;\ \delta\delta-\gamma\gamma=C.$$

Hieraus ist $\frac{\partial+\gamma}{\beta}=\frac{C}{B}$, oder $\partial+\gamma=\frac{C\beta}{B}$, und $\partial-\gamma=\frac{B}{\beta}$, also

$$\gamma=\frac{C\beta}{2B}-\frac{B}{2\beta};\quad \delta=\frac{C\beta}{2B}+\frac{B}{2\beta};$$

$$\alpha=\frac{\beta\beta-A}{\gamma}=\frac{2(\beta\beta-A)B\beta}{C\beta\beta-BB}.$$

Setzt man diese Werthe in die angenommene Gleichung, so erhält man die vollständige Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}+\frac{\partial y}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=0.$$

Euler setzt (Calc. integr. T. I. §. 580.)

$$\alpha=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta A}{\gamma B}(\partial-\gamma)=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta\beta AC}{\gamma BB}$$

$+\frac{2\beta A}{B}$, und findet die Integralgleichung,

$$\beta\beta(BB-AC)+2\beta\gamma AB+2\beta\gamma BB(x+y)$$
$$+\gamma\gamma BB(xx+yy)+2\gamma B(\beta C-\gamma B)xy=0.$$

Hier ist der Quotient $\frac{\beta}{\gamma}$ die Constante. Dieser sey $=a$, so ist

$$a(BB-AC)+2AB+2BB(x+y)$$
$$+\frac{BB}{a}(xx+yy)+2B(C-\frac{1}{a}B)xy=0.$$

49. Hier sieht man, daß die Integrale einer Differentialgleichung algebraisch seyn kann, wenn gleich beide Theile derselben kein solches Integral geben. Auch bleibt die Form der algebraischen Gleichung dieselbe, die Integrale der beiden Theile der Differentialgleichung mögen von den Winkeln oder von Logarithmen abhangen.

50. Euler hat diese Methode Integrale zu finden vorzüglich bearbeitet, zuerst in dem VI. und VII. Bande der neuen Petersburger Commentarien, dann in dem ersten Theile seiner Integralrechnung, Sect. II. Cap. V. VI und in dem Supplement am Ende des dritten Theils. La Grange hat eine Methode zur Integrirung der Gleichung, $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}=\frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, gelehrt, worüber Euler Erläuterungen mitgetheilt hat, in den Actis Acad. Petr. T. II. P. I. 1778. Man sehe noch Cousin Calc. diff. et int. T. II. §. 423—434. Es ist merkwürdig, daß die For-

mel $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$ weder vermittelst Logarithmen noch Winkel integrirt werden kann, und daß doch eine aus zwey solchen Formeln zusammengesetzte Gleichung eine algebraische Gleichung zwischen x und y giebt. Euler zeigt dieses auch von einer Differential-Gleichung, wo die Wurzelgrößen in den beiden Theilen alle Potenzen bis zur vierten enthalten. Die Untersuchung hat ihre, freylich bloß speculative, Anwendung in der Geometrie der Curven, mehrere Bogen derselben Curve zu finden, deren Unterschied eine algebraische Größe ist, oder welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben.

III. Methoden durch Annäherung eine Differentialgleichung aufzulösen.

51. Man setze $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.}$ wo die Exponenten entweder eine zunehmende, oder eine abnehmende Reihe ausmachen. Hieraus ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \text{etc.}$$

Jene Reihe setze man in der Differentialgleichung zwischen x und y für y, diese in eben derselben, nachdem sie durch ∂x dividirt ist, in den Gliedern, welche den Differential-Quotienten enthalten für denselben. Hierauf verfahre man zur Bestimmung der Exponenten und Coefficienten so, wie es in dem Artikel, Function, gewiesen ist, wenn die Exponenten eine arithmetische Reihe ausmachen sollen. Dieses ist inzwischen nicht nothwendig. Die Glieder der Particular-Reihen, welche zu einer und derselben Potenz von x gehören sollen, heben sich einander auf. Auf diesem Umstande beruhen die Bestimmungen der Coefficienten und Exponenten, worin kein Widerspruch entstehen darf. Es muß ein Coefficient unbestimmt bleiben, damit das Integral ein vollständiges werde. Sonst giebt die Reihe nur eine particulare Auflösung.

52. Exempel. Die gegebene Gleichung sey $\partial y + y\partial x = ax^n \partial x$. Es ist daraus

$$-\frac{\partial y}{\partial x} + y - ax^n = 0.$$

Die Substitution der beiden Reihen in (51.) giebt die Particularreihen:

$$+\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} + \text{etc.}$$

$$+y = \qquad + Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.}$$

$$-ax^n = -ax^n.$$

Man sieht hier leicht, daß die Reihe der Exponenten zum Unterschiede die Einheit haben muß. Stellt man die Particularreihen so wie es hier geschehen ist, so ist $\alpha = n+1$; $\beta = \alpha + 1 = n+2$; $\gamma = \beta + 1 = n+3$, u. s. f.

Dadurch ist $A = \frac{a}{n+1}$; $B = -\frac{a}{(n+1)(n+2)}$;

$C = +\frac{a}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; u. s. f.

und $y = Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \text{etc.}$

Stellt man die Reihen folgendergestalt unter einander:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \qquad \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \text{etc.}$$

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \qquad + \text{etc.}$$

$$-ax^n = -ax^n,$$

so ist $\alpha = n$; $\beta = n-1$; $\gamma = n-2$, u. s. f.

$A = a$; $B = -na$; $C = +n(n-1)a$;

$D = -n(n-1)(n-2)a$, u. s. f. und

$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.}$

Die Constante muß in beiden Fällen noch zugefügt werden.

53. Dieses Beyspiel gehört unter die allgemeine Gleichung in (9.), wo für den gegenwärtigen Fall ist $P = 1$; $Q = ax^n$; $\int P \partial x = x$. Dadurch ist $y = e^x \int e^x . ax^n \partial x$. Aus Integralformel, 100. ist, weil das dortige a hier e, die Basis der natürlichen Logarithmen ist, also $la = le = 1$,

$$\int e^x x^n \partial x = e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-} - n(n-1)(n-2)x^{n-2} + \text{etc.}),$$

und $y = ae^{-x} \int e^x x^n \partial x = a(x^n - nx^{n-1} + \text{etc.})$ welches mit der zweyten Reihe ganz übereinstimmt. Sie bricht für ein ganzes n ab. Die erste Reihe kann nur für kleine x gebraucht werden.

54. Bequemer und sicherer wird der Taylorsche Lehrsatz, der schon zu der Annäherung bey Differentialformeln angewandt ist, auch bey Differentialgleichungen gebraucht: bequemer, weil die Coefficienten durch die Differentiation einer Function von x und y gefunden werden; sicherer, weil man das Intervall zwischen zwey Werthen von x in mehrere Theile α theilen, und aus dem Werthe von y, der zu einem Werthe von x gehört, den zu $x + \alpha$ gehörigen, und so successiv aus dem zu $x = a$ gehörigen den für $x = a + n\alpha$ herleiten kann.

55. Es sey nun $y = fx$, wo man zwar die Beschaffenheit der Function, die durch f bezeichnet wird, nicht kennt, aber den Werth derselben für $x = a$ als bekannt annimmt. Es ist.

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial y}{\partial x} . \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{u^2}{1.2} + \text{etc.}$$

(Differenzenrechnung, 38.). Hier wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ als eine Function von x und y gegeben. Daher sind die höhern Differentialquotienten auch solche Functionen. Setzt man

$x = a$, so ist in diesen Functionen auch für x zu setzen a, und für y der zu diesem Werthe von x gehörige, der b sey, und gegeben werden muß. Die Differential-Quotienten für diese Werthe von x und y seyn

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B; \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C, \text{ u. s. f.}$$

Es ist nun für $x = a + u$,

$$y = b + Au + \tfrac{1}{2}Bu^2 + \tfrac{1}{6}Cu^3 + \tfrac{1}{24}Du^4 + \text{etc.}$$

56. Exempel. Die Differentialgleichung sey $dy = (xx + yy)\partial x$. Hier ist $\frac{\partial y}{\partial x} = xx + yy$, also, wenn ∂x constant ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} = 2x + \frac{2y\partial y}{\partial x} = 2x + 2x^2y + 2y^3.$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 + 4xy + \frac{2x^2\partial y}{\partial x} + \frac{6y^2\partial y}{\partial x}$$

$$= 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4$$

$$\frac{\partial^4 y^4}{\partial x^4} = 4y + 8x^3 + 16xy^2$$

$$+ (4x + 16x^2y + 24y^3)\frac{\partial y}{dx}$$

$$= 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4y$$
$$+ 40x^2y^3 + 24y^5$$

Setzt man in diesen Werthen $x = a$, und $y = b$, so ergeben sich die Coefficienten der für y angesetzten Reihe.

57. Damit man im allgemeinen einsehe, wie die Differentialquotienten durch die unmittelbare Abhängigkeit von y modificirt werden, folgt hier die Entwicklung des zweyten und dritten.

