G.

Ganz ist ein Verhältnißbegriff, dessen zugehöriger Begriff der Theil ist. Das Ganze ist so groß, als seine erschöpfenden Theile zusammen. Bey einer Zahlgröße zeigt der Zusatz, ganz, an, daß sie vollständig durch Wiederholung der Einheit zusammengesetzt wird, oder die Einheit selbst ist, im Gegensatze gegen Brüche. Eine ganze Potenz (mit einem ganzen Exponenten) entsteht durch Wiederholung eines Factors allein, eine gebrochne Potenz (mit einem gebrochnen Exponenten) durch Wiederholung eines Factors und Zerlegung des Products in eine Anzahl gleicher Factoren. Was eine ganze Function in Beziehung auf eine gebrochene ist, ist in dem Artikel, Function, erklärt.

Gegeben (datum) ist ein Verhältnißbegriff, dessen Correlatum das unbekannte ist. Die Auflösung einer Aufgabe bestimmt das unbekannte durch das gegebene, ein einzelnes oder mehreres. Bey allgemeinen Untersuchungen wird das gegebene unbestimmt gelassen, und in der Anwendung auf einzelne Fälle entweder willkührlich angenommen, oder durch die Frage bestimmt, oder durch Erfahrung, in der angewandten Mathematik, ausgemacht. In der Rechnung werden die gegebenen Größen durch die ersten Buchstaben des Alphabets, auch durch die mittlern, die unbekannten durch die letztern bezeichnet und unterschieden.

Was die Data des Euklides sind, s. Data.

Gegend ist bey geraden Linien bisweilen dasselbe was Richtung, ein unbestimmt entfernter Punct, nach welchem hin sie gezogen wird, besonders in der Astronomie und Geographie Puncte des Horizonts an der scheinbaren Fläche des Himmels. In der analytischen Geometrie wird auf solche Art die Gegend der positiven und negativen Abscissen unterschieden. Auf ebenen Flächen ist der Theil derselben, der durch eine gerade Linie von dem andern abgesondert wird, eine

Gegend, nach welcher von jener Linie an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer bestimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ebene sind entgegengesetzte Gegenden. Bey krummen Linien unterscheidet man solchergestalt die Gegend der positiven und negativen Ordinaten. Von einer unbestimmten körperlichen Ausdehnung ist der Theil, der durch eine Ebene von dem andern abgesondert wird, eine Gegend, nach welcher von jener Ebene an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer bestimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ausdehnung auf beiden Seiten der Ebene sind entgegengesetzte Gegenden. An krummen Flächen wird dadurch die Lage der parallelen Ordinaten unterschieden.

Gemischt ist, was aus ungleichartigem zusammengesetzt ist. Eine gemischte ebene Figur ist, deren Umfangslinie aus Linien verschiedener Art zusammengesetzt ist, als aus geraden und krummen, oder aus krummen, deren Puncte nach verschiedenen Gesetzen bestimmt werden. Z. B. eine Ovale, die aus Kreisbogen mit verschiedenen Halbmessern zusammengesetzt ist, dagegen in einer Ellipse alle Ordinaten durch dieselbe Formel aus ihren Abscissen bestimmt werden.

Die gemischte Mathematik ist der reinen entgegengesetzt, weil in jener nicht allein die gegebenen Größen durch Erfahrung gesucht werden müssen, sondern auch die Verbindung der bekannten und unbekannten Größen den Gesetzen der Natur gemäß genommen werden muß.

Ein gemischtes Verhältniß ist, was aus ungleichnamigen Verhältnissen zusammengesetzt wird. Z. B. das Verhältniß der Wege zweyer Körper aus den Verhältnissen der Zeiten und Geschwindigkeiten; der Preise zweyer Waaren aus dem ihrer Menge, dem Verhältnisse der Gewicht oder Ellenmaaßen, und dem der Geldsorten.

Gemischte Zahl, eine aus ganzen und gebrochnen, oder aus rationalen und irrationalen zusammengesetzte.

Geodäsie ist eigentlich derjenige Theil der praktischen Geometrie, worin die Eintheilung der Felder und Ländereyen nach vorgeschriebenen Verhältnissen und Maaßen gelehrt wird. Das Kunstwort ist von den beiden griechischen Wörtern, γῆ, die Erde, und δαίειν, theilen, abgeleitet. Die Theorie des ganzen Verfahrens bey diesem Geschäft ist in dem Artikel, Figur, vorgetragen.

Man gebraucht das Wort aber auch im weitern Verstande für die Feldmeßkunst überhaupt, als die Anwendung der Geometrie auf die Messung und Berechnung der Ländereyen, sowohl in Absicht auf ihren Umfang und Inhalt, als auf ihre Eintheilung. Zollmann hat seine Anweisung zur Feldmeßkunst betitelt: Vollständige Anleitung zur Geodäsie oder praktischen Geometrie, Halle 1744, Fol. Einige Schriftsteller haben auch die Messungen der Linien und Winkel, welche zur Bestimmung der Länge eines Bogens auf einem Meridian der Erde angestellt sind, geodätische Operationen genannt, um sie von den astronomischen Operationen zu unterscheiden, wodurch die Weite des gemessenen Bogens gefunden wird, oder der Winkel, welchen die lothrechten Linien auf den Endpuncten des Bogens, nach dem Innern der Erde verlängert, mit einander machen.

Geometer, eine Person, die der Geometrie wohl kundig ist. Im Französischen pflegt man einen Mathematikverständigen insbesondere einen Geometer zu nennen, weil man wegen des großen Einflusses, den die Geometrie auf alle übrigen Theile der Mathematik hat, in keinem gründliche Kenntnisse haben kann, ohne eine genaue Bekanntschaft mit jener.

D'Alembert macht in dem Artikel, Geometer, des Dictionn. encyclopédique, sehr gute Bemerkungen zur Würdigung des geometrischen (oder vielmehr mathematischen) Talents, die Vertragsamkeit desselben mit dem Talent für Dichtkunst und Wohlredenheit, und den Einfluß auf andere Beschäftigungen. Einen Auszug daraus wird man in dem Artikel, Mathematiker, finden. Der

ganze Aufsatz ist in dem Esprit de l'Encyclopédie, à Genéve, T. III. eingerückt.

Geometrie ist die Wissenschaft von den Formen ausgedehnter Größen. Sie unterscheidet sich von der Analysis dadurch, daß sie eigentlich nicht rechnet, die Größen nicht auf eine Einheit, weder eine bestimmte noch unbestimmte bezieht, sondern die Vergleichungen theils durch Zerlegungen und Zusammensetzungen macht, theils die Größen paarweise, durch ihre Verhältnisse, vergleicht. Die Geometrie nimmt die Bilder der intellectuellen Größen selbst zu Symbolen, da die Analysis willkührliche, an sich bedeutungslose, Zeichen der Größen und ihrer Verbindungen gebraucht. Doch kann die Rechnung auch auf geometrische Größen angewandt werden. Zum praktischen Gebrauch ist dieses gewöhnlich nöthig, und am genauesten. In höhern Untersuchungen muß die Analysis zu Hülfe genommen werden.

Die Geometrie ist theils eine **niedere**, theils eine **höhere**. Zu der niedern gehören erstlich alle Untersuchungen über Verbindungen gerader Linien, geradlinichter Figuren, und über Körper, die von Ebenen eingeschlossen sind; dann die Betrachtungen des Kreises, der Kugel, des Cylinders und des Kegels, so fern darin Verhältnisse gerader Linien verglichen werden; einiges leichtere auch über die Vergleichung des Krummen, oder, wenn man will, alles, was durch die Exhaustions-Methode dabey herausgebracht werden kann; wodurch zwar die Lehren des Archimedes von der Kugel, dem Cylinder und dem Kegel noch in die niedere Geometrie zu bringen wären, allein auch an der Gränze mit der höhern sich befanden.

Die **elementarische** Geometrie macht einen Theil der niedern aus. Sie enthält die Hauptsätze, die beständig zu den Beweisen gebraucht werden, mit den Auflösungen derer Aufgaben, die am häufigsten vorkommen. Man muß die niedere Geometrie nicht nach dem Inhalte unserer Lehrbücher beurtheilen, die nur das nothwendigste enthalten. Man sehe die mathematischen Sammlungen

des Pappus an; auch die wiederhergestellten Schriften des Apollonius, die ebenen Örter, die Bücher von dem bestimmten Schnitte, von der Theilung des Raumes, und die noch erhaltene von der Theilung des Verhältnisses; unter den Neuern die Werke von Gregorius a St. Vincentio, Lacquet, und das angefangene ausführliche Lehrgebäude der Geometrie von Gilbert. Erster Theil 1798.

Man theilt bisweilen die Elementar-Geometrie in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie ein, s. diese Kunstwörter. Doch wird in dieselbe auch die Vergleichung der Oberflächen des senkrechten Cylinders und Kegels, und der Kugel mit ebenen Figuren aufgenommen. Man rechnet diese zur Stereometrie, dem Wortverstande nicht gemäß.

Die höhere Geometrie beschäftigt sich mit den krummen Linien, den von ihnen eingeschlossenen Flächenräumen, und den von ihnen erzeugten Körpern und Oberflächen. Sie fängt mit der Lehre von den Kegelschnitten an, die auf verschiedene Art, entweder rein geometrisch, oder mit Zuziehung analytischer Rechnung behandelt werden kann. Von diesen, durch ihre mancherley Eigenschaften merkwürdigen, Linien geht sie zu den höhern krummen Linien über, deren verschiedene Formen sie aus einander setzt. So weit es hier auf die Verhältnisse der darin nach bestimmten Gesetzen gezogenen geraden Linien ankommt, kann die Analysis endlicher Größen mit der Untersuchung fertig werden, wie man aus den Abhandlungen von Euler in dem zweyten Bande seiner Introductio in Analysin Infin. und Cramers Analyse des lignes courbes sieht. Wo aber das Krumme unmittelbar in Betrachtung zu ziehen ist, oder wo man von den letzten charakteristischen Verhältnissen der Veränderungen an den krummen Linien und Flächen ausgehen muß, da ist die Hülfsleistung der Analysis des Unendlichen nothwendig. Die reine (von der Erfahrung unabhängige) Mechanik führt insbesondere auf krumme Linien, die nur durch dieses Hülfsmittel erforscht werden können. Die wichtigste

und schwerste Frage dieser Art ist die Bestimmung der gedoppelt krummen Linie, die ein Weltkörper vermöge mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte beschreibt, eine Aufgabe, womit man sich schon über ein Jahrhundert beschäftigt hat, und die man nur unter gewissen Einschränkungen aufzulösen in Stand gekommen ist.

Ein neuer Zweig der Geometrie ist die Vergleichung der Winkel mittelst ihrer trigonometrischen Functionen mit denjenigen der Winkel, woraus sie zusammengesetzt werden. Man rechnet diese zu der analytischen Trigonometrie. Sie wird von dieser abgesondert, unter der Benennung, Goniometrie, in diesem Werke abgehandelt werden. Die Alten hatten nur sehr unvollkommene Kenntniß von diesem Theile der rechnenden Geometrie. Sie hat vorzüglich durch Euler ihre Bildung erhalten.

Die Methode in der Geometrie, in Absicht der Hülfsmittel, ist zweyerley. Man kann sich erstlich bloß der Lehren der Elementar-Geometrie, nebst derjenigen Art von Rechnung des Unendlichen, welche die Exhaustions-Methode genannt wird, bedienen, wie die Alten es durchgehends thaten, und die Engländer noch jetzt gewöhnlich thun. Zweytens kann man sich der Hülfe der Algebra, der Analysis und der analytischen Trigonometrie nebst der Goniometrie bedienen, indem man alle Sätze auf Gleichungen bringt, diese mit einander verbindet, und aus den Eigenschaften der Gleichungen und andern analytischen Sätzen, besonders denen aus der Differential- und Integralrechnung, und den trigonometrisch-goniometrischen Formeln, geometrische Vergleichungen herleitet. Dieses Verfahren erspart viele Mühe, da man nach der Methode der Alten erst die Mittelglieder der Schlußfolgen mühsam und künstlich aufsuchen muß, dagegen nach jener analytisch-rechnenden Methode nur das besondere aus dem allgemeinen herzuleiten ist. Die erstere reicht kaum oder wenig über die Kegelschnitte hinaus, der andern ist fast alles zugänglich oder wird es noch werden.

Die Methode in der Geometrie in Absicht des logischen Verfahrens ist, wie überhaupt, entweder synthetisch oder analytisch. Die synthetische Methode ist nicht, wie man gewöhnlich anzunehmen scheint, einzig und allein die Methode der Alten in der Geometrie, aus bewiesenen Sätzen einen neuen herzuleiten, oder aus dem gegebenen das unbekannte directe zu finden, sondern sie hat auch bey der Anwendung der analytischen Rechnung Statt, besonders bey dem Erweise von Lehrsätzen. Diese wird man nicht leicht rückwärts erweisen, so nämlich, daß gezeigt würde, wie man von einem als wahr angenommenen Satze auf einen als wahr schon anerkannten Satz geführt werde, s. Th. I. S. 88. Die analytische Auflösung geometrischer Aufgaben pflegt mit der synthetischen verbunden zu werden. Der wesentliche Unterschied der Methode der Alten und der Neuern beruht auf den Hülfsmitteln, die von beiden gebraucht werden.

Die Methode der Alten hat man besonders in dem Anfange des mathematischen Studium sich geläufig zu machen. Sie giebt eine unmittelbare, anschauliche Zergliederung der Relationen, sie nöthigt, in jedem Falle auf besondere Verbindungen und Anknüpfungen der Größen, und Einführung von Mittelbegriffen zu sinnen. Auch prägt sie durch die öftere Anwendung der gefundenen Sätze diese dem Gedächtnisse, zur schnellen Bereitschaft, ein. Durch alles dieses wird der mathematische Geist geschärft, und der Zeitaufwand vergütet. Ist man erst im Besitze der allgemeinen Hülfsmittel aus der Analysis der Neuern, so wird man vielleicht nicht die Geduld haben, zu Fuße zu gehen, wo man fliegen kann. Die fast unübersehbare Menge von Kenntnissen, welche die neuere Mathematik enthält, nöthigt auch die Zeit zu sparen.

Newton, der erste Erfinder der neuern Analysis, hielt die Methode der Alten sehr hoch, und rühmte die Mathematiker seiner Zeit, welche in der Anwendung derselben Geschicklichkeit hatten, besonders Huygens. Er pflegte sich oft selbst zu tadeln, daß er sie nicht mehr be-

folge, und bedauerte, daß er in dem Anfange seiner mathematischen Studien sich zu sehr an Descartes und andere algebraische Schriftsteller gehalten hätte, ehe er die Elemente des Euklides sich vollkommen zu eigen gemacht hatte. Das erzählt Pemberton in der Vorrede zu dem View of Sir Isaac Newton's Philosophy.

Uebersicht der Geschichte der Geometrie.

Die wissenschaftliche Geometrie hat ihren Ursprung von der technischen, der Feldmeßkunst, wie der Name (von γη, Erde, und μετρειν, messen) zu erkennen giebt. Herodotus erzählt (B. II. C. 109.), daß der ägyptische König Sesostris jedem seiner Unterthanen gleich viel Land zugetheilt habe, wovon jeder eine, für alle gleiche, Abgabe zu leisten hatte. Verlor einer durch die Überschwemmung des Nils etwas von seinem Antheil, so ward durch einen Feldmesser nachgesehen, wie viel er verloren hatte, und darnach die Abgabe vermindert. Herodotus fügt hinzu, daß hiedurch die Geometrie erfunden seyn möge, welche darauf nach Griechenland übergegangen sey. Aristoteles bemerkt in dem Anfange seiner Metaphysik ohne Zweifel sehr richtig, daß die Mathematik ihren Ursprung in Ägypten habe, da hier das Collegium der Priester frey von den Arbeiten des bürgerlichen Lebens Muße hatte, sich den Wissenschaften zu widmen. Inzwischen mögen die ägyptischen Priester doch nicht weit gekommen seyn, oder sind sehr geheim mit ihren Entdeckungen gewesen, da Thales, der zu ihnen gereiset war, noch die ersten Sätze der Geometrie zu erfinden hatte, und Pythagoras über die Entdeckung eines sehr nothwendigen Satzes so große Freude bezeugte. Nach der Erzählung des Diogenes Laertius und Plutarchus hat Thales den Ägyptern gezeigt, wie man die Höhe der Pyramiden mittelst des Schattens messen könne.

Thales (650 J. v. C. G.) hat, wie Proklus berichtet, gefunden, daß in gleichschenklichten Dreyecken die Winkel an der Grundlinie gleich groß sind, daß die Schei-

telwinkel sich gleich sind, daß Dreyecke gleich sind, die in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinkommen, und daß ein Kreis von seinen Durchmessern in zwey gleiche Theile getheilt wird. Auch fand er, daß jeder Winkel am Umfange in einem Halbkreise ein rechter ist, für welchen Satz er den Musen einen Ochsen opferte. Von ihm erhielten die Griechen die ersten Begriffe von Astronomie und Naturlehre.

Pythagoras (im 6ten Jahrh. v. C. G.) erfand den nach ihm genannten geometrischen Satz, ein wichtiges Hülfsmittel zu geometrischen Vergleichungen, und den Grund zur arithmetischen Bestimmung der Linien. Daß er den Göttern hundert Ochsen zum Dank geopfert habe, ist Fabel, da es nach seiner Lehre nicht erlaubt war, ein Thier zu tödten. Pythagoras hat schon eingesehen, daß der Kreis unter allen ebenen Figuren gleichen Umfanges den größten Inhalt, und die Kugel unter allen Körpern mit derselben Oberfläche den größten Raum ausfülle. Die numerische Vergleichung der Linien führte die Pythagoräer auf die incommensurablen Größen. Sie geriethen auch auf die regelmäßigen Körper, die nach ihnen bisweilen benannt werden. Sie verglichen sie, nach ihrer symbolischen Lehrart, mit sinnlichen Gegenständen, die Pyramide mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Oktaedron mit der Luft, das Jckosaedron mit dem Wasser, das Dodekaedron mit dem Weltall

Onopides von Chio (500 J. v C. G.) fand, wie eine senkrechte von einem gegebenen Puncte auf eine gerade Linie gezogen, ein Winkel einem andern gleich gemacht, und ein Winkel in zwey gleiche getheilt wird. Doch scheinen diese Sätze schon früher, dem Thales und Pythagoras, bekannt gewesen zu seyn müssen.

Zenodorus, ein Schüler des Onopides, zeigte, daß aus der Gleichheit des Umfanges zweyer Figuren nicht die Gleichheit des Inhalts folge. Seinen Aufsatz hierüber, die älteste auf uns gekommene geometrische Schrift des Alterthums, hat Theon in seinem Commentar über das Almagest aufbehalten.

Hippokrates von Chio (450 J. v. C.) fand die Quadratur einer durch zwey Kreisbogen auf gewisse Art begränzten Figur, die von ihm den Namen lunula Hippocratis führt, s. Hippokrates. Zu seiner Zeit kam die Aufgabe in Anregung, einen gegebenen Würfel zu verdoppeln, so daß ein Würfel bleibe. Hippokrates bemerkte, daß es hiebey darauf ankomme, zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere proportionale zu finden. Er ist, wie Proklus angiebt, der erste, der geometrische Anfangsgründe verfaßt hat.

Die linearische Perspectiv ist, wenn das Zeugniß des Vitruvs (de Architect. VII. praef.) zuverlässig ist, früh bearbeitet worden. Er sagt, daß Anaxagoras und Demokritus über die theatralische Malerey geschrieben haben, quemadmodum oporteat ad aciem oculorum radiorumque extensionem, certo loco centro constituto, ad lineas ratione naturali respondere, uti de incerta re certae imagines aedificiorum in scenarum picturis redderent speciem, et quae in directis planisque frontibus sint figuratae, alia abscedentia, alia prominentia esse videantur. In der Optik, welche des Euklides Namen führt, sind zwar Sätze vorgetragen, worauf sich die Perspectiv gründet, aber eine perspectivische Geometrie ist es noch nicht.

Plato (400 J. v. C.) beschäftigte sich viel mit der Geometrie, und scheint durch Aufmunterung fähiger Köpfe zu ihrer Erweiterung vieles beygetragen zu haben. Er hat zwar, so viel man weiß, keine Schrift geometrischen Inhalts verfaßt, allein man sieht aus verschiedenen Stellen seiner Schriften, daß er die Geometrie liebte, und sie mit der Philosophie zu verbinden suchte. Dies erhellt aus der bekannten Inschrift über der Thür seines Hörsaals, kein der Geometrie Unkundiger komme herein. Er verlangte dadurch, daß der Verstand seiner Zuhörer durch die Geometrie gebildet seyn sollte, um die abstracten unsinnlichen Lehren seiner Philosophie zu fassen. Auch ist von ihm bekannt der Ausspruch, Gott ist immer Geometer

(ὁ Θεος ἀει γεωμετρει). Man schreibt dem Plato die Erfindung der geometrischen Analysis, und der Kegelschnitte zu. Doch mag er jene nur im Allgemeinen vorgetragen und empfohlen, und diese nur nach ihrer Entstehung aus dem Kegel betrachtet haben, ohne gewisse Eigenschaften an ihnen zu entdecken. Denn seine Auflösung von der Verdoppelung des Würfels ist nur eine mechanische. Seine Zöglinge und Nachfolger, Eudoxus, Menächmus, Dinostratus, Aristäus, bearbeiteten diesen wichtigen Theil der Geometrie, und wandten die analytische Methode mit Scharfsinn und glücklichem Erfolge an.

Eudoxus aus Cnidus wird von Archimedes als der Erfinder verschiedener Sätze in der Lehre von den Körpern angeführt, als daß eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe über derselben Grundfläche ist, und eines ähnlichen Satzes von dem Verhältnisse eines Kegels und Cylinders (von Kugel und Cylinder, Vorr.). Er hat sich entweder mit den Kegelschnitten oder mit andern krummen Linien beschäftigt, und das Delische Problem durch eine besondere von ihm erfundene Curve aufgelöset. Eratosthenes nennt ihn in der Aufschrift seines Mesolabum den gottähnlichen, und führt die von Eudoxus gebrauchte Curve als unterschieden von den drey Kegelschnitten des Menächmus an. Er hat Anfangsgründe der Geometrie verfaßt, und die Lehre von der Proportion erweitert, so daß auch das fünfte Buch des Euklides ihm von einigen zugeschrieben wird.

Menächmus scheint den Grund zu der Lehre von den Kegelschnitten gelegt zu haben, da Eratosthenes in der gedachten Aufschrift die drey Linien nach ihm benennt, (Μεναιχμειους κωνοτομειν τριαδας). Er wandte die Verbindungen zweyer Kegelschnitte sehr kunstgerecht zur Auflösung der Delischen Aufgabe an.

