Grundzahl ist dasselbe was Primzahl[1], und könnte recht gut zur Verdeutschung dieses halbfremden Wortes gebraucht werden. S. Primzahl.

Guldins Kegel, s. Centrobaryca methodus.

H.

Halbmesser (Semidiameter), die Hälfte eines Durchmessers einer Curve. Im Kreise sind alle Halbmesser sich gleich. Hier heißt der Halbmesser auch der Radius.

Hapsologarithmus, Logarithme der Tangente eines Winkels, ein nicht üblich gewordenes Kunstwort. S. Anthapsologarithmus.

Harmonische Proportion ist zwischen vier Größen, a, b, c, d, wenn $a-b : c-d = a : d$; eine stetige zwischen drey Größen, a, b, c, wenn $a-b : b-c = a : c$ ist. Z. B. 5, 3, 21, 15, oder 3, 5, 8, 24, und 2, 3, 6.

In dem ersten Falle ist $(a-b)d = (c-d)a$, woraus folget $(2a-b)d = ac$, und $d = \frac{ac}{2a-b}$, so wie $a = \frac{b.d}{2d-c}$. Das vierte Glied wird auf einerley Art gefunden, die Proportion mag zunehmend oder abnehmend seyn.

Für eine stetige Proportion ist $c = \frac{ab}{2a-b}$; und das mittlere Glied $b = \frac{2ac}{a+c}$.

Das arithmetische Mittel zwischen zwey Zahlen, verhält sich zu dem geometrischen, wie das geometrische zu dem harmonischen Mittel.

Die Benennung, harmonische Proportion, rührt daher, daß die numerischen Werthe der Töne aus dem harten Accord, C, E, G, c, stetige harmonische Proportionen geben, nemlich C, G, c, und C, E, G. Die Werthe jener Töne verhalten sich wie die Längen der Seiten, bey übrigens gleichen Umständen, nämlich wie $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, oder wie 30, 24, 20, 15. Hier sind 30, 20, 15, und 30, 24, 20, harmonisch proportional. Der Haupton, die Quarte und große Sexte geben auch eine harmonische Proportion, nämlich ihre Werthe, $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$, oder 20, 15, 12.

Eine harmonische Progression ist eine Folge von Größen, deren je drey einander nächste eine stetige harmonische Proportion ausmachen Es sind a, b, c, d, e, etc. in harmonischer Progression, wenn $c = \frac{ab}{2a-b}$; $d = \frac{bc}{2b-c}$; $e = \frac{cd}{2c-d}$, u. s. f. Z. B. $\frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10}, \frac{4}{11}, \frac{4}{12}, \frac{4}{13}, \frac{4}{14}$, u. s f. Hier ist $\frac{4}{9}$ die Oberoctave von D, $\frac{4}{10}$ dasselbe Intervall von E, $\frac{4}{12}$ von G. Aber $\frac{4}{7}$ ist ein Ton, der ein wenig niedriger als B ist, den auch Kirnberger in die gewöhnliche Tonleiter einschieben wollte. Ferner $\frac{4}{11}$ ist ein Ton zwischen f und fis der nächst höhern Octave, $\frac{4}{13}$ ein Ton zwischen as und a.

Die contraharmonische Proportion, s. an ihrem Orte. Th. I.

Harmonische Theilung einer Linie ist, wenn sie in drey Theile so getheilt wird, daß die ganze sich zu dem einen der äußern Theile verhält, wie der andere äußere Theil zu dem mittlern. Auf der Linie AD,

A B C D

sey AD : AB = CD : BC, so ist sie harmonisch getheilt. Es ist nämlich hier AD : AB = AD — AC : AC — AB; also sind AD, AC, AB in stetiger harmonischer Proportion.

Diese Theilung kommt in der Lehre von den Kegelschnitten vor. Eine gerade Linie, die aus dem Durchschnittspuncte zweyer berührenden an den Kegelschnitt und die gerade zwischen den Berührungspuncten gezogen ist, wird von jenem Durchschnittspuncte, der Curve und der Linie zwischen den Berührungspuncten harmonisch getheilt. S Kegelschnitte.

Hauptpunct in der Perspectiv, oder Augenpunct, s. Perspectiv.

Helcataym, die Regel, s. Elcataym.

Helix, Spirale oder Schneckenlinie, davon

Helicoides spiralförmig, als Parabola Helicoides. S. Spirale, und spiralförmige Parabel.

Hemisphaera, Halbkugel.

Hemisphaeroides, halbes Sphäroid.

Hendekagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Hendecagonum, Eilfeck, s. Vieleck.

Heptagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Heptagonum, Siebeneck.

Herzförmiger Körper entsteht, wenn man eine Ellipse nicht um eine ihrer Axen, sondern um einen ihrer andern Durchmesser sich drehen, und einen vollen Umlauf beschreiben läßt. Dadurch entsteht ein Körper, der an dem einen Ende vertieft, an dem andern verschmälert ist. Varignon hat den Inhalt eines solchen Körpers berechnen wollen, hat sich aber dabey geirrt. In der Encyclopédie méthodique, art. Coeur, zeigt d'Alembert, daß der Inhalt dieses herzförmigen Körpers sich zu dem Inhalt eines Sphäroids, dessen Axen den beiden Durchmessern jener Ellipse, um deren einen sie sich dreht, und dem zugeordneten gleich sind, sich verhält, wie das Quadrat des Sinus des Winkels der Durchmesser zu dem Quadrat des Sinus totus.

Heterogen, das entgegengesetzte von Homogen, oder gleichartig, s. dieses.

Hexaëdron ist dasselbe, was Würfel, von ἕξ, sechs, und ἕδρα, Sitz, Grundfläche.

Hexagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Hexagonum, Sechseck.

Hexecontas, Abtheilung der Zahlen nach Sechzigen, wie Decas, Decaden, nach Zehnen. Daher Canon Hexecontadon, zur Multiplication sechzigtheiliger Zahlen, wie Minuten, Secunden, Tertien. S. Sexagesimalrechnung.

Homocentrisch, dasselbe was concentrisch, von ὅμος, gleich, einerley, und κεντρον, Mittelpunct.

Homogen, gleichartig, s. an seinem Orte.

Homogenea affectionum sind bey dem an Kunstwörtern überreichen Vieta die mit der Wurzel einer Gleichung gleichartigen gegebenen Factoren als Coefficienten der Potenzen der Wurzel. Nämlich die Potenzen der Wurzel, außer der höchsten, machen die Gleichung zu einer aequatio affecta. *Homogeneum comparationis* ist das gegebene Glied der Gleichung.

Homologum, was ähnliche Beziehung hat, als die Vorder- oder Hinterglieder in Verhältnissen; die gleichnamigen Seiten in ähnlichen Figuren.

Hufförmiger Abschnitt (ungula, onglet) eines Cylinders ist zwischen einem Theil der Grundfläche (oder auch der ganzen), einer schneidenden Ebene und einem Theil der krummen cylindrischen Oberfläche enthalten. Auf gleiche Art entsteht durch eine schneidende Ebene in einem Kegel oder Konoid ein hufförmiger Abschnitt.

1. Es ist ADBbea (Fig. 72.) ein senkrechter Cylinder über der Grundfläche ADBE, und ABba ein Durchschnitt durch die Axe. Diese Ebene werde von

einer andern Ebene HFK in FG senkrecht geschnitten, so daß ihr Durchschnitt HK mit der Grundfläche des Cylinders ADBE auf den Durchmesser AB senkrecht ist. Man sucht den Inhalt des Körpers, der zwischen dem Segment HAK der Grundfläche, dem Schnitte HFK des Cylinders, und dem Stücke HAFK der cylindrischen Fläche enthalten ist.