Es sey $\frac{\partial y}{\partial x} = V$. und $\partial V = M\partial x + N\partial y$.

wo $N\partial y$ das partielle Differential in Beziehung auf y ist. Es ist nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x} = M + \frac{N\partial y}{\partial x} = M + NV.$$

Man setze $\partial M = m\partial x + n\partial y$; und $\partial N = \mu\partial x + \nu\partial y$, so ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m + nV + \frac{V(\mu\partial x + \nu\partial y)}{\partial x}$$

$$+ \frac{N(M\partial x + N\partial y)}{\partial x}$$

$$= m + nV + \mu V + \nu V^2 + MN + NNV.$$

Hier ist $n = \mu$ (Differentialgleichung, 12.). In den Symbolen für partielle Differentiale ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ V^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

58. Von der ältern Methode handelt ausführlich Kästner in der Anal. d. U. S. 496—548. Die neuere lehrt Euler in der Integralrechnung T. 1. Sect. II. Cap. VII. Man sehe auch La Grange in dem Mém. de l'Acad. de Berlin 1776: La Croix Integralrechn. p. 284—296.

IV. Integration der Gleichungen mit Potenzen und Producten der Differentialien ersten Grades.

59. In geometrischen Untersuchungen, worin Bogen von krummen Linien vorkommen, finden sich Quadrate der Elemente der rechtwinklichten Coordinaten in die Gleichungen eingemischt. Schon um dieser Ursache allein ist es nöthig, von der Integration der angezeigten Gleichungen Beyspiele zu geben.

60. Man bezeichne den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch p.

so daß $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Es sey eine Gleichung zwischen x und p gegeben, worin p auf einen höhern Grad als den ersten steigt. Nun drücke man, wenn die Gleichung auflösbar ist, p durch x aus, so ist p eine Function von x, oder es ist $p = X$. Daher ist $\partial y = X \partial x$, und $y = \int X \partial x$.

61. Oder, wenn es bequemer ist, drücke man x durch p aus, so ist x eine Function von p, oder $x = P$, wo P diese Function bedeutet. Da $\partial x = \partial P$, so ist $\partial y = p \partial P$, und $y = pP - \int P \partial p$. In diesem Falle werden x und y jede durch p bestimmt. Werden die beiden Gleichungen vollständig gegeben, so läßt sich p herausschaffen, und es wird eine Gleichung zwischen x und y erhalten.

62. Läßt sich weder p durch x, noch x durch p bequem ausdrücken, so suche man eine neue Größe einzuführen, durch welche beide sich besser bestimmen lassen.

63. Der Fall ist schwerer, wenn beide veränderliche Größen nebst p in der Gleichung vorhanden sind. Ist sie eine gleichartige, so setze man $y = ux$. Dadurch geht x nebst y heraus, und es bleibt eine Gleichung zwischen u und p, aus welcher die eine durch die andere bestimmt wird. Es ist $\partial y = u \partial x + x \partial u$, das ist $p \partial x - u \partial x = x \partial u$, oder $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Da p durch u gegeben ist, so wird durch Integration eine Gleichung zwischen x und u erhalten, so daß beide, x und y, durch dieselbe u bestimmt werden.

64. Die Differentialgleichung sey $\partial y^2 - \partial x^2 = 0$, das ist, $pp - 1 = 0$. Also ist $p + 1$. Daher $y = x + a$, und $y = -x + b$, wo a und b die Constante in jeder der beyden Gleichungen sind. Beide Gleichungen vereinigt geben

$$(y-x-a)(y+x-b)=0,$$

oder $yy-xx-(a+b)y-(a-b)x+ab=0$. Die Gleichung gehört für ein System zweyer parallelen geraden Linien.

65. Die Differentialgleichung sey

$y\partial x-x\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}=0$, das ist

$y-x\sqrt{(1+pp)}=0$. Da diese gleichartig ist, so setze man $y=ux$, und es ist $u=\sqrt{(1+pp)}$,

daher $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{p-u}$ (63.), oder $\frac{dx}{x}=-\frac{du}{u-p}$.

Nun ist $\partial.\log.(u-p)=\frac{\partial u-\partial p}{u-p}$,

also ist $\int\frac{\partial u}{u-p}=\log(u-p)+\int\frac{\partial p}{u-p}$.

Für u dessen Werth gesetzt, ist

$$\frac{\partial p}{u-p}=\frac{\partial p}{\sqrt{(1+pp)}-p}=(\sqrt{(1+pp)}+p)\partial p.$$

Daher $\int\frac{\partial p}{u-p}=\frac{1}{2}pp+\int\partial p\sqrt{(1+pp)}$

$=\frac{1}{2}pp+\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}+\frac{1}{2}\log.(\sqrt{(1+pp)}+p)$, (Integralformel 69. 50.). Ferner ist $\log.(u-p)$ $=\log.(\sqrt{(1+pp)}-p)=-\log.(\sqrt{1+pp})+p)$. Folglich ist $\log x=C+\frac{1}{2}\log.(\sqrt{(1+pp)}+p)$

$$-\frac{1}{2}pp-\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}.$$

Ist x durch p gefunden, so ist $y=x\sqrt{(1+pp)}$, da $y=ux$ ist.

66. Die Differentialgleichung sey

$y\partial x-x\partial y=a\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, das ist $y-px$ $=a\sqrt{(1+pp)}$. Diese differentiirt giebt die Glei-

chung, $-x\partial p = \frac{ap\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, da $\partial y = p\partial x$ ist.

Hier ist entweder $\partial p = 0$, oder $-x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Das erste giebt $p = \alpha$, einer Constante; das andere giebt ohne Integration x durch p. Da $\partial y = p\partial x$, so ist $\partial y = -\frac{ap\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$, und $y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Dadurch ist $xx + yy = aa$. Diese Auflösung ist nur eine particulare, da keine unbestimmte Constante hinzugefügt werden kann. Der Werth $p = \alpha$ giebt $\partial y = \alpha\partial x$, also $y = \alpha x + \text{const}$. Für diesen Werth von p ist die gegebene Gleichung, $y - \alpha x = a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$, so daß die Constante $= a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$ ist.

67. Die Gleichung, $y\partial x - x\partial y = a\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, entsteht aus der, $y = ax + e$, durch einige Veränderungen. Es ist daraus erstlich, $\partial y = a\partial x$. Schafft man die gegebene a weg, um c hineinzubringen, so entsteht daraus die Gleichung $y\partial x - x\partial y = c\partial x$. Ferner ist $\partial y^2 + \partial x^2 = (1+a^2)\partial x^2$. Setzt man hieraus den Werth von ∂x in jene Gleichung, so ist

$$y\partial x - x\partial y = \frac{c\partial x}{\sqrt{(1+aa)}}\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Nimmt man $c = a\sqrt{(1+aa)}$, so erhält man die in (66.) aufgegebene Gleichung.

68. Die Differentialgleichung sey $y\partial y^5\partial x = a(\partial x^2 + \partial y^2)^2$, welche die Gestalt des Körpers bestimmt, der in einem flüssigen Mittel den geringsten Widerstand leidet. Die Coordinaten x und y sind rechtwinklichte. Die Axe der x ist die Richtung der Bewegung.

Durch die Substitution $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ verwandelt sie sich in diese: $p^5 y = a(1 + pp)^2$, daher

$$y = \frac{a(1 + pp)^2}{p^5}.$$ Hieraus ist

$$\partial y = -\frac{3a\partial p}{p^4} - \frac{2a\partial p}{p^2} + a\partial p.$$

$$\partial x = -\frac{3a\partial p}{p^5} - \frac{2a\partial p}{p^3} + \frac{a\partial p}{p}.$$

$$x = +\frac{3a}{4p^4} + \frac{a}{p^2} + a\log p.$$

Die Gleichung zwischen x und y ist transcendent. Doch können für jede angenommene Werthe von p die zusammengehörigen Werthe von x und y gefunden werden.

V. Integration der Differentialgleichungen vom zweyten Grade.

69. In dem Artikel, Differentio = Differentialgleichung, ist bemerkt, daß die Differentialgleichungen jedes Grades auf zweyerley Art dargestellt werden können, theils so, daß die Symbole der Differentiale selbst in Verbindung mit den veränderlichen Größen gebraucht werden, theils daß die Differentialquotienten statt jener eingeführt werden, wodurch eine Differentialgleichung die Form einer endlichen Gleichung erhält. Hier füge ich noch die Bemerkung hinzu, daß bey der zweyten Form kein Differential constant genommen zu werden braucht, daher bey dieser Form für dieselbe Relation der veränderlichen Größen auch nur eine und dieselbe Relation zwischen den veränderlichen Größen und den Differentialquotienten statt findet. Bey dem Gebrauche der Differentiale selbst entstehen verschiedene Ausdrücke, nachdem das eine oder das andere der Differentiale constant genommen wird. Ein

Beyspiel geben die Werthe des Halbmessers der Krümmung an derselben Curve. Bey der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten oder höheren Grade muß immer eines der Differentiale unveränderlich gesetzt werden, weil sonst die Glieder der Differentialverhältnisse keine bestimmte Relation durch die gegebenen und veränderlichen Größen erhalten, s. Differentio-Differentialgleichung, 12. 15.

70. Euler gebraucht durchgehends die Bezeichnungen, $\partial y = p\partial x$ und $\partial p = q\partial x$, bey einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Wenn aber mehrere veränderliche Größen, die von einander abhangen, in Rechnung kommen, z. B. Coordinaten einer Curve und der zugehörige Bogen, so wird es dienlich seyn, ein Differential, das veränderlich ist, durch dasjenige, das unveränderlich gesetzt wird, mittelst eines Factors, wie ∂y durch $p\partial x$, auszudrucken. Die Relation der Differentiale zu einander muß ergeben, wie die übrigen Differentiale durch das unveränderliche mittelst einer Function von p auszudrucken sind.

71. Z. B. Es seyn x und y die rechtwinklichten Coordinaten einer Curve, s der Bogen, so ist $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Nimmt man ∂s zu dem constanten Differential, so setze man $\partial x = p\partial s$, oder $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, und es ist dann $\partial y = \partial s\sqrt{(1-pp)}$, oder $\frac{\partial y}{\partial s} = \sqrt{(1-pp)}$.