Dinostratus, sein Bruder, erdachte zur Auflösung der Aufgabe, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen, die Quadratrix.

Aristäus der ältere ist der erste, der über die Kegelschnitte geschrieben hat, ein Werk in fünf Büchern. Pappus führt es an (Coll. math. VII. praef.). Sein Werk über die körperlichen Örter (Auflösungen von Aufgaben durch Linien, die durch Durchschnitte von Körpern mit Ebenen entstehen) in fünf Büchern setzt er mit unter die Hauptwerke, die man studieren müsse, um sich in der geometrischen Analysis Fertigkeit zu erwerben. Diese kunstreiche Methode der alten Geometer hat, wie man hieraus sieht, seit den ersten Anwendungen des Menächmus, bald beträchtliche Erweiterungen erhalten. Die Lehre von den körperlichen Örtern beruhet auf der Lehre von den Kegelschnitten.

Euklides (300 J. v. C.) ist durch seine Elemente der Geometrie und der Arithmetik allen bekannt. Durch ihre Gründlichkeit und wissenschaftliche strenge Anordnung haben sie sich den großen Beyfall in allen Zeiten und bey allen cultivirten Völkern erworben. In England besonders sind sie fast das einzige Lehrbuch der Geometrie, gewiß zur feinern Bildung des Geistes. Ohne Zweifel sind vor Euklides schon gute Elemente der Geometrie vorhanden gewesen, die er benutzen konnte. Proklus nennt vier oder fünf frühere Verfasser von Elementen; Euklides habe aber die Entdeckungen seiner Vorgänger vervollkommnet, und besonders die noch mangelhaften Beweise zur völligen Schärfe gebracht. Allein er hat auch mehrere Werke geliefert, die über die Elemente hinausgehen. Seine Data erstlich enthalten eine Sammlung von Sätzen, die einem Geometer zu eigenen Untersuchungen nothwendig sind, Data Euclidis. Über die Kegelschnitte verfaßte er ein Werk in vier Büchern, worauf Apollonius nachher sein großes Werk gegründet hat. Pappus führt ein Werk von ihm an, Örter an eine Oberfläche, wovon er aber keine weitere Nachricht giebt. Es können nichts anders als krumme Linien von doppelter Krümmung, auf einer krummen Fläche gezogen, seyn. Das Hauptwerk des Euklides sind die Porismata in drey Büchern, wovon Pappus sagt, daß sie eine höchst kunstreiche Sammlung von Sätzen sind,

die zur Analysis der schwerern und allgemeinern Aufgaben dienen, wovon die Natur eine unendliche Menge an die Hand gebe. Die beiden letztern Werke sind verloren gegangen, weil sie zu kunstreich waren. S. Porismata. Die Hauptausgabe aller noch vorhandenen Schriften des Euklides, griechisch und lateinisch, ist von David Gregory. Oxford 1703. Fol. Robert Simson hat eine Ausgabe der geometrischen Elemente, der sechs ersten Bücher, mit dem 11ten und 12ten, lateinisch 1756 4. und englisch 1757 herausgegeben, worin er kritische Verbesserungen des Textes gemacht hat. Von der englischen Übersetzung ist 1775 die fünfte Auflage gemacht. Bey dieser und einigen vorhergehenden befinden sich auch die Data mit Verbesserungen. Eine sorgfältige deutsche Übersetzung aller 15 Bücher hat Lorenz geliefert. Zweyte Ausgabe 1798. Die beiden letzten Bücher der Elemente schreibt man dem Hypsikles zu. Verzeichnisse von Ausgaben der Euklidischen Schriften findet man in Scheibels mathem. Bücherkenntniß, 1. Stück, und in Murhards mathem. Bibliothek, 2 Bd.

Archimedes (250 J. v. C.) eröffnete sich Wege in Gegenden der Geometrie, die bis dahin fast gar nicht betreten waren, durch Vergleichung krummlinichter Größen unter einander und mit geradlinichten Sein Scharfsinn führte ihn zu vielen merkwürdigen Entdeckungen von neuer Art, daher das Alterthum ihm die erste Stelle unter den Geometern einräumte. Er hat mancherley Schriften hinterlassen, die alle geometrischen oder geometrisch-statischen Inhalts sind. Denn von seinen technischen Erfindungen, deren das Alterthum ihm vierzig beylegt, hat er nichts aufgesetzt. In der Schrift von Kugel und Cylinder vergleicht er diese Körper und ihre Abschnitte in Rücksicht auf Oberfläche und Inhalt. Der Aufsatz über die Kreismessung ist der erste Versuch einer Rectification, s. Cyklotechnie. In dem Buche von Konoiden und Sphäroiden gieng er noch weiter. Er vergleicht die Abschnitte dieser Körper oder das Ganze mit Cylindern und Kegeln von derselben Höhe über derselben Grundfläche. Die

Quadratur der Parabel fand er auf zweyerley Art, von welchen die durch Hülfe der Statik eine ganz überraschende Combination zweyer sehr ungleichartigen Vergleichungen ist. Seine Untersuchungen über die von Conon erdachte Spirale geben die Verhältnisse der zusammengehörigen Flächenräume an dieser Linie und dem Kreise, auch die Verhältnisse der Subtangenten von dem Mittelpuncte aus genommen zu den Kreisbogen. Die Beweise der letztern haben einem guten Mathematiker im 17ten Jahrhundert, Bouillaud, nach seinem Geständnisse, Mühe gemacht, so daß er zweifelte, ob er sie ganz gefaßt hätte. Archimedes war es auch, der die Statik und Hydrostatik gegründet hat. Seine beiden Bücher über die gleichwichtigen ebenen Figuren, oder die Schwerpuncte solcher Figuren, enthalten sehr scharfsinnige geometrische Methoden, den Schwerpunct geradlinichter, besonders aber parabolischer Figuren zu finden. Von der Methode, deren sich Archimedes zur Vergleichung krummlinichter Größen bedient hat, s. den Artikel, Exhaustions-Methode. Eine prächtige Ausgabe der Werke des Archimedes, mit Anmerkungen und gelehrten Abhandlungen begleitet, ist zu Oxford 1792, groß Folio, herausgekommen. Den größten Antheil an dieser Ausgabe hat Torelli, ein Geometer aus Verona, nach dessen Tode, einige Liebhaber der alten Geometrie seine Handschriften gekauft, und zum Druck befördert haben. Ein Beweis der Liebe für die Alten in England.

Apollonius von Pergä (200 J. v. C.) heißt bey den Alten der große Geometer, oder der Geometer vorzugsweise. Man hat allerdings ihn unmittelbar nach Archimedes zu setzen, der wegen der Neuheit seiner Untersuchungen, und der Methoden, die er dazu anwandte, noch den Rang vor Apollonius behaupten möchte. Das Hauptwerk dieses Geometers ist das über die Kegelschnitte in acht Büchern abgefaßte, von welchen noch die ersten vier im Original, die drey folgenden in einer arabischen Übersetzung, und aus dieser in einer lateinischen übrig sind. Das achte ist von Halley nach der kurzen von Apollonus

gegebenen Anzeige wieder hergestellt. Alle acht Bücher, die vier ersten zugleich griechisch, sind von ihm zu Oxford 1710 gr. Fol. herausgegeben. In den vier ersten Büchern hat Apollonius das vor ihm schon bekannte mit Verbesserung der Form vorgetragen, und mit neuen Sätzen bereichert. Die vier andern Bücher aber enthalten ganz neue und tief geschöpfte Untersuchungen. In dem Artikel, Kegelschnitte, wird davon weitere Nachricht gegeben. Die übrigen Schriften des Apollonius betreffen besondere Aufgaben aus der Geometrie, wobey viele Fälle möglich sind, die darin einzeln vorgenommen werden. Sie waren den Alten wegen der darin angewandten geometrischen Analysis wichtig. Sie sind alle verloren gegangen, bis auf die Schrift de sectione rationis, die in einer arabischen Übersetzung sich erhalten hat. Ihre Titel und die wieder hergestellten sind in dem 1. Th. S. 66. angeführt. Die algebraischen Auflösungen der Aufgaben de sectione rationis und de sectione spatii sind daselbst S. 113 und 115. anzutreffen, die von der sectione determinata, S. 293. ff. ein Fall der Aufgabe de inclinationibus, S. 120. Unter den übrigen Schriften, von deren Inhalt gar keine nähere Anzeige vorhanden ist, war eine über die Vergleichung des Dodekaedron und Ikosaedron, die in derselben Kugel eingeschrieben sind, auch eine Schrift über die Stillstandspuncte und Rückgangsbogen der Planeten.

Mit Apollonius hatte der geometrische Geist unter den Alten seine größte Stärke erreicht. Die folgenden Zeiten mußten sich begnügen, die Werke der großen Meister zu studieren, und einiges als Nachlese beyzufügen. Die Astronomie beschäftigte nun vorzüglich die Mathematiker.

Diese Wissenschaft war es auch, welche die Geometer nöthigte, die Arithmetik auf die Geometrie anzuwenden. Schon die Bedürfnisse bey Messungen von Entfernungen auf der Erdfläche, und Bestimmung des Inhalts von Feldern müssen dazu geleitet haben. Die Astronomie machte es nothwendig, die Winkel durch Ver-

hältnisse der Linien in rechtwinklichten Dreyecken zu bestimmen. Der erste, dessen Bemühungen zu diesem Zweck bekannt sind, ist Menelaus aus Alexandrien, (100 J. n. C. G.), der sechs Bücher von den Chorden im Kreise geschrieben hat, die nicht mehr vorhanden sind. Die Astronomie bedarf gar sehr der Lehre von den Lagen der Kreise auf einer Kugelfläche gegen einander, und von den Dreyecken, welche die großen Kreise auf einer Kugel bilden. Die erste bekannte Schrift über diese Lehre ist von Theodosius (50 J. v. C. G.). Sein Zweck ist die geometrischen Gründe der sphärischen Astronomie fest zu stellen, und die Erscheinungen, womit sie sich beschäftigt, zu erklären. Das dritte Buch enthält manche merkwürdige und ziemlich schwere Sätze, so daß Pappus nöthig gefunden hat, darüber Erläuterungen zu geben, welche das sechste Buch seiner Sammlungen einnehmen.

Menelaus hat auch ein Werk übrr die Sphärik geschrieben, worin hauptsächlich von sphärischen Dreyecken und ihrer Auflösung gehandelt wird. Man trifft darin manche merkwürdige und wenig bekannte Sätze an. Dieser Geometer hat sich auch mit krummen Linien höherer Art als die Kegelschnitte sind, beschäftigt, wie Pappus in einer Anmerkung zu S. 30. des 4. B. anführt.

Serenus aus Antissa auf Lesbos (ungewissen Zeitalters) schrieb eine Abhandlung über die Schnitte eines Cylinders, und die Schnitte eines Kegels durch die Axe.

Nikomedes (der vielleicht noch in die Zeit vor C. G. zu setzen ist) ersann die Conchoide, zur Auflösung der Aufgabe von der Dreytheilung eines Winkels, und der Erfindung zweyer mittlern proportionalen.

Pappus aus Alexandrien (um 375 n. C. G.) hat uns eine schätzbare Sammlung von mathematischen Lehrsätzen und Aufsätzen und Aufgaben mit ihren Auflösungen hinterlassen, die er aus vielen damahls vorhandenen Schriften gemacht hat; zugleich war dabey sein Zweck,

diejenigen Lehrsätze, welche zum Verständniß der vornehmsten geometrischen Werke nöthig sind, mitzutheilen und zu erweisen. Aus dieser Sammlung lernt man den Geist der geometrischen Analysis der Alten kennen. In der Vorrede zu dem siebenten Buche hat er uns den Inhalt der wichtigsten geometrisch-analytischen Werke derselben angezeigt, wovon wir ohne ihn nicht die Titel wissen würden, und in dieser Abtheilung seiner Sammlung eine große Anzahl Lemmata (Erläuterungs- und Vorbereitungs-Sätze) zu jenen Schriften mitgetheilt, die nach der Methode jener behandelt sind. In der gedachten Vorrede führt er auch die bey den Alten sehr wichtige Aufgabe an, den geometrischen Ort zu finden, wodurch die von jedem Puncte desselben an gegebene gerade Linien gezogenen Perpendikel gegebene zusammengesetzte Verhältnisse bilden. Die Alten konnten sie nur für den Fall von drey oder vier gegebenen geraden Linien auflösen; der neuern Analysis war es vorbehalten, eine uneingeschränkte Auflösung zu liefern. Der Satz, den in neuern Zeiten Guldin bekannt machte, wie mittelst des Schwerpuncts von Linien und Flächen der Inhalt der davon beschriebenen Oberflächen und Körper gefunden wird, wird von Pappus als ein von ihm entdeckter angeführt, am Ende der vorhergedachten Vorrede. In dem fünften Buche wird unter andern die Vergleichung isoperimetrischer Figuren in Rücksicht auf ihren Inhalt gemacht. Der zehnte Satz ist, daß unter geradlinichten Figuren von gleichem Umfange, mit derselben Anzahl Seiten, diejenige den größten Inhalt hat, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. — In Kästners Geschichte der Mathematik Bd. II. S. 81 — 94 ist ein Verzeichniß der mannichfaltigen Gegenstände in dieser Sammlung enthalten.

Von den acht Büchern der Sammlung sind die beiden ersten, und das dritte zum Theil verloren. Die Ausgaben zu Pesaro (Pisauri) 1588 und Venedig 1589 sind nur in dem Titel verschieden. Die Ausgabe von 1660 wird zwar auf dem Titel als eine sehr verbesserte angegeben, ist aber nach Halleys Versicherung nicht so gut als

jene. Das Original ist noch nicht gedruckt. Nur den griechischen Text zu der Vorrede des 7ten Buchs hat Halley der Schrift des Apollonius de sectione rationis beygefügt. Wallis hat ein Fragment des zweyten Buchs in dem dritten Theile seiner Werke mitgetheilt.

Diokles, (400 J. n. C. G.) erdachte zur Auflösung der Aufgabe von der Erfindung zweyer mittlern proportionalen die Cissoide. Von ihm ist auch eine geschickte Auflösung einer für die alte Geometrie nicht leichten Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in zwey Theile nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen. Archimedes versprach sie zu liefern; man findet sie aber in seinen Schriften nicht. Eutocius führt die Auflösung des Diokles und eines andern Geometer, Dionysodorus, in seinem Commentar über das zweyte Buch des Archimedes von Kugel und Cylinder an.

Dieser jetzt genannte Eutocius aus Ascalon (5. Jahrh. n. C. G.) hat nützliche Erläuterungen über einige Schriften des Archimedes und die vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius geliefert. Man findet darin gute historische Nachrichten, in jenen insbesondere über die Delische Aufgabe.

Nach den Commentarien über die Werke des Archimedes und Apollonius findet sich gar nichts bemerkenswerthes für die Geometrie. Die Eroberung von Ägypten durch die Saracenen (im J. 641.), und die Zerstörung der herrlichen Bibliothek in Alexandrien machten der so alten und verdienten Akademie ein Ende. Politische und kirchliche Unruhen in dem griechischen Reiche und in den Abendländern unterdrückten fast alle Beschäftigung mit der Mathematik. Die Araber fiengen zwar bald an mit der Liebe zum Kriege die Liebe zu den Wissenschaften zu vereinigen, so wie sie immer die Dichtkunst und Beredsamkeit geliebt hatten; sie übersetzten die wissenschaftlichen Schriften der Griechen in ihre Sprache, und erhielten uns dadurch einige schätzbare Werke; allein sie brachten die Geometrie nicht weiter. Es ist wahr, daß nach der

Methode der Alten diese schwerlich höher zu treiben seyn möchte, als es von den Griechen geschehen war. Der Araber Alhazen verdient aber vieles Lob wegen der Auflösung der geometrisch-optischen Aufgabe, an einem sphärischen Spiegel, wenn die Stelle des Objects und des Auges gegeben ist, den Zurückwerfungspunct zu finden. Vielleicht gehört die Auflösung aber einem Griechen. Sein Werk über die Optik ist sehr dunkel, verworren und weitschweifig.

Die Araber haben um die Trigonometrie das Verdienst, daß sie anstatt der von den Alten gebrauchten Chorden die Sinus einführten.

Als in Europa die Liebe zu den Wissenschaften wieder erwachte, und durch die damahls erfundene Buchdruckerkunst unterstützt ward, war man eifrig bemüht auch geometrische Werke der Alten durch Übersetzungen rn Umlauf zu bringen. Commandinus (geb. 1509. zu Urbino) verdient hier eine ehrenvolle Erwähnung. Dieses gab zum Anfang hinlänglich Beschäftigung. Doch unternahmen einige sehr arbeitsame Männer in Deutschland schon im 15ten Jahrhundert, noch mehr im 16ten, die Berechnung sehr genauer und vollständiger trigonometrischer Tafeln. Die Verdienste des Purbach, Regiomontanus, Rhäticus, Otho, sind in dem Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 667. ff. gerühmt. Die Arbeit erforderte gute Kenntniß der Trigonometrie oder Goniometrie, aus welcher manche wichtige Sätze in des Rhäticus Werk de fabrica canonis doctrinae triangulorum vorkommen.

Der Abbate Maurolycus aus Messina (gest. 1575.) war nicht allein ein gelehrter Herausgeber einiger alten geometrischen Werke, sondern auch der erste Mathematiker seiner Zeit. Er wagte sich an die Wiederherstellung des fünften Buchs des Apollonius, welches von den Größten und Kleinsten an den Kegelschnitten handelt. Borellus hat diesen Versuch aus den nachgelassenen Papieren des Maurolycus zu Messina 1654 herausgegeben. Montucla rühmt sehr die Methode, nach welcher Mau-

rolycus die Kegelschnitte behandelt hat, und sagt, daß de la Hire in seinem ausführlichen Werke über diese Linien eben dieselbe befolgt, und weiter angewandt habe.

Nonius, oder mit seinem portugiesischen Namen Nugnez (gest. 1577.), zeigte sich als einen scharfsinnigen Geometer durch die Auflösung der Aufgabe von der kürzesten Dämmerung, die selbst Jakob Bernoulli viel zu schaffen gemacht hat. Er ist der erste, der die loxodromische Linie betrachtet hat.

Vieta (gest. 1603.), der insbesondere als Algebraist berühmt ist, fand Formeln für die Chorden der vielfachen Winkel und ganzer Theile eines Winkels durch die Chorde des einfachen. Dadurch lösete er eine ihm von Adrianus Romanus vorgelegte Aufgabe vom 45sten Grad auf. Seine Wiederherstellung der Schrift des Apollonius von den Berührungen, und andern Untersuchungen, sind Beweise seines geometrischen Scharfsinnes. Von seiner Kreisrechnung s. Cyklotechnie, Th. I. S. 647.

Kepler (gest. 1630.) ist der erste, der das unendlich kleine in die Geometrie einführte, und es zur Vergleichung des Inhalts runder Körper anwandte, in der Stereometria doliorum, 1615. Er findet dadurch den Inhalt von 90 Arten Körper; hat sich aber auch, wo ihm die directe Methode fehlte, durch seine Einbildungskraft verleiten lassen, Verhältnisse anzunehmen, die nur eine gewisse Schicklichkeit oder Wahrscheinlichkeit hatten, welches Alexander Anderson in seinen Vindiciis Archimedis 1616, ihm zeigte.

Cavaleri (gest. 1647.) suchte auf eine andere Art die Exhaustions-Methode der Alten abzukürzen und zu erweitern. Er fand mittelst Summirungen arithmetischer Reihen von unendlich vielen Gliedern mit unendlich kleinen Unterschieden den Inhalt von Flächen-Figuren und Körpern. Was gegen seine Methode zu erinnern ist, findet man in dem Artikel, Cavaleri Methode des Untheilbaren.

Guldin (gest. 1643.) gründete die Berechnung des Inhalts von Flächenräumen und Körpern auf eine Eigenschaft des Schwerpunctes, s. Guldins Regel.

Lucas Valerius hatte in der Schrift de centro gravitatis solidorum, 1604. die von Archimedes bloß bey dem parabolischen Konoid angefangene Untersuchung auf mehrere Körper erstreckt.

Torricelli (gest. 1647.) erweiterte die Lehre des Archimedes von der Kugel, insbesondere durch die Bestimmung des Inhalts der Körper, welche durch Umdrehung regulärer Vielecke erzeugt werden. De sphaera et solidis sphaeralibus, in der Sammlung seiner geometrischen Wercke. Florent. 1644. Er gab 20 Arten an, die Parabel zu quadriren, theils geometrische, theils mechanische, theils nach der Methode des Untheilbaren, in eben der Sammlung. Die Quadratur der Cykloide fand er auf dreyerley Art. Von seinem Streite mit Roberval über das Erfindungsrecht s. Theil I. S. 596.

Der Orden der Jesuiten hatte im 17ten Jahrhundert und schon vorher viele Mathematiker von Ruf. Ein sehr bekannter ist Clavius (gest. 1612.), dessen Werke fünf große Foliobände, eng gedruckt, ausmachen. Doch wird wenig neues von Merkwürdigkeit darin enthalten seyn. Vielleicht ist sein weitschweifiges Werk über die stereographische Projection, welches er Astrolabium betitelt, in Rücksicht des Neuen, das wichtigste. Durch seinen großen Commentar über die Euklidischen Elemente mag er am nützlichsten geworden seyn. Ein anderer Jesuit, Tacquet (gest. 1660.), hat sehr vielerley geometrischen Inhalts, besonders über die Messung mancherley Körper, geschrieben, das einen starken Folioband füllt. Der wichtigste mathematische Schriftsteller aus diesem Orden in dem genannten Zeitraume möchte Gregorius a St. Vincentio (gest. 1667.) seyn. Huygens urtheilt sehr günstig von ihm, ob er gleich seine vermeintliche Quadratur des Kreises wiederlegt hatte, und Leibnitz nennt ihn auf eine sehr ehrenvolle Art neben Descartes und Fermat. Von ihm ist ein großes Werk vorhanden: Opus

geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Antwerp. 1647. Fol. Die Quadratur des Kreises, welche er darin will entdeckt haben, ist zwar unrichtig, allein auf dem Wege, auf welchem er sie suchte, hat er vieles schätzenswerthe und merkwürdige gefunden, als manche neue Sätze über den Kreis und jeden Kegelschnitt; sehr viele Cubirungen, unter andern der hufförmigen Abschnitte eines Cylinders mit Grundflächen verschiedener Art. Alles dieses mag man jetzt leichter finden können; doch bleibt die Methode lehrreich. Wahrscheinlich hat er auch die Verwandlung der arithmetischen Spirale in eine Parabel gefunden, die Cavaleri im 6ten Buch 9ten S. seiner Geometrie vorträgt. Das merkwürdigste, was der P. Gregorius gefunden hat, wird seyn, daß die Flächenräume zwischen einer Hyperbel, der einen Asymptote und den mit der andern parallelen Ordinaten gleichförmig wachsen, wenn die zugehörigen Abscissen in geometrischer Progression genommen werden.