Man ziehe durch irgend einen Punct M des Bogens AH die gerade MP senkrecht auf HK, und MN parallel mit der Axe des Cylinders. Diese MN liegt in der Oberfläche des Cylinders, und ist so wie die Axe senkrecht auf die Grundfläche, also senkrecht auf die Linie MP (Ebene 11. 6.). Das Product aus dem Dreyeck PMN in das Differential von GP ist das Differential des körperlichen Abschnittes AFGPMN (Cubirung) *). Die Ebene des Dreyecks PMN ist senkrecht auf die Grundfläche ADBE. Da in dieser letztern die Linie HK senkrecht auf MP ist, so ist HK senkrecht auf MPN, und daher auf PN, also ist MPN der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche.

Es sey der Halbmesser der Grundfläche, $AC = a$, $AG = b$, $GH = c$, der Neigungswinkel MPN oder $AGF = \alpha$. Ferner sey $GP = x$; $MP = y$, so ist $MN = y \tang \alpha$, und das Differential des Abschnittes zwischen FAG und NMP ist $= \frac{1}{2} y^2 \tang \alpha . \partial x$. Dieser unbestimmte Abschnitt sey $= Z$, und $\tang \alpha = m$, so ist $\partial Z = \frac{1}{2} m y^2 \partial x$. Man setze zur Abkürzung $a - b = f$, oder $GC = f$, so ist $aa = (f + y)^2 + xx$, also $y = \sqrt{(aa - xx)} - f$, und $yy = aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)}$, so daß

$$\partial Z = \tfrac{1}{2} m (aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)})\, \partial x,$$

*) Die in dem citirten Artikel gezeigte Methode ist daselbst nur auf runde Körper angewandt, solche, deren Abschnitte Kreise zu Grundflächen haben; sie ist aber allgemeiner für alle andere, so daß, wenn Y eine Flächenschnitt des Körpers, x die zugehörige Abscisse ist, $Y \partial x$ das Differential des körperlichen Abschnittes zu der Abscisse x ist.

Nun ist $\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} =$ Area ACQM $=$ sect. ACM $+ \Delta$ CQM $= \frac{1}{2} aa$ Arc. sin $\frac{x}{a}$ $+ \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$, wo Arc. sin $\frac{x}{a}$ ein Bogen mit dem Halbmesser als Einheit ist.

So ist

$$Z = \frac{1}{2} m \left(aax + ffx - \frac{1}{3} x^3 - fx\sqrt{(aa - xx)} - aaf \text{ Arc. sin } \frac{x}{a} \right),$$

wo die Const $= 0$ ist.

Den Inhalt des ganzen Hufs zu erhalten, setze man $x = c$, und multiplicire mit 2, so ist, wenn derselbe durch H bezeichnet wird,

$$H = m \left(aac - \frac{1}{3} c^3 - aaf \text{ Arc. sin } \frac{c}{a} \right),$$

da $aa - cc = ff$ ist.

2. Wenn die schneidende Ebene durch DE gelegt wird, so ist $c = a$, und $f = 0$, also nun $H = \frac{2}{3} ma^3$. Setzt man $ma = h$, so ist $H = \frac{2}{3} aah$, wo h die Höhe des Hufes ist.

3. Die Oberfläche des Hufs von AF an bis MN sey $= S$, so ist $\partial S = MN \times \partial$. Arc. AM, das ist

$$\partial S = my. \frac{a \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} \text{ (Differ. Formeln, 29.), oder}$$

$$\partial S = ma \partial x - \frac{maf \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}, \quad \text{also}$$

$S = max - mfa$. Arc. sin $\frac{x}{a}$, ohne Constans. Die krumme Oberfläche des ganzen Hufs ist

$$2mac - 2mfa \text{, Arc. sin } \frac{c}{a},$$

Nimmt man den Halbkreis zur Grundfläche des Hufs, so ist die krumme Oberfläche $= 2maa = 2ah$.

Es ist merkwürdig, daß es völlig cubirbare Abschnitte eines Cylinders giebt, mit einer krummen Oberflache, die zugleich quadrirbar ist.

3. Es sey ACB (Fig. 73.) der Durchschnitt eines Kegels, senkrecht auf dessen Grundfläche, deren Durchmesser AB ist. Durch einen Punct D auf AC führe man einen Schnitt parallel mit CB und senkrecht auf ACB. Die Durchschnittslinie mit ACB ist DE. Dadurch entsteht ein hufförmiger Abschnitt zwischen dieser Ebene, der Grundfläche und der krummen Kegelfläche. In diesem lege man durch eine mit CB parallele MP, eine auch auf ACB senkrechte Ebene, welche einen unbestimmten Abschnitt begränze. Die Durchschnittsfiguren über DE, MP sind Parabeln (s. Kegelschnitte). Die Fläche der Parabel über MP multiplicirt mit dem Differential des Abstandes AN von A ist das Differential des körperlichen Abschnittes von A bis MP.

Es sey $AB = 2a$, $BC = b$, $\sin ABC = m$, $AP = x$, so ist $PM = \frac{bx}{2a}$; $AN = mx$. In dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise ziehe man durch P eine Ordinate, die z heiße, so ist $z^2 = AP \times PB$, oder $z^2 = x(2a - x)$. Es ist zugleich z die Ordinate der Parabel, deren Axe MP ist, in dem Puncte P. Die Fläche der Parabel ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{bx}{2a} \cdot 2z = \frac{2bx}{3a}\sqrt{(2ax - xx)}$, (s. Quadratur). Der Abschnitt des Hufes von A bis MP sey $= Z$, so ist $\partial Z = \frac{2mbx}{3a}\partial x\sqrt{(2ax - xx)}$. Es ist

$$\int x\partial x\sqrt{(2ax - xx)} = -\tfrac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a\int\partial x\sqrt{(2ax - xx)}, \text{ und}$$

$$\int \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = \tfrac{1}{2}aa.\text{Ang. cos}\frac{a-x}{a}$$

$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}$$ (s. Integralformeln).

Also

$$\int x\,\partial x \sqrt{(2ax-xx)} = \tfrac{1}{2}a^3.\text{Ang. cos}\frac{a-x}{a}$$

$$-\tfrac{1}{6}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax-xx)}.$$ Dadurch ist

$$Z = \frac{mb}{3a}.a^3.\text{Ang. cos}\frac{a-x}{a}$$

$$-\frac{mb}{9a}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax-xx)}.$$

Die Const. ist $= 0$, da $Z = 0$ für $x = 0$ ist.

Setzt man in dieser Formel für x den Werth AG, so erhält man den Werth des bestimmten hufförmigen Abschnittes, dessen höchster Punct in D ist.

4. Der Schnitt DG gehe durch den Mittelpunct der Grundfläche, so ist $x = a$, und der bestimmte hufförmige Abschnitt $H = mba^2(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9})$; oder wenn die Höhe des Kegels $= h = mb$, gesetzt wird

$$H = \tfrac{1}{3}aah(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3}).$$

5. Des ganzen Kegels Inhalt ist $\tfrac{1}{3}\pi aah$, also ist die Ergänzung des Hufes zum Halbkegel cubirbar, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunct der Grundfläche gelegt wird. Diese Ergänzung ist $= \tfrac{2}{9}aah$.

Hyperbel ist eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten u und y ist $cu + m^2u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältnisses zweyer gegebenen Linien ist.

Die Benennung, Hyperbel (Überschuß), soll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate größer ist als das Rechteck von der Abscisse und einer constanten Linie. Vergl. Ellipse.

1. Für jedes positive u, so groß es genommen werden mag, hat y zwey mögliche, gleiche, entgegengesetzte Werthe. Eben so auch für negative, die der Quantität nach betrachtet größer sind als $\frac{c}{mm}$. Für negative, die kleiner sind als $\frac{c}{mm}$, ist y unmöglich, oder die krumme Linie hat für solche Abscissen keine Ordinaten. Man setze $\frac{c}{mm} = 2a$, so ist die Gleichung diese, $m^2(2au + u^2) = y^2$.

2. Man setze $u = x - a$, also $a + u = x$, so ist $m^2(x^2 - a^2) = y^2$. Hier erhellt, daß die krumme Linie für gleiche und entgegengesetzte x, die größer als a sind, gleiche Ordinaten, es seyn positive oder negative, hat.