72. Wenn ∂x unveränderlich, und $\partial y = p\partial x$ gesetzt wird, so ist $\partial^2 y = \partial p\,\partial x$. Setzt man diese Ausdrücke in eine Gleichung, worin y fehlt, so läßt sie sich durch ∂x dividiren, und es wird eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen p und x erhalten. Die Auflösung derselben giebt p durch x. Setzt man diesen Werth in die Formel $\partial y = p\partial x$, so erhält man eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y.

Oder wenn sich p nicht füglich durch x ausdrucken läßt, wohl aber x durch p, so setze man für ∂x den Werth durch ∂p und eine Function von p, so wird eine Gleichung für ∂y durch p erhalten. Kann man sowohl x als y durch p darstellen, so läßt sich aus beiden Gleichungen p herausschaffen, so daß eine endliche Gleichung zwischen x und y hervorgeht.

73. Ist y bloß in der ersten Potenz in der Gleichung vorhanden, so ist es eine brauchbare Substitution, $y = uv$ zu setzen. Dadurch ist $\partial y = u\partial v + v\partial u$, und $\partial^2 y = u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u$. Da v und u von einander unabhängig sind, so kann man irgend eine Relation für sie annehmen, und zwar so, daß die transformirte Gleichung in zwey einzelne Gleichungen zertheilt werde, die sich besser behandeln lassen.

74. Man setze $y = e^{\int u\partial x}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so ist $\partial y = u\partial x . e^{\int u\partial x}$; $\partial^2 y = (\partial u\partial x + uu\partial x^2)e^{\int u\partial x}$. Enthält die Gleichung nur drey Glieder, in einem y, in dem andern ∂y, in dem dritten $\partial^2 y$, sie mögen übrigens aus mehrern Theilen nach x zusammengesetzt seyn, so wird sie durch diese Substitution auf eine vom ersten Grade zwischen u und x gebracht.

75. Auch die Substitution $x = e^{\int u\partial y}$ kann brauchbar seyn. Es ist $\partial x = u\partial y . e^{\int u\partial y}$. Wenn ∂x unveränderlich ist, so ist $\partial^2 x = 0$, und $0 = u\partial^2 y + \partial u\partial y + u^2\partial y^2$, also $-\partial^2 y = \frac{u^2\partial y^2 + \partial u\partial y}{u}$. Läßt sich durch diese Substitutionen für x und ∂x beides herausschaffen, so erhält man eine Gleichung vom ersten Grade zwischen u und y.

76. Die Auflösung der Differentialgleichungen ist bis jetzt noch auf gewisse Formen derselben eingeschränkt. Die

leichteste ist, wenn der Differentialquotient $\frac{\partial p}{\partial x}$ (da p $= -\frac{\partial y}{\partial x}$ ist) eine Function von x, oder von y, oder von p allein ist. Diese Differentialgleichungen nennt Euler einfache. Dann folgen die Formen, worin eine der veränderlichen Größen fehlt, wiewohl ihre Differentiale vorhanden sind. Ferner die gleichartigen Gleichungen, solche, worin die veränderlichen Größen zugleich mit ihren ersten und zweyten Differentialen in allen Gliedern gleich große Dimensionen geben. Die Gleichungen, worin eine der veränderlichen Größen nicht über die erste Dimension steigt, können schwierig seyn, mögen aber doch auf Gleichungen vom ersten Grade gebracht werden können. Die Multiplication durch einen schicklichen Factor wird besonders in schweren Fällen angewandt, wiewohl es nicht leicht ist, denselben zu finden. Umgekehrt werden auch hier die Formen der integrirbaren Gleichungen zu einem gegebenen Multiplicator gesucht. Die Auflösung durch einen Reihenausdruck kann kaum anders angewandt werden, als wo die veränderliche y, deren Werth durch x zu finden ist, bloß einfach, nicht als Potenz vorhanden ist.

Die Methoden werden durch Beyspiele am deutlichsten erhellen.

77. Es sey $a\partial y^2 = \partial^2 y$. Diese Gleichung bezieht sich auf ein ausgelassenes constantes Differential ∂x, so daß sie durch Hinzufügung desselben wird $\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$. Setzt man $\partial y = p\partial x$, und $\partial p = q\partial x$, also $\partial^2 y = q\partial x^2$, so ist $aq = p^2$. Zur Integration setzt man für q seinen Werth, so ist $a\partial p = p^2\partial x$, oder $\partial x = \frac{a\partial p}{p^2}$; folglich $x = b - \frac{a}{p}$. Nunmehr ist $\partial y = p\partial x = \frac{a\partial x}{b-x}$, also $y = a \log \frac{c}{b-x}$. Die

beiden Constanten, welche durch die doppelte Integration eingeführt werden, sind b und c.

78. Behandelt man die Gleichung als eine vom ersten Grade, nachdem sie diese Form, $\frac{a\partial^2 y}{\partial y} = \partial y$, erhalten hat, so ist $a \log \frac{\partial y}{c\partial x} = y$, wo die Constante ein unveränderliches Differential $c\partial x$ ist. Dadurch ist $\frac{\partial y}{c\partial x} = e^{y:a}$, und $e^{-y:a}\partial y = c\partial x$. Daraus wird (Differentialformeln 15.) $-ae^{-y:a} = cx - b$, oder $e^{y:a} = \frac{a}{b-cx}$, und $\frac{y}{a} = \log \frac{a}{b-cx}$, wo die Constanten nur eine andere Form haben, als nach der ersten Auflösung.

79. Es sey $\partial y = \frac{a\partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, wo ∂y constant ist. Die Gleichung gehört für die Kettenlinie. Da $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, so ist $q = -\frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$. Die Gleichung verwandelt sich in, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$, oder $pp = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$. Folglich $\partial x = -\frac{a\partial p}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, und $\partial y = -\frac{a\partial p}{p\sqrt{(1+pp)}}$. Dieses giebt (Integralformel, 65, 53.) $x = b + \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$, und

$y = -a\log\frac{\sqrt{(1+pp)}-1}{cp}$, oder $y =$

$+a\log\frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}-1} = +a\log\frac{c[\sqrt{(1+pp)}+1]}{p}$.

Für $x = 0$ sey $y = 0$, und $\frac{1}{p} = 0$, so ist $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$

oder $\sqrt{(\frac{1}{p}+1)} = 1$, also $b + a = 0$, und $b = -a$.

Dadurch wird $c = 1$. Es ist nun $\frac{x+a}{a} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$.

Daraus ist $p^2 = \frac{aa}{x^2+2ax}$; $p^2+1 = \frac{(a+x)^2}{x^2+2ax}$;

$p\partial p = -\frac{aa(x+a)\partial x}{(xx+2ax)^2}$; $\frac{\partial p}{p} = -\frac{(x+a)\partial x}{xx+2ax}$;

folglich $\frac{\partial p}{p\sqrt{(1+pp)}} = -\frac{\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}}$, also

$\partial y = \frac{a\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}}$.

80. Es sey $\partial y^3 = a\partial s\partial^2 x$, wo $\partial s = \sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, und dieses Differential constant ist. Es bleibe $\partial y = p\partial x$, so ist $\partial s = \partial x\sqrt{(1+pp)}$. Da ∂s constant seyn soll, so ist $0 = \partial^2 x\sqrt{(1+pp)} + \frac{p\partial x\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, also ist $\partial^2 x = -\frac{q\partial x\partial y}{1+pp}$. Unsere Gleichung wird nun diese, $\partial y^2 = -\frac{aq\partial s\partial x}{1+pp}$, das ist, $pp = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$, welches dieselbe Gleichung zwischen den Differentialquotienten wie in (79.) ist. Die

Gleichungen für die Differentiale sind nur in der Annahme des constanten Differentials verschieden.

81. Für die zweyte Form, wo ∂s constant ist, setze man $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, so ist $\partial y = \partial s \sqrt{(1-pp)}$. Dann sey auch $q = \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$, und unsere Gleichung ist, $(1-pp)^{\frac{3}{2}} = aq$. Setzt man für q seinen Werth durch ∂p, so ist $(1-pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{a\partial p}{\partial s} = \frac{ap\partial p}{\partial x}$, also

$\partial x = \frac{ap\partial p}{(1-pp)^{3:2}}$, und $\partial y = \partial s \sqrt{(1-pp)}$

$= \frac{\partial x \sqrt{(1-pp)}}{p} = \frac{a\partial p}{1-pp}$. Daraus ist

$x = \frac{a}{\sqrt{(1-pp)}} + b$; und $y = \frac{1}{2} a \, l \frac{1+p}{1-p} + C$.

82. Es sey $y\partial^2 y = \partial y^2$, so ist mit den vorherigen Bezeichnungen, $qy = pp$. Daraus wird $y\partial p = pp\partial x$, ferner $\frac{\partial p}{p} = \frac{p\partial x}{y} = \frac{\partial y}{y}$, also durch Integration $\log. p = \log. \frac{y}{a}$, und $p = \frac{y}{a}$. Nun ist $\partial x = \frac{\partial y}{p} = \frac{a\partial y}{y}$, und daher $x = a \log. \frac{y}{b}$. Die beiden Constanten sind a und b.