Descartes (gest. 1650.) gab der Geometrie einen neuen Schwung durch die Anwendung der Algebra auf die Untersuchung der Natur krummer Linien. Vor ihm waren schon geometrische Fragen mit Hülfe der Algebra aufgelöset, allein diese betrafen nur einzelne Vergleichungen bestimmter, mit einander verbundenen, geraden Linien; Descartes schloß alle Eigenschaften einer krummen Linie in eine algebraische Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen, den Coordinaten, mit gewissen gegebenen Linien ein, in der Absicht, um aus derselben, als einer vollständigen Definition, wo es nöthig, mit Zuziehung einiger Verwandlungen, alle Eigenschaften einer krummen Linie, auch die verborgensten, vermittelst algebraischer Lehrsätze und Auflösungs-Methoden herzuleiten. Dieses leistete er in seiner Geometrie, einem kleinen, aber sehr gehaltvollen Werke, welches zuerst 1637. erschien. Schon fast im Anfange giebt er die Auflösung einer Aufgabe, welche die Alten nur in einigen besondern Fällen hatten auflösen können. Sie ist folgende: es sind mehrere gerade Linien der Lage nach gegeben, den Ort des Punctes zu fin-

den, an welchem das Product der Linien, die von demselben an einige jener Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, dem Producte derjenigen, die an die übrigen gleichmäßig gezogen werden, gleich sey, oder zu demselben ein gegebenes Verhältniß habe. Ist der geraden Linien eine gerade Anzahl, so mag man für jedes Product gleich viele nehmen; sonst müßte man für die geringere Anzahl gegebene Linien, oder die linearische Einheit, zu Factoren aufnehmen, wie es nöthig ist, wenn die Anzahl ungerade ist. Hievon noch in dem Artikel, krumme Linien. — Durch die algebraische Darstellung einer Curve gelangte Descartes zu einer allgemeinen Methode, bestimmte Gleichungen zu construiren (s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra Th. 1. S. 132.). Einiges möchte noch gegen seine Wahl der dazu anzuwendenden Linien zu erinnern seyn. — Durch dieselbe fand er auch zwey allgemeine Methoden, an eine krumme Linie berührende gerade zu ziehen, wovon in dem Artikel, berührende Linie, Th. 1. S. 280 Nachricht gegeben ist.

Fermat (gest. 1665.) hat zu gleicher Zeit mit Descartes die Beschaffenheit einer Curve durch eine Gleichung dargestellt; er gebrauchte auch die unbestimmten Gleichungen für zwey krumme Linien um eine bestimmte zu construiren; nur ist es unbequem, daß er sich Vieta's Notation bedient. Seine Methode, hyperbolische und parabolische Linien höherer Art nebst der gemeinen Parabel zu quadriren, ist einfach und sinnreich, vermittelst der Summirung einer geometrischen Reihe, wobey er die Abscissen in geometrischer Progression fortgehen läßt. Seine Regel, den Werth einer veränderlichen Größe zu bestimmen, für welchen die zugehörige veränderliche ein Größtes oder Kleinstes ist, ist im wesentlichen dieselbe mit derjenigen, die die neuere Analysis lehrt. Sein Verfahren, berührende an eine Curve zu ziehen, macht die Sache sehr begreiflich, kann aber nur bey rationalen Gleichungen gebraucht werden, s. Th. I. S. 828. Er fand die Rectification der zweyten cubischen Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = a x^2$, welche aber auch zwey andere Geo-

meter, van Heuraet und Neil, für sich mögen gefunden haben. Er wird auch der erste seyn, der die Aufgaben vornahm, wie eine Kugel zu finden sey, welche andere gegebene Kugeln oder Ebenen berührt, oder deren Oberfläche durch gegebene Puncte geht.

Pascal (gest. 1662, im 39sten Jahre) war ein außerordentlicher Kopf für die Geometrie, da er schon im 16ten Jahre eine Abhandlung über die Kegelschnitte verfaßte, worin er aus einem einzigen Satze auf 400 Corollarien herleitete. Doch ist von seinen mathematischen Schriften nichts gedruckt, als seine Geschichte der Cykloide, worin er schwere Aufgaben auflöset. Durch Kränklichkeit und religiösen Eifer für die Jansenisten ward er von der Mathematik abgezogen.

Viviani (gest. 1703 im 81sten J.) gab im J. 1659. eine Wiederherstellung des fünften Buchs über die Kegelschnitte von Apollonius heraus, de Maximis et Minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum, worin er vieles neue zur Ergänzung des alten Werks vorträgt, einige der schwersten Fragen aber unberührt gelassen hat. Im Jahr 1673. gab er auch eine Wiederherstellung der Schrift de locis solidis des ältern Aristäus heraus, wovon er 1701. eine vermehrte Ausgabe erscheinen ließ. Viviani ist unter den Neuern einer der vertrautesten mit der alten Geometrie.

Huygens (gest. 1695.) bereicherte die Geometrie mit der Theorie der Evoluten, in dem dritten Theile des Horologium oscillatorium, 1673. Sie führte ihn zu manchen neuen Sätzen und Bemerkungen, als über die Rectification der Curven, und zu der merkwürdigen Eigenschaft der Cykloide, daß sie durch die Abwickelung sich selbst wieder erzeugt. Die Kreisrechnung erhielt durch ihn Erweiterungen.

Wallis (gest 1703.) wandte die Lehre von der Summirung unendlicher Reihen, deren Glieder eine stetige Folge ausmachen, auf die Geometrie ausführlicher an, als es seit Cavaleri's Zeit von andern Geometern geschehen

war. Seine Arithmetica infinitorum erschien zuerst 1655. Es ist eigentlich ein geometrisches Werk, worin besonders die Quadratur krummlinichter Figuren vorgenommen wird. Darauf folgten die Schriften über die Cykloide und Cissoide und die dadurch erzeugten Körper, nebst Methoden zur Rectification und Complanation, 1659; sehr ausführliche Untersuchungen über den Schwerpunct der Körper (fast 300 S. Fol. stark, im J. 1670); eine Abhandlung über die Winkeltheilungen, 1685. Doch ist alles dieses, so scharfsinnig es auch erfunden ist, gegenwärtig zu weitschweifig und mühsam. Von seinem Ausdruck des Verhältnisses zwischen dem Quadrat des Durchmessers und dem Flächeninhalte eines Kreises, s. Th. I. S. 654.

Lord Brounker (gest. 1684) fand für das eben gedachte Verhältniß einen Ausdruck durch einen Kettenbruch, s. Th. I. S. 655. Er war auch der erste, der den Flächeninhalt einer Curve durch eine unendliche Reihe, nämlich an der Hyperbel, darstellte, s. Brounkersche Reihen, Th. I. S. 356.

Mercator (gest. 1694) fand eine bequemere Reihe für die Quadratur der Hyperbel au ihren Asymptoten, dieselbe, welche die Integralrechnung unmittelbar giebt.

Barrow (gest. 1677) gab mancherley künstliche Methoden an, berührende an krumme Linien zu ziehen, aber auch die einfache, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, nur daß er sie noch nicht anders als bey rationalen Gleichungen anzuwenden vermochte. S. Th. 1. S. 284. Barrows lectiones geometricae et opticae 1669, welche letztern ganz geometrisch sind, enthalten scharfsinnige Untersuchungen. Mit dem Ende des siebzehnten Jahrhunderts schließt sich auch das Zeitalter der mittlern Geometrie, die entweder ganz nach dem Muster der alten geformt war, oder sich mit der Algebra verband, und sich der Summirung unendlicher Reihen gleichsam mit mehrerer Kühnheit als die Geometrie der Alten bediente. Die Analysis des Unendlichen, welche Newton und Leibnitz erfanden, setzte die Geometer in Stand, nicht allein alle Aufgaben, wobey neben den veränderlichen Größen selbst

auch die Gränzverhältnisse ihrer Veränderungen in Betrachtung kommen, (als die von berührenden, von Wendungspuncten, Rückkehrpuncten, vom Krümmungskreise, von Brennlinien, von Größten und Kleinsten), leicht und allgemein aufzulösen, sondern auch von diesen Verhältnissen durch die Integralrechnung zu den endlichen Größen selbst zu gelangen. Also wurden Quadraturen, Cubirungen, Complanationen, Lage des Schwerpunktes, womit sich die vorhergehenden Geometer viele Mühe und auch viele Freude gemacht hatten, nur eine vorbereitende Anwendung der neuen Rechnung, um zu schwerern Untersuchungen sich geschickt zu machen. Von dieser Zeit an sind Analysis, Geometrie und die reine Mechanik so genau mit einander verschwistert, daß die Geschichte der einen immer in die der andern eingreift. Doch behielt die Geometrie der Alten immer noch ihre Verehrer, besonders in Italien und England. Dem letztern Lande dankt man die besten Ausgaben der alten Geometer und Wiederherstellungen ihrer verlornen Schriften. Die Kegelschnitte sind von Engländern häufig bearbeitet, immer nach der Methode der Alten, und werden mit zu dem Elementar-Unterrichte gezogen. Auch die analytischen Untersuchungen der Engländer haben eine alt-geometrische Gestalt.

Newtons drey Schriften, geometrisch-analytischen Inhalts, sind in dem Artikel, Differentialrechnung, Th. I. S. 831. ff. angezeigt. In der größern derselben, der Methodus fluxionum et serierum infinitarum, sind sehr viele wichtige geometrische Untersuchungen enthalten. Der Abstand gegen die besten ältern Schriften ist sehr groß. Man muß sich wundern, daß ein solches Werk bis 1736 ungedruckt geblieben ist, wenn nicht die Besitzer des Manuscripts einen solchen Schatz geheim zu halten gesucht haben. Zu jenen drey Schriften ist hier noch die Enumeratio linearum tertii ordinis zu setzen. Es war ein ganz neuer Gedanke, die sehr beträchtliche Anzahl dieser Curven in Classen zu bringen, und ihre Verschiedenheiten anzugeben. Newton brachte nach seiner Eintheilungsart zwey und siebzig Species heraus. Sein

Commentator über diese Materie, Stirling, fügte noch zwey von Newton aus der Acht gelassene hinzu, im J. 1717, und Gua noch vier, die auch Stirling übersehen hatte. Der letztere suchte den Weg zu entdecken, auf welchem Newton zu seinen Resultaten gelangt seyn möchte. Er machte seine Bemerkungen bekannt in einer Schrift: Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le calcul differentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres, 1740.

Nach dem Beyspiele, das Newton gegeben hatte, fuhr man fort, die Theorie der krummen Linien vollständiger und zusammenhängender zu machen. Bragelogne, Mitglied der französischen Akademie, wählte die Linien der vierten Ordnung zu einem besondern Gegenstande seiner Untersuchung. In den Abhandlungen der Akademie von 1730 und 1731 theilte er die Vorbereitungen dazu mit; in der Geschichte für das J. 1732 wird auch ein Abriß von seiner Methode zur Aufzählung der Linien der vierten Ordnung gegeben; aber er verstarb vor Beendigung des mühsamen Unternehmens. Euler widmete den 2ten Theil seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1748) der Lehre von den krummen Linien, theils in Allgemeinen, theils insbesondere denen von der zweyten und dritten Ordnung. Von den Linien der vierten Ordnung war es hinlänglich eine allgemeine Classification zu machen. Dazu fügte er einiges von den transscendenten Linien und von den Oberflächen der Körper. In diesem Werke wird die trigonometrische Rechnungsmethode oft angewandt. Es ist sehr lichtvoll und belehrend. Ein anderes, noch ausführlicheres Werk über die krummen Linien ist das von Cramer. Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques. 1750, 640 pag. 4to. Es ist deutlich und methodisch geschrieben, ohne Zuziehung der Analysis des Unendlichen und der trigonometrischen Rechnung. In gedrängter Kürze ist abgefaßt Traité des courbes algébriques par Dionis de Séjour et Godin, Paris 1756. Von dem erstern Verfasser ist noch ein besonderes Werk: Traité des propriétés communes à toutes les courbes. Paris 1778.

Newton hatte am Ende seiner Abhandlung über die Linien der dritten Ordnung kurz angezeigt, wie Curven durch stetige Bewegung eines Punctes, vermittelst der Durchschnitte der Schenkel zweyer gegebenen, um ihre fixen Scheitelpuncte beweglichen Winkel beschrieben werden können, indem die andern Schenkel eine gegebene Linie mit ihrem Durchschnittspuncte durchlaufen. Maclaurin (geb. 1698. gest. 1746.) bewies nicht allein Newtons Sätze, sondern erweiterte noch das ganze Verfahren, und fügte mehrere merkwürdige Sätze hinzu, in der Schrift: Geometria organica, seu descriptio linearum curvarum universalis, Londini 1720. Man behauptet, daß er schon in seinem sechszehnten Jahre viele von den in diesem Buche enthaltenen Sätzen gefunden habe. Eine andere Art der Beschreibung krummer Linien gab Braikenridge an in der Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Londini 1733. Er gebraucht die Durchschnitte dreyer, um fixe Puncte beweglichen Linien. Eine ähnliche Beschreibung der Kegelschnitte lehrte schon Joh. de Witt in den Elementis curvarum linearum, 1683, in van Schooten Ausgabe der Geometrie von Descartes.

Das Hauptwerk von Maclaurin, sein Treatise of Fluxions, Edinburgh, 1742, 2 vol. 4to. 754 pag. enthält größtentheils geometrische Untersuchungen, sowohl reine als angewandte. Wenn man des Verfassers zu umständliche Beweise der Infinitesimalrechnung nicht gebraucht, und mit dieser schon gut bekannt ist, so wird man unter den neuern Schriften schwerlich eine finden, die zur Übung in der feinern Geometrie dienlicher wäre, als dieses Werk, welches desto mehr zu diesem Zwecke zu empfehlen ist, je weniger man in den Schriften der neuesten Mathematiker Gelegenheit findet, in der construirenden Geometrie Fortschritte zu thun. Bossüt empfiehlt in seiner Geschichte der Mathematik dieses Werk gar sehr, und führt an, daß mehrere französische Mathematiker, die in der Folge berühmt geworden sind, es als Anleitung zu der neuen Geometrie benutzt haben. Bey der Algebra,

die Maclaurin zum Verfasser hat, befindet sich eine kurze, aber sehr reichhaltige Abhandlung über die allgemeinen Eigenschaften der geometrischen Linien.

Das erste Werk über die krummen Linien von doppelter Krümmung lieferte Clairaut. Recherches sur les courbes à double courbure, à Paris 1731. 4to. 119 pag. Er verfaßte diese Schrift in einem Alter von sechszehn Jahren, wie der Censor und der Secretär der Akademie bezeugen. Er druckt die Natur dieser Curven durch Gleichungen zwischen drey Coordinaten aus. Euler hat in seiner Theorie des Mondes, dem zweyten Werke, die Bahn dieses Trabanten auf solche Art bestimmt. Die Bahnen der Weltkörper sind alle transscendente Curven von doppelter Krümmung, die nicht in sich zurücklaufen, daher die Astronomie zugleich der schwerste Theil der Geometrie ist.

Die neue Analysis gab in Verbindung mit der reinen Mechanik zu manchen schweren geometrischen Aufgaben Anlaß. Das ganze Werk der Principien der Naturwissenschaft von Newton ist voll von geometrischen Bestimmungen mancherley Bewegungen: es enthält auch rein geometrische Untersuchungen, als aus der Lehre von den Kegelschnitten, von Epicykloiden, Spiralen u. m. Hier kommt zuerst die Bahn eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel vor, freilich nur noch mit der leichtesten Annahme des Widerstandes; auch zuerst die Aufgabe von der Figur eines Körpers, die den Widerstand eines flüssigen Mittels am geringsten macht, aber nur als Vorbereitung zu einer bestimmtern Auflösung.

Leibnitz legte, um die Vortrefflichkeit seiner neuen Rechnung des Unendlichen zu zeigen, die Aufgaben von der Isochrona und der isochrona paracentrica vor. Auf jener fällt ein schwerer Körper nach senkrechter relativer Bewegung gleichförmig; auf dieser nähert er sich einem gegebenen Puncte gleichförmig, und entfernt sich so von demselben.

In gleicher Absicht legten die beiden Bernoulli Aufgaben von schwer zu findenden krummen Linien vor, und

geriethen dabey in einen Wettstreit, der in Bitterkeit ausartete. Jakob Bernoulli gab die Kettenlinie auf, zuerst für eine gleichförmig schwere Linie, und dann für eine ungleichförmig schwere. Er fand die Gleichung für die elastische, durch ein Gewicht gebogene Linie, die zugleich diejenige ist, nach welcher ein mit einem flüssigen schweren Körper beschwertes, undurchdringliches Tuch sich krümmt (lintearia); auch fand er die Gestalt eines vom Winde gespannten Segels (velaria).

Joh. Bernoulli gab im J. 1696 die berühmte Aufgabe von der Linie des schnellsten Falles (brachystochrona) auf. Seiner Auflösung fügte er eine andere Aufgabe bey, die krumme Linie zu finden, welche auf einer stetigen Folge von Cykloiden, die in denselben lothrechten Ebenen, durch denselben Anfangspunct einer gemeinschaftlichen Grundlinie gezogen sind, Bogen abschneidet, die alle von dem Anfangspuncte an in einerley Zeit durchlaufen werden. Diese Linie nannte er die Synchrona, die Linie der übereinstimmigen Fallzeiten. Eine für die praktische Anwendung brauchbare Curve ward von l'Hopital bestimmt, diejenige, auf welcher ein Gewicht mit einer Zugbrücke, vermittelst einer Kette, in jeder Lage derselben im Gleichgewicht ist. Joh. Bernoulli zeigte, daß sie eine Epicykloide ist.

Die Theorie der Brennlinien, wovon Huygens und Tschirnhausen zuerst die Entstehung bemerkt hatten, ward von den beiden Bernoulli ausführlich untersucht. Man wird etwa noch die Form der Resultate etwas bequemer einrichten können.

Die Rectification der Epicykloiden, welche durch einen Punct auf dem Umfange des rollenden Kreises beschrieben werden, fand Newton. Die beiden Bernoulli wandten die neue Analysis darauf an. De la Hire behandelte sie nach der Methode der alten Geometrie, aber auf eine zu mühsame und verwickelte Art.

Jakob Bernoulli bemerkte, daß die logarithmische Spirale auf mancherley Art durch sich selbst erzeugt wird, daher er sie spira mirabilis nannte.

Leibnitz und Joh. Bernoulli geriethen auf die Aufgaben von den rechtwinklichten Trajectorien, das ist Curven, die eine stetige Folge von Curven gleicher Art, die nach einem gewissen Gesetze beschrieben sind, alle unter einem rechten Winkel schneidet. In dem Streite wegen der Erfindung der Differentialrechnung ward eine Aufgabe dieser Art von Leibnitz und Bernoulli gebraucht, um die englischen Geometer ihre Kräfte daran versuchen zu lassen. Nicolaus Bernoulli legte im J. 1720 eine Aufgabe verwandter Art vor. Zwey parallele Axen sind gegeben; in dem Raume zwischen ihnen über jeder derselben eine Curve zu beschreiben, so daß wenn eine derselben, oder auch beide auf ihrer Axe mit paralleler Bewegung fortgeschoben werden, sie sich immer unter demselben Winkel schneiden. Dieses ist die Aufgabe von den Trajectoriis reciprocis. Euler hat sich viel mit den Trajectorien beiderley Art beschäftigt.

Das berühmteste Problem war das isoperimetrische, welches Jakob Bernoulli den Geometern seiner Zeit, und namentlich seinem Bruder, vorlegte. Er war darauf durch die Aufgabe von der Curve der kürzesten Fallzeit geleitet, die mit jener zu einer Classe gehört. Er trug sie zuerst (1697) folgenderstalt vor; Unter allen Curven von gleicher Länge, über derselben Grundlinie, diejenige zu finden, welche zwar nicht selbst mit dieser den möglich größten Raum einschließt, durch welche aber dieses für eine andere Curve über derselben Grundlinie erhalten wird, an welcher die Ordinaten zu den Ordinaten oder Bogen jener Curve irgend ein vielfaches oder umgekehrt vielfaches Verhältniß haben. Allgemeiner trug er sie in einer akademischen Dissertation 1701. vor. Die Untersuchung dieser Frage beförderte den Bruch zwischen den beiden Brüdern. Joh. Bernoulli hatte sich wirklich bey der Auflösung geirrt, da er die Methode, welche er bey der Frage von der Curve der kürzesten Fallzeit gebraucht hatte, auch hier ohne die nöthige Erweiterung anwenden wollte. Jener Fall war einfacher, da keine Bedingung wegen der Beschaffenheit der Curve gemacht wird, hier aber die Curve, an

welcher eine Function ihrer Ordinaten ein Größtes ist, mit den andern, an welchen diese Function kleinere Werthe erhält, gleiche Länge haben soll. Da Jakob Bernoulli seinem Bruder anzeigte, daß seine Methode mangelhaft sey, gestand dieser zwar ein, daß er sich in einem Stücke übereilt hätte, und gab eine andere Auflösung, die aber in der That noch von eben der Seite, wie die erste, unvollkommen war. Auf die wiederholte Erinnerung seines Bruders blieb er bey seiner Behauptung nicht gefehlt zu haben, und bey dem stolzen Ton, den er gegen jenen seit einiger Zeit angenommen hatte. Als aber dieser im J. 1701 seine Methode bekannt machte, schwieg er gänzlich von der Untersuchung. Erst im J. 1718, als er eine neue Auflösung bekannt machte, gestand er sein Versehen ein.

Euler behandelte in der Folge die Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art, so daß anstatt der gleichen Länge der Bogen auch irgend eine andere gemeinschaftliche Eigenschaft der Curven gesetzt werden mag. Methodus inveniendi lineas curvas maxim minimive proprietate gaudentes. Lausannae 1744. 4. Nach Euler erweiterte la Grange die Aufgabe noch mehr, so daß sie nicht auf geometrische Größen eingeschränkt blieb, dabey sehr schwere Untersuchungen befaßte, und auch in der Methode gewann. Seit dieser Zeit heißt diese Rechnung die Variations-Rechnung.