3. Man setze $m = \frac{b}{a}$, so ist $c = \frac{2bb}{a}$, eine Linie, welche der Parameter zu der Axe 2a heißt, und es ist $cu + \frac{c}{2a}u^2 = y^2$;

$$\frac{c}{2a}(x^2 - a^2) = y^2,$$

oder $bb(2au + uu) = a^2y^2$;

$bb(x^2 - a^2) = a^2y^2$.

4. Man nehme auf der Abscissenlinie Xx (Fig. 74.) von C aus $CA = CB = a$, und $CP = x$; $PM = y$, der Gleichung zwischen x und y gemäß. Die krumme Linie erstreckt sich von A aus durch M ins Unendliche fort, auf der andern Seite von CX eben so mit dem Zweige Ams, der dem AMS gleich und ähnlich ist. Über den Theilen der Abscissenlinie, CA, CB ist kein Theil der Curve vorhanden. Aber von B an sind zwey unendliche Zweige BNs, BnS, die den Zweigen AMS, Ams

gleich und ähnlich sind. Die beiden Theile der Hyperbel, SAs, SBs heißen entgegengesetzte Schnitte, nämlich aus zwey entgegengesetzten Kegeln.

Der Punct C heißt der Mittelpunct der Hyperbel; A, B, sind ihre Scheitel; AB ist ihre Hauptaxe, deren Verlängerung aber auch unter der Benennung, Hauptaxe, als senkrechter Durchmesser, begriffen wird. Eine Nebenaxe oder conjugirte Axe, die zugleich eine Ordinate an der Curve wäre, wie in der Ellipse, giebt es für die Hyperbel nicht. Doch heißt die Linie 2b (in 3.) die conjugirte Axe oder Nebenaxe. Man ziehe durch C die senkrechte CY auf AB, so ist diese ein Durchmesser für alle mit der Hauptaxe parallele Chorden an den entgegengesetzten Zweigen auf derselben Seite der Hauptaxe.

5. Der Mittelpunct C halbirt alle durch ihn an die Hyperbel gezogenen geraden Linien, wegen der gleichen und ähnlichen Zweige auf beiden Seiten der Axe und des Mittelpuncts.

6. Durch A ziehe man die gerade Dd senkrecht auf CA; mache $AD = Ad = b$, und ziehe die geraden CDS, Cds, welche nach den entgegengesetzten Gegenden CS, Cs unbestimmt verlängert werden. Man ziehe die auf die Axe senkrechte PQ an die gerade CS, als Ordinate zu dieser, und setze $PQ = z$, so ist $z = \frac{bx}{a}$, und $zz = \frac{bbxx}{aa}$. Da $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ ist, so ist $zz - yy = bb$, oder $(z + y)(z - y) = bb$, also $z - y = \frac{bb}{z + y}$. Der Unterschied QM der an die Curve und die gerade CS gezogenen Ordinaten wird also immer kleiner, je größer die Abscisse nebst den Ordinaten wird, ohne eine Gränze des Abnehmens.

Die geraden SCS, sCs, heißen die Asymptoten (nicht zu erreichenden) der Hyperbel.

7. Man verlängere die entgegengesetzte Ordinate Pm bis an die Asymptote Cs in q, so ist $Mq = z + y$. Da $MQ = z - y$ ist, so ist $Mq \times MQ = bb$.

8. Durch M werde mit der Asymptote Cs die parallele ML gezogen, und durch den Scheitel A mit derselben die parallele AE; es ist $CL \times LM = CE \times EA$, oder $CL \times LM = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

Denn wegen der ähnlichen Dreyecke QLM und QCq ist $LQ : LM = CQ : Cq$, also $LQ = LM$. Ferner ist $QL : QM = LC : Mq$, und auch $QL : QM = ED : DA$, wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke QLM, DEA. Also ist $LC : Mq = ED : DA$. Aus dieser und der gleich vorhergehenden Proportion entsteht, durch Zusammensetzung der Verhältnisse, diese,

$$LC \times QL : MQ \times Mq = ED^2 : DA^2.$$

Da $MQ \times Mq = bb = DA^2$, so ist

$$LC \times QL = DE^2, \text{ oder } CL \times LM = DE^2.$$

Wegen $AD = Ad$ ist $DE = CE$. Ferner ist Winkel $EAC = ACd = ACE$, also $EA = CE$, und $DE^2 = CE \times EA$, folglich $CL \times LM = CE \times EA$.

Da $DE = \frac{1}{2}CD$, so ist $DE^2 = \frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

9. Das Quadrat von CE oder $\frac{1}{2}CD$ heißt die Potenz der Hyperbel.

10. Aufg. Die Gleichung für die krumme Linie zu finden, auf welcher die Scheitelpuncte aller Dreyecke, wie FMG, FNG, liegen, in welchen die Seite FG gemeinschaftlich, und der Unterschied der beiden andern $GM - FM$ oder $FN - GN$ eine gegebene Größe ist.

Man halbire FG in C, und setze FC oder $GC = e$, ferner $GM - FM = 2a$, $GM = t + a$; $FM = t - a$. Von M ziehe man die senkrechte MP auf GF, und setze $CP = x$, also $FP = \pm(x - e)$; $GP = x + e$. Auch sey $PM = y$. Nun ist

$$(x-e)^2 + y^2 = (t-a)^2,$$
$$(x+e)^2 + y^2 = (t+a)^2.$$

Daraus wird durch Addition und Subtraction

$$xx + ee + yy = tt + aa,$$
$$ex = at.$$

Durch Herausschaffung von t wird

$$\frac{ee-aa}{aa}(xx-aa) = yy.$$

Man darf hier nicht das Entgegengesetzte beider Factoren nehmen, wie es ohne andere Rücksichten die Rechnung erlauben würde. Denn es wird, wenn $y = 0$ genommen wird, FG oder $2e = 2t$. Nun ist t größer als a, also ist auch e größer als a, und dadurch auch $x > a$.

Der Ort des Punctes M ist also eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= 2a$, und deren conjugirte Axe, $2b = 2\sqrt{(ee-aa)}$ ist, so daß $ee = aa + bb$ ist.

11. Man nehme auf der Axe einer Hyperbel von dem Mittelpuncte C aus $CF = CG = \sqrt{(aa+bb)}$, und ziehe an irgend einen Punct der Curve M die geraden FM, GM, so ist $GM - FM = 2a$.

Denn man setze $\sqrt{(aa+bb)} = e$, also $ee - bb = aa$. Nun ist $PM^2 = \frac{bb}{aa}xx - bb$, und $FP = x - e$, daher

$$FM^2 = \frac{ee}{aa}xx - 2ex + aa,$$

$$FM = \frac{ex}{a} - a.$$

Eben so ist

$$GM = \frac{ex}{a} + a,$$

folglich $GM - FM = 2a$.

12. Die beiden Puncte, F, G, heißen die Brennpuncte der Hyperbel (Ellipse, 10.).

Da $CF^2 = aa + bb$ ist, so ist die auf der Asymptote nach (6.) genommene $CD = CF$.

13. Die Ordinate in den Brennpuncten ist dem halben Parameter gleich.

14. Es sey $FM = z$, der Winkel $MFX = \varphi$; so ist

I. $ex - aa = az$. II. $ee - aa = (a - e \cos\varphi) z$.

Die erste Gleichung ist dieselbe mit der Gleichung $ex = at$ in (10.), da $z = t - a$ ist. Hieraus folgt die zweyte, da $x = e + z \cos\varphi$ ist. Wenn AFM spitz ist, so ist φ stumpf und $\cos\varphi$ negativ. Ist $AFM = 0$, so ist $\cos\varphi = -1$, und $ee - aa = (a + e) z$, daher $z = e - a$, wie es seyn muß.

Ist x unendlich groß, so muß $a - e \cos\varphi = 0$ seyn, damit das Product eine endliche Größe bleibe. Also ist bey dieser Annahme $\cos\varphi = \frac{a}{e}$, daher $\varphi = ACD$. Die FM ist alsdann parallel mit der Asymptote. Kleiner als ACD kann der Winkel MFP nicht werden.