83. Es sey $a^2\partial^2 y = (a-y)\partial x^2$, wo ∂x constant ist. Hier ist $a^2 q = a - y$; also $a^2 \partial p = (a-y)\partial x$, und $a^2 p \partial p = (a-y)\partial y$. Die Integration giebt $a^2 p^2 = b^2 - (a-y)^2$. Ferner $\partial x = \frac{\partial y}{p}$

$= \frac{a\partial y}{\sqrt{(b^2-(a-y)^2)}}$. Zur Abkürzung sey $a-y=z$, so ist $\partial x = -\frac{a\partial z}{\sqrt{(bb-zz)}}$, und daraus (Integralformel, 49.) $x = c - a \text{ Ang. sin } \frac{z}{b}$, oder $x = c - a \text{ Ang. sin } \frac{a-y}{b}$.

84. Es sey $(a-y)^2 \partial^2 y = c\partial x^2$, und ∂x constant. Hier ist $(a-y)^2 q = c$; das ist, $\partial p = \frac{c\partial x}{(a-y)^2}$. Daher $p\partial p = \frac{c\partial y}{(a-y)^2}$, und durch Integration, $p^2 = b + \frac{2c}{a-y}$. Da $\partial x = \frac{\partial y}{p}$, so ist $\partial x = \frac{\partial y\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{(b(a-y)+2c)}}$. Setzt man zur Abkürzung $a-y=u$, so ist $\partial x = -\frac{u\partial u}{\sqrt{(bu^2+2cu)}}$, wovon das Integral aus Integralformel 71. gefunden wird.

Für $y=0$, sey $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, so ist $b = -\frac{2c}{a}$, und $\partial x = \frac{(a-y)\partial y}{\sqrt{(ay-yy)}}\sqrt{\frac{a}{2c}}$. Dieser Fall kommt bey der geradlinichten Bewegung eines Körpers vor, der nach einem Mittelpuncte der Kräfte, die sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes verhalten, getrieben wird.

85. An der elastischen Linie ist der Halbmesser der Krümmung umgekehrt proportional der Abscissenlinie, dem Abstande eines Punctes der Curve von der Richtung des

krümmenden Gewichts. Der Halbmesser der Krümmung ist allgemein $= -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ wo die Negation anzeigt, daß die Concavität nach der Abscissenlinie hin gekehrt ist. Es ist $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$. Die Gleichung für die Elastica ist nun $x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$, wo der Factor aa dient, der Abscisse x einen absoluten Werth zu geben. Um bey der Integration Brüche zu vermeiden, setze man $\frac{1}{2}aa$ statt aa, so ist $2x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$. Für q dessen Werth gesetzt, wird $-2x\partial x = \frac{aa\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$. Daraus ist $cc - xx = \frac{aap}{\sqrt{(1+pp)}}$, und hieraus $p^2 = \frac{(cc-xx)^2}{a^4-(cc-xx)^2}$. Da $\partial y = p\partial x$ ist, so ist $\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(cc-xx)^2)}}$. Die Constante c ist die Abscisse für den Punct, wo $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, oder die berührende horizontal ist.

86. Man sieht aus diesen Beyspielen, wie man zu verfahren hat, wenn in einer Differentialgleichung vom zweyten Grade die eine der veränderlichen Größen fehlt. Nachdem eine Gleichung, worin y nicht vorhanden ist, auf eine zwischen den Differentialquotienten p und q nebst der veränderlichen x gebracht ist, setze man statt q dessen Werth $\frac{\partial p}{\partial x}$, so hat man eine Differentialgleichung vom ersten

Grade zwischen x und p. Aus dieser suche man den Werth von x durch p, oder den von p durch x. In dem erstern Falle sey $p = X$, einer Function von x, und es ist $y = \int X \partial x + C$. In dem andern Falle sey $x = P$, einer Function von p, so ist $\partial y = p \partial x = p \partial P$, und $y = Pp - \int P \partial p$. Kann weder x durch p, noch p durch x ausgedruckt werden, so muß man suchen, ob sich nicht beide durch eine neue veränderliche u ausdrucken lassen, so daß $x = U$, und $p = U'$ sey. Dadurch wird $y = \int U' \partial U$.

87. Wenn in einer Differentialgleichung x fehlt, so setze man in der Gleichung zwischen y, p und q für q dessen Werth $\frac{p \partial p}{dy}$, der aus den beiden Werthen, $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, hergeleitet wird. Dadurch entsteht eine Gleichung zwichen y und p. Nun sey $y = P$, einer Function von p, so ist $\partial x = \frac{\partial P}{p}$, also $x = \int \frac{\partial P}{p} = \frac{P}{p} + \int \frac{P \partial p}{pp}$. Oder es sey $p = Y$, einer Function von y, so ist $x = \int \frac{\partial y}{Y}$. Läßt sich weder das eine noch das andere erhalten, so muß man eine neue veränderliche u suchen, wodurch p und y sich ausdrucken lassen.

89. Es sey $\partial s^2 \partial^2 y = X \partial x^4$, wo X eine Function von x ist. Das Differential ∂s sey constant. Es sey $\partial y = p \partial x$, so ist $\partial s = \frac{\partial y \sqrt{(1 + pp)}}{p}$. Da $\partial^2 s = 0$ ist, so ist $\partial^2 y = \frac{\partial p \partial y}{p(1 + pp)}$, und $\partial s^2 \partial^2 y = \frac{\partial p \partial y^3}{p^5}$. Folglich ist $\partial p = X \partial x$, und $p = \int X \partial x + A$.

Nun ist $\partial y = p\partial x = \partial x \int X \partial x + A\partial x$, also

$$y = \int \partial x \int X \partial x + Ax + B.$$

Die Constanten sind A und B.

90. Eine gleichartige (homogene) Differentialgleichung vom zweyten Grade heißt diejenige, worin die veränderlichen Größen, x und y, mit den Differentialen ∂x, ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ in allen Gliedern dieselbe Anzahl von Dimensionen geben, wie in der Gleichung $x^2 \partial^2 y + x\partial x^2 + y\partial y^2 = 0$. Es ist eben eine solche Gattung, wie die homogenen Gleichungen vom ersten Grade (3), wo man aber nicht nöthig hatte, auf die Differentiale ∂x, ∂y zu achten, um die Anzahl der Dimensionen in den Gliedern zu bestimmen.

91. Es sey wie bisher, $\partial y = p\partial x$, $\partial p = q\partial x$, und ∂x constant, so ist $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es ist also p eine Größe von der Dimension Null, und q von der Dimension -1. Die Gleichung werde auf die endliche (M) zwischen x, y, p, q gebracht, so ist diese in Beziehung auf diese Größen, gleichartig, und durch die Substitutionen, $y = ux$, und $q = \frac{v}{x}$, erhalten alle Glieder dieselbe Potenz von x, die also aus der Gleichung herausgeht, so daß eine Gleichung (N) zwischen den drey Größen u, v, p, hervorgeht. Da $\partial y = p\partial x$ ist, so ist $u\partial x + x\partial u = p\partial x$, und daher $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$. Da ferner $\partial p = q\partial x$ ist, so ist $\partial p = \frac{v\partial x}{x}$, also $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{v}$. Folglich ist $\frac{\partial u}{p-u} = \frac{\partial p}{v}$, oder $v\partial u = p\partial p - u\partial p$, (O). Kann man nun aus der Gleichung (N) die Größe v durch p und u ausdrucken, so wird durch die

Substitution dieses Werthes von v in (O) eine Differentialgleichung des ersten Grades zwischen p und u erhalten. Kann aus dieser p durch u dargestellt werden, so ist die Gleichung, $\frac{\partial x}{x} = \frac{du}{p-u}$, eine gesonderte zwischen x und u, so daß daraus sich x durch u ergiebt. Die Gleichung $y = ux$ liefert daher y durch u. Oder man setzt in dem Integral, $\int \frac{\partial u}{p-u}$, für u den Werth $\frac{y}{x}$, so entsteht eine Gleichung zwischen x und y.

92. Exempel. Es sey $x^2 \partial^2 y = x \partial x \partial y + n y \partial x^2$. Durch die Substitutionen $\partial y = p \partial x$, und $\partial p = q \partial x$, entsteht die Gleichung, $qxx = px + ny$.

Durch die Substitutionen, $y = ux$; $q = \frac{v}{x}$, entsteht die Gleichung, $v = p + nu$,

Die Gleichung (O) in (91.) wird nun durch die Substitution des Werthes von v,

$$p \partial u + nu \partial u = p \partial p - u \partial p,$$

$$\text{oder } nu \partial u + p \partial u + u \partial p = p \partial p,$$

wovon die Integrale ist,

$$C + nuu + 2pu = pp.$$

Daraus ist $p = u \pm \sqrt{(C + (n+1)uu)}$.

Nun ist $\frac{\partial x}{x} = \frac{\pm \partial u}{\sqrt{(C + (n+1)uu)}}$,

oder, wenn $n + 1 = mm$ gesetzt, und das Vorzeichen unbestimmt gelassen wird,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{\sqrt{(C + mmuu)}},$$

Die Integration giebt (Integralformel. 50.)

$$\log. x = \frac{1}{m} \log. \frac{mu + \sqrt{(C + mmuu)}}{D},$$

das ist

$$Dx^m = mu + \sqrt{(C + mmuu)}.$$

Hieraus ist, da $y = ux$ ist,

$$Dy^m = mu^{m+1} + u^m \sqrt{(C + mmuu)}.$$

Wenn $n + 1$ eine negative Zahl, $-mm$, ist, so ist $\log x$ ein Winkel.

93. In der Differentialgleichung,

$$\partial\partial y + P\partial x\partial y + Qy\partial x^2 = 0,$$

sind P und Q Functionen von x, und das Differential ∂x ist constant, es soll diese auf eine Gleichung vom ersten Grade gebracht werden.