Cotes (gest. 1716) wandte die trigonometrische und logarithmische Rechnung auf die Integrationen an, da er zeigte, wie die Fluenten oder Integrale mittelst der in den trigonometrischen oder logarithmischen Tafeln berechneten Größen gefunden werden können, so daß Integrale, die von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel (den Logarithmen) abhangen, kaum mehr für transscendente Größen zu halten sind. Cotes entdeckte eine merkwürdige Eigenschaft des Kreises, betreffend die Linien, welche aus einem Punkte innerhalb oder außerhalb desselben an die Endpuncte gleich großer Bogen gezogen werden. Moivre erweiterte den Cotesischen Lehrsatz von einer zweytheiligen Function auf eine dreytheilige. Der Satz giebt der analytischen Entwickelung der Functionen $r^n \pm a^n$, und

$r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$ eine schöne Erläuterung, s. Cotesischer Lehrsatz.

Noch manche einzelne neue geometrische Sätze und Aufgaben könnten hier angeführt werden. Dergleichen ist die von Jakob Bernoulli vorgelegte, zwischen zwey gegebenen Puncten auf einem Konoid oder Sphäroid die kürzeste Linie zu ziehen. Joh. Bernoulli fand, daß auf einer Parabel zwey Bogen in einem gegebenen Verhältnisse sich bestimmen lassen, daher sich auch zwey Bogen finden lassen, deren Summe oder Unterschied einer geraden Linie gleich ist, nur nicht mit einem gemeinschaftlichen Endpuncte. Der Marchese Fagnano hat nachher eben dieses an der Ellipse und Hyperbel bewerkstelligt. Joh. Bernoulli gab eine allgemeine Methode an, auf einer sphärischen Oberfläche rectificable Curven zu ziehen. Nicole bestimmte auch die Fälle, da sphärische Epicykloiden algebraisch und rectificabel sind.

Die Darstellung oder Symbolization eines Kreisbogens durch unmögliche Logarithmen ist von Joh. Bernoulli zuerst angegeben, der daraus eine allgemeine Formel für die Tangente des vielfachen Bogens durch diejenige des einfachen fand.

Die formulare Trigonometrie, welche sowohl bey geometrischen Untersuchungen als vorzüglich in der Astronomie so große Dienste leistet, hat ihre geschmeidige Einrichtung hauptsächlich durch Euler erhalten. Die Gestalt, welche die trigonometrischen und goniometrischen Sätze bey den ältern Mathematikern hatten, waren zur Verbindung der Rechnung mit der Geometrie nicht bequem. Friedr. Christ. Mayer, Mitglied der Petersburger Akademie, stellte in den Commentarien derselben im zweyten Bande für 1727 theils für die Zusammensetzungen der Winkel mittelst ihrer Sinus, Cosinus und Tangenten, theils für geradlinichte und sphärische Dreyecke Formeln auf, an welchen nur das noch unbequem ist, daß die trigonometrischen Linien durch einzelne Buchstaben bezeichnet werden, welches theils ihre Combinationen erschwert, theils den Gebrauch dieser Buchstaben für andere Größen hindert.

Die cyklometrischen Reihen wurden von Euler auf eine ungemein mannigfaltige Art zerlegt, verbunden, und mit andern Reihen verglichen, sowohl in seiner Einleitung zur Analysis des Unendlichen als in dem zweyten Theile der Differentialrechnung. Um alle diese mancherley Formen gehörig zu fassen, muß man die Capitel, die davon handeln, besonders und aufmerksam durchgehen.

Zuletzt ist noch die für die Anwendung bey Gewölben brauchbare Lehre von den Durchschnitten der Oberflächen der Körper anzuführen. Die französischen Geometer haben sich vorzüglich mit dieser Untersuchung beschäftigt. Die praktischen Schriftsteller über die Behauung der Steine (coupe des pierres), als Derand, Jousse, Frezier waren dazu genöthigt. Der letztere hat darüber ein Werk in drey starken Quartbänden geliefert, worin alles durch Hülfe der gewöhnlichen Geometrie gefunden wird, allein auf eine sehr mühsame Art. Gegenwärtig ist man in Frankreich eifrig damit beschäftigt, die Theorie von den Durchschnitten und Projectionen der Oberflächen der Körper, den doppelt gekrümmten Linien, und geradlinicht-krummen Flächen zu erweitern. Man nennt sie Géométrie descriptive. Monge hat diesen neuen Anbau der Geometrie sehr glücklich angefangen. Er hat einige neue merkwürdige Lehrsätze gefunden, und verschiedene wichtige schwere Aufgaben aufgelöset. Lacroix hat darüber ein elementarisches Werk geliefert, welches wegen der Deutlichkeit und geschickten Auseinandersetzungen gerühmt wird. Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes: (Elémens de Géométrie descriptive). Seconde édition à Paris An X. 1802. 8.

Geometrisch, was zur Geometrie gehört, oder darauf irgend eine Beziehung hat.

Geometrische Auflösung ist diejenige, wobey man bloß die geometrischen Größen unmittelbar gebraucht, also das gesuchte, und was dazu vorher gefunden werden muß, bloß durch Durchschnitte und Begränzungen von Li-

nien und Flächen bestimmt. Sie ist der arithmetischen und analytischen entgegengesetzt.

Geometrischer Beweis verhält sich auf ähnliche Art.

Geometrische Construction der Gleichungen ist die Auflösung derselben vermittelst der Durchschnitte von Linien, woraus die Wurzeln einer Gleichung sich unmittelbar alle zusammen ergeben, so viele mögliche als sie hat, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Geometrische Fläche und Curve sind solche, worin alle Puncte nach einem gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt werden, im Gegensatz gegen solche, wobey kein Gesetz der Bildung sich findet.

Geometrische Methode der Alten, s. Geometrie.

Geometrisches Mittel ist das mittlere Glied in einer stetigen Proportion von drey Größen, s. Proportion.

Geometrischer Ort ist eine Linie oder Fläche, deren Puncte alle zur Auflösung einer unbestimmten Aufgabe dienen, s. Ort.

Geometrische Progression oder Reihe, s. den folgenden Artikel.

Geometrische Proportion und Proportionalzahl, s. an ihrem Orte.

Geometrisches Quadrat ein Instrument zur Messung der Höhen, welches gegenwärtig nicht mehr üblich ist.

Geometrischer Riß (Entwerfung) ist eine nach geometrischen Regeln verfertigte Abbildung eines Gegenstandes, z. B. eines Hauses, eines Feldes, im Gegensatz gegen die nach dem Augenmaße durch freye, mahlerische Zeichnung gemachte. S. Projection und Perspectiv.

Geometrischer Schritt wird, ohne Grund, eine Länge von fünf Fußen genannt.

Geometrisches Verhältniß, s. Proportion.

Geometrische Reihe ist eine Folge von Größen, deren jede zu der nächstfolgenden dasselbe geometrische Verhältniß hat, wie die Reihe,

$$\tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}$$

oder allgemein,

$$\frac{a^4}{b^3} : \frac{a^3}{b^2} : \frac{a^2}{b} : a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \frac{b^4}{a^3} : \text{etc.}$$

1. Die Bezeichnung des Gesetzes der Reihe geschieht am bequemsten und deutlichsten, wie es hier geschehen ist, durch das Zeichen des geometrischen Verhältnisses. Man setzt auch der Reihe das Zeichen $\div\!\!\cdot$ vor, und zwischen jedes Paar Glieder einen Punct, wie

$$\div\!\!\cdot\ 1.\ 3.\ 9.\ 27.\ 81.\ 243.\ \text{etc.}$$

2. Eine geometrische Reihe geht von irgend einem Gliede nach beiden Seiten hin ohne Ende fort, auf der einen Seite unbegränzt zunehmend, auf der andern eben so abnehmend. Ein Stück einer Reihe ist eine steigende (wachsende) Reihe, wenn die folgenden Glieder wachsen, eine fallende (abnehmende), wenn sie abnehmen.

3. Der Exponent des Verhältnisses zweyer nächsten Glieder sey $= e$, das Anfangsglied eines Stücks der Reihe $= a$, so ist von diesem an genommen, die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^{n-1}a : e^n a : \text{etc.}$$

Dieses Stück hat $n + 1$ Glieder. Das nte Glied sey $= u$, so ist

$$u = e^{n-1} a.$$

4. Die Summe von n Gliedern sey $= S$. Diese zu finden, multiplicire man die Glieder der Reihe,

$$a : ea : e^2a \ldots e^{n-2} a : e^{n-1} a,$$

durch e, so wird sie

$$ea : e^2a \ldots e^n a.$$

Es ist also

$$eS = S + e^n a - a,$$

$eS - S = e^n a - a$

folglich in dem Falle, da $a > 1$,

$$S = \frac{e^n a - a}{e - 1} = \frac{eu - a}{e - 1};$$

und, wenn $e < 1$ ist,

$$S = \frac{a - eu}{1 - e}.$$

Die Formel für den ersten Fall dient auch für den zweyten, indem man von den negativen Werthen des Zählers und Nenners das entgegengesetzte nimmt.

5. Die Reihe sey eine fallende, so ist die Gränze, welcher ihre Summe sich immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, die Summe der ganzen, ohne Ende fortgesetzten Reihe. Die Gränze der Summe zu erhalten, muß das letzte Glied $= 0$ gesetzt werden, und so ist die Summe der vollständigen Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a : \text{etc.} = \frac{a}{1 - e}.$$

Z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.} = 2$;
die Summe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \text{etc.} = \frac{3}{2}$.

6. Wie bey der arithmetischen Reihe sind hier fünf verschiedene Größen vorhanden, von welchen je zwey durch die übrigen drey bestimmt werden. Dieses giebt zehn Fälle für die gegebenen Größen, also zehn Aufgaben, deren jede wieder zwey in sich enthält, nachdem die eine oder die andere der unbekannten Größen gefunden werden soll. Die vier, a, u, e, S, werden, mit Ausnahme zweyer Fälle, durch arithmetische Operationen gefunden, die Erhebung auf Potenzen und Ausziehung jeder Wurzel als ausführbar angenommen. Aber die Anzahl n der Glieder zu finden, erfordert aus Potenz und Wurzel den Grad der Potenz zu finden, welches so viel ist, als in einem logarithmischen System aus der Zahl ihren Logarithmen angeben. Daher muß man, wenn n verlangt wird, die Logarithmen zu Hülfe nehmen.

7. Es werde aus a, e, u die Anzahl der Glieder n gesucht, so ist $\log u = \log e^{n-1} + \log a = (n-1)\,le + la$ und $n - 1 = \frac{lu - la}{le}$, also $n = \frac{lu - la + le}{le}$.

8. Die beiden in (6.) gedachten Ausnahmen finden sich, wenn e gesucht wird, aus a, n, S, oder aus u, n, S. Denn da $S(e-1) = e^n a - a$, so ist, wenn e gesucht wird, die Gleichung,

$$e^n - \frac{S}{a}e + \frac{S}{a} - 1 = 0,$$

aufzulösen. Sind u, n, S gegeben, und wird e gesucht, so ist es derselbe Fall, indem u statt a, und $\frac{1}{e}$ statt e kommt. Oder man setze in der Gleichung, $S(e-1) = eu - a$, für a seinen Werth, $\frac{u}{e^{n-1}}$, und multiplicire beide Theile der Gleichung mit e^{n-1}, so wird erhalten

$$(S-u)e^n - Se^{n-1} + u = 0.$$

9. Wenn $e = 1$, so ist die Summe von n Gliedern $= na$. In diesem Falle ist der Zähler, so wie der Nenner des Bruches für den Werth von S Null: daher dieser Werth durch die Formel selbst unbestimmt bleibt. Den Werth des Bruches zu bestimmen verfahre man so, wie in dem Artikel, Function (50) gewiesen ist. Man setze nämlich den Exponenten $e = 1 + \varepsilon$, so ist $e^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon^2 +$ etc. (binomischer Lehrsatz 1.) und $\frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1}{\varepsilon}(n\varepsilon + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon^2 + \text{etc.}) = n + \frac{n.n-1.}{1.2}\varepsilon + \text{etc.}$

Setzt man $e = 1$, also $z = 0$, so ist der Bruch $= n$, also $S = na$.

10. Die geometrische Reihe sey

$$a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \ldots \frac{b^{n+1}}{a^n},$$

welche $n + 2$ Glieder enthält, so daß zwischen den beiden äußersten n Glieder vorhanden sind. Das erste dieser ist $= b$ oder $a \sqrt[n+1]{\frac{b^{n+1}}{a^n . a}}$. Setzt man nun das letzte Glied $= u$, so ist das erste der n eingeschalteten Glieder $= a \sqrt[n+1]{\frac{u}{a}}$.

Z. B. $a = 2$, $u = 162$, $n = 3$, so ist $b = 2 \sqrt[4]{81} = 2 . 3$. und die Reihe ist $2 : 3 : 6 : 18 : 54 : 162$.

11. In der Reihe,

$$a : ea : e^2 a : e^3 a \ldots e^n a : \text{etc.}$$

werden zwischen je zwey nächsten Glieder $m - 1$ Glieder in stetiger Progression eingeschaltet, so erhält die Reihe statt je eines Gliedes m Glieder. Sie ist nunmehr folgende:

$$a : e^{\frac{1}{m}} a : e^{\frac{2}{m}} a : \ldots e^{\frac{m-1}{m}} a : e^{\frac{m}{m}} a :$$

$$e^{\frac{m+1}{m}} . a : \ldots e^{\frac{2m-1}{m}} . a : e^{\frac{2m}{m}} . a :$$

$$e^{\frac{2m+1}{m}} . a : \ldots e^{\frac{3m-1}{m}} . a : e^{\frac{3m}{m}} . a : \text{etc.}$$

Also ist $e^{\frac{x}{m}} . a$ in der interpolirten Reihe das $x$te Glied nach dem Anfangsgliede a. Ist $e^n a$ das nächst vorhergehende Glied der ursprünglichen Reihe, so ist dessen Stelle in der interpolirten Reihe nach a die

mnte und $e^{\frac{r}{m}}$ a ist das (r — mn) te nach diesem Gliede.

12. Jede gegebene Zahl findet in einer geometrischen Reihe entweder unmittelbar ihren Platz, oder in einer interpolirten, oder zwischen zwey Gliedern einer interpolirten, die man ihr so nahe bringen kann, daß der Unterschied kleiner als jede angebbare Größe ist. Nimmt man die Anzahl der zwischen je zwey Gliedern eingeschalteten Glieder unendlich groß, so ist jede Zahl, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, in einer geometrischen Reihe anzutreffen. Die Fortschreitung der Glieder ist nun eine stetige, und jede Reihe mit einem endlichen Exponenten ist eine aus der stetigen Reihe herausgehobene, indem zwischen jedem Paare jener Reihe eine gleich große Anzahl Glieder aus dieser ausgelassen sind. So wird man begreifen, wie in einem logarithmischen System jede Zahl ihren Logarithmen, den Exponenten von e, und jeder Logarithme seine zugehörige Zahl habe. In dem Artikel, Logarithmotechnie, wird gewiesen, wie für jede Zahl $e^{\frac{r}{m}}$ a der Exponent $\frac{r}{m}$ bequem gefunden werden könne.

13. Exempel. I. die Zinsen eines Capitals werden jährlich zu demselben geschlagen, es ist die Frage, wie groß es mit diesen nach n Jahren wird?

Das Capital, dessen Zinse = 1 ist, sey = r, (z. B. 20 bey 5 P. C. oder 25 bey 4 P. C.), so ist nach Verlauf des ersten Jahrs die Summe von Capital und Zinsen $= \frac{r+1}{r}$ a, nach 2 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^2$ a; also nach 3 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^3$ a, also nach n Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^n$ a.

Diese Summen machen eine geometrische Progression aus, deren Exponent ist $\frac{r+1}{r}$; das ist, $\frac{21}{20}$ bey 5 P. C; $\frac{26}{25}$ bey 4 P. C.

14. II. Es legt jemand in eine Ersparungscasse jedes Jahr die Summe a, wie hoch wachsen die Einlagen in n Jahren an?

Es sey der Kürze wegen $\frac{r+1}{r} = q$, so ist seine Competenz die Summe von $q^n a + q^{n-1} a \ldots + q^2 a + q a$, wenn die Einlage mit Anfang jedes Jahrs geschieht, und die Competenz nach Verlauf von n Jahren berechnet wird. Diese Summe ist $= \frac{q^n - 1}{q - 1} q a = \left(\left(\frac{r+1}{r}\right)^n - 1\right)(r+1) a$.

Z. B. Die Einlage sey $= 1$; der Zinsfuß 4 P. C. also $r = 25$. Die Zahl $n = 10$, so ist $\left(\frac{r+1}{r}\right)^{10} =$ 1,48024, und die Competenz nach 10 Jahren ist 12,48624. Nach 20 Jahren ist sie 0,96912.

15. III. Es verleihet jemand ein Capital a mit der Bedingung, daß der Empfänger ihm jedes Jahr mit Einschluß der schuldigen Zinsen die Summe b zahle, so daß das Capital allmählig abgetragen werde, wie viel ist nach n Jahren von dem Capital noch rückständig?

Man kann beide als Creditoren und Debitoren betrachten. Der eine hat nach n Jahren das Capital $\left(\frac{r+1}{r}\right)^n a$ zu fordern. Der andere hat seit $n - 1$ Jahren mit Anfang jedes Jahrs b gezahlt, und dazu am Ende des nten Jahrs eben so viel. Jene Zahlungen sind nach n Jahren werth $\left[\left(\frac{r+1}{r}\right)^{n-1} - 1\right]$

$(r+1)b$, oder $\left(\frac{r+1}{r}\right)^n rb - (r+1)b$. Dazu die letzte Zahlung selbst genommen, ist seine Forderung werth $\left(\left(\frac{r+1}{r}\right)^n - 1\right) rb$. Er ist also, wenn diese Summe weniger als jene beträgt, noch schuldig

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n (a - rb) + rb.$$

$$\text{oder } rb - \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a).$$

16. Sollte man wegen der zusammengesetzten Zinsen, wenn sie gleich auf beiden Seiten angerechnet werden, Schwierigkeit finden, so stelle man die Berechnung folgendergestalt an. Der Verleiher heiße A, der Empfänger B. Der erstere hat nach Verlauf des ersten Jahrs zu fordern $\frac{r+1}{r}$ a oder qa, erhält die Summe b, hat also nun zu fordern $qa - b$. Aus dieser Forderung wird am Ende des zweyten Jahrs $q^2a - qb$, wovon durch die Bezahlung von b bleibt $q^2a - qb - b$. Am Ende des dritten Jahrs hat A zu fordern $q^3a - q^2b - qb$, und da b abbezahlt wird, bleibt $q^3a - q^2b - qb - b$. So wird mit jedem Jahre der Rest am Ende des vorhergehenden Jahrs mit q multiplicirt, und dann b abgezogen, dadurch wird nach n Jahren der Rest =

$$q^na - q^{n-1}b - q^{n-2}b \ldots - qb - b.$$

Der subtractive Theil ist die geometrische Reihe, $1 + q + q^2 \ldots q^{n-1}$ in b multiplicirt, das ist $\frac{q^n - 1}{q - 1} b$. Also ist der Rest, den B noch schuldig ist,

$$q^na - \frac{q^n - 1}{q - 1} b, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n (a - rb) + rb,$$

wie vorher gefunden ist.

Wenn b die Interesse von dem Capital ist, so ist $rb = a$, also bleibt die Schuld des B immer rb oder a, da er nicht mehr bezahlt als was er schuldig ist. Soll die Schuld vermindert werden, so muß b größer seyn als die Interesse a, also rb größer als a. Die Formel für den Rest ist daher

$$rb - \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a).$$

17. Wenn nach n Jahren die Schuld ganz abgetragen seyn soll, so ist

$$rb = \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a),$$

$$\text{und } \frac{a}{b} = r - \left(\frac{r}{r+1}\right)^n r.$$

Z. B. Wenn $r = 25$, und $n = 20$, so ist $1 - \left(\frac{r}{r+1}\right)^n = 0{,}54362$, und $\frac{a}{b} = 13{,}5905$, oder die Kaufsumme, (der baare Werth,) einer Leibrente auf 20 Jahr ist $13\frac{59}{100}$ mahl die Rente. Bey 5 P. C. oder $r = 20$ ist die Kaufsumme $12\frac{46}{100}$ mahl die Rente. Bey 3 P. C. ist der baare Werth $14\frac{88}{100}$ mahl die Rente.

Tabellen, nach diesen Formeln berechnet, sind zu finden in Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, am vollständigsten in Tetens Berechnung der Leibrenten.

18. Exempel. Von einem Weinfasse, das a Maaß enthält, werden jeden Tag b Maaß weggenommen, und eben so viele wieder aufgefüllt, wie viel Maaß sind nach n Tagen von den ersten a Maaß übrig? und wie viel von m Maaß, die in m Tagen aufgefüllt sind, am Ende dieser m Tage?

Wenn an irgend einem Tage der Rest x bleibt, so wird von demselben $\frac{bx}{a}$ weggenommen, und es ist also für den nächsten Tag der Rest $\frac{(a-b)x}{a}$. Eben so ist den folgenden Tag der Rest $\frac{(a-b)^2 x}{a^2}$, u. s. f. Da am ersten Tage das Ganze a war, so ist nach n Tagen der Rest $= \left(\frac{a-b}{a}\right)^n a$.

Von den n b Maaß, die in n Tagen aufgefüllt sind, sind noch übrig

$$\left(1 - \left(\frac{a-b}{a}\right)^n\right) a.$$

Also sind überhaupt von m Maaß, die in m Tagen aufgegossen worden sind, nach den m Tagen übrig

$$\left(1 - \left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right) a.$$

Dieses läßt sich auch folgendergestalt finden. Von den b Maaß, die an dem ersten dieser m Tage aufgefüllt sind, bleiben $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1} b$ übrig; von den b Maaß des zweyten Tages $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2} b$; u. s. w. Die b Maaß, die an dem mten Tage aufgefüllt werden, sind an demselben unvermindert vorhanden. Man hat also die geometrische Progression

$$\left(\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1} + \left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2} \ldots + \frac{a-b}{a} + 1\right) b$$

zu summiren. Die Summe ist $\left(1 - \left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right) a$.

19. Von dem Erfinder des Schachspiels wird erzählt, daß derselbe sich von dem Fürsten, dem er es überreicht hatte, als Belohnung auf das erste Feld ein Gersten- oder Weizenkorn, auf das zweyte zwey, auf das dritte vier, u. s. f. in dem Verhältnisse 1 : 2 ausgebeten habe. So gering als der Fürst zuerst diese Belohnung gehalten, so sehr sey er erstaunt, als die Berechnung die ungeheure Menge Körner zeigte. Es ist $1 + 2 + 4 \ldots + u = \frac{2u - 1}{2 - 1} = 2u - 1$. Hier ist u das 64ste Glied der Reihe =

9 223372 036854 775808,

und die Summe von 1 bis u =

18 446744 073709 551615

Dieses ist mehr als 18 Ernten geben würden, wenn die Erdfläche ganz und gar Ackerland wäre. In der französischen Encyklopädie wird berechnet, daß zur Einscheurung dieser Menge 91522 Scheuren erfordert werden, jede ein Quadrat, eine Lieue oder 14400 Fuß im Umfange, worin das Korn 20 Fuß hoch aufgehäuft sey. Der Verfasser rechnet, daß höchstens 450 Körner Weizen auf einen Cubikzoll gehen.