15. Auf gleiche Art wird gefunden,

I. $CF \times CP + CA^2 = CA \times GM$.

II. $ee - aa = (CG . \cos CGM - CB) GM$.

16. Es sey MAm (Fig. 75.) die eine Hälfte einer Hyperbel, deren Hauptaxe AB, Mittelpunct C ist; der Scheitelpunct dieses Theils ist A. Die verlängerte Axe ist BAX. Auf diese ist durch irgend einen Punct M die senkrechte Mm gezogen. Durch den Mittelpunct sey die gerade CDV gezogen, als Abscissenlinie, mit welcher die Ordinaten PM, PN unter dem Winkel MPV verbunden werden, Es sey $AC = a$; die halbe conjugirte Axe $= b$; $CP = x$; $PM = y$, der Winkel $ACD = \varphi$; der Winkel $MLQ = \omega$, wo L der Durchschnitt der MN mit der Axe ist. Wenn $\tang\varphi . \tang\omega = \frac{bb}{aa}$ ist, so wird MN und jede ihr parallele, auch in

der andern Hälfte der Hyperbel von CV, oder deren Verlängerung halbirt.

Denn man ziehe PR mit CQ, und PS mit MQ parallel, so erhellt, daß

$$CQ = x \cos\varphi + y \cos\omega,$$
$$MQ = x \sin\varphi + y \sin\omega,$$

ist. Nun ist (3.)

$$a^2 b^2 = b^2 (x^2 \cos\varphi^2 + 2xy \cos\varphi . \cos\omega + y^2 \cos\omega^2)$$
$$- a^2 (x^2 \sin\varphi^2 + 2xy \sin\varphi . \sin\omega + y^2 \sin\omega^2).$$

Nimmt man $b^2 = a^2 \tang\varphi . \tang\omega$, so ist $b^2 \cos\varphi . \cos\omega = a^2 \sin\varphi . \sin\omega$, und die Gleichung enthält bloß die zweyte Potenz von x und von y, daher bey jeder Annahme für die eine derselben die andere zwey gleiche entgegengesetzte Werthe erhält, und unmögliche, wenn das Quadrat einen negativen Werth hat.

17. Bey der jetzt gemachten Annahme für die Winkel φ und ω ist

$$a^2 b^2 = (b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2) x^2$$
$$- (a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2) y^2.$$

18. Wenn die Puncte M, N in entgegengesetzten Schnitten liegen, so gilt das gefundene auch. Es sey (Fig 76.) die Abscissenlinie CV innerhalb des Nebenwinkels SCs der Asymptoten gezogen, so daß sie die Hyperbel gar nicht schneide. Die entgegengesetzten Ordinaten PM, PN liegen in entgegengesetzten Schnitten. Bey denselben Bezeichnungen wie vorher ist eben so

$$CQ = x \cos\varphi + y \cos\omega,$$
$$MQ = x \sin\varphi + y \sin\omega.$$

Die übrige Rechnung ist dieselbe wie in (16.), und es muß, damit alle mit MN parallele Chorden von CV halbirt werden, seyn

$$\frac{bb}{aa} = \tang\varphi . \tang\omega.$$

19. Man ziehe durch den Mittelpunct C (Fig. 76.) mit MN die parallele ECE, so ist diese, bey der ge-

machten Annahme der Winkel φ und ω, ein Durchmesser, der verlängert alle mit VCV parallele Chorden halbirt. Die Winkel φ und ω haben nun ihre Bedeutungen mit einander vertauscht. Ist nämlich φ der Winkel des Durchmessers mit der Axe, so ist ω der Winkel der Ordinaten mit derselben. Ist ω aber jener Winkel, so ist φ der letztere.

20. Zwey gerade Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ, ω, der Bedingung in (16.) gemäß gezogen sind, heißen conjugirte Durchmesser. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel sind. Der eine schneidet die Hyperbel in zwey entgegengesetzten, von dem Mittelpuncte gleich entfernten Puncten, der andere schneidet sie gar nicht. Die Abscissen sollen auf demjenigen Durchmesser genommen werden, welcher die Hyperbel schneidet. In der Gleichung (17.) sind daher die Coefficienten $b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2$, und $a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2$ beide positiv. Dadurch erhält x zwey mögliche gleiche, entgegengesetzte Werthe für $y = 0$, aber y unmögliche, wenn $x = 0$ ist, oder einen Werth unter einer gewissen Gränze hat.

21. Der bestimmte Werth eines Durchmessers, der die Hyperbel schneidet, zwischen den Durchschnittspuncten, heiße insbesondere der Durchmesser, und werde durch 2f bezeichnet. Für $x = 0$, oder in dem Mittelpuncte, sey $y^2 = -g^2$, so ist 2g der conjugirte Durchmesser auf gleiche Art, wie 2b die conjugirte Axe. Aus der Gleichung in (17.) folgt, wie in dem Artikel, Ellipse (17.), die Gleichung,

$$f^2 g^2 = g^2 x^2 - f^2 y^2,$$

oder $g^2(x^2 - f^2) = f^2 y^2$.

22. Man setze $x = f + u$, so folgt aus jener Gleichung diese:

$$g^2(2fu + uu) = f^2 y^2;$$

oder $$\frac{2gg}{f} u + \frac{gg}{ff} uu = y^2.$$

Beide Gleichungen haben dieselbe Form wie die in (3.), welche sich auf die Hauptdurchmesser beziehen. Auch heißt $\frac{2gg}{f}$ der Parameter zu dem Durchmesser $2f$.

23. Man vertausche die Bedeutungen von a und b, so daß b der Haupthalbmesser auf der Axe oder der Abscissenlinie, a aber der conjugirte Halbmesser sey. Der Winkel der Asymptoten ist nun der Nebenwinkel von dem Winkel derselben bey der erstern Bedeutung von a und b. Es sey (Fig. 76.) CF der halbe Haupthalbmesser auf der Axe der Abscissen xCx; FD der conjugirte Halbmesser, und CF = AD, FD = CA, jenes dem conjugirten, dieses dem Haupthalbmesser für die Hyperbel MAmNBn. Die Hyperbel SFssFS heißt die conjugirte von jener.

Die Gleichung für die conjugirte Hyperbel ist, wenn die Abscissen von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen werden,

$$aa(xx - bb) = bbyy.$$

Nennt man einen Halbmesser, der an die conjugirte Hyperbel gezogen ist, g, den conjugirten f, indem man auf gleiche Art wie für die Haupthalbmesser, die Bedeutungen von f und g vertauscht, so wird aus der Gleichung in (21.) diese,

$$ff(xx - gg) = ggyy.$$

Die conjugirten Halbmesser an der einen Hyperbel, welche als Ordinaten unmöglich sind, sind an der andern als Halbmesser möglich.

24. Es ist

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi \,.\, \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi \,.\, \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega \,.\, \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega \,.\, \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

Denn aus der Gleichung in (17.) ist

$$a^2 b^2 = (b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2) f^2, \quad \text{und}$$

$a^2 b^2 = (a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2) g^2$.

Hieraus werden auf eine ganz ähnliche Art wie in dem Artikel, Ellipse (19.) die angegebenen Werthe von f^2 und g^2 erhalten.

25. Es ist I. $\frac{ff}{gg} = \frac{\sin\omega \,.\, \cos\omega}{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$.

II. $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} \cdot \frac{a}{b}$. III. $\frac{f}{g} = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi} \cdot \frac{b}{a}$.