Man setze $y = e^{\int u\partial x}$, so ist (Differentialformel, 14.), $\partial y = u\partial x. e^{\int u\partial x}$, und $\partial^2 y = (\partial u\partial x + u^2\partial x^2) e^{\int u\partial x}$, daher die reducirte Gleichung,

$$\partial u + uu\partial x + Pu\partial x + Q\partial x = 0.$$

Ist hieraus u durch x gefunden, so ist das Integral, $\int u\partial x$, zu suchen. Durch dieses ist $\log y = \int u\partial x$, als die Gleichung zwischen x und y.

94. Die Differentialgleichung,

$$\partial^2 y + P\partial y\partial x + Qy\partial x^2 = X\partial x^2,$$

worin P, Q, X Functionen von x sind, und ∂x constant genommen wird, auf eine Gleichung vom ersten Grade zu bringen.

Man setze $y = uv$, so wird die Gleichung diese:

$$u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pu\partial x\partial v + Pv\partial x\partial u + Quv\partial x^2 = X\partial x^2.$$

Hieraus mache man zwey Gleichungen,

I. $\partial^2 v + P\partial x\partial v + Qv\partial x^2 = 0.$

II. $2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pv\partial x\partial u = X\partial x^2.$

Die erstere wird nach (93) integrirt, und daraus v durch x gegeben. In der zweyten setze man $\partial u = s\partial x$, so ist

III. $v\partial s + 2s\partial v + Psv\partial x = X\partial x$.

Diese Gleichung wird durch die Multiplication mit $ve^{\int P\partial x}$ integrirbar, so daß die Integrale wird

IV. $vvse^{\int P\partial x} = \int e^{\int P\partial x} Xv\partial x$,

wo v eine aus I. gefundene Function von x ist. Hieraus wird nun s durch x gefunden, und daraus u auch durch x mittelst der Integration der Gleichung, $\partial u = s\partial x$. Da nun u und v durch x gegeben werden, so ist auch $y = uv$ durch x erfindbar.

Diese verwickelten Operationen können große Schwierigkeit machen, wenn die eingeführten Größen nicht anders als durch Reihen sich darstellen lassen.

Euler hat sich früh mit der Auflösung dieser Gleichung beschäftiget, in den ältern Petersburger Commentarien T. X. Ihre Auflösung durch Reihen hat er in der Integralrechnung gewiesen. T. II. Cap. VII. VIII. Einen besondern Fall hat er hernach in den neuen Petersburger Commentarien, T. XVII. 1773, betrachtet, und in einer handschriftlich nachgelassenen, (in der neuen Ausgabe der J. R. T. IV. p. 533) die Fälle zu finden gelehrt, in welchen die Gleichung, $(1 - axx)\,\partial^2 y - bx\partial x\partial y - cy\partial x^2 = 0$, integrirbar ist. Sehr ausführlich hat Pfaff die Gleichung, $x^2(a + bx^n)\,d^2y + x(c + ex^n)\,\partial y\partial x + (f + gx^n)\,y\partial x^2 = X\partial x^2$, behandelt, und die Fälle der Integrabilität herausgesucht. Disquisitiones analyticae, p. 135 bis 224. In den Abhandlungen der Societät zu Verona, T. II. P. I. ist eine hieher gehörige Abhandlung von Lorgna enthalten.

95. Leichter ist der Fall, wenn

$$\partial^2 y + Qy\partial x^2 = X\partial x^2$$

ist. Hier ist, wenn wiederum $y = uv$ gesetzt wird,

I. $\partial^2 v + Q v \partial x^2 = 0.$

II. $2 \partial u \partial v + v \partial^2 u = X \partial x^2.$

III. $v \partial s + 2 s \partial v = X \partial x.$

Die letztere multiplicire man mit v, als einer Function von x, so ist die Integrale

IV. $v v s = \int X v \partial x.$

Also ist

$$s = \frac{\int X v \partial x}{v v}; \; u = \int \frac{\partial x}{v v} \int X v \partial x; \; y = v \int \frac{\partial x}{v v} \int X v \partial x.$$

96. Diese Gleichungen gehören zu den sogenannten linearischen. In besondern Fällen wird man die Auflösung leichter machen, wenn man einen integrirenden Factor sucht, wie in dem folgenden Beyspiele, welches in der Untersuchung über die Perturbationen des elliptischen Laufes der Planeten brauchbar ist.

97. Es sey $\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} + m^2 y = a + b \cos \varphi,$

wo ω und φ Winkel sind, die so von einander abhangen, daß $\partial \varphi = n \partial \omega$ ist, wobey $\partial \omega$ constant gesetzt wird.

Sie werde zuerst mit $\sin m\omega \,.\, \partial \omega$ multiplicirt, so wird durch die Integration,

$$\sin m\omega . \frac{\partial y}{\partial \omega} - m y \cos m\omega =$$

$$- \frac{a}{m} \cos m\omega - \frac{b}{2(n+m)} \cos(\varphi + m\omega)$$

$$+ \frac{b}{2(n-m)} \cos(\varphi - m\omega) + A.$$

Ferner werde sie mit $\cos m\omega \,.\, \partial \omega$ multiplicirt, so wird durch die Integration,

$$\cos m\omega . \frac{\partial y}{\partial \omega} + m y \sin m\omega =$$

$$+ \frac{a}{m} \sin n\omega + \frac{b}{2(n+m)} \sin(\varphi + m\omega)$$
$$+ \frac{b}{2(n-m)} \sin(\varphi - m\omega) + B.$$

Es sind A und B die durch die Integration eingeführten Constanten.

Die erstere Gleichung werde mit $\cos m\omega$, die andere mit $\sin m\omega$ multiplicirt, so entsteht durch Subtraction der erstern von der zweyten

$$my = \frac{a}{m} + \frac{mb}{mm - nn} \cos\varphi - A \cos m\omega$$
$$+ B \sin m\omega,$$

wo das zweyte Glied des zweyten Theils durch Zusammenziehung der Glieder $+ \frac{b \cos\varphi}{2(n+m)} - \frac{b \cos\varphi}{2(n-m)}$, entstanden ist. Die beiden Glieder, $A \cos m\omega - B \sin m\omega$, kann man bequem in ein einziges vereinigen, $D \cos(\eta + m\omega)$. Denn es ist $D \cos(\eta + m\omega) = D \cos\eta \,.\, \cos m\omega - D \sin\eta \,.\, \sin m\omega$. Ist nun $D \cos\eta = A$; $D \sin\eta = B$, so ist

$$y = \frac{a}{mm} + \frac{b}{mm - nn} \cos\varphi - D \cos(\eta + m\omega),$$

wo statt $\frac{D}{m}$ gesetzt ist D, da eines so gut wie das andere eine Constante bedeutet. Das Integral ist vollständig, weil zwey Constanten D und η hineingekommen sind.

Wenn der zweyte Theil der vorgegebenen Gleichung mehrere Glieder wie $b \cos\varphi$ erhält, so wird für jedes derselben in dem Werthe von y ein Theil, wie

$\frac{b}{mm - nn} \cos\varphi - D \cos(\eta + m\omega)$, erhalten, wo n

und die beiden Constanten die zu jedem der durch φ allgemein bezeichneten Winkel gehörigen Größen sind.

98. Als Beyspiel, ein System von Differential-Gleichungen des zweyten Grades zu integriren, diene folgendes, welches aus einem Aufsatze von Gauß über die Abweichung fallender Körper von der lothrechten, in Benzenbergs Versuchen über die Umdrehung der Erde, 1804. S. 369. genommen ist, wo aber nur bloß die Integralen ohne die Analysis beygefügt sind. Es ist

$$\text{I.}\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2na\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2na.\frac{\partial x}{\partial t} + 2nb.\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2nb.\frac{\partial y}{\partial t} + g = 0.$$

Das Differential ∂t ist unveränderlich gesetzt. Es ist $a = \sin\alpha$; $b = \cos\alpha$, daher $aa + bb = 1$.
Aus I. ist

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial x}{\partial t} - 2nay + A = 0.$$

Aus III. ist

$$\text{V.}\quad \frac{\partial z}{\partial t} - 2nby + gt + B = 0.$$

Dadurch wird aus II. die Gleichung

$$\text{VI.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nn(aa + bb)y - 2nbgt - 2n(Aa + Bb) = 0.$$

Da $aa + bb = 1$ ist, so ist

$$\text{VII.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nny - 2nbgt - 2n(Aa + Bb) = 0.$$

Diese Gleichung werde mit $\sin 2nt.\, dt$ multiplicirt, so wird durch Integration wie in (97.) erhalten

$$\text{VIII.}\quad \sin 2nt.\frac{\partial y}{\partial t} - 2ny\cos 2nt + bgt\cos 2nt - \frac{bg}{2n}\sin 2nt + (Aa+Bb)\cos 2nt + C = 0.$$

Dieselbe Gleichung werde mit $\cos 2nt.\, \partial t$ multiplicirt, und dann integrirt, so ist

$$\text{IX.}\quad \cos 2nt.\frac{\partial y}{\partial t} + 2ny\sin 2nt - bgt\sin 2nt - \frac{bg}{2n}\cos 2nt - (Aa+Bb)\sin 2nt + D = 0.$$

Diese Gleichungen wie in (97.) combinirt geben

$$\text{X.}\quad 2ny = bgt + C\cos 2nt - D\sin 2nt + Aa + Bb = 0,$$

oder

$$\text{XI.}\quad 2ny = bgt - E\sin(2nt - \mathfrak{A}) + Aa + Bb.$$

Nun werden die beiden andern veränderlichen, x und z, leicht gefunden. Aus IV. ist

$$\text{XII.}\quad x = \tfrac{1}{2}abgt^2 - (Ab^2 - Bab)t + \frac{Ea}{2n}\cos(\mathfrak{A}2nt-) + F;$$

und aus V.

$$\text{XIII.}\quad z = G + \frac{Eb}{2n}\cos(2nt - \mathfrak{A}) - \tfrac{1}{2}a^2gt^2 + (Aab - Ba^2)t.$$

Die Constanten zu bestimmen, müssen die Werthe von

$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$, x, y, z für $t = o$ bekannt seyn, oder angenommen werden.