Dieses Exempel dient einen Begriff von der schnellen Zunahme einer geometrischen Reihe, selbst bey einem kleinen Exponenten, zu geben.

Vergleichung zweyer geometrischen Reihen.

20. Man nehme zwey geometrische Reihen,

$a : ea : e^2a \ldots e^ma \ldots e^xa \ldots$

$A : EA : E^2A \ldots E^nA \ldots E^yA \ldots$

und setze, daß $e^ma = E^nA$, auch daß $e^xa = E^yA$ sey. Es ist die Frage, wie die Relation der Exponenten m, n, x, y, und der Exponenten e, E beschaffen sey. Zu dem Ende müssen die Anfangsglieder, a, A weggeschafft werden. Dieses geschieht sogleich durch die Divi-

sion der Theile jener Gleichungen eines durch den andern, welches giebt

$$e^{x-m} = E^{y-n}.$$

Man betrachte E als ein Glied in der geometrischen Reihe, $1 : e : e^2 : e^3 :$ etc. und setze $E = e^{\alpha:\beta}$, zufolge (12.). Hieraus ist $E^\beta = e^\alpha$. Man erhebe die Theile der Gleichung zwischen e und E auf die Potenz mit dem Exponenten β, so ist

$$e^{\beta(x-m)} = E^{\beta(y-n)}.$$

Nun ist $E^{\beta(y-n)} = (E^\beta)^{y-n} = (e^\alpha)^{y-n} = e^{\alpha(y-n)}$ also ist

$$e^{\beta(x-m)} = e^{\alpha(y-n)},$$

folglich $\beta(x-m) = \alpha(y-n)$,

und $x-m : y-n = \alpha : \beta$.

Oder, die Unterschiede der Stellenzahlen derselben zweyer Glieder in beiden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

21. Man nehme noch in jeder der beiden Reihen ein Glied von derselben Größe, dessen Stelle in der ersten Reihe p, in der zweyten q sey, oder es sey $e^p a = E^q A$, so ist

$$p-m : q-n = \alpha : \beta.$$

Also ist

$$x-m : y-n = p-m : q-n.$$

Daraus

$$x = \frac{p-m}{q-n}(y-n) + m,$$

$$y = \frac{q-n}{p-m}(x-m) + n.$$

22. Wenn $A = a$ ist, so lasse man die beiden sich gleichen Glieder, $e^m a$ und $E^n A$, die Anfangsglieder der beiden Reihen seyn. Dieses giebt $m = 0$; $n = 0$, und es ist $x : y = p : q$, das ist, die Stellenzahlen derselben

zweyer Glieder in beyden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

Hieraus ersieht man, wie aus der Stelle einer Zahl in einer geometrischen Reihe die Stelle derselben Zahl in jeder andern geometrischen Reihe leicht gefunden wird, das ist, wie aus den Logarithmen in einem System die Logarithmen derselben Zahlen in jedem andern berechnet werden.

23. Exempel. Es sey $a = 1$; $e = 10$, so ist x der Briggische oder gemeine Logarithme von e^x. In dem Neperischen System ist die Reihe eine fallende, und das Anfangsglied $A = 10000000$. Das nächste nach demselben in der Tafel (primum proportionale nennt Neper es) ist 9999999, wobey in der Tafel zwar als Logarithme 1 steht, allein es ist darum nicht $E = \frac{9999999}{10000000}$. Denn Neper sagt ausdrücklich in der Schrift, mirifici Logar. canonis constructio, §. 30, daß der Logarithme (numerus artificialis) von 9999999 zwischen 1.0000001 und 1.0000000 falle. Wir haben E zu wissen nicht nöthig, da wir nur irgend ein Paar Logarithmen aus dem Neperischen System als gegebene Größen in die Rechnung einführen können.

Man bezeichne einen Briggischen Logarithmen durch lB; einen Neperischen durch lN. Nun ist $lB.\,10^7 = 7$, und $lN.\,10^7 = 0$, also $m = 7$; $n = 0$. Die Neperischen Logarithmen sind alle negative Größen. Bezeichnen nun q und y bloß die Quantität, so ist diesen Symbolen das Vorzeichen — zu geben, so daß $-y = \frac{-q}{p-7}(x-7)$ ist. Diese Formel verwandelt sich in folgende,

$$y = \frac{q}{7-p}(7-x).$$

Da Neper den Sinus totus 10 Millionen setzt, so haben wir zu den tabularischen Logarithmen, so fern sie sich auf den Sinus totus als Einheit beziehen, in der Characteristik 7 zu addiren. Man nehme

$p = \log tab. \sin 30^\circ + 7 = 6,6989700$

$q = lN. \sin 30^\circ = 6931469,$

so ist $\frac{q}{7-p} = \frac{6931469}{0,3010300} = 23025840,$ und

$lN. \sin \varphi = 23025840\ (7 - lB. \sin \varphi).$

Man suche nun lN. sin 60°. Es ist lB. sin 60°, oder $x = 6,9375306$, also

$7 - lB. \sin 60^\circ = 0,0624694$, und

lN. sin 60° = 1438411, wie bey Neper, bis auf die letzte Ziffer, die daselbst 0 ist.

Gerade Zahl ist eine solche ganze, die sich durch Zwey ohne Rest theilen läßt. Eine doppeltgerade oder geradgerade (numerus pariter par) ist durch Vier ohne Rest theilbar; eine ungeradgerade (impariter par) läßt durch 4 getheilt den Rest 2.

Gerade Linie, s. Linie.

Geradlinichte Figur ist eine solche, die ganz von geraden Linien eingeschlossen ist.

Geschoben wird bisweilen von Parallelogrammen mit schiefen Winkeln gebraucht, s. Rhombus und Rhomboides.

Gesellschaftsrechnung ist die Eintheilung einer Zahl nach gegebenen Verhältnissen. Weil diese Rechnung in denen Fällen gebraucht wird, wo Gewinn oder Verlust, Abgabe oder Einnahme unter mehrere Personen zu vertheilen ist, so hat sie daher von den Rechenmeistern die Benennung erhalten.

Es sind von dieser Rechnung zwey Fälle. In dem ersten machen die Verhältnißzahlen, nach welchen ein gegebenes Ganze getheilt werden soll, zusammen genommen, ein ähnliches Ganze wie jenes aus; in dem zweyten aber nicht.

Ein Beyspiel des ersten Falles ist folgendes. Es sollen 1000 Rthl auf drey Personen A, B, C, vertheilt werden, so daß die Theile von A und B sich wie 2 : 3 : und die Theile von B und C sich wie 3 : 5 verhalten. Da hier die Verhältnißzahl für B, nämlich 3 sowohl für das eine als das andere Verhältniß dient, so ist das Ganze, 2 + 3 + 5, oder 10, schon auf die verlangte Art eingetheilt. Man hat also nur die Proportion zu machen: das Normalganze, 10, verhält sich zu dem einzutheilenden Ganzen, 1000, wie einer der Theile jenes (z. B. 2.) zu dem gleichnamigen Theile dieses, welcher also 200 Rthl. beträgt.

Allgemein seyn die Verhältnisse, nach welchen ein Normalganzes eingetheilt ist, a : b : c : d : etc. so daß der erste und zweyte Theil sich wie a : b : der zweyte und dritte wie b : c : der dritte und vierte sich wie c : d verhalten, u. s. f. Ein gegebenes Ganze soll auf gleichmäßige Art in die Theile A, B, C, D, E, etc. eingetheilt werden, so ist

$a + b + c + d + e + \text{etc.} : A + B + C + D + E + \text{etc.}$
$= a : A$ oder $= b : B$, oder $= c : C$, u. s. f.

Dieses beruht auf folgendem Satze aus der Lehre von der Proportion: wenn

$$A : B = a : b$$
$$B : C = b : c$$
$$C : D = c : d$$
$$D : E = d : e$$

u. s. f.

so ist die Summe der Glieder, $A + B + C + D + \text{etc.}$ zu einem derselben, wie die Summe der Glieder, $a + b + c + d + \text{etc.}$ zu dem mit jenem gleichstelligen unter ihnen.

Nicht allein bey Vertheilungen einer Geldsumme auf eine Anzahl Personen, sondern auch bey Mischungen nach gegebenen Verhältnissen wird diese Vorschrift angewandt. Z. B. Es mögen zu einer Sorte Schießpulver

zu nehmen seyn 75 Theile Salpeter, 10 Theile Schwefel und 15 Theile Kohlen, oder in kleinern Zahlen 15; 2; 3 Theile, so sind auf 1000 Pfund zu nehmen $\frac{1000}{20} \times 15$ oder 750 Pfund Salpeter; $\frac{1000}{20} \times 2$ oder 100 Pf. Schwefel, und $\frac{1000}{20} \times 3$ oder 150 Pf. Kohlen.

Der zweyte Fall ist, wenn die Verhältnißzahlen für jeden Theil in Beziehung auf zwey andere Theile nicht dieselben sind, oder wenn kein Normalganzes gegeben wird, dessen Theile zur Bestimmung der Theile eines andern Ganzen dienen. Ein gewisses Ganze sey also zu theilen in die Theile A, B, C, D, E, etc. so daß

$$A : B = a : b \quad ; \quad B : C = \beta : c$$
$$C : D = \gamma : d \quad ; \quad D : E = \delta : e,$$

u. s. f.

Man hat nun diese Verhältnisse auf die Form, wie in dem ersten Falle zu bringen, so daß das Hinterglied jedes das Vorderglied des nächstfolgenden werde. Dieses geschieht folgendergestalt für vier Verhältnisse,

$$A : B = a\beta\gamma\delta : b\beta\gamma\delta$$
$$B : C = b\beta\gamma\delta : bc\gamma\delta$$
$$C : D = bc\gamma\delta : bcd\delta$$
$$D : E = bcd\delta : bcde.$$

Auf ähnliche Art bey mehrern oder wenigern Verhältnissen. Haben die Verhältnißglieder rechter Hand gemeinschaftliche Theile, so wird man zur Erleichterung der Berechnung sie dadurch zu theilen haben.

Z. B. $a : b = 2 : 3$; $b : c = 5 : 4$; $c : d = 9 : 7$; $d : e = 6 : 5$. Daraus ist $A : B : C : D : E = 540 : 810 : 648 : 504 : 420 = 90 : 135 : 108 : 84 : 70$.

Gesetz einer Reihe ist die Art, wie die Glieder derselben jedes zufolge seiner Stelle zusammengesetzt

werden. Ist die Reihe nach den Potenzen einer gewissen Größe geordnet, so ist zuerst die Fortschreitung der Exponenten dieser Potenzen zu bestimmen. Sie kann auch nach den Potenzen zweyer Größen geordnet seyn, wie in der Potenz eines Binomium, $a + b$, nach den Potenzen von a und b zugleich, wo die Summe der Exponenten in dem Producte beider Potenzen eine bestimmte Summe ausmacht. Dividirt man mit der höchsten Potenz einer von beiden Größen, und multiplicirt zugleich das Ganze mit derselben Potenz, so erhält man eine Fortschreitung von Potenzen einer einzelnen Größe.

Die Coefficienten der Potenzen, nach welchen die Reihe geordnet ist, sind entweder Functionen ihrer Stelle, oder auf andere Art der Form nach bestimmt, von welcher letztern die Binomial-Coefficienten ein Beyspiel geben. Oft ist das Gesetz so verwickelt und zusammengesetzt, daß man es nicht zu entdecken vermag.

Gesichtspunct, s. Perspectiv.

Gleich ist, was in Absicht der Größe eins für das andere gesetzt werden darf. Die Art der Zusammensetzung mag verschieden oder dieselbe seyn.

Gleichartig (homogen) ist, was durch dieselbe Einheit gemessen wird, oder gemessen werden kann. Alle Linien sind gleichartige Größen, so auch alle Flächen unter sich, alle Körper, desgleichen Zeiten, beschleunigende Kräfte, Gewichte. Alle Zahlen mit einer unbestimmten Einheit sind gleichartige Größen. Gleichartige Größen, und keine andere, kann man zu einander setzen, und eine von der andern abziehen. Größen, die im Allgemeinen gleichartig sind, können durch verschiedene Bestimmung der Einheit ungleichartig werden, z. B. Fuße und Zolle; Quadratzolle und Kreiszolle; Nonagesimalgrade und Centesimalgrade. Dergleichen kann man zwar zusammensetzen, aber nicht ihre Zahlwerthe.

Gleichartige Radicalgrößen sind solche, welche Wurzeln gleichen Grades sind, z. B. $\sqrt[3]{25}$; $\sqrt[3]{43}$.

Von einer algebraischen Gleichung wird gesagt, daß das Gesetz des Gleichartigen darin beobachtet sey, wenn alle Glieder derselben einerley Dimension oder Abmessung haben.

Eine gleichartige Differentialgleichung zwischen zwey veränderlichen Größen ist eine solche, worin die Glieder bloß in Absicht derselben einerley Dimension haben.

Homogeneum affectionis et comparationis, s. an seinem Orte.

Gleichförmig wachsend oder abnehmend ist eine Reihe von Größen, deren jede von der folgenden um gleichviel auf gleiche Art unterschieden ist. Die ungleichförmigen Veränderungen zu messen gebraucht man zugehörige gleichförmige Veränderungen einer zugeordneten Größe.

Gleichheit ist die Beschaffenheit der Größen, wodurch sie gleich sind. — Verhältniß der Gleichheit ist das a : a, oder 1 : 1. Alle Beweise in der Mathematik beruhen auf der Bestimmung der Gleichheit oder Ungleichheit der Größen. In der Differentialrechnung kommt das Verhältniß der Gleichheit als Gränze eines veränderlichen Verhältnisses, oder vielmehr als Grundlage eines solchen, oft vor.

Gleichlaufend, s. parallel.

Gleichnamig (homologa) sind die Vorderglieder oder die Hinterglieder zweyer oder mehrerer Verhältnisse; auch die Seiten ähnlicher geradlinichter Figuren, die von den gleichen und auf gleiche Art liegenden Winkeln eingeschlossen sind. In den Proportionen zwischen solchen Seiten sind sie entweder die Vorderglieder oder die Hinterglieder, wenn nämlich die Seiten in der einen Figur zu einem Verhältnisse, und die in der andern Figur zu dem andern Verhältnisse genommen werden.

Gleichseitig (aequilaterum) ist erstlich ein Vieleck, das lauter gleiche Seiten hat; zweytens eine Hyperbel, deren Axen gleich groß sind.

Gleichwinklicht (aequiangulum) ist ein Vieleck, das lauter gleiche Winkel hat. Die regulären Vielecke sind gleichseitig und gleichwinklicht.

Gleichung ist entweder ein symbolischer Ausdruck der Art, wie mehrere mit einander verbundene Größen jede aus der andern zusammengesetzt werden, oder eine Verknüpfung zweyer Formen derselben Größe.

1. Beyspiele der ersten Gattung sind

$$x^2 + ax = b.$$

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

$$x^2 + 7xy - 8y^2 + 10x - 12y - 20 = 0.$$

Beyspiele der zweyten Gattung sind

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{(a-b)}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{(a-b)}{b^4}x^3 + \text{etc.}$$

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

2. Man pflegt diese beiden Gattungen nicht zu unterscheiden. Sie sind aber, wie man aus den gegebenen Beyspielen sieht, von sehr verschiedener Beschaffenheit. Die Auflösung der Gleichungen von der ersten Gattung gehört für die Algebra. In diesem Artikel ist es die Absicht, die Auflösung derselben zu zeigen, das ist, wie die unbekannte Größe aus den gegebenen directe zusammen zu setzen sey, da sie in der Gleichung auf eine unentwickelte Art mit diesen dargestellt wird.

3. Die Gleichungen für eine einzige unbekannte Größe theilt man nach den höchsten Potenzen ein, auf welche die unbekannte Größe in denselben steigt.

Eine Gleichung vom ersten Grade, eine einfache, ist eine solche, worin die unbekannte Größe nur einfach oder in der ersten Potenz erscheint; Gleichungen vom zweyten Grade, oder quadratische, sind, worin das Quadrat der unbekannten Größe nebst der ersten Potenz, oder auch ohne diese vorkommt; vom dritten Grade, oder cubische, worin der Cubus, nebst allen oder einigen niedrigern Potenzen, oder auch ganz allein enthalten ist; vom vierten Grade oder biquadratische, worin die unbekannte Größe bis zum Biquadrat oder der vierten Potenz steigt, u. s. w.

4. Wenn eine Potenz der unbekannten Größe, ohne die niedrigern, mit der gegebenen Größe allein in einer Gleichung vorhanden ist, so heißt die Gleichung eine reine (aequatio pura). Wenn mehrere Potenzen der unbekannten Größe zusammen kommen, so heißt es eine unreine Gleichung oder besser eine zusammengesetzte (non pura vel affecta). Eine vollständige Gleichung, (aequatio completa), ist diejenige, worin alle Potenzen von der höchsten bis zu der ersten nebst dem gegebenen Gliede vorhanden sind; eine unvollständige ist, worin eine oder mehrere Potenzen fehlen.

5. Die einzelnen Größen, woraus eine Gleichung, sie sey von welcher Art sie wolle, zusammen gesetzt wird, heißen die Glieder (termini) derselben, wie x^2; ax; b in der Gleichung $x^2 - ax = b$. Die gegebenen Factoren der unbekannten Größe heißen ihre Coefficienten. Man muß dabey zugleich auf das Vorzeichen achten.

Die Aggregate der Glieder auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens heißen die Theile (membra) der Gleichung.

6. Die gewöhnlichen Stellungen der Glieder sind zweyerley. Entweder setzt man das gegebene Glied auf die eine Seite des Gleichheits-Zeichens, und alle die, welche unbekannte Größen enthalten, auf die andere; oder man bringt alle Glieder auf dieselbe Seite, so daß der eine Theil der Gleichung $= 0$ ist, indem sich alle Glieder des andern Theils gegen einander aufheben. Diese Stellung

ist zu manchen Absichten die brauchbarste, als um zu zeigen, wie eine Gleichung aus Factoren zusammengesetzt wird, um einen oder mehrere Factoren abzusondern, die Consecution der Folgen und Abwechslungen der Vorzeichen anzugeben, welche von der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln abhängt, eine gegebene Gleichung mit einer allgemeinen, oder canonischen zu vergleichen, und überhaupt allgemeine Lehrsätze über die Eigenschaften der Gleichungen und Regeln zur Auflösung zu geben.

7. Eine Gleichung, worin nur eine einzige unbekannte Größe enthalten ist, heißt eine bestimmte Gleichung (aequatio determinata); eine einzelne, worin zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, ist eine unbestimmte Gleichung (indeterminata). Durch jene wird die unbekannte Größe mittelst der gegebenen bestimmt, durch diese aber nicht, weil sie von gegebenen und nicht gegebenen Größen zugleich abhängt.

8. Wenn bey der Auflösung einer Aufgabe oder überhaupt bey der Untersuchung irgend einer Verbindung von Größen, mehrere unbekannte Größen, wie es oft der Fall ist, vorhanden sind, so sind diese in den Gleichungen zwischen ihnen und den gegebenen, mit einander vermengt. Es ist alsdann nöthig, für jede der unbekannten Größen eine bestimmte Gleichung zu finden. Dieses ist möglich, wenn so viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind, s. Elimination. Die Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe gehören in diesem Falle nicht zu den unbestimmten. Sind aber weniger Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden, so behält man bey allen Combinationen der Gleichungen doch zum Resultat eine unbestimmte Gleichung.

9. Die bestimmten Gleichungen sind das Resultat der analytischen Untersuchung über den Zusammenhang gewisser Größen. Diese überliefert gleichsam die Analysis der Algebra, um die Werthe der unbekannten Größen mittelst der bekannten daraus zu bestimmen.

10. Die unbestimmten Gleichungen gehören für die Untersuchung des Zusammenhanges der nach irgend einem

Gesetze von einander abhängigen veränderlichen Größen, es sey in der reinen Analysis, oder in der Geometrie, in der Mechanik, Astronomie und andern Anwendungen der Mathematik. Eine besondere Gattung unbestimmter Gleichungen ist die, wodurch nicht die Größe aber die Form der unbekannten Größen bestimmt wird, s. unbestimmte Analytik.

11. Die Wurzeln der bestimmten Gleichungen sind diejenigen Werthe der unbekannten Größe, welche der Gleichung zu folge der gegebenen Größen und ihrer Zusammensetzungsart Genüge thun. So sind $+2$ und $+5$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$, und $+2$; $+5$; -4 die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$.

12. Die positiven Wurzeln sind diejenigen, bey welchen in dem Aggregat der Glieder die eigentliche Bedeutung der Vorzeichen beybehalten wird, als bey den Wurzeln $+2$ und $+5$ in jenen beiden Gleichungen. Sie werden in demjenigen Sinne genommen, der bey der Auflösung der Frage für sie festgesetzt ist. Die negativen Wurzeln sind, für welche die Vorzeichen der ungeraden Potenzen ihre Bedeutung ändern, so daß die mit $+$ begleiteten subtractiv, die mit $-$ begleiteten additiv werden. So ist in der obigen cubischen Gleichung, wenn die Wurzel -4 gebraucht wird, das Aggregat $-64 - 48 + 72 + 40 = 0$.

13. Die negativen Wurzeln dienen, zwey in den Vorzeichen bloß verschiedene Gleichungen in eine einzige zu vereinigen. Man verändere in einer Gleichung bloß die Vorzeichen der ungeraden Potenzen, oder, welches bey Gleichungen von einem ungeraden Grade bequemer ist, die Vorzeichen der geraden Potenzen, so sind die negativen Wurzeln der einen Gleichung die positiven der andern. Z. B. die Gleichung, $x^3 + 3x^2 - 18x - 40 = 0$, hat die positive Wurzel $+4$, und die negativen -2; -5; die Gleichung, $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$, hat die Wurzeln -4; $+2$; $+5$. Die biquadratische Gleichung, $x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = 0$, hat die

Wurzeln $+2$; $+5$; -4; -1; die Gleichung, $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$, hat die Wurzeln -2; -5; $+4$; $+1$. Wollte man die negativen Wurzeln vermeiden, so müßte man zu der vollständigen Auflösung einer Aufgabe zwey Gleichungen anwenden, die von der erklärten entgegengesetzten Beschaffenheit wären, so daß der eine Theil der Werthe der gesuchten Größe durch die eine Gleichung, der andere Theil durch die andere Gleichung, nach ihrer absoluten Größe, zufolge der eigentlichen Bedeutung der Vorzeichen, gegeben würde. Allein es ist dem Geiste der Analysis gemäß, diese verwandten Beziehungen des gesuchten zu dem gegebenen in eine einzige Formel zu fassen, s. entgegengesetzte Größen.