26. Der kleinste Werth von φ ist $= 0$, der größte ist Ang. tang $\frac{b}{a}$, oder der Winkel der Asymptoten mit der Axe. Für jenen Winkel ist $f = a$, für diesen ist f unendlich groß, da der Halbmesser f in die Asymptote fällt. Der größte Werth von ω ist ein Rechter, wobey $g = b$ ist; der kleinste ist Ang. tang $\frac{b}{a}$, bey welchem der conjugirte Halbmesser (der an der conjugirten Hyperbel als wirklicher Durchmesser genommene) auch in die Asymptote fällt. Denn aus der Formel, $bb = aa \tang\varphi \,.\, \tang\omega$, folgt $\tang\omega = \frac{b}{a}$, wenn $\tang\varphi = \frac{b}{a}$ ist. Das Verhältniß $f : g$ hat also die Werthe von $a : b$ an bis zu $1 : 1$. Vergl. Apollonii Conicorum L. VII. prop. 21. 22.

27. Es ist $fg \,.\, \sin(\omega - \varphi) = ab$. Der Winkel $\omega - \varphi$ ist der Ordinatenwinkel, so daß das Parallelogramm von zwey conjugirten Durchmessern unter diesem Winkel dem Rechtecke von den beiden Axen oder Hauptdurchmessern gleich ist. Apollonii Conic. VII. 31.

28. Es ist $\pm(ff - gg) = \pm(aa - bb)$.

Bew. Denn $ff - gg =$

$$\frac{\sin\omega \,.\, \cos\omega - \sin\varphi \,.\, \cos\varphi}{\cos\varphi \,.\, \cos\omega \,.\, \sin(\omega - \varphi)}\, aa.$$

Der Zähler dieses

Bruches ist $\frac{1}{2}\sin 2\omega - \frac{1}{2}\sin 2\varphi =$ $\sin(\omega - \varphi) . \cos(\omega + \varphi)$. Also ist $ff - gg =$ $\frac{\cos(\omega + \varphi)}{\cos\varphi . \cos\omega} aa = \left(1 - \frac{\sin\varphi . \sin\omega}{\cos\varphi . \cos\omega}\right) aa = aa - bb$. Ist $b > a$, so ist auch $g > f$. Apollonii Conic. VII. 13.

29. Es ist $f + g > a + b$, und $\pm(f - g) < \pm(a - b)$.

Bew. Da $ff - gg = aa - bb$, und $f > a$ ist, so ist auch $g > b$, also $f + g > a + b$. Zweytens, da $ff - gg = (f + g)(f - g)$, und $aa - bb = (a + b)(a - b)$ ist, und daher beide Producte gleich sind, so ist, weil der Factor $f + g$ größer als der Factor $a + b$ ist, dagegen der Factor $f - g$ kleiner als $a - b$. Apollon. Con. VII. 25. 27.

30. Wenn $a = b$ ist, so ist $\tang\varphi . \tang\omega = 1$, also $\omega = 90° - \varphi$, und $2\omega = 180° - 2\varphi$, daher $\sin 2\omega = 2\varphi$, folglich $f = g$ (25. I.), oder alle conjugirten Durchmesser sind gleich, wenn die beiden Hauptdurchmesser gleich sind. Dasselbe folgt aus den beiden andern Formeln in 25.

31. Die Hyperbel heißt in diesem Falle eine gleichseitige. Der Parameter zu beiden Durchmessern ist ihnen gleich. Da ein Durchmesser in der alten Geometrie latus transversum (oder vielmehr obliquum) und der Parameter latus rectum, in Beziehung auf das Rechteck von beiden hieß (vergl. Ellipse, 7.), so heißt bey der Gleichheit beider Linien die Hyperbel eine gleichseitige.

Die gleichseitige Hyperbel ist unter den Linien ihrer Art dasselbe, was der Kreis unter den Ellipsen ist.

32. An der gleichseitigen Hyperbel ist der Winkel der Asymptoten mit der Axe ein halber Rechter, also der Winkel der Asymptoten selbst ein Rechter.

33. Es ist an derselben $ff = \frac{aa}{\cos 2\varphi}$, wo der größte Werth von 2φ ein Rechter ist.

Die Gleichung für dieselbe, wenn die Abscissen von dem Mittelpuncte aus genommen werden, ist $xx - yy = ff$.

Werden die Abscissen von dem einen Scheitel des Durchmessers an genommen, so ist $2fu + uu = yy$.

34. Es seyn CS, Cs (Fig. 77.) die Asymptoten der Hyperbel SAs, die Axe CX, der Haupthalbmesser $AC = a$, der conjugirte Halbmesser $AD = b$. Man ziehe einen Durchmesser CV, der die Hyperbel in E schneide, unter dem Winkel $ACE = \varphi$. Der Winkel, unter welchem die zu demselben gehörigen Ordinaten die Axe schneiden, sey $ACU = \omega$, der nach (16.) bestimmt werde. Mit CU ziehe man irgend eine NPn parallel, welche die Asymptoten in N, n, und CV in P schneide: es ist $CP : PN = f : g$, und auch $CP : Pn = f : g$, wo $f = CE$ ist, und g den conjugirten Halbmesser bedeutet. Dadurch ist $PN = Pn$.

Bew. Der Winkel ACS sey $= \alpha$, so ist Winkel $CNP = \omega - \alpha$; $PCN = \alpha - \varphi$. Es ist $\sin CNP = \sin\omega . \cos\alpha - \cos\omega . \sin\alpha$; $\sin PCN = \sin\alpha . \cos\varphi - \cos\alpha . \sin\varphi$. Da ferner $\sin\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}} = \frac{b}{e}$, $\cos\alpha = \frac{a}{e}$ ist, so ist

$\sin CNP : \sin PCN$
$= a\sin\omega - b\cos\omega : b\cos\varphi - a\sin\varphi$. Aus (25. II. III.) ist $a\sin\omega : b\cos\varphi = f : g$, und $b\cos\omega : a\sin\varphi = f : g$. Daraus wird
$a\sin\omega - b\cos\omega : b\cos\varphi - a\sin\varphi = a\sin\omega : b\cos\varphi = f : g$. Also ist $\sin CNP : \sin PCN = f : g$; das ist, $CP : PN = f : g$.

Zweytens: in dem Dreyeck PCn ist Winkel $CnP = 180^\circ - (\omega + \alpha)$; $PCn = \alpha + \varphi$, und $\sin CnP = \sin\omega . \cos\alpha + \cos\omega . \sin\alpha$; $\sin PCn = \sin\alpha . \cos\varphi + \cos\alpha . \sin\varphi$. Daraus folgt auf ähnliche Art, wie vorher, daß $\sin CnP : \sin PCn = f : g$ ist, das ist $CP : Pn = f : g$.

35. Die Linie Nn schneide die Hyperbel in M, m, so wird, wegen der angenommenen Bestimmung des Winkels ω, die Chorde Mm in P halbirt. Dadurch ist $MN = mn$.

36. Die mit CU durch E parallele ist eine berührende in E.

Denn wenn sie die Hyperbel noch in einem Puncte schnitte, so würde CV nicht die gerade Linie seyn, die alle mit CU parallelen Chorden der Hyperbel nach (35.) halbirt.

37. Der Winkel ETX der berührenden ET mit der Axe sey $= \omega$, und $ECT = \varphi$, so ist $bb = aa \tang\varphi . \tang\omega$, da zufolge dieser Annahme die Lage der berührenden in E gefunden ist.

38. Die berührende in E schneide die Asymptoten in L, l, so ist $EL = El$, und jedes, EL oder El gleich dem conjugirten Halbmesser von CE. Denn es ist $CE : EL = f : g$, und $CE : El = f : g$, eben so wie $CP : PN = f : g$, und $CP : Pn = f : g$ ist.

Apollonius hat den Satz im III. B. 3. S. indirecte, durch Unmöglichkeit des Gegensatzes, erwiesen, mit der Abänderung, daß das Quadrat von EL gleich ist dem vierten Theil der Figur zu dem Durchmesser in dem Berührungspuncte. Diese Figur ist das Rechteck von dem Durchmesser und dem zugehörigen Parameter.

39. Es sey TMt (Fig. 78.) eine berührende an der Hyperbel AMS in M, und MP senkrecht auf die Axe der Hyperbel, deren Mittelpunct in C ist. Es ist $CP : CA = CA : CT$.