99. Man bemerke an dem Beyspiele (97.), daß durch die erste Integration zwey vollständige Differentialgleichungen vom ersten Grade gefunden sind, durch deren Verbindung, ohne nochmahlige Integration, die endliche Gleichung gefunden wird. Allgemein hat jede Differentialgleichung vom zweyten Grade zwey Differentialgleichungen des ersten Grades zu ihren Integralen. Man bezeichne eine endliche Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y durch $M = o$; ihre erste Differentialgleichung durch $P = o$, ihre zweyte durch $Q = o$. Sind in den beiden Differentialgleichungen noch die willkürlichen Constanten, A und B, enthalten, wie es in dem Beyspiele (97.) der Fall ist, so lassen sie sich durch Verbindung derselben mit der Gleichung $M = o$ herausschaffen. Es entsteht nun eine Differentialgleichung vom zweyten Grade, $V = o$, die von den willkührlichen Größen unabhängig ist, wie sie es seyn muß. Ferner leite man aus den beiden Gleichungen, $M = o$, und $P = o$, durch Elimination der einen und der andern Constante zwey Differentialgleichungen ersten Grades, $R = o$, $S = o$, her, in deren ersterer bloß A, in der andern bloß B enthalten sey. Durch die Differentiation beider erhält man eine und dieselbe Differentialgleichung des zweyten Grades, weil in dieser die Constanten fehlen, das ist, diejenigen Größen, welche auf die Differentialquotienten vom zweyten Grade keinen Einfluß haben. Sie ist also mit der $V = o$ einerley. Diese hat folglich zwey Differentialgleichungen vom ersten Grade zu Integralen.

Ueberhaupt hat eine Differentialgleichung vom nten Grade n vollständige Differentialgleichungen vom $(n - 1)$ten Grade zu Integralen, vermittelst deren es bisweilen möglich seyn wird, die endliche vollständige In-

tegralgleichung zu finden. Fontana hat zuerst diese Bemerkung gemacht. Cousin traité de calcul diff. et int. T. I. nr. 262.

100. Die Untersuchung, wie Differentialgleichungen vom zweyten Grade durch Zufügung eines Factors integrirbar werden, und die Bestimmung der Relationen zwischen den Functionen der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung und einem Factor von gewisser Form, damit jene durch diesen integrirbar werde, sind so verwickelt, daß sie sich nicht mehr für das gegenwärtige Werk eignen. Man sehe Eulers Integralrechnung, T. II. Sect. I. Cap. V. VI. Wegen der Integrationen durch Reihen muß ich ebenfalls auf dieses Werk verweisen. In der neuen Ausgabe sind noch zwey handschriftlich hinterlassene Abhandlungen über die Differentialgleichungen vom zweyten Grade hinzugekommen.

101. Die Integration der Differentialgleichungen, die noch über den zweyten Grad hinausgehen, sind begreiflich noch viel schwieriger, daher ich sie hier ganz übergehe. Diejenigen, welche sie anzuwenden haben, werden wissen, sich darüber Belehrungen zu verschaffen. Die Quellen hat la Croix in dem Verzeichnisse vor dem zweyten Theile seines Werks angezeigt. D'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1748; de l'Acad. de Paris, 1767 u. 1769; Miscell. Taurinensia, T. III. La Grange in Mém. de l'Acad. de Berlin, 1775; Misc. Taurin. T. III. la Place in den Misc. Taur. T. IV. Lexell in den Act. Ac. Petr. 1777 u. 1779. Lorgna in den Mem. della Soc. Italiana, T. II. In Eulers Integralrechnung ist der zweyte Abschnitt des zweyten Theils dieser Untersuchung gewidmet. Dazu kommen noch in der neuen Ausgabe zwey handschriftlich hinterlassene Aufsätze.

102. Die Integration der Differentialgleichungen mit drey veränderlichen Größen, verspare ich zu dem Artikel, Partielle Differentiale, wo sich mehr Raum zu An

wendungen dieser Rechnung finden wird. Die Variationsrechnung an ihrem Orte.

Interpolation, s. Einschalten.

Interscendens, ein Kunstwort, wodurch Potenzen mit irrationalen Exponenten von Einigen bezeichnet sind, z. B. $z^{\sqrt{2}}$. Leibnitz nannte auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten interscendentia. Opp. T. III. p. 107. Die Curven, in deren Gleichungen Potenzen der veränderlichen Größen mit irrationalen Exponenten vorkommen, nannte Leibniz interscendentes, weil sie gleichsam zwischen den algebraischen und transscendenten in der Mitte sind.

Inversa methodus tangentium, umgekehrte Methode der Berührenden, ist das Verfahren aus gegebenen Eigenschaften der Berührenden an einer Curve oder der Normalen die Gleichung für die Curve zu finden. Die directe Methode bestimmt aus der Gleichung für jeden Punct der Curve die Lage der Berührenden.

Z. B. die Curve zu finden, an welcher die Subtangente $= \frac{yy}{a+x}$ ist. Da der allgemeine Ausdruck für die Subtangente ist $\frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie, 13), so ist $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{yy}{a+x}$; also $(a+x)\partial x = y\partial y$. Daher $ax + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, oder $2ax + xx = yy$, wenn die Constante $= 0$ gesetzt wird. Dieses ist die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel, wenn die Abscissen auf der Hauptaxe vom Scheitel an genommen werden.

Da die Gleichung durch Integration gefunden wird, so hat man auch bisweilen die Integralrechnung selbst die

umgekehrte Methode der Berührenden genannt. Doch ist es besser, die Benennung auf das erklärte Verfahren einzuschränken. Die Beaunische Aufgabe war die erste dieser Art.

Inverse bezeichnet bey Proportionen, daß die zusammengehörigen Größen in ungleichnamigen Gliedern zu stehen kommen. Z. B. bey gleichen Kreisbogen verhalten sich die zugehörigen Winkel inverse wie die Halbmesser. Sind die Halbmesser R, r, die Winkel W, w, so ist $R : r = w : W$. Bey der Zusammensetzung der Verhältnisse kommen die Glieder derjenigen einzelnen Verhältnisse, in welchen diese entgegengesetzte Stellung Statt hat, ententweder als Factoren in einer solchen Stellung, oder als Divisoren in dasjenige Glied, welches demjenigen gleichnamig ist, worin sich die zugehörige Größe befindet. Z. B. der räumliche Inhalt zweyer Körper verhält sich directe wie das Gewicht und inverse wie die Dichtigkeit. Sind die Räume R, r, die Gewichte G, g, die Dichtigkeiten D, d, so ist

$$R : r, = G . d : g . D, \text{ oder } R : r = \frac{G}{D} : \frac{g}{d}.$$

Inversio eines Verhältnisses ist nach Einigen der lateinische Ausdruck für das, was Euklides ἀναστροφὴ λόγου nennt, die Vergleichung des Vordergliedes mit dem Ueberschusse desselben über das Hinterglied. Andere nennen es conversio. Lorenz nennt dieses Verhältniß ein zurückkehrendes.

Involute nennen einige die Curve, welche durch die Abwickelung einer andern erzeugt wird. Der Ausdruck ist nicht schicklich. Besser wird man sie die evolvirende nennen.

Involution heißt zuweilen die Erhebung auf eine Potenz. Man könnte auch die Verwandlung eines

Aggregats in ein Product aus zwey oder mehr Factoren ine Involution nennen, so wie man die entgegengesetzte Operation eine Evolution nennt. Eine neue merkwürdige Art von Involution ist die von Hindenburg angegebene combinatorische, s. Combination, 39.

Irrational ist ein Verhältnißbegriff, für Größen, deren eine nicht aus gleichen Theilen der andern zusammengesetzt werden kann, wie die Diagonale eines Quadrats oder Würfels in Beziehung auf die Seite jenes oder dieses. Wenn eine Größe schlechtweg irrational heißt, so ist dieses in Beziehung auf die Einheit zu verstehen. So sind die Quadratwurzeln aller ganzen Zahlen, die sich nicht unter den ganzen Zahlen finden, irrationale Zahlen. Ein irrationales Verhältniß ist zwischen Größen, für welche kein gemeinschaftliches Maaß Statt hat.

Die Arithmetik der Irrationalgrößen hat zum Gegenstande die Vergleichung der verschiedenen Gattungen dieser Größen, und der aus solchen und rationalen zusammengesetzten. Euklides hat vielen Fleiß darauf gewandt. Das zehnte Buch seiner Anfangsgründe handelt ganz davon, und enthält 117 Sätze. Er nennt Größen incommensurabel (ἀσυμμετρα), für welche sich gar kein gemeinschaftliches Maaß finden läßt, nennt aber gerade Linien, deren Quadrate mit dem von einer angenommenen Linie commensurabel sind, ob sie gleich selbst es nicht sind, rational (ῥηται), gleich denen, die der Länge nach mit jener commensurabel sind, und solche, deren Quadrate mit dem Quadrate der angenommenen Linie nicht commensurabel sind, irrationale (ἄλογοι). Ein Raum, der mit dem Quadrate der angenommenen Linie (der Vergleichungs-Linie) incommensurabel ist, heißt irrational. Unter Potenz (Vermögen, δυναμις) versteht Euklides bloß Quadrate, und daher bedeutet der Ausdruck, eine gerade Linie vermag oder potenzirt (δυνατα) einen Ram das Quadrat dieser Linie ist dem Raume gleich.