14. Die verschiedenen Wurzeln sind Werthe verschiedener Größen, die alle bey einer Aufgabe gesucht werden, wenn man gleich nur nach einer einzigen fragen sollte. Die Algebra verbessert in ihrer Antwort das Mangelhafte in der Frage. Darüber wird die Betrachtung der Gleichungen von den verschiedenen Graden völliges Licht ertheilen.

15. Manche der alten Algebraisten (als Descartes, Wolf,) nannten die negativen Wurzeln sehr unrichtig falsche Wurzeln, weil sie sich zu dem Falle, worauf sie die Rechnung eingerichtet hatten, nicht schickten. Sie sind so gut Antworten auf die Frage als die von ihnen so genannten wahren, die positiven, Wurzeln. Jene verändern nur die Vorzeichen, so daß ihre ungeraden Potenzen subtrahirt oder addirt werden, wo diese addirt oder subtrahirt werden, wie es allemahl geschieht, wenn in den arithmetischen Operationen eine Größe durchaus ihr Vorzeichen ändert; s. entgegengesetzte Größen

16. Gleichungen, in welchen alle Potenzen der unbekannten Größe gerade Exponenten haben, enthalten je zwey gleiche und entgegengesetzte Wurzeln, da das Quadrat und jede andere gerade Potenz einer Größe ihr Vorzeichen nicht ändert, wenn das Vorzeichen der Wurzel geändert wird.

17. Gleichungen, in welchen neben jeder Wurzel, die p heiße, das reciproke derselben $\frac{1}{p}$ auch als Wurzel vorhanden ist, heißen reciproke Gleichungen. Euler hat diese Benennung eingeführt. Comm. vet. Petrop. T. VI. p. 223.

18. Wenn für die unbekannte Größe irgend ein positiver oder negativer Werth gesetzt wird, so heißt das Aggregat aller Glieder, auf eine Seite gebracht, der Werth der Gleichung für diesen in die Stelle der Wurzel gesetzten Werth. Die Werthe einer Gleichung machen eine stetige Reihe aus, und wachsen ins Unendliche, wenn für x ein unendlich großer Werth gesetzt wird. Wird für x eine der Wurzeln selbst genommen, so ist der Werth der Gleichung $= 0$.

19. Wir wollen nun die bestimmten Gleichungen vom ersten bis vierten Grade, jede Gattung besonders, untersuchen, und die Methoden zu ihrer Auflösung kennen lernen. Alsdann wird die allgemeine Betrachtung der Gleichungen keine Schwierigkeit machen, wenn es gleich, einzelne Fälle ausgenommen, nicht möglich ist, die höhern Gleichungen vom fünften Grade an, anders als durch unendliche Reihen, oder für numerische Werthe der Coefficienten durch Annäherung aufzulösen.

I. Gleichungen vom ersten Grade.

20. Wenn die unbekannte Größe in einer Gleichung bloß in der ersten Potenz vorhanden ist, so bringe man alle Glieder, welche sie enthalten, durch Veränderung des Vorzeichens, auf eine Seite der Gleichung, die andern, die bekannten, eben so auf die andere Seite: man dividire das Aggregat der bekannten durch den Factor der unbekannten Größe, oder multiplicire es durch den Divisor derselben, in den Fällen, wo diese mit einem Multiplicator oder Divisor verbunden ist. So erhält man den Werth der unbekannten Größe durch bekannte Größen.

Z. B. $5x - 12 = 3x + 4$

so ist $5x - 3x = 4 + 12$

$2x = 16$

$x = 8.$

Oder allgemeiner sey

$$ax - b = cx + d$$

so ist $ax - cx = b + d$

$$(a - c)x = b + d$$

$$x = \frac{b + d}{a - c}.$$

Als Beyspiele zur Erfindung der Gleichungen und ihrer Verbindungen dienen folgende Aufgaben. Man verbinde hiemit den Artikel: Buchstabenrechnung.

21. Aufg. Aus der Summe zweyer Zahlen, a, und ihrem Unterschiede, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn x und y, so ist

$x + y = a$, und $x - y = b$. Daraus ist

$2x = a + b$, und $x = \frac{1}{2}(a + b)$

$2y = a - b$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

22. Aufg. Aus dem Unterschiede zweyer Zahlen, a, und dem Unterschiede ihrer Quadrate, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn x und y, so ist $x - y = a$, und $x^2 - y^2 = b$. Da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, (Buchstabenrechnung, 14.) so ist

$$x + y = \frac{b}{a},$$

also zufolge (21.)

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + a\right) = \frac{b + aa}{2a}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - a\right) = \frac{b - aa}{2a}.$$

Wenn aa größer als b ist, so ist y negativ, und a bedeutet die Summe $x + y$.

23. Aufg. Ein Courier A, dessen Geschwindigkeit, (Weg in einer Stunde) $= a$ ist, geht m Stunden eher ab, als ein Courier B, dessen Geschwindigkeit $= b$ ist, von einem Orte abgeht, der c Meilen von dem Orte des A rückwärts entfernt liegt. Beide gehen nach derselben Richtung. Wo und wenn wird A von B eingeholt, wofern $b > a$ ist?

Es sey x der Weg des A, bis er eingeholt wird, so ist $x + c$ der Weg des B bis dahin. Die Zeit des A auf dem Wege x ist $= \frac{x}{a}$; die Zeit des B auf dem Wege $x + c$ ist $\frac{x+c}{b}$. Der Unterschied beider Zeiten ist $= m$. Also ist

$$\frac{x}{a} - \frac{x+c}{b} = m.$$

Daraus ist für A

der Weg $\quad x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$,

die Zeit $\quad = \frac{c+mb}{b-a}$.

Der Weg des B $= x + c = \frac{b(c+ma)}{b-a}$,

und die Zeit $= \frac{c+ma}{b-a}$.

Wenn die Couriere einander entgegen gehen, so ist $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$. Denn der Weg des B ist alsdann $c - x$. Man erhält den Werth von x in diesem Falle, wenn man in der Formel für den ersten Fall a negativ nimmt, wodurch x negativ wird, welches bedeutet, daß

der Weg x eine der in jenem Falle gesetzten Richtung entgegengesetzte hat.

24. Aufg. Es sey das siderische Jahr = A; der mittlere siderische periodische Monath = M; der mittlere synodische Monath = N; die Vergleichung zwischen diesen Größen zu machen.

Aufl. Der Bogen der Eckliptik, welchen die Sonne während eines synodischen Monaths beschreibt, sey = x, der ganze Umkreis = p, so ist $\frac{x}{p} A = N$. Da $p + x$ der von dem Monde während derselben Zeit beschriebene Bogen ist, so ist $\frac{p+x}{p} M = N$. In der erstern Gleichung addire man auf beiden Seiten die Größe A, so ist $\frac{p+x}{p} A = A + N$. Aus dieser Gleichung und der zweyten folgt durch Division

$$\frac{M}{A} = \frac{N}{A+N}. \quad \text{Also ist } M = \frac{A.N}{A+N}.$$

Hieraus ist $M(A+N) = A.N$; ferner

$$M.A = (A-M)N, \text{ und } N = \frac{A.M}{A-M}.$$

Es ist

A = 365 T. 6 St. 9′ 12″ = 365, 25639 T.
M = 27. 7. 43. 11. = 27, 32165 =
N = 29. 12. 44. 3. = 29, 53059 =

Der Werth von N findet sich auch aus dem Werthe der Zeit in der vorhergehenden Aufgabe, wenn man daselbst m = o setzt. Es ist c der Umkreis p, weil der Mond von der Conjunction mit der Sonne an denselben beschreiben muß, ehe er an die Stelle kommt, von welcher die Sonne ausgieng. Der in irgend einer Zeit-Einheit, als ein Tag, von der Sonne beschriebene Bogen ist $\frac{p}{A} = a$;

der von dem Monde beschriebene Bogen ist $\frac{P}{M} = b$. Setzt man diese Werthe für c, a, b, so wird die Zeit bis zur nächsten Conjunction, $N = \frac{A.M}{A-M}$. Hieraus ergiebt sich $M = \frac{A.N}{A+N}$.

25. Aufg. Es soll aus m löthigen und n löthigen Silber eine Masse von a Loth zusammen gesetzt werden, die r löthig ist. Wie viel von jedem Silber ist zu nehmen?

Aufl. Von dem erstern seyn zu nehmen x Loth, von dem andern y Loth. Die Menge des feinen Silbers in x Loth ist $\frac{mx}{16}$, in den y Loth ist sie $= \frac{ny}{16}$, in der Mischung $\frac{ra}{16}$. Also ist

I. $mx + ny = ra$.

Es ist auch

II. $x + y = a$.

Hier ist nur nöthig, das Verhältniß $x : y$ zu suchen. Darum verwandle man II. in folgende,

III. $rx + ry = ra$.

Demnach ist

IV. $mx + ny = rx + ry$

oder V. $mx - rx = ry - ny$.

Also ist

VI. $x : y = r - n : m - r$.

Durch die Gesellschafts-Regel findet man hieraus sowohl x als y.

Wollte man, ohne das Verhältniß gefunden zu haben, x und y unmittelbar finden, so ist, wenn x gesucht wird, in I. der Werth von y aus II. zu setzen, nämlich $y = a - x$. Dies giebt $mx + n(a - x) = ra$, das

ist $(m-n)x = (r-n)a$, und $x = \frac{r-n}{m-n}a$. Wenn m und x mit n und y vertauscht werden, so ist $(n-m)y = (r-m)a$, oder $(m-n)y = (m-r)a$, und $y = \frac{m-r}{m-n}a$.

26. Aufg. Das specifische Gewicht einer Materie sey $= a$, einer andern $= b$, einer Mischung aus beiden $= c$, man sucht, wie viel von jeder in der Mischung enthalten ist, vorausgesetzt, daß die Summe der Räume beider Materien in und außer der Mischung gleich groß ist.

Aufl. Da die Einheit der Gewichte, so wie der Räume, willkührlich ist, so nehme man das Gewicht der Raum-Einheit an Wasser zur Einheit, und es ist das Gewicht der ersten Materie in der Raum-Einheit $= a$, und der Raum von dem Gewichte x derselben $= \frac{x}{a}$. Eben so ist von dem Gewichte der zweyten Materie der Raum $= \frac{y}{b}$, und von der Mischung beider $= \frac{x+y}{c}$, wenn die Gewichte der darin enthaltenen beiden Materien x und y sind. Zufolge der Voraussetzung ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x+y}{c}.$$

Daraus

$$bcx + acy = ab(x+y)$$
$$a(c-b)y = b(a-c)x$$
$$x : y = a(c-b) : b(a-c)$$
$$x : y = \frac{a}{a-c} : \frac{b}{c-b}.$$

Z. B. Das specifische Gewicht des Silbers sey $= 11{,}09$, des Kupfers $= 8{,}33$, einer Mischung $= 10{,}24$, so ist $x : y = 3 : 1$ nahe.

27. Aufg. Aus den Gewichten zweyer Materien, den specifischen Gewichten der einen und ihrer Mischung

das specifische Gewicht der andern zu finden, unter der Voraussetzung wie in (26.).

Die Gewichte seyn p, q, das specifische Gewicht der erstern = a, der zweyten = u, der Mischung = c, so ist

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{u} = \frac{p+q}{c}$$

$$\frac{q}{u} = \frac{p+q}{c} - \frac{p}{a} = \frac{a(p+q)-cp}{ac}$$

$$u = \frac{acq}{a(p+q)-cp}.$$

Die Formel würde unter der gemachten Voraussetzung dienen, aus dem Gewichte einer Salzauflösung und des darin enthaltenen Salzes, nebst den specifischen Gewichten des Wassers und der Auflösung, das specifische Gewicht des Salzes zu finden. Z. B. in einer gesättigten Auflösung ist nach Lamberts Versuchen p = 979; q = 380; a = 1; c = 1,205, also u = 2,554. In einer schwächern ist p = 1095; q = 100; c = 1,059. Dieses giebt u = 2,99.

28. Aufg. In einer Salzauflösung sey das Gewicht des süßen Wassers = a, des Salzes = b, der Gehalt $= G = \frac{b}{a+b}$. Man verlangt die Menge des Wassers, das zugegossen werden muß, damit die Auflösung den Gehalt g bekomme.

Aufl. Die gesuchte Wassermenge wiege = x, so ist $g = \frac{b}{a+x+b}$. Daraus ist $x = \frac{b}{g} - (a+b)$ $= \frac{b}{g} - \frac{b}{G} = \frac{(G-g)b}{Gg}$. Oder, wenn für b der Werth G(a + b) gesetzt wird, $x = \frac{(G-g)(a+b)}{g}$.

29. Aufg. Zu finden, wie sich die Gewichte zweyer Körper, deren einer schwerer, der andere leichter

als Wasser ist, verhalten müssen, damit beide verbunden im Wasser ganz eingetaucht schwimmend erhalten werden.

Aufl. Das specifische Gewicht des schwerern Körpers sey $= m$; des leichtern $= n$, des Wassers $= p$, das Gewicht des erstern $= a$, des zweyten $= x$. Damit beide ganz eingetaucht dem Wasser das Gleichgewicht halten, muß das Gewicht beider so groß seyn als das Gewicht des Wassers, dessen Stelle sie einnehmen. Nun verhalten sich die Gewichte zweyer Massen von gleicher Räumlichkeit wie ihre specifischen Gewichte; also ist das Gewicht des Wassers, dessen Stelle der erstere Körprr einnimmt, $= \frac{pa}{m}$, und das Gewicht des Wassers in dem Raume des zweyten Körpers $= \frac{px}{n}$. Demnach ist

$$a + x = \frac{pa}{m} + \frac{px}{n}$$

$$mn(a + x) = p(na + mx)$$

$$(m - p)na = (p - n)mx$$

$$a : x = (p - n)m : (m - p)n$$

$$a : x = \frac{m}{m - p} : \frac{n}{p - n}.$$

Das Verhältniß ist dasselbe wie in der Aufgabe (26.), wenn für das dortige specifische Gewicht der Mischung hier das specifische Gewicht des Wassers gesetzt wird. Die beiden verbundenen Körper sind als eine Mischung zu betrachten, deren specifisches Gewicht dem einer Masse von gleichem Gewicht und gleichem Umfange, also dem des Wassers gleich ist. Die Algebra hilft hier die Ähnlichkeit zweyer dem ersten Anblick nach verschiedenen Fragen einsehen.

30. Aufg. Ein Wasserbehälter erhält a Cubikfuß Wasser aus zwey Röhren, wenn die erste m Stunden, die andere n Stunden läuft; und erhält b Cubikfuß, wenn jene p St. diese q St. läuft; wie viel Wasser giebt jede Röhre in einer Stunde?

Aufl. Die erste Röhre gebe x Cubikfuß, die zweyte y, so ist

$$\text{I.}\quad mx + ny = a$$
$$\text{II.}\quad px + qy = b.$$

Um y herauszuschaffen, multiplicire man I. mit q, und II. mit n, so ist

$$\text{I.}\quad mqx + nqy = qa$$
$$\text{II.}\quad npx + nqy = nb.$$

Durch die Subtraction wird

$$\text{III.}\quad mqx - npx = qa - nb$$

$$x = \frac{qa - nb}{mq - np}.$$

Eben so $$y = \frac{mb - pa}{mq - np}.$$

Wäre $qa < nb$, so ist auch $mq < np$, so wie $mb < pa$, und man hat nur die Vorzeichen im Zähler und Nenner zu ändern.

In dem Falle, daß das Wasser durch die zweyte Röhre hinausfließt, hat man nur y negativ zu setzen, oder das Vorzeichen zu ändern. Es ist alsdann $y = \frac{pa - mb}{mq - np}$. Wüßte man nicht, ob durch die zweyte Röhre das Wasser hinein oder herausliefe, so dürfte man nur den einen oder den andern Fall beliebig voraussetzen. Ist der Werth von y positiv, so ist die Voraussetzung richtig; ist er negativ, so erhellt daraus, daß die entgegengesetzte zu nehmen ist.

Z. B. $m = 2$; $n = 3$; $p = 4$; $q = 5$; $a = 5$; $b = 35$, so ist, wenn die Rechnung nach dem ersten Falle gemacht wird, $x = 40$; $y = -25$. Durch die zweyte Röhre fließt das Wasser nicht hinein, sondern hinaus.

31. Aufg. Es sey I. $x + y = a$; II. $x + z = b$; III. $y + z = c$, man sucht die Größen x, y, z.

Aufl. Weil $2x + 2y + 2z = a + b + c$,

so ist $2x = a + b - c$

$2y = a - b + c$

$2z = b + c - a$.

32. Das allgemeine Verfahren, wenn drey oder mehr Gleichungen vom ersten Grade mit eben so vielen unbekannten Größen gegeben werden, ist in dem Artikel, Elimination, anzutreffen.

Mehrere Exempel suche man in den Lehrbüchern, besonders in Saundersons Algebra (Englisch, 1740, 2 Bände in 4. französisch, 1756), und in L'Huiliers Algebra, 1799 und 1801. 2 Bde. in 8.

II. Quadratische Gleichungen.

Alle Fragen, wodurch man auf quadratische Gleichungen geführt wird, lassen sich auf folgende beide bringen.

33. Aufg. Es ist gegeben die Summe, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn p und q, jene die größere, so daß $p > \frac{1}{2}a$, also $q < \frac{1}{2}a$. Es ist

$$\text{I. } p + q = a; \quad \text{II. } pq = b.$$

Die Theile der erstern Gleichung multiplicire man mit p, so ist

$$pp + pq = ap, \text{ das ist}$$

$$pp - ap + b = 0.$$

Man addire auf beiden Seiten die bekannte Größe, $\frac{1}{4}aa - b$, so ist

$$pp - ap + \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa - b,$$

also $p - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

und $p = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Für die zweyte der gesuchten Größen, q, ist ebenfalls die Gleichung

$$qq - aq + b = 0,$$

und $qq - aq + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - b$.

Da aber $q < \frac{1}{2}a$, so ist

$$\frac{1}{2}a - q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)},$$

und $q = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Bezeichnet man jede der beiden Größen durch x, so ist

$$xx - ax + b = o,$$

und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Hieraus sieht man, woher die Gleichung, $xx - ax + b = o$, zwey Wurzeln hat. Denn sie ist die Antwort auf eine Frage nach zwey Größen. Die Algebra findet auch ohne Rücksicht auf diese Frage einen doppelten Werth für x. Denn die Quadratwurzel aus $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ ist so gut $x - \frac{1}{2}a$ als $\frac{1}{2}a - x$. Jene giebt

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)},$$

diese $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

34. Aufg. Es ist gegeben der Unterschied, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn p und q, so ist

$$\text{I. } p - q = a \text{ ; II. } pq = b.$$

Wie vorher ist

$$pp - b = ap,$$

und $pp - ap - b = o$.

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa + b$, ist

$$pp - ap + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b.$$

Daher $p - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)}$,

$$p = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)} + \frac{1}{2}a.$$

Ferner ist

$pq - qq = aq$, das ist,

$b - qq = aq$, oder

$$qq + aq - b = o.$$

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa + b$, ist

$$qq + aq + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b,$$

daher $$q + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)},$$

$$q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)} - \frac{1}{2}a.$$

Um die beiden Gleichungen, $pp - ap - b = o$, und $qq + aq - b = o$, durch eine einzige Gleichung, $xx - ax - b = o$, oder auch $xx + ax - b = o$, darzustellen, muß man in jener unter x sowohl p als $-q$, in dieser sowohl q als $-p$ verstehen, so daß die eine Wurzel die eine gesuchte Größe in dem Sinne der Frage, die andere Wurzel aber die andere Größe in dem entgegengesetzten Sinne angebe. Die Wurzeln der Gleichung,

$$xx - ax - b = o,$$

sind solchergestalt

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)};$$

und die Wurzeln der Gleichung,

$$xx + ax - b = o,$$

sind $$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)}.$$

35. Alle Formen einer quadratischen Gleichung sind

1) $xx - ax + b = o$
2) $xx + ax + b = o$
3) $xx - ax - b = o$
4) $xx + ax - b = o$.

Die zweyte entsteht aus der ersten, und diese aus der zweyten, wenn x negativ genommen wird. Man kommt in der Rechnung auf die zweyte Form, wenn man die Relation der Wurzeln x (oder p und q) gegen die gegebenen Größen aus dem Falle der ersten Form herleitet, und beide in einer entgegengesetzten Beziehung gegen die in jener Form nimmt. Die dritte und vierte Form enthalten ebenfalls einerlen Wurzeln, nur in entgegengesetzter Bedeutung. Die Wurzeln in den beiden ersten Formen sind gleichnamig, in den andern beiden ungleichnamig oder sich

entgegengesetzt. (Vergl. Anwendung der Geometrie auf die Algebra, I. V.)

36. Es sind also zwey Hauptformen der quadratischen Gleichungen.

$$\text{I.}\quad xx \mp ax + b = 0,$$
$$\text{II.}\quad xx \mp ax - b = 0.$$

Beide unterscheiden sich darin wesentlich, daß die erste unmögliche Wurzeln enthalten kann. Denn der Unterschied der gesuchten Größen sey $= u$, so sind sie (21.) eine $= \frac{1}{2}(a + u)$, die andere $= \frac{1}{2}(a - u)$. Also ihr Product $b = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}uu$, so daß nothwendig $b < \frac{1}{4}aa$ ist. Die Nichterfüllung dieser nothwendigen Bedingung macht die Auflösung unmöglich.

Z. B. $xx - 10x + 24 = 0$

hat zwey mögliche Wurzeln $+6$ und $+4$,

aber $xx - 10x + 26 = 0$

hat keine mögliche Wurzeln.

37. Wenn man unter der Summe zweyer Größen auch ihren Unterschied versteht, und das Vorzeichen ihres Products gehörig bestimmt, so begreift die Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, alle vier Formen, und die Aufgabe in (33.) alle Fälle, welche auf eine quadratische Gleichung führen. Jene Form ist zur Repräsentantinn aller sehr gut geeignet, da ihre beiden Wurzeln gleichnamig sind.

38. Da für die Form $xx - ax + b = 0$ die beiden Wurzeln sind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$, oder $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$, so kann man diese Auflösung auch auf die andern Formen mit gehöriger Abänderung der Vorzeichen anwenden.