Bew. Es sey der Winkel $ATM = \omega$; $ACM = \varphi$, so ist $CMT = \omega - \varphi$, und $CT = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} f$; $CP = f . \cos\varphi$; also $CP \times CT = \frac{\cos\varphi . \sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} ff$. Da TM eine berührende ist, so haben die Winkel φ und ω die in (16.) bestimmte Re-

lation (37.). Daraus wird nun zufolge des in (24.) gefundenen Werthes von ff erhalten $CP \times CT = aa = CA^2$, und hieraus die in dem Satze angegebenen Proportion.

40. Hieraus folgt $CP : PA = CA : AT$, daraus ferner $CP : PA = BP : PT$, wenn B der andere Endpunct der Axe ist. Noch ist $CA : AT = BP : PT$.

41. Die Asymptote CS ist die berührende in einem unendlich entfernten Puncte. Denn wenn CP unendlich groß gedacht wird, so ist $CT = 0$.

42. Da eine berührende zwey an einander stoßenden Bogen der Curve gemein ist, so verbindet die Asymptote, als berührende betrachtet, auch zwey Bogen der Hyperbel. Diese sind (Fig. 74.) die Bogen AS, BS in ihren unendlich entfernten Puncten, wo sie von derselben geraden Linie, der Asymptote SCS, berührt werden. Diese unendlich von einander entfernten Puncte lassen sich, wegen der gemeinschaftlichen berührenden, als ein einziger Punct betrachten, so daß es hier im wörtlichsten Sinne heißt, das äußerste berührt sich. Eben so stoßen die beiden Zweige As, Bs mit ihren unendlich entfernten Puncten an einander. Solchergestalt läßt sich die Hyperbel als eine zusammenhängende und geschlossene Linie betrachten. Ein sie beschreibender Punct gehe von A nach S ins Unendliche, so gelangt er da auf der gemeinschaftlichen berührenden Asymptote von dem Zweige AS zu dem SB, setzt von B seinen Weg ins Unendliche auf Bs fort, und kommt von da auf sA nach A, von wo er ausgegangen war. Eine den Zweig AS schneidende, um C sich drehende, gerade Linie schneidet nach dem Durchgange durch die Asymptote SCS in stetiger Fortrückung den Zweig SBs, und nach dem Durchgange durch die Asymptote sCs wieder den Zweig sA. Eine solche Rückkehr durchs Unendliche findet sich auch bey dem Durchschnittspuncte zweyer geraden Linien, deren eine sich um einen festen Punct dreht. Der Durchschnittspunct entfernt sich von einem auf der unbewegten Linie angenommenen Puncte

immer mehr, je mehr die sich drehende Linie sich der parallelen Lage mit der andern nähert. In dieser Lage kann man den unendlich entfernten Durchschnittspunct so gut nach der einen als der andern entgegengesetzten Gegend hin setzen. Bey fortgehender Drehung nach derselben Richtung kommt der Durchschnittspunct von der entgegengesetzten Gegend her zurück, und beschreibt so die ganze unendliche gerade Linie, ohne seine Richtung zu ändern.

Unsere neueste phantasievolle Philosophie kann ihre Bilder hieraus mit einem neuen Indifferenzpunct bereichern, auch mit einer Identität neuer Art, da eine unendliche Linie zwischen zwey zusammen fallenden Puncten enthalten ist.

43. Es sey MQ (Fig. 78.) senkrecht auf die berührende TMN, und schneide die Axe in Q, es ist PQ $= \frac{bb}{aa} . CP$, und $CQ = \frac{ee}{aa} . CP$.

Bew. Es ist $PQ = MP . \tang PMQ = MP . \tang PTM = f . \sin\varphi . \tang\omega = f . \tang\varphi . \tang\omega . \cos\varphi = \frac{bb}{aa} . CP$.

Ferner $CQ = CP + PQ = \left(1 + \frac{bb}{aa}\right) CP = \frac{ee}{aa} . CP$.

44. Es ist $MQ = \frac{f \sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f \sin(\omega - \varphi)}$ aus (24.).

45. Man ziehe QR (Fig. 78.) senkrecht auf die verlängerte CM, es ist $CM \times MR = bb$.

Denn $MR = MQ . \cos QMR = MQ . \sin TMC = MQ . \sin(\omega - \varphi) = \frac{bb}{f}$ aus (44.).

46. Aus den Brennpuncten F, G (Fig. 78.) ziehe man an einen Punct M der Hyperbel die geraden FM,

GM; es halbirt die in M berührende TMt den Winkel FMG.

Bew. Es sey MP senkrecht auf die Axe CP und $CP = x$, so ist $CT = \frac{aa}{x}$ (39.), und $FT = e - \frac{aa}{x}$; $GT = e + \frac{aa}{x}$, also $FT : GT = ex - aa : ex + aa$. Ferner ist $FM = \frac{ex}{a} - a$; $GM = \frac{ex}{a} + a$ (11.), und $FM : GM = ex - aa : ex + aa$. Folglich ist $FT : GT = FM : GM$. Daher halbirt TM den Winkel FMG, zufolge des umgekehrten Satzes, Dreyeck, nr. 9.

47 Wenn die Hyperbel als eine physische, die Lichtstrahlen zurückwerfende, Linie betrachtet wird, so werden die von dem einen Brennpunc e auffallenden Strahlen so zurückgewerfen, daß ihre rückwärts genommenen Verlängerungen nach dem andern Brennpuncte gehen. Denn es ist der Zurückstrahlungswinkel tMg gleich dem Einfallswinkel FMT, also auch gleich dem TMG, so daß die verlängerte gM durch G geht. Der Brennpunct G ist nur ein virtueller.

48. Es ist $\sin FMQ = \frac{e \cos \omega}{a}$, wo ω der Winkel der berührenden mit der Axe ist, und MQ die Normale auf die berührende oder die Curve.

Bew. In dem Dreyeck FMQ ist $FM : FQ = \sin FQM : \sin FMQ$. Ferner ist $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $FQ = CQ - CF = \frac{ee}{aa} x - e$ (43.), also ist $FM : FQ = a : e$. Auch sind in dem rechtwinklichten Dreyeck TMQ die beiden Winkel bey Q und T jeder des

andern Ergänzung zum Rechten. Daher $\sin FQM = \cos QTM = \cos\omega$, und $a : e = \cos\omega : \sin FMQ$.

49. Es ist $FM \times GM = gg =$ dem Quadrat des zu CM conjugirten Halbmessers.

Bew. Da $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $GM = \frac{ex}{a} + a$ ist, so ist $FM \times GM = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2$. Ferner $ee = aa + bb = (1 + \tang\varphi . \tang\omega)aa = \frac{\cos\varphi . \cos\omega + \sin\varphi . \sin\omega}{\cos\varphi . \cos\omega} aa = \frac{\cos(\omega - \varphi)}{\cos\varphi . \cos\omega} aa$.

Dann ist $x = f\cos\varphi$, und $\frac{ff}{aa} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi . \sin(\omega - \varphi)}$, also ist $\frac{e^2x^2}{a^2} = \frac{\sin\omega . \cos(\omega - \varphi)}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} aa$. Folglich

$$FM \times GM = \left(\frac{\sin\omega . \cos(\omega - \varphi)}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} - 1\right) aa = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega . \sin(\omega - \varphi)} aa = gg, \text{ aus (24.)}.$$

50. Noch mehrere Eigenschaften der Hyperbel, die wie die bisher angeführten, mit Eigenschaften der Ellipse Analogie haben, (s. Ellipse), wird man nach Anleitung des hier gebrauchten Verfahrens finden können, auch andere, die hier nicht berührt sind. Es kann aber leicht seyn, daß bey Verhältnissen der an die Hyperbel oder Ellipse gezogenen geraden Linien die Geometrie einen kürzern Weg giebt.

51. In van Schooten Exercit. mathematicis L. IV. sind verschiedene Instrumente angegeben, eine Hyperbel durch stetige Bewegung eines Stiftes zu beschreiben.