Der eigentliche Gegenstand der Euklidischen Abhandlung sind gewisse Formen der irrationalen Größen, das Wort in unserer, Anfangs erklärten Bedeutung genommen. Euklides hat für sie eigene Kunstbenennungen. Die Erklärungen derselben mittelst der Bezeichnungen unserer Buchstabenrechnung werden für diejenigen nützlich seyn, welche die Euklidische Methode studieren wollen. Junge Analysten werden wohl thun, sich mit ihr bekannt zu machen, um den Sachen eine andere Ansicht abzugewinnen. Die Buchstaben a, b, c, bedeuten gerade Linien, deren Verhältnisse rational sind, m, n, p, rationale, ganze oder gebrochene Zahlen, $\sqrt[4]{m}$, $\sqrt[3]{m}$, u. dergl. irrationale Wurzeln.

I. Die Linie, welche das Rechteck von den beiden Linien $a\sqrt{m}$ und $b\sqrt{n}$ potenzirt, oder $\sqrt{ab}\,.\,\sqrt[4]{mn}$, heißt eine Mediale (μεση). (22. Satz.)

Ein mediales Rechteck hat die Form $ab\sqrt{m}$, oder $ab\sqrt{mn}$. Dieses zeigt Euklides nicht ausdrücklich an; allein es erhellt aus seinen Beweisen. So nennt er (S. 25.) das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[4]{m}$ und $b\sqrt[4]{m}$ medial, und (S. 26.) so das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[2]{mn^2}$ und $b\sqrt[4]{mp^2}$.

II. Die Zusammengesetzte, $a\sqrt{m}+b\sqrt{n}$, heißt eine Binomiale, oder ein Binomium (ἡ ἐκ δυο ὀνοματων). Statt einer der Wurzeln mag auch eine rationale Zahl stehen. S. 37. Euklides unterscheidet zwey Gattungen, jede mit drey Arten der Binomialen, wovon in dem Artikel, Binomium, Nachricht ertheilt ist. Das Quadrat der Binomiale ist $= ma^2+nb^2+2ab\sqrt{mn}$.

III. Die Zusammengesetzte, $a\sqrt[4]{m}+b\sqrt[4]{\frac{1}{m}}$,

heißt die erste Bimediale. Das Quadrat derselben ist $= (ma^2 + b^2)\sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab$.

IV. Die zusammengesetzte, $a\sqrt[4]{m} + b\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}$, heißt die zweyte Bimediale. Das Quadrat derselben ist $= (ma^2 + nb^2)\sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab\sqrt{n}$.

V. Die Zusammengesetzte, $\sqrt{(aa + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa - ac\sqrt{n})}$, heißt die größere Irrationale. Es ist $nc^2 = a^2 - mb^2$, wodurch das Rechteck beider Theile ein Mediales wird. Das Quadrat der ganzen ist $= 2aa + 2ab\sqrt{m}$.

VI. Die Zusammengesetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} = ac\sqrt{n})}$, heißt die ein Rationales und Mediales potenzirende (ρητον και μεσον δυναμενη). Es ist $nc^2 = ma^2 - b^2$. Das Quadrat der ganzen ist $2aa\sqrt{m} + 2ab$.

VII. Die Zusammengesetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} - ac\sqrt{n})}$, heißt die zwey Mediale potenzirende, wenn $nc^2 = ma^2 - pb^2$, wodurch das Quadrat der ganzen $= 2aa\sqrt{m} + 2ab\sqrt{p}$ ist.

VIII. Der Unterschied $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ heißt eine Apotome. Davon sind zwey Gattungen, jede mit drey Arten, s. Apotme.

IX. Hier bildet Euklides ebenfalls fünf Irrationalgrößen, wie die in III. bis VII., worin der zweyte Theil subtractiv ist. Er nennt sie die erste und die zweyte Medialapotome: die kleinere Irrationale; die

mit einem Rationalen ein Mediales ausmachende; die mit einem Medialen ein Mediales ausmachende.

Euklides zeigt (S. 55-60) daß die sechs Binomialen zur Wurzel eine der von II. bis VII. genannten Irrationalen haben. Er zerlegt nämlich das Rechteck von einer dieser Binomialen und einer Rationallinie in zwey Quadrate und in zwey Rechtecke, deren Seiten die Seiten dieser Quadrate sind, eben so wie man durch Rechnung zeigt, daß $\sqrt{(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})} = A + B\sqrt{mn}$ ist. Eben das zeigt er von den sechs Apotomen (S. 92-97). Diese Untersuchungen hängen mit der Lehre von den Wurzeln quadratischer Gleichungen zusammen, die Euklides durch geometrische Constructionen sehr gut zu finden wußte. Man sehe die beiden Aufgaben in B. VI. S. 28. 29. Die Zerlegung eines Rechtecks, worin eine Seite eine Binomiale, die andere eine Rationallinie ist, führt in drey Fällen durch die Rechnung auf biquadratische Gleichungen, die aber einer quadratischen gleichgültig sind. Die Wurzeln sind die in V., VI., VII. angegebenen Theile der binomischen Irrationalen.

Hier noch der Beweis, den Euklides X. 27 führt, daß $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ nicht rational seyn kann, nur in unsern Symbolen ausgedruckt.

Es sey, wenn es möglich ist, $a\sqrt{m} - b\sqrt{n} = c$ rational. Also wären nb^2 und $2bc\sqrt{n}$ incommensurabel. Da nb^2 mit $nb^2 + c^2$ commensurabel ist, so ist $nb^2 + c^2$ mit $2bc\sqrt{n}$ nicht commensurabel, also auch $nb^2 + c^2 + 2bc\sqrt{n}$ oder $(b\sqrt{n} + c)^2$ nicht mit $nb^2 + c^2$; folglich wäre, da $a\sqrt{m} = c + b\sqrt{n}$ ist, ma^2 mit $nb^2 + c$ incommensurabel, welches es doch nicht ist, daher muß c irrational seyn.

Algebraischer Commentar über das zehnte Buch der Elemente des Euklides, von Meyer Hirsch. Berlin 1794. 3 Bog. 8. An ein paar Stellen mag der Sinn verfehlt seyn; übrigens brauchbar.

In dem Artikel, Gleichung 223. ist wegen Fermats Methode, irrationale complexe Größen aus einer Gleichung wegzuschaffen, auf den gegenwärtigen Artikel verwiesen worden. Hier ist das Beyspiel, wodurch Fermat seine Vorschrift erläutert hat. Die Gleichung sey

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + \sqrt{(bc + c^2)} = b.$$

Man setze $\sqrt{(bc + c^2)} = d$, so ist

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} = b - d, \text{ und daher}$$

$$a^2 b + b^3 = b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - d^3.$$

Hier muß man suchen, die eingeführte d auf die erste Potenz herab zu bringen. Da $d^2 = bc + c^2$ ist, so multiplicire man die Theile der zuletzt erhaltenen Gleichung den einen mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, so ist, nach gehöriger Reduction, nebst Division durch d,

$$3 b^3 c + 3 b^2 c^2 = (3 b^2 c + 3 b c^2 - a^2 b) d$$
$$- (bc + c^2) b^2.$$

Den ersten Theil dieser Gleichung multiplicire man mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, und dividire alles durch d, so erhält man eine Gleichung für d in der ersten Potenz, also den Werth von d. Setzt man diesen in der Gleichung $\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + d = b$, oder in $a^2 b + b^3 = (b - d)^3$ so erhält man die vorgegebene Gleichung von ihren irrationalen Ausdrücken befreyt.

Auf gleiche Art hätte man zu verfahren, wenn mehr als zwey irrationale Wurzelgrößen in einer Gleichung vorhanden sind. Die Rechnung wird aber beschwerlich, und Fälle von solcher Art kommen kaum vor. Die schwierigen Fälle in der Mathematik und ihrer Anwendung sind die,

wo transscendente Größen von anderer Art als Winkel- und logarithmische Functionen vorkommen, und wo Reihen zu entwickeln und mit einander zu verbinden sind, zugleich unter der Bedingung der Convergenz.

Fermat gab Descartes und andern Analysten die Elimination der Irrationalitäten in folgendem Beyspiele auf, welches ich mit der jetzt gewöhnlichen Bezeichnung schreibe:

$$\sqrt{(ab - aa)} + \sqrt{(aa + ad + zz)}$$
$$+ \sqrt{ma} + \sqrt{(dd - aa)} - \sqrt{(ar + aa)} = ab.$$

Man sehe Cartesii epist. T. III. p. 266. Descartes sahe die Aufgabe als sehr leicht an, worin er sich aber gar sehr irrte. Genty in seiner Preisschrift über Fermat berechnet, daß durch die successiven Erhebungen 359026206 Termini entstehen würden.