Den Wurzeln kann man auch folgende Formen geben, $\frac{b}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$, und $\frac{b}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$. Diese entstehen aus den Formen $\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$

durch die Multiplication und Division mit einer und derselben Größe, $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(aa-4b)}$. Sie sind zuweilen bequemer als die erstern.

39. In allen vier Formen sind so viele Folgen ungleichnamiger Vorzeichen als positive Wurzeln, und so viele Folgen gleichnamiger als negative Wurzeln, wenn nämlich noch dem ersten Gliede das Zeichen $+$ vorgesetzt wird, und beide Wurzeln möglich sind.

40. In allen vier Formen ist die Summe der beiden den Wurzeln entgegengesetzten Größen gleich dem Coefficienten von x in Verbindung mit seinem Vorzeichen, und das Product derselben gleich dem gegebenen Gliede in der Gleichung, auch in Verbindung mit seinem Vorzeichen. Das erste Glied, xx, habe den Coefficienten $+1$.

41. Wenn $4b > aa$ ist, so sind beide Wurzeln der Gleichung zwar unmöglich (36.) allein die Summe derselben und ihr Product sind dennoch mögliche Größen. In der Summe hebt sich das unmögliche eben so wie das mögliche irrationale. In dem Producte der unmöglichen Wurzeln geschieht dasselbe, und das Product von $+\sqrt{(aa-4b)}$ in $-\sqrt{(aa-4b)}$ ist die mögliche Größe, $-(aa-4b)$, es mag aa größer oder kleiner als $4b$ seyn.

42. Der Satz in (40.) gilt also auch, wenn die Wurzeln unmögliche Werthe haben, nämlich in dem Falle, da $b > \frac{1}{4}aa$ ist. Um dem Satze die völligste Ausdehnung zu geben, werden die unmöglichen Wurzeln, wenn sie gleich nichts weiter als Bezeichnungen sind, mit unter die Wurzeln aufgenommen. Ihre Form ist $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, und es ist, wenn sie die Wurzeln der Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, sind, $\alpha = \frac{1}{2}a$; $\beta^2 = b - \frac{1}{4}aa$. Der Theil $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ der Wurzel x ist $\sqrt{(b - \frac{1}{4}aa)}\,(-1) = \sqrt{\beta^2(-1)} = \beta\sqrt{-1}$.

43. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - ax + b = c$, seyn p, q, es ist

$$xx - ax + b = (x-p)\,(x-q).$$

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$P = xx - px + pq$$
$$- qx$$

Da $p + q = a$, und $pq = b$ ist, so erhellt der Satz.

44. Um eine dreytheilige Größe, wie $xx - ax + b$, in zwey Factoren zu zerfällen, suche man die Wurzeln, p, q, der Gleichung, $xx - ax + b = 0$, so ist $xx - ax + b = (x - p)(x - q)$, was man auch für x setzen mag. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, so läßt sich das Trinomium nur der Form nach in Factoren zerlegen

Exempel. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - 12x + 35 = 0$, sind $+5$ und $+7$, also ist

$$xx - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7).$$

Die Wurzeln der Gleichung $xx - 5x - 84 = 0$ sind $+12$ und -7, also ist $xx - 5x - 84 = (x - 12)(x + 7)$. So auch ist $3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (3x^2 - a^2)(x^2 - 3a^2)$. Denn die Gleichung, $x^4 - \frac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = 0$, hat die Wurzeln, $x^2 = \frac{5}{3}a^2 \pm \sqrt{(\frac{25}{9}a^4 - a^4)} = \frac{5}{3}a^2 \pm \frac{4}{3}a^2$. Also ist

$$x^4 - \frac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = (x^2 - 3a^2)(x^2 - \frac{1}{3}a^2),$$

und daher

$$3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (x^2 - 3a^2)(3x^2 - a^2)$$
$$= (3a^2 - x^2)(a^2 - 3x^2).$$

45. Das Aggregat der Glieder der Gleichung, ihr Werth, ist negativ, wenn der Werth von x zwischen den beiden möglichen Wurzeln liegt; positiv, wenn er jenseits der einen wie der andern genommen wird. Denn das Product $(x - p)(x - q)$, oder $(p - x)(q - x)$, hat in dem erstern Falle ungleichnamige Factoren, und ist dadurch negativ. In dem andern Falle ist das Product positiv.

46. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, so ist ihr Werth immer positiv. Denn xx kann immer so groß genommen werden, daß es größer ist, als die beiden andern Glieder zusammen, wenn sie auch beide das

Vorzeichen — erhalten. Könnte nun der Werth der Gleichung auch negativ seyn, so müßte zwischen den positiven Werthen und dem negativen ein Werth $= 0$ fallen, die Gleichung also mögliche Wurzeln haben.

47. Hat die Gleichung zwey gleiche mögliche Wurzeln, so wird ihr Werth für diese $= 0$, ist aber für alle andere Werthe von x positiv. Dieser Fall macht den Übergang von der Möglichkeit der Wurzeln zu ihrer Unmöglichkeit. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

Beyspiele einiger Aufgaben.

48. Aufg. Es ist gegeben $x + y = a$, und $xx + yy = bb$, die Zahlen x, y, zu finden.

Aufl. Es ist $xx + 2xy + yy = aa$, also $2xy = aa - bb$. Da nun die Summe und das Product gegeben sind, so ist, wenn x jede der beiden Größen bezeichnet,

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}(aa - bb))}$$
$$= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{4}aa)}.$$

Es muß $bb >$ oder $= \tfrac{1}{2}aa$ seyn, wenn die Auflösung möglich seyn soll.

49. Aufg. Es ist gegeben die Summe der Quadrate zweyer Größen, und ihr Product, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey $xx + yy = aa$; $xy = b$, so ist $xx + 2xy + yy = aa + 2b$, und $xx - 2xy + yy = aa - 2b$. Also $x + y = \sqrt{(aa + 2b)}$, und $x - y = \sqrt{(aa - 2b)}$. Folglich

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}.$$

Oder da $xxyy = bb$, so ist zufolge (33.)

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)}$$
$$yy = \tfrac{1}{2}aa - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)},$$

50. Aufg. Es ist gegeben $x + y = a$, und $x^3 + y^3 = b^3$, die Größen x, y zu finden.

Aufl. Man setze, zur Abänderung der Auflösungsart, $x - y = u$, so ist

$$x = \tfrac{1}{2}(a + u), \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(a - u),$$

also

$$x^3 = \tfrac{1}{8}(a^3 + 3a^2u + 3au^2 + u^3),$$
$$y^3 = \tfrac{1}{8}(a^3 - 3a^2u + 3au^2 - u^3).$$

Daher

$$b^3 = \tfrac{1}{4}(a^3 + 3au^2),$$
$$u^2 = \frac{4b^3 - a^3}{3a},$$

und die beiden Zahlen $= \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}}$.

Es muß $4b^3 >$ oder $= a^3$ seyn.

51. Aufg. Es ist gegeben die Summe a dreyer Zahlen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe b^2 ihrer Quadrate; die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn x, y, z, so ist

I. $x + y + z = a$

II. $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

III. $xz = y^2$.

Die erste Gleichung quadrirt, giebt

IV. $x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = a^2$.

Hieraus entsteht durch Verbindung mit der Gleichung II.

V. $2xy + 2xz + 2yz = a^2 - b^2$.

Aus dieser durch Verbindung mit III.

VI. $2xy + 2y^2 + 2yz = a^2 - b^2$

oder VI. $2y(x + y + z) = a^2 - b^2$.

Hieraus vermittelst I.

VII. $2ay = a^2 - b^2$,

und $y = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$.

Da $x + z = a - y$, so ist

$$x + z = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Auch ist $$xz = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Demnach ist Summe und Product der Größen x und z gegeben. Jene sey $= A$; dieses $= B^2$, so ist (33.)

$$x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B^2)},$$

oder $$x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}A + B)(\tfrac{1}{2}A - B)}.$$

Nun ist $A = \frac{a^2 + b^2}{2a}$; $B = \frac{a^2 - b^2}{2a}$,

also $\frac{1}{2}A + B = \frac{3a^2 - b^2}{4a}$; $\frac{1}{2}A - B = \frac{3b^2 - a^2}{4a}$

und $$x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4a}.$$

wenn x jedes der beiden äußern Glieder der Progression bedeutet. Damit die Aufgabe möglich sey, muß seyn $b^2 >$ oder $= \frac{1}{3}a^2$ und $b^2 <$ oder $= 3a^2$.

Zweyte Auflösung. Man nenne das erste Glied der Progression x, den Exponenten u, so ist

I. $x(1 + u + u^2) = a$

II. $x^2(1 + u^2 + u^4) = b^2$.

Nun ist

III. $x^2(1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4) = a^2$

IV. $2x^2(1 + u + 2u^2 + u^3 + u^4) = a^2 + b^2$

oder

IV. $2x^2(1 + u^2)(1 + u + u^2) = a^2 + b^2$

V. $2x^2(u + u^2 + u^3) = a^2 - b^2$

oder

V. $2x^2u(1 + u + u^2) = a^2 - b^2$

VI. $\frac{1 + u^2}{u} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

Man setze $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = c$, so ist

VII. $u^2 - cu + 1 = 0$

also $u = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - 1)}$

Der Exponent einer geometrischen Reihe hat immer einen gedoppelten Werth, da die Reihe sowohl steigend als fallend genommen werden kann. Das Product beider Werthe ist $= 1$, daher der gegebene Terminus der Gleichung $= + 1$ ist.

52. Aufg. Es ist gegeben die Summe $x + y = a$, und $x^4 + y^4 = b^4$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es ist $(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4$; also $a^4 - 4a^2xy + 2x^2y^2 = b^4$. Solchergestalt ist das Product xy durch eine quadratische Gleichung gegeben. Nachdem es hieraus gefunden ist, werden x und y aus ihrer Summe und ihrem Producte bestimmt.

53. Aufg. Es ist gegeben die Summe $x + y = a$, und $x^5 + y^5 = b^5$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es ist $(x + y)^5 - 5xy(x + y)^3 + 5x^2y^2(x + y) = x^5 + y^5$; also ist $a^5 - 5a^3xy + 5ax^2y^2 = b^5$, und die fernere Auflösung ist wie in (52).

III. Cubische Gleichungen.

Die Aufgaben, welche auf cubische Gleichungen führen, lassen sich alle auf folgende drey bringen.

54. Aufg. I. Es ist gegeben die Summe a dreyer Größen, die Summe b der Producte je zweyer, und das Product c aller drey; die Gleichungen für diese Größen zu finden.

Aufl. Man nenne die gesuchten Größen, p, q, r, so ist

I. $p + q + r = a$. II. $pq + pr + qr = b$.
III. $pqr = c$.

Man setze $q + r = \alpha$; $qr = \beta$, so ist

I. $p + \alpha = a$ oder $p^3 + p^2\alpha = ap^2$
II. $p\alpha + \beta = b$ = $p^2\alpha + p\beta = bp$
III. $p\beta = c$ = $p\beta = c$.

Aus diesen Gleichungen folgt sogleich unmittelbar,

$$p^3 = ap^2 - bp + c,$$

oder $$p^3 - ap^2 + bp - c = 0.$$

Die beiden andern Größen werden durch völlig ähnliche Gleichungen gefunden. Bezeichnet man jede derselben durch x, so ist

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

die Gleichung, welche die Relation jeder der drey Größen zu den gegebenen enthält.

Die Symbole, a, b, c, p, q, r, bedeuten hier und in den folgenden beiden Aufgaben bloß Quantität, oder positive Größen.

55. Aufg. 2. Es sey I. $p + q - r = a$; II. $pq - pr - qr = \pm b$; III. $pqr = c$, die Gleichungen für die Größen p, q, r, zu finden.

Aufl. Es sey $q - r = \alpha$; $qr = \beta$, so ist

I. $p + \alpha = a$ oder $p^3 + p^2\alpha = ap^2$
II. $p\alpha - \beta = \pm b$ = $p^2\alpha - p\beta = \pm pb$
III. $p\beta = c$ = $p\beta = c$.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$p^3 = ap^2 \mp bp - c,$$

oder $$p^3 - ap^2 \pm bp + c = 0.$$

Und eben so

$$q^3 - aq^2 \pm bq + c = 0.$$

Allein für r erhält man die Gleichung,

$$r^3 + ar^2 \pm br - c = 0.$$

56. Aufg. 3. Es sey I. $p - q - r = a$; II. $pq + pr - qr = b$; III. $pqr = c$: die Gleichungen für p, q, r zu finden.

Aufl. Durch dasselbe Verfahren wie vorher ist

$$p^3 - ap^2 - bp - c = 0$$
$$q^3 + aq^2 - bq + c = 0$$
$$r^3 + ar^2 - br + c = 0.$$

Die Größe b ist positiv, weil $p(q + r) > qr$ ist, da $p > q + r$ seyn soll. Wäre $p < q + r$, so gehörte dieser Fall zu der zweyten Aufgabe.

57. Man bezeichne überhaupt jede der Größen, $\pm p$; $\pm q$; $\pm r$, durch x, so sind die Gleichungen, worauf die obigen Aufgaben führen, folgende:

1) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$
2) $x^3 - ax^2 \pm bx + c = 0$
3) $x^3 + ax^2 \pm bx - c = 0$
4) $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$
5) $x^3 + ax^2 - bx + c = 0.$

Dazu nehme man noch die Gleichung,

6) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$

so hat man alle Fälle von Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen. Die sechste Gleichung ist bloß darin von der ersten verschieden, daß ihre Wurzeln in einer entgegengesetzten Beziehung auf die Wurzeln der ersten Gleichung genommen werden, also alle negativ sind, wie bey den quadratischen Gleichungen (35. nr 1. 2.). Die Gleichungen 1) und 6) haben drey gleichnamige, aber entgegengesetzte Wurzeln; die übrigen ungleichnamige. Die Wurzeln von 2) sind denen von 3) gleich, aber entgegengesetzt; die von 4) sind in Absicht auf die von 5) eben so beschaffen.

Die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, mit drey gleichnamigen positiven Wurzeln begreift alle übrigen, wenn bey den Coefficienten und Wurzeln auch eine negative Bedeutung zugelassen wird. Wegen der Gleichförmigkeit ihrer Wurzeln soll sie überhaupt die Repräsentantinn aller der andern seyn.

58. Wenn alle drey Wurzeln mögliche Größen sind, so hat eine cubische Gleichung so viele positive Wur-

zeln als Abwechslungen der Vorzeichen $+ -$ oder $- +$ zweyer nächsten Glieder sich finden, und so viele negative Wurzeln, als Folgen gleicher Vorzeichen $+ +$ oder $- -$ vorhanden sind. Zum Vorzeichen des ersten Gliedes ist $+$ zu nehmen.

Die Gleichung 1) in (57.) hat drey positive Wurzeln; die 2) hat zwey positive Wurzeln, $+p$, $+q$ und eine negative, $-r$; die 3) hat eine positive $+r$, und zwey negative, $-p$, $-q$ In letztern beiden kann der Coefficient von x das eine oder das andere Vorzeichen haben, ohne daß dadurch die Anzahl der Abwechslungen und Folgen geändert wird. Die Gleichung 4) hat eine positive Wurzel, $+p$, und zwey negative, $-q$, $-r$; die 5) hat zwey positive, $+q$, $+r$, und eine negative, $-p$. Die 6) hat lauter negative Wurzeln. Allen diesen Beschaffenheiten der Wurzeln ist die Anzahl der Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen gemäß, wie es angegeben ist. Ist ein Coefficient $= 0$, so gehören ihm beide Vorzeichen zu.

Der Satz muß auf mögliche Wurzeln eingeschränkt werden, weil die Beziehung des entgegengesezten auf unmögliche Wurzeln nicht anwendbar ist.

59. Ist $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ eine gegebene Gleichung, so sind ihre Wurzeln die drey Größen, p, q, r, welche folgenden drey Gleichungen Genüge thun: I. $p + q + r = a$; II. $pq + pr + qr = b$; III. $pqr = c$. Denn die Gleichung, welche für jede dieser drey Größen aus diesen drey Gleichungen hergeleitet wird, ist identisch mit der vorgegebenen. Durch gehörige Veränderung der Vorzeichen von p, q, r, wird jede der andern möglichen Formen erhalten.

Da die drey Coefficienten einer cubischen Gleichung nicht mehr als drey Bedingungen hergeben, so können keine andern Wurzeln Statt haben, als diejenigen, die durch die drey angeführten Gleichungen bestimmt werden.

60. Wenn statt der Wurzeln einer cubischen Gleichung die ihnen entgegengesetzten gleichen genommen werden,

so ist der Coefficient des zweyten Gliedes in Verbindung mit dem Vorzeichen die Summe dieser Größen; eben so der Coefficient des dritten Gliedes die Summe der Producte je zweyer, und das dritte Glied das Product aller drey.

61. Die Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, habe die Wurzeln, p, q, r, es ist

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - p)(x - q)(x - r).$$

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$\begin{aligned} P = x^3 &- px^2 + pqx - pqr \\ &- qx^2 + prx \\ &- rx^2 + qrx \end{aligned}$$

Die Coefficienten von den Potenzen der Größe x in dem Producte kommen mit den Coefficienten in der Gleichung überein (59.), also ist das Aggregat der Glieder in der Gleichung, oder ihr Werth gleich dem Producte P, was man auch für x setzen mag. Beides, das Aggregat und das Product, wird $= 0$, wenn für x eine der Wurzeln gesetzt wird.

62. Zwey der durch p, q, r, bezeichneten Wurzeln können unmöglich seyn. Denn, wenn man eine derselben als möglich und bekannt annimmt, so ist von den beiden andern die Summe oder der Unterschied und das Product gegeben. Ist es die Summe, welche gegeben wird, so muß noch eine Bedingung erfüllt werden, zufolge (36).

63. Eine der Wurzeln ist immer möglich. Denn man kann für x einen so großen positiven Werth setzen, daß x^3 allein größer ist, als alle mit — begleiteten Glieder, so daß dadurch der Werth der Gleichung positiv wird. Man kann aber auch für x einen so großen negativen Werth setzen, daß dadurch x^3 allein alle Größen zusammen übertrifft, die das Vorzeichen + erhalten, wodurch folglich der Werth der Gleichung negativ wird. Zwischen beiden Werthen von x muß es einen geben, für welchen die mit entgegengesetzten Vorzeichen begleiteten Glieder eine gleiche Summe ausmachen, also der Werth der Gleichung $= 0$

wird. Dieser Werth von x ist eine Wurzel der Gleichung. (S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.)

64. In dem Producte $(x - p)(x - q)(x - r) = P$ bedeute p eine mögliche Größe, q und r mögen mögliche oder unmögliche seyn. Man gebe dem Producte die Form $P = (x - p)(x^2 - (q + r)x + qr)$, und setze $x^2 - (q + r)x + qr = 0$. Hat diese quadratische Gleichung zwey mögliche Wurzeln, so hat P drey mögliche einfache Factoren, und die cubische Gleichung, deren Werth P ist, hat drey mögliche Wurzeln. Hat die quadratische Gleichung keine mögliche Wurzeln, so hat die cubische Gleichung nur eine mögliche Wurzel. Dieses ist der Fall, wenn $(q + r)^2 < 4qr$ ist (36.).

65. Kann der Werth von p vollständig durch die Coefficienten der Gleichung angegeben werden, so wird durch die Division des Aggregats ihrer Glieder der quadratische Factor gefunden. Dieser $= 0$ gesetzt, giebt die beiden Wurzeln q und r, entweder beide als mögliche, oder beide als unmögliche Größen.

66. Ohne darauf zu sehen, ob der quadratische Factor gefunden werden kann oder nicht, setze man denselben im allgemeinen $= x^2 - \alpha x + \beta$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ seyn unmögliche, $q = m + n\sqrt{-1}$; $r = m - n\sqrt{-1}$, nach (41.), so ist $q + r = 2m$; $qr = mm + nn$. Setzt man in den Gleichungen der ersten Aufgabe für q und r diese Werthe, so wird eben die Gleichung für p erhalten, als wenn man die einfachen Zeichen, q, r, oder die möglichen Werthe, $m \pm n$, genommen hätte, da die erste Potenz von n aus der Rechnung herausgeht. Daher gilt der Satz in (59.) auch für den Fall unmöglicher Wurzeln.

67. Man setze nun in der cubischen Gleichung statt der Wurzel p eine der beiden andern beiden Wurzeln, q, so daß $q^3 - aq^2 + bq - c = 0$ sey. In dem Falle, daß $q = m \pm n\sqrt{-1}$ ist, hebt sich alles unmögliche gegen einander auf, eben so wie alle Glieder, die n und n^3 enthalten, wenn $q = m \pm n$, gesetzt wird.

68. Die Auflösung der cubischen Gleichungen zu erleichtern, muß das zweyte Glied weggeschafft werden. Man setze $x = u + \frac{1}{3}a$, so wird aus der Gleichung, $x^3 \quad a^2 + bx - c = 0$, die transformirte

$$u^3 - (\tfrac{1}{3}a^2 - b)\,u - (\tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c) = 0.$$

69 Die Gleichung $x^3 + bx \pm c = 0$ hat zwey unmögliche Wurzeln.

Diese Gleichung entsteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen sind I. $p + q - r = 0$. II. $pq - pr - qr = +b$. Die erste giebt $p + q = r$, also die zweyte, $pq = r^2 + b$. Daher ist $pq > r^2$. Wenn aber p und q mögliche Größen sind, so ist $pq < \frac{1}{4}(p + q)^2$ zufolge (36.), also $pq < r^2$. Wegen dieses Widerspruchs sind zwey Wurzeln unmöglich.

Man setze $p = m + n\sqrt{-1}$, und $q = m - n\sqrt{-1}$, so ist $p + q = 2m$, und $pq = m^2 + n^2$, so daß nun $pq > m^2$ oder $pq > \frac{1}{4}(p + q)^2$.

Die dritte Wurzel r ist möglich, weil eine cubische Gleichung wenigstens eine mögliche Wurzel hat. Es sind $p + q$ und pq mögliche Größen.

70. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$; zwey unmögliche, wenn $4b^3 = 27c^2$; und zwey gleiche, wenn $4b^3 = 27c^2$ ist.

Diese Gleichung entsteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen sind: I. $p + q - r = 0$; II. $pr + qr - pq = b$; III. $pqr = c$. Demnach ist $p + q = r$, und $r^2 = b + pq$. Es sey erstlich $pq < \frac{1}{4}r^2$, so ist $r^2 < b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 < b$. Ferner ist $pq = \frac{c}{r}$, also $\frac{1}{4}r^2 > \frac{c}{r}$, und $r^3 > 4c$. Die erstere Formel der Ungleichheit giebt $\frac{64}{27}b^3 > r^6$, die letztere giebt $r^6 > 16c^2$, also ist $\frac{64}{27}b^3 > 16c^2$, das ist $4b^3 > 27c^2$.