Es sey C (Fig. 79.) der Mittelpunct der zu zeichnenden Hyperbel, CX ihre Hauptaxe, CA der Haupthalbmesser, AD der conjugirte, also CD die Richtung

der einen Asymptote. Diese werde nach CS verlängert. Wird CD in E halbirt, und AE gezogen, so ist AE parallel mit der andern Asymptote. Man setze drey Liniale FG, FN, GMA zusammen, so daß GFN dem Winkel der Asymptoten, das ist, AED gleich sey, FGA aber von willkührlicher Größe, indem FG und AG sich um einen Stift in G drehen lassen. Das Linial FG sey so lang als die Linie CE. Wird das Linial FG auf AS hingeschoben, indem das Linial AG immer durch A geht, so beschreibt ein Stift an dem Durchschnitt der Ränder der Liniale AG, FN die Hyperbel längs der Asymptote AS.

Es ist hier FG : FM = EG : EA. Da FG = CE, also EG = CF ist, so ist CE : FM = CF : EA, daher M ein Punct in der Hyperbel, nach (8.).

Anstatt der Haupthalbmesser kann man auch zwey andere conjugirte nehmen, mit dem Ordinatenwinkel DAX, wo CAX nun ein Durchmesser durch A ist, zufolge (38.).

52. Man nehme (Fig. 80.) zwey Liniale DN, GP, befestige darauf in F, G Stifte, welche die Brennpuncte einer Hyperbel vorstellen. Von F und G nehme man FD und EG jedes so groß als die Hauptaxe, und befestige mittelst Stifte in D und E ein Linial DE, worauf DE der Abstand der Brennpuncte sey, so daß sich jene Liniale mit diesem um D und E drehen können. Die Liniale DN und EP haben Einschnitte der Länge nach, jenes von F, dieses von E an, um in ihrer Durchkreuzung M einen Stift fortzuführen, der die Hyperbel beschreibt. Auf dem Papiere oder der Tafel steckt man die Puncte F, G für die Brennpuncte ab, in der Entfernung DE, läßt die beiden Liniale DN, GP sich um die Stifte in F, G durch jene Puncte drehen, und führt den Stift M herum, so beschreibt dieser einen hyperbolischen Bogen. Die Linie MT von M bis an die Durchkreuzung des Linials DE mit der Linie FG ist die berührende in M. Die Mitte C von FG ist der Mittelpunct der Hyperbel; A und B sind ihre Scheitelpuncte, wenn CA und CB jedes der Hälfte von FD oder EG genommen worden.

Hyperbel höherer Art ist diejenige, deren Gleichung ist, $ay^{m+n} = bx^m(c+x)^n$. Sie entsteht auf eine ähnliche Art durch den Schnitt eines Konoids, dessen Grundfläche ein Kreis höherer Art ist, wie die vorher betrachtete aus dem Kegel. Ein Kreis höherer Art hat die Gleichung, $y^{m+n} = (c-x)^n x^m$. Die Hyperbel der ersten Art heißt zum Unterschiede die Apollonische. S. Wolfii Elementa Matheseos. T. I. Analysis. §. 525—530. Die Formen sind nach Beschaffenheit der Exponenten m, n, ob diese gerade oder ungerade sind, sehr verschieden.

Einige nennen diese höhern Hyperbeln auch Hyperboloiden, welches aber auch hyperbolische Konoiden bedeutet.

Eine andere Gattung von Hyperbeln höherer Art ist diejenige, welche unter der Gleichung, $x^m y^n = a^m b^n$, begriffen ist, wenn $m+n$ größer als 2 ist. Die Axen der Coordinaten sind die Asymptoten der Curve. Newtons Katarakta (Princip. Phil. nat. math. L. II prop. 36.) ist nach einer solchen Hyperbel gebildet. Die Gleichung für diese ist, $xy^4 = ab^4$. Sie ist eine Hyperbel der vierten Ordnung.

Newton nennt in seiner Enumeratione linearum tertii ordinis, die Curven dieser Gattung mit geradlinichten Asymptoten oder mit einer einzigen auch Hyperbeln, weil ihre Zweige, die an einer Asymptote hinlaufen sich immer mehr und mehr den Zweigen einer apollonischen Hyperbel nähern. Diejenigen, die drey Asymptoten haben, von welchen keine sich parallel sind, nennt er Hyperbolas redundantes, diejenigen, die nur eine haben, Hyperbolas defectivas. Auch giebt er den Formen der Curven, nach Verschiedenheit der Lage des hyperbolischen Zweiges gegen die Asymptoten, besondere Namen, als circumscripta, ambigena, conchoidalis, cet.

Hyperbolisch, was einer Beziehung auf die Hyperbel hat, als hyperbolisches Cylindroid (s. Cylindroid);

hyperbolischer Kegel (s. Konoid); hyperbolische Logarithmen (s. Logarithmen).

Hyperboloides, eine Hyperbel höherer Art, oder auch ein hyperbolisches Konoid.

Hypergeometrische Reihe ist diejenige, deren Glieder Producte aus den Gliedern einer arithmetischen Reihe nach ihrer Folge sind, so daß das nte Glied jener Reihe das Product von den n ersten Gliedern dieser ist, z. B. die Reihe, 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. in welcher das nte Glied ist $= 1.2.3.4.5...n$.

Wallis hat diese Benennung gebraucht in der Arithm. Infin. Prop. 190. Nämlich in der geometrischen Reihe ist das nte Glied das Product aus dem ersten Gliede in eine Anzahl von $n - 1$ gleichen Factoren, oder in die $(n - 1)$te Potenz des Exponenten. In der hypergeometrischen Reihe sind die zu dem Anfangsgliede gesetzten Factoren ungleich, und zwar in arithmetischer Fortschreitung.

Ein Glied dieser Reihe ist dasselbe, was Kramp eine arithmetische Facultät genannt hat, wovon ein eigner Artikel dieses Wörterbuchs umständliche Nachricht giebt.

Euler hat schon in seiner Differentialrechnung von Größen dieser Form gehandelt. In den Novis Comment. Acad. Petrop. T. XIII. ist von ihm eine Abhandlung über die Curve enthalten, an welcher die Glieder einer hypergeometrischen Reihe mit ihren eingeschalteten die Ordinaten sind, deren Natur er untersucht. Für ganze negative Werthe der Abscisse sind die Ordinaten unendlich groß, zwischen diesen abwechselnd positiv und negativ. Euler findet, daß das Product $1.2.3...x$ sich durch die Reihe,

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x.x-1.}{1.2}(x-2)^x$$

$$- \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

ausdrucken lasse, und nimmt daher Gelegenheit eine allgemeinere Reihe dieser Form, worin statt des Exponenten x eine Zahl n, und statt x in den Coefficienten eine Zahl m gesetzt wird.

In den Novis Actis Ac. Petrop. T. VII. et VIII. sind noch zwey Abhandlungen von Euler über die hypergeometrischen Reihen enthalten. Die erste betrifft das allgemeine Glied derselben; die zweyte enthält verschiedene Betrachtungen über diese Reihen.

In der ersten dieser Abhandlungen findet Euler folgenden Ausdruck für das nte Glied dieser Reihen. Es werde dasselbe als eine Function der veränderlichen Größe n betrachtet, und durch $\Delta : n$ bezeichnet, wo Δ das Functionszeichen ist. Die arithmetische Reihe sey
$a, a+b; a+2b; \ldots a+(n-1)b$; etc. und α sey eine willkührliche endliche Größe, so ist

$$\Delta : n = \alpha^n \cdot \frac{a}{a+nb}\left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} \times$$
$$\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n \cdot \frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n \times$$
$$\frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right) \cdot \text{ etc.}$$

Das Verfahren, wodurch Euler diesen Ausdruck findet, ist mit einiger Abkürzung und Abänderung folgendes.