In einzelnen Fällen kann die Wegschaffung der Irrationalgrößen leicht seyn. Z. B. Es sey

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0.$$

Aus combinatorischer Analysis (53.) ist, wenn daselbst statt a, b, c hier die Wurzeln gesetzt werden, da $A = 0$ genommen ist, und D wegfällt, die vierte Formel, $S = 2B^2$, das ist,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})^2$$
$$= 2(ab + ac + bc) + 4(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{abc};$$

folglich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + ac + bc).$$

Es sey $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$, so ist in der angeführten Formel für diesen Fall $S = 2B^2 - 4D$. Man schreibe für die Wurzelgrößen die einfachen Zeichen, α, β, γ, δ, etc. wenn ihrer nämlich auch mehr als vier sind, bezeichne die Summen der verschiedenen Combina-

tionen durch das vorgesetzte $\int.$ (wie in Combination 43.). Also ist $B = \int. \alpha\beta$, und $B^2 = \int. \alpha^2\beta^2 + 2\int. \alpha^2\beta\gamma + 6\int. \alpha\beta\gamma\delta$. Ferner ist, $C = \int. \alpha\beta\gamma$, und $C.\int.\alpha = \int. \alpha^2\beta\gamma + 4\int. \alpha\beta\gamma\delta$. Da $\int. \alpha = 0$ gesetzt ist, so ist $\int. \alpha^2\beta\gamma = -4\int. \alpha\beta\gamma\delta$, also $B^2 = \int. \alpha^2\beta^2 - 2\int. \alpha\beta\gamma\delta$. Demnach ist $\int. \alpha^4 = 2\int. \alpha^2\beta^2 - 8\int. \alpha\beta\gamma\delta$. Ist die Anzahl der Größen $= 4$, und werden die Wurzelgrößen wieder gebraucht, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 8\sqrt{abcd},$$

wo die noch gebliebene Irrationalität wegzuschaffen ist.

Die Bedingungen, unter welchen eine irrationale Formel einen rationalen Werth erhält, in dem Artikel, unbestimmte Analytik.

Irreducibilis casus, s. Gleichung, 76.

Irregular wird insbesondere von ebenen geradlinichten Figuren gebraucht, deren Seiten und Winkel einander nicht gleich sind. Körper mit ungleichen Seitenflächen, Flächen- und Eckenwinkeln, heißen irregular im Gegensatz gegen diejenigen, woran alles dieses, jedes in seiner Art, von gleicher Größe ist. Eine irregulare Curve ist diejenige, für welche kein gewisses Gesetz durch ihre Coordinaten Statt hat.

Isagonion, was gleich große Winkel hat.

Isochronon, dasjenige, was, oder woran etwas in gleichen Zeittheilen geschieht. Die Schwingungen der Pendel geschehen desto näher in gleichen Zeiten, je kleiner die Bogen sind. Die Curve, worauf ein schwerer Punct in gleich großen Zeittheilen fällt und steigt, könnte eine isochrona heißen, wiewohl sie gewöhnlich tautochrona heißt. Die Benennung isochrona gehört für die Curve,

auf welcher ein fallender Punct in gleich großen Zeittheilen gleiche Räume nach der Richtung der Schwerkraft beschreibt. Die Isochrona paracentrica ist diejenige, auf welcher der fallende Körper sich einem gegebenen Puncte in gleichen Zeiten um gleiche Theile des Abstandes nähert oder sich von demselben entfernt. S. die zweyte Abtheilung dieses Werks.

Isomoeria, ein Kunstwort von Vieta, für die Methode die Brüche aus Gleichungen wegzuschaffen. Von ισος gleich, und μοιρα Theil.

Isoperimetron, was gleich großen Umfang hat. Unter Figuren gleichen Umfanges haben diejenigen den größten Inhalt, welche die meisten Seiten haben. S. Größtes und Kleinstes. Von dem isoperimetrischen Problem, dessen in den Artikeln, Geometrie S. 339, und Integralrechnung S. 761, erwähnt ist, s. Variationsrechnung.

Isopleuron, was gleich große Seiten hat. Von πλευρα, die Seite.

Isosceles, gleichschenklicht, wird von einem Dreyeck gebraucht. Von σκελος, Schenkel.

Fig. 4.

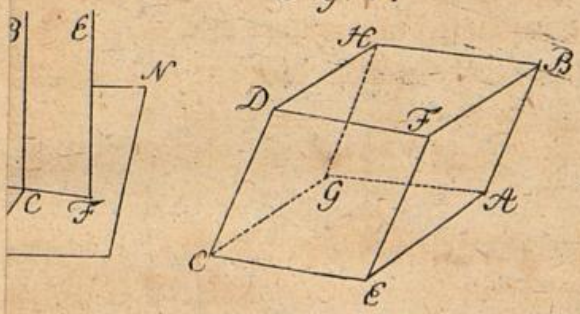
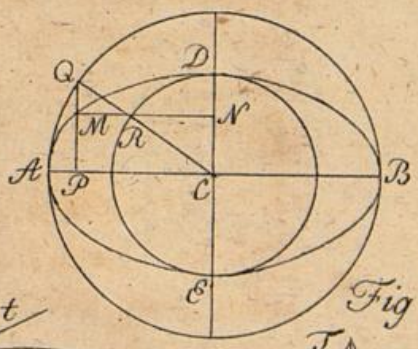


Fig. 5.



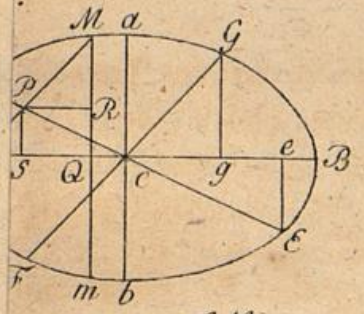


Fig. 9.

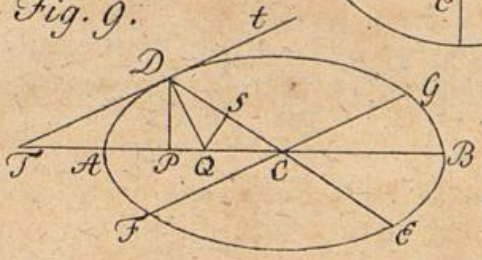
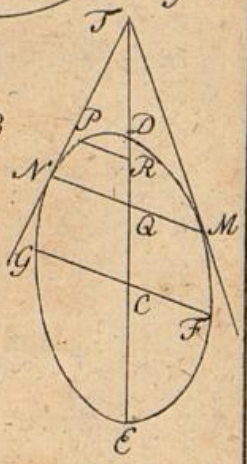


Fig. 12



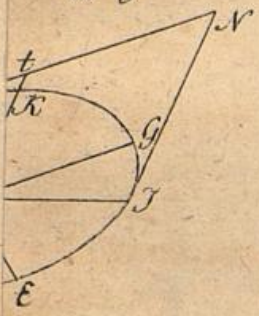


Fig. 13.

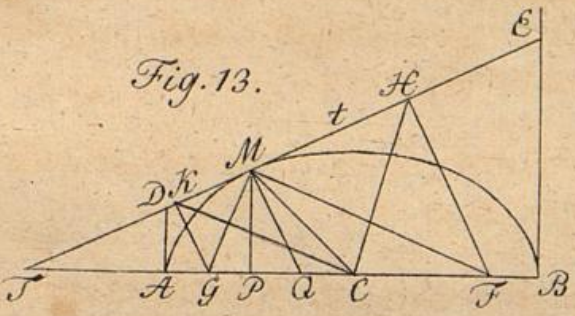


Fig. 18.

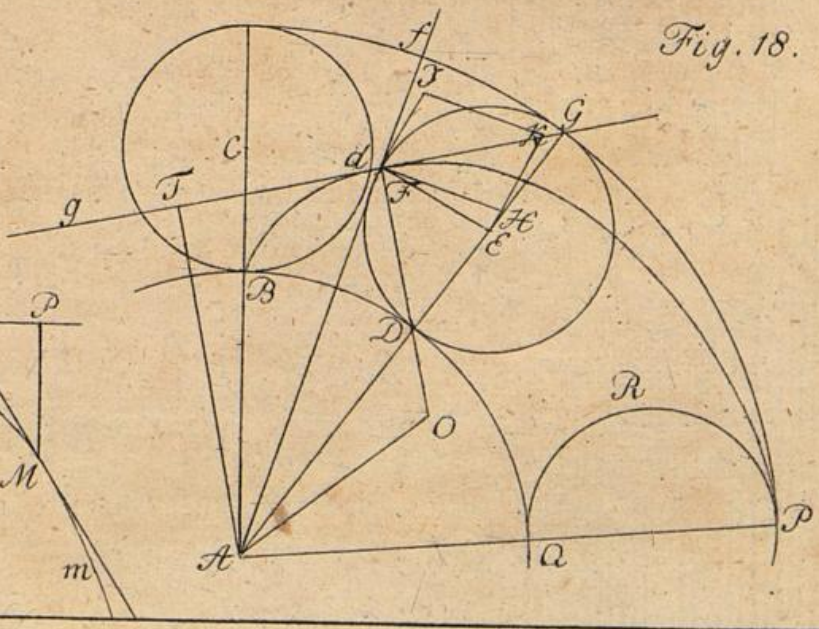
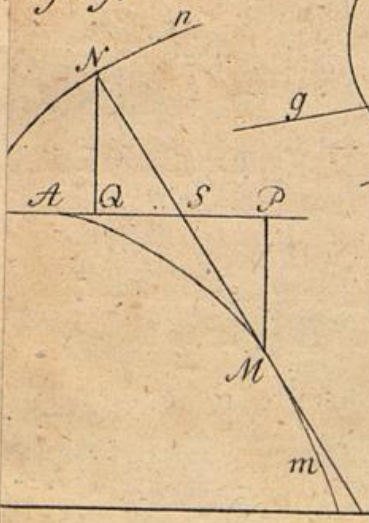



Fig. 19.