Da $\Delta : n = a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(n-1)b)$, und eben so
$\Delta : (n+i) = a(a+b)\ldots\ldots(a+(n+i-1)b)$
ist, so ist
$\Delta : (n+i) = (\Delta : n)(a+nb)\ldots(a+(n+i-1)b)$.
Es ist aber auch, wenn man die Theile n und i der Stellenzahl $n+i$ vertauscht,
$\Delta : (i+n) = (\Delta : i)(a+ib)\ldots(a+(i+n-1)b)$.
Man gebe der Zahl i einen unendlich großen Werth, so

sind die in dem letztern Ausdruck zu $\Delta : i$ gesetzten Factoren alle als gleich zu achten, und es ist

$$\Delta : (i + n) = (\Delta : i)(a + ib)^n.$$

In der unendlich großen Größe darf man für a jede endliche α setzen, und so ist

$$\Delta : (i + n) = (\Delta : i)(\alpha + ib)^n.$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke für $\Delta : (n + i)$ folgt

$$\Delta : n = \frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} \cdot \frac{a + 2b}{a + (n + 2)b} \times$$

$$\ldots\ldots \times \frac{a + (i - 1)b}{a + (n + i - 1)b} (\alpha + ib)^n.$$

Dieses ist der wahre Werth von $\Delta : n$, wofern nur i einen unendlich großen Werth erhält, es mag n eine ganze oder gebrochne, oder selbst eine irrationale Zahl bedeuten.

Giebt man i einen endlichen Werth, so ist der Fehler bey dem gefundenen Ausdruck von $\Delta : n$ desto kleiner, je größer i genommen wird. Man setze für i folgeweise die Zahlen 1, 2, 3, etc. und bezeichne die dadurch entspringenden Werthe von $\Delta : n$ durch I. II. III. etc. so ist

I. $\frac{a}{a + nb} (\alpha + b)^n.$

II. $\frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} (\alpha + 2b)^n.$

III. $\frac{a}{a + nb} \cdot \frac{a + b}{a + (n + 1)b} \cdot \frac{a + 2b}{a + (n + 2)b} (\alpha + 3b)^n.$

IV. $\frac{a}{a + nb} \ldots \frac{a + 3b}{a + (n + 3b)} (\alpha + 4b)^n.$

etc.

Hieraus wird erhalten

$$\frac{\text{II}}{\text{I.}} = \frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{III.}}{\text{II.}} = \frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{IV.}}{\text{III.}} = \frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right)^n;$$

etc.

Multiplicirt man diese Quotienten und alle folgenden in einander, setzt darauf den Factor I. noch hinzu, und giebt dem ersten Factor die Form der übrigen, so wird der vorher angegebene Werth von $\Delta : n$ erhalten.

Die einzelnen Factoren sowohl als die partiellen Factoren derselben nähern sich immer mehr der Einheit. Die Größe α ist willkührlich, und kann so genommen werden, daß die Rechnung dadurch bequemer wird. Man bemerkt leicht, daß in dem zuerst gefundenen Werthe von $\Delta : n$ eine Reihe von Factoren als Multiplicatoren und als Divisoren eingeschoben ist, wodurch das Product der abnehmenden Bruchfactoren, $\frac{a}{a+nb}$; $\frac{a+b}{a+(n+1)b}$, etc. wieder vergrößert wird.

Da der Werth von $\Delta : n$ nur für unendlich große i als richtig angesehen werden kann, so bleibt die Annäherung zu dem wahren Werthe noch immer unsicher, und die Einschaltung der Potential-Factoren ist auch etwas willkührliches, zugleich mit dem Werthe von α. Nimmt man anstatt der gleichen Factoren $a+ib$, die nur für ein unendliches i Statt finden, die genau richtigen $a+ib$, $a+(i+1)b$, u. s. f. so erhält man für $\Delta : n$ eben die Formel, die in dem Artikel, Facultät, 44. gefunden ist.

Das Verfahren, welches ich daselbst (52. 53.) gebraucht habe, den Werth eines eingeschalteten Gliedes in einer Reihe von Facultäten, oder einer hypergeometrischen zu finden, scheint das sicherste und directeste zu seyn. Die

Multiplication zweyer Werthe der gesuchten Größe, deren einer zu groß, der andere zu klein ist, muß sich dem Quadrate dieser Größe nähern, wenn die Factoren dieses Products sich immer mehr der Einheit nähern, wie es daselbst geschieht.

Hypotenuse, ist in einem rechtwinklichten Dreyeck die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über liegt (Subtensa angulo recto, von ὑπο und τεινω.). S. Pythagorischer Lehrsatz.

Hypothesis, Voraussetzung, ist in der reinen Mathematik, was man auch das Gegebene für einen zu erweisenden Satz oder eine aufzulösende Aufgabe nennet. Bey einem Lehrsatze wird etwas über die Beschaffenheit und Verbindung gewisser Größen vorausgesetzt oder bestimmt, um daraus neue Folgen zu ziehen. Das ist die Hypothesis des Satzes. Z. B. zwey Dreyecke haben eine gemeinschaftliche Grundlinie und gleiche Höhe, so folgt aus dieser Hypothesis, daß sie gleichen Inhalt haben, Daher ist die gewöhnlichste Form der mathematischen Lehrsätze die bedingte. Bey einer Aufgabe liegt auch immer eine gewisse Bedingung über die Beschaffenheit der gegebenen und gesuchten Größen zum Grunde, woraus das gesuchte hergeleitet werden soll. Z. B. Zwischen zwey gegebenen Größen zwey mittlere geometrisch proportionale zu finden, wo die Hypothesis die Proportionalität der vier Größen ist. Oder: aus der Summe dreyer Größen, der Summe der Producte je zweyer und dem Producte aller drey diese Größen zu finden, wo die Combinationen die Hypothesis ausmachen.

In der angewandten Mathematik sind Hypothesen gewisse Annahmen über die physische Beschaffenheit der Größen, welche den Gegenstand einer mathematischen Untersuchung ausmachen. Z. B. daß ein Körper vollkommen dichte und gleichförmig sey, daß ein flüssiger Körper vollkommen flüssig sey Dahin gehören alle Fälle, worin etwas bey Seite gesetzt wird, das zu einer völlig scharfen

Bestimmung und Auflösung noch in Betracht zu ziehen ist. Man kann Gesetze wirkender Kräfte annehmen, die nur nichts den allgemeinen Grundsätzen wiedersprechendes enthalten müssen, und daraus Folgerungen ziehen, ohne dadurch zu behaupten, daß diese Gesetze wirklich in der Natur vorhanden seyn. Vergleicht man die Folgerungen mit den Beobachtungen, und stimmen diese mit jenen gehörig zusammen, so ist dieses wenigstens eine sehr wahrscheinliche Begründung des angenommenen Gesetzes. In der Optik ist es erlaubt, das Licht als einen Ausfluß aus dem leuchtenden Körper zu betrachten, und die Lichtstrahlen für mathematische Linien zu nehmen. Die Übereinstimmung der Folgerungen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraction mit der Erfahrung beweiset inzwischen jene Annahme nicht als wirklich.

In der Astronomie insbesondere heißen die verschiedenen Systeme von dem Laufe der Himmelskörper, Hypothesen, als Hypothesis Ptolemaica, Tychonica, Copernicana.

J.

Ichnographie ist Grundriß in der Baukunst. Von ἴχνος, Fußsole Fußstapfe, und γραφω, zeichne. Es ist eine Anwendung der orthographischen Projection.

Icosaedrum, ein regulärer Körper von 20 gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, s. Körper, reguläre.

Identisch, was in der Größe und Form übereinstimmt. Zwey Größen können einander gleich, und doch in der Form oder Zusammensetzung verschieden seyn. So sind $40 + 8$; $60 - 12$; 3×16; $\frac{96}{2}$, sich gleich, aber in der Form verschieden; so auch $(a + b)(a - b)$ und $aa - bb$. Zwey Dreyecke können einerley Inhalt haben, bey verschiedenen Winkeln und Seiten. Von Figuren, die gleich und ähnlich sind (in der Größe und