Es sey zweytens $pq > \frac{1}{4}r^2$, so ist $r^2 > b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 > b$, also $r^6 > \frac{64}{27}b^3$. Ferner, da $pq = \frac{c}{r}$

ist, so ist $\frac{1}{4}r^2 < \frac{c}{r}$, oder $r^3 < 4c$, und $r^6 < 16c^2$. Also ist $\frac{64}{27}b^3 < 16c^2$, oder $4b^3 < 27c^2$.

In dem erstern Falle sind p und q mögliche Größen, also ist auch r möglich. In dem andern Falle sind p und q unmöglich. Ist nun $4b^3 > 27c^2$, so sind alle drey Wurzeln möglich, weil, wenn zwey unmöglich wären, $4b^3 < 27c^2$ seyn müßte. Eben so folgt aus der Ungleichheit $4b^3 < 27c^2$, daß zwey unmögliche Wurzeln vorhanden sind.

Es sey drittens $pq = \frac{1}{4}r^2$, da $p + q = r$ ist, und $p^2 + 2pq + q^2 = r^2$, so ist $p^2 - 2pq + q^2 = 0$, also $p = q$, und $p, = \frac{1}{2}r$. Daraus folgt $3p^2 = b$, und $2p^3 = c$, und hieraus $4b^3 = 27c^2$. Umgekehrt ist $p = q$, wenn $4b^3 = 27c^2$ ist. Denn wenn p und q ungleich wären, so wären auch pq und $\frac{1}{4}r^2$ ungleich, und daher auch $4b^3$ und $27c^2$.

71. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ kann auch aus dem Falle in der dritten Aufgabe (56.) entstehen, wenn I $p - q - r = 0$; II $pq + pr - qr = b$; III $pqr = c$ ist. Die Deduction des Satzes bleibt dieselbe, wenn q und r statt p und q, so wie p statt r gesetzt werden.

72. Aufg. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, zu finden.

Aufl. Man setze $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{27}b^3 = A^2$, so ist $x = \sqrt[3]{(A + \frac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \frac{1}{2}c)}$.

Bew. Da $x^3 = c - bx$ ist, so setze man x aus zwey noch unbestimmten Stücken zusammen, um den Cubus des Aggregats mit $c - bx$ zu vergleichen. Es sey demnach $x = y - z$. Also

$x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$, oder

$x^3 = y^3 - 3yz(y - z) - z^3 = y^3 - 3yzx - z^3$

Da nun auch ist $x^3 = c - bx$, so setze man $y^3 - z^3 = c$, und $3yz = b$, indem hier die zwey unbestimmten

Größen zwey Bedingungen zu ihrer Bestimmung zu machen gestatten. Hier ist der Unterschied zweyer Größen, $y^3 - z^3 = c$, und ihr Product, $y^3 z^3 = \frac{1}{27} b^3$, gegeben. Daher ist (34.)

$$y^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} + \tfrac{1}{2}c$$
$$z^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c.$$

Hieraus folgt der Satz mit der darin gebrauchten Substitution.

73. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, zu finden, wenn nur eine mögliche vorhanden ist.

Aufl. Man setze $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3 = A^2$, so ist $x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)}$.

Bew. Man mache $x = y + z$, so ist $x^3 = y^3 + z^3 + 3yzx$. Aus der gegebenen Gleichung ist $x^3 = c + bx$. Folglich $y^3 + z^3 = c$, und $ayz = b$. Hier ist die Summe $y^3 + z^3 = c$, und das Product $y^3 z^3 = \frac{1}{27} b^3$ gegeben, also ist nach (II. 1)

$$y^3 = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{27}b^3)}$$
$$z^3 = \tfrac{1}{2}c - \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{27}b^3)}.$$

Hat c in den beiden Gleichungen (72. 73.) das Vorzeichen +, so wird in den Werthen von x die Größe c entgegengesetzt genommen.

74. Die Formeln für x in beiden Gleichungen sind dieselben bis auf das Vorzeichen von b^3, welches mit dem von b in der Gleichung übereinkommt. Die Regel, welche in diesen Formeln enthalten ist, heißt Cardans Regel, s. Algebra, Th. I. S. 36.

75. Exempel. Es sey $x^3 - 13,3592x - 24,6377 = 0$. (Die Gleichung kommt bey der Auflösung einer astronomischen Aufgabe über den Abstand des Uranus von der Sonne vor, astronom. Jahrbuch 1782. S. 197.). Hier ist nach (73.) $b = 13,3592$; $c = 24,6377$, also

$$\tfrac{1}{4}c^2 = 151,7540$$
$$\tfrac{1}{27}b^3 = 88,3034$$

$$A^2 = 63,4506$$
$$A = 7,96559$$
$$\tfrac{1}{2}c + A = 20,28444$$
$$\tfrac{1}{2}c - A = 4,35326$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} = 2,72722$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)} = 1,63282$$
$$x = 4,36004$$

76. Wenn in der Gleichung, $x^3 - bx \pm c = 0$, ist $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$, so wird die Quadratwurzel aus $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3$ unmöglich, obgleich in diesem Falle die Gleichung drey mögliche Wurzeln hat. Es entsteht daher eine Schwierigkeit wegen der Anwendung der Cardanischen Regel auf diesen Fall, der daher auch casus irreducibilis heißt. Allein das mögliche ist hier nur in einer unmöglichen Hülle versteckt. Die Cubikwurzel aus einem Binomium von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ kann vermittelst des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten durch eine ins Unendliche fortlaufende Reihe dargestellt werden. In den Reihen für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ und $\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ bekommen die unmöglichen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen, und heben sich in der Summe beider Reihen einander auf. Die drey Wurzeln entstehen daher, daß die Cubikwurzel aus einer zweytheiligen unmöglichen Größe drey unmögliche Werthe hat; daher für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ neun Combinationen möglich sind, unter welchen sich drey finden, die mögliche Größen geben. Diese sind die drey möglichen Wurzeln der cubischen Gleichung, s. Cardans Regel, II.

77. Die drey möglichen Wurzeln einer cubischen Gleichung lassen sich algebraisch darstellen, aber nur durch Einführung einer Größe, die wiederum durch eine cubische Gleichung gegeben ist. Man setze in der cubischen Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, eine der Wurzeln $= f + g$; die zweyte $= f - g$; so ist die dritte $= -2f$. Nun ist

das Product, $(x-f-g)(x-f+g)(x+2f)=0$, das ist

$$x^3-(3ff+gg)x+2f(ff-gg)=0.$$

Diese Gleichung werde mit einer gegebenen,

$$x^3-bx+c=0,$$

verglichen, so ist

$$3ff+gg=b\,;\ 2f(ff-gg)=c.$$

Es sey $ff-gg=u$, so ist

$$4ff=b+u\,;\ 4gg=b-3u.$$

Also sind die Wurzeln der Gleichung, $x^3-bx+c=0$,

I. $\frac{1}{2}\sqrt{(b+u)}+\frac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$

II $\frac{1}{2}\sqrt{b+u)}-\frac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$

III. $-\sqrt{(b+u)}$.

Die Größe u aber ist die Wurzel der cubischen Gleichung,

$$u^3+bu^2=c^2,$$

da $2f(ff-gg)=c$ ist.

Man setze $u=t-\frac{1}{3}b$, so ist

$$t^3-\frac{1}{3}b^2t+\frac{2}{27}b^3-c^2=0.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4(\frac{1}{3}b^2)^3<27(\frac{2}{27}b^3-c^2)^2$, das ist, wenn $4b^3<27c^2$. In diesem Falle hat die vorgegebene Gleichung auch nur eine mögliche Wurzel, und die Hülfsgleichungen sind unnöthig. In dem entgegengesetzten Falle, da $4b^3>27c^2$ ist, ist bey der Hülfsgleichung dieselbe Schwierigkeit, wie bey der vorgegebenen. Die gefundenen Wurzeln können also nur dienen, wenn das gegebene Glied der Gleichung die Form $u\sqrt{(b+u)}$ hat, oder, wenn die Gleichung $u^3+bu^2-c^2=0$ sich bequemer auflösen läßt, als die vorgegebene, oder statt eines quadratisch irrationalen Werthes von c, einen rationalen c^2 zu setzen. Hat die Gleichung für u drey mögliche Wurzeln, so geben die Formeln für x zwar neun Werthe, von welchen aber nur drey möglich sind.

78. Um f und g durch c und eine neue unbekannte v auszudrücken, setze man $2f(3ff + gg) = v$, so ist $8f^3 = c + v$, also $2f = \sqrt[3]{(c+v)}$. Ferner ist $8fgg = v - 3c$; $4gg = \frac{v - 3c}{\sqrt[3]{(c+v)}}$. Dadurch ist $b = \frac{v}{\sqrt[3]{(c+v)}}$, so daß die Hülfsgleichung ist

$$v^3 - b^3 v - b^3 c = 0.$$

Diese Gleichung hat drey mögliche Wurzeln, wenn die Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$ eben so viele mögliche hat. Sie kann also auch, wie die zuerst gefundene, nur als transformirte Gleichung dienen.

Die beiden Auflösungen, wenn die Coefficienten einer cubischen Gleichung die eine oder die andere hier bestimmte Form haben, sind schon in dem Artikel, Cardans Regel (13.), angeführt.

79. Da der Sinus und der Cosinus eines Winkels aus dem Sinus und Cosinus des dreyfachen Winkels durch eine cubische Gleichung gegeben werden, so kann man diese sehr bequem gebrauchen, um durch die Dreytheilung eines Winkels die cubischen Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln aufzulösen, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. V.

80. Noch eine Methode, cubische Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln für numerische Coefficienten aufzulösen, ist diejenige, die für alle Gleichungen durch Näherung Statt findet, s. unten. IX.

81. Es ist gegeben die Summe zweyer Größen, und die Summe ihrer sechsten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es ist

$$(x+y)^6 - 6xy(x+y)^4 + 9x^2y^2(x+y)^2 - 2x^3y^3 = x^6 + y^6.$$

Setzt man $x + y = a$; $x^6 + y^6 = b$, und $xy = z$, so ist

$$2z^3 - 9a^2z^2 + 6a^4z - a^6 + b^6 = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so wird ferner durch das Product und die Summe jede der beiden Größen gegeben.

82. Es ist gegeben die Summe zweyer Größen und die Summe ihrer siebenten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es ist

$$(x + y)^7 - 7xy(x + y)^5 + 14x^2y^2(x + y)^3$$
$$- 7x^3y^3(x + y) = x^7 + y^7.$$

oder, nach der vorher gebrauchten Bezeichnung,

$$7az^3 - 14a^3z^2 + 7a^5z - a^7 + b^7 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben mit der Summe a die beiden gesuchten Größen.

IV. Biquadratische Gleichungen.

Jede biquadratische Gleichung ist die Auflösung einer von den folgenden vier Aufgaben, in welchen alle Größen absolut, bloß nach ihrer Quantität, genommen werden.

83. Aufgabe I. Es ist gegeben die Summe a von vier Größen; die Summe b der Producte je zweyer von ihnen; die Summe c der Producte je dreyer derselben, und das Product d aller vier, die Gleichungen für jede der vier gesuchten Größen zu finden.

Aufl. Es sey

I. $p + q + r + s = a$

II. $pq + pr + ps + qr + qs + rs = b$

III. $pqr + pqs + prs + qrs = c$

IV. $pqrs = d$.

Man setze

I. $q + r + s = \alpha$

II. $qr + qs + rs = \beta$

III. $qrs = \gamma$,

so ist

1) $p + \alpha = a$ oder $p^4 + p^3\alpha = ap^3$

2) $p\alpha + \beta = b$ = $p^3\alpha + p^2\beta = bp^2$

3) $p\beta + \gamma = c$ = $p^2\beta + p\gamma = cp$

4) $p\gamma = d$ = $p\gamma = d$

Die zweyte und vierte dieser Gleichungen werden von der Summe der beiden andern abgezogen, so entsteht die Gleichung,

$$p^4 = ap^3 - bp^2 + cp - d.$$

Die andern Größen werden durch ganz ähnliche Gleichungen bestimmt. Folglich ist, wenn x jede derselben, bedeutet,

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0.$$

84. Aufg. II. Die Gleichung für die vier Größen zu finden, wenn eine derselben, s, negativ ist.

Aufl. Der Kürze wegen wollen wir nur bemerken, welche Veränderungen in den Vorzeichen der Coefficienten wegen der Veränderung des Vorzeichens von s entstehen.

I. Es werden d und γ negativ. Bleiben a, b, c positiv, so ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx - d = 0.$$

II. Ist c negativ, da a und b positiv bleiben, so ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx - d = 0.$$

III. Es sey a noch positiv, aber b negativ, so ist entweder α oder β negativ, oder beide sind es zugleich. Ist α negativ, so ist es β nothwendig auch. Es ist also zugleich c negativ, und es ist

$$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx - d = 0.$$

IV. Ist a negativ, so sind α und β negativ, folglich

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - d = 0.$$

85. Aufg. III. Es seyn r und s negativ, so bleibt d positiv. Da γ positiv ist, so können α und β nicht beide positiv seyn. Denn daraus würde eine Gleichung wie nach der ersten Aufgabe folgen, welche keine negative Wurzeln haben kann, da für eine negative Wurzel alle Glieder dasselbe Vorzeichen + bekämen.

I. Es sey α positiv, also β negativ. Noch bleibe b positiv, so muß c negativ seyn, aus dem eben angeführten Grunde. Es ist also

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

II. Es bleibe α positiv, aber b sey negativ, so mag c positiv oder negativ seyn. Es ist demnach entweder

$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + d = 0,$$

oder $$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx + d = 0.$$

III, Es sey α negativ. Bleibt a positiv, so muß einer der Coefficienten b oder c, oder beide negativ werden, welches auf eine der obigen drey Gleichungen führt. Es sey also a negativ. Dabey mögen b und c erstlich beide positiv oder negativ seyn. Die Gleichung wird alsdann

entweder $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$

oder $x^4 + ax^2 - bx^2 + cx + d = 0.$

IV. Es sey a negativ und b allein negativ, so ist

$$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx + d = 0.$$

V. Es sey a negativ, so kann c nicht negativ seyn, wenn b positiv bleibt, weil alsdann alle Vorzeichen + würden, und die Gleichung lauter negative Wurzeln hätte.

86. Aufg IV. Es seyn drey Wurzeln p, q, r negativ. Dieser Fall entsteht aus dem in der zweyten Aufgabe, wenn man die Vorzeichen von p, q, r, s daher auch von a und c ändert. Es sind daher die verschiedenen Gleichungen für diesen Fall

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$$
$$x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - d = 0$$

$$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$
$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0.$$

Diese Gleichungen haben dieselben Wurzeln der Größe nach, nur entgegengesetzte mit den Gleichungen für die zweyte Aufgabe.

87. Ein directer Beweis für den ersten Fall in der dritten Aufgabe ist folgender. Die Voraussetzung ist I. $p + q - r - s = a$; II. $pq - pr - ps - qr - qs + rs = b$; III. $-pqr - pqs + prs + qrs = c$; IV. $pqrs = d$. Es sey $p + q > r + s$. so daß a positiv ist; ferner $pq + rs > pr + ps + qr + qs$, oder $pq + rs > (p + q)(r + s)$, so daß auch b positiv ist. Also ist $pqr + r^2 s > (p + q)(r^2 + rs)$, und $pqs + rs^2 > (p + q) rs + s^2$, und addirt, $pqr + pqs + r^2 s + rs^2 > (p + q)(r^2 + 2rs + s^2)$. Es ist $r^2 s + rs^2 = rs(r + s)$, und $rs < (r^2 + s^2)$. Auch ist gesetzt, daß $r + s < p + q$; also ist $rs(r + s) < (r^2 + s^2)(p + q)$ oder $r^2 s + rs^2 < (r^2 + s^2)(p + q)$. Folglich ist $pqr + pqs > 2rs(p + q)$, und noch mehr ist $pqr + pqs > rs(p + q)$. Also ist c nothwendig negativ.

Auf dieselbe Art wird in dem fünften Falle derselben Aufgabe erwiesen, daß c positiv seyn muß.

88. Es erhellt aus dieser Entwickelung der Gleichungen in den verschiedenen Fällen, daß in jeder biquadratischen Gleichung so viele Abwechslungen der Vorzeichen sind, als positive Wurzeln, und so viele Folgen gleichnamiger Vorzeichen als negative Wurzeln vorhanden sind. Doch müssen alle Wurzeln möglich seyn, weil die Bestimmung der Vorzeichen und die Ungleichheit gewisser Zusammensetzungen auf unmögliche Größen nicht anzuwenden ist, bey welchen auch, wie schon oben bemerkt war, die Beziehung des Entgegengesetzten nicht Statt hat.

89. Die biquadratische Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, hat vier Wurzeln p, q, r, s, deren Verhalten gegen die Coefficienten durch die in Aufg. 1. angenommenen Bedingungen ausgedruckt wird. Haben

die Coefficienten, es sey einer oder mehrere, andere Vorzeichen als in dieser Gleichung, so ändern sich dem gemäß die Vorzeichen der Wurzeln. Der Beweis ist wie in (59.)

90. Es ist $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - p)(x - q)(x - r)(x - s)$, welchen Werth man auch für x annimmt. Der Beweis, wie in (61.).

91. Eine biquadratische Gleichung hat entweder vier mögliche Wurzeln, oder zwey, oder gar keine. Denn wenn eine mögliche Wurzel, p, gefunden ist, sie mag rational oder irrational seyn, so läßt sich die Gleichung durch den Factor $x - p$ dividiren, so daß dadurch die höchste Potenz von x in dem Quotienten die dritte wird. Ist p rational, so enthält der Quotient rationale Coefficienten, und kann vollständig gefunden werden; ist p irrational, so sind die Coefficienten auch irrational. Der Quotient ist das Product $(x - q)(x - r)(x - s)$; dieses sey $= x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, so ist $x^4 - ax^3 + bx - cx + d = (x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma)(x - p)$. Das Product wird $= 0$, wenn der erstere Factor $= 0$ wird. Dieses ist immer wenigstens durch einen Werth von x möglich (63.). Hat die Gleichung, $x^3 - \alpha x + \beta x = 0$, drey mögliche Wurzeln, so hat die biquadratische Gleichung vier mögliche; hat jene aber nur eine mögliche Wurzel, q, so sind zwey Wurzeln, r, s, unmöglich; und es ist das Aggregat, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, ein Product aus zwey quadratischen Factoren, $(x^2 - (p + q)x + pq)(x^2 - Ax + B)$, von welchen der zweyte durch keinen möglichen Werth von x null wird. So wie dieser Factor nicht null wird, so kann, nach Beschaffenheit der Coefficienten, a, b, c, d, auch der andere nicht null werden, und alsdann hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln. Die unmöglichen Wurzeln haben die Form $m \mp n\sqrt{-1}$, als die Wurzeln eines quadratischen Factors, der für keinen möglichen Werth von x Null wird (42.)

92. Die Coefficienten in dem cubischen Factor findet man leicht. Es ist (Aufg. I.).

$$\alpha = a - p;\ \beta = b - p\alpha;\ \gamma = c - p\beta.$$

Eben so findet man die Coefficienten des Factors $x^2 - Ax + B$, wenn die in dem andern Factor, $x^2 - (p+q)x + pq$ bekannt geworden sind. Es ist $A = a - (p+q)$, und $B = + \frac{d}{pq}$, wobey man auf die hier angenommenen Vorzeichen, und ihre Abänderungen in jedem Falle wohl achten muß. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ax + B = 0$ sind die beiden andern Wurzeln der biquadratischen Gleichung neben den beiden p und q.

93. Zwey Wurzeln einer biquadratischen Gleichung haben die Form $m + \sqrt{n}$ und $m - \sqrt{n}$ die beiden andern haben eine ähnliche. Dadurch wird in den Coefficienten des Products der zweytheiligen Wurzelfactoren das Irrationale in den Wurzeln, und das Unmögliche, wenn n negativ ist, gehoben.

94. Das zweyte Glied einer biquadratischen Gleichung, $-ax^3$, wegzuschaffen, setze man $x = u + \frac{1}{4}a$, so erhält man eine Gleichung für u, durch deren Auflösung u gefunden wird, welches darauf x giebt. Ist das Vorzeichen des zweyten Gliedes +, so ist $x = u - \frac{1}{4}a$ zu nehmen.

95. Eine biquadratische Gleichung aufzulösen, sind drey vorzügliche Methoden vorhanden, eine von Lodovico Ferrari, die Bombelli bekannt gemacht hat, eine von Descartes, und eine dritte von Euler. Sie folgen hier nach einander.

Lodovico Ferrari (Bombelli's) Verfahren zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

96. Es sey, nach weggeschafftem zweyten Gliede, die Gleichung $x^4 = bx^2 + cx + d$; wo b, c, d auch negativ seyn mögen, und hier nur der Bequemlichkeit wegen gleichnamig gemacht sind. Man suche eine Zahl y von der Beschaffenheit, daß $2x^2y + y^2$ mit dem Gliede auf der rechten Seite der Gleichung ein vollständiges Qua-

drat werde, so wie es $x^4 + 2x^2y + y^2$ ist. Es sey also $(b + 2y)\,x^2 + cx + d + y^2$, das vollständige Quadrat einer zweytheiligen Größe $Ax + B$, so daß $A^2 = b + 2y$; $B^2 = d + y^2$, und $2AB = c$ ist. Daraus folgt $4(b + 2y)(d + y^2) = c^2$, das ist

$$8y^3 + 4by^2 + 8dy + 4bd - c^2 = 0.$$

Man habe nun die Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so sind dadurch erstlich die vorher durch A und B bezeichneten Größen bekannt. Da

$$x^4 + 2x^2y + y^2 = (b + 2y)\,x^2 + cx + d + y^2$$
$$= (\pm Ax \pm B)^2,$$

so ist $\quad x^2 + y = \pm Ax \pm B.$

Aus diesen beiden quadratischen Gleichungen werden nach (38.) die vier Werthe von x gefunden.

Da y drey Werthe hat, die unmöglichen, wenn solche vorhanden sind, mit gerechnet, so haben A^2 und B^2 auch drey Werthe, folglich A und B jedes drey Paar Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen. Hat der Coefficient c in der biquadratischen Gleichung das Vorzeichen +, wie hier gesetzt ist, so bekommen A und B einerley Vorzeichen, hat jener das Vorzeichen —, so erhalten A und B verschiedene. Solchergestalt entstehen durch die drey Werthe von y, und die drey Doppelwerthe von A und B sechs Gleichungen, deren jede durch diese: $x^2 + y = Ax + B$, oder $x^2 - Ax - B + y = 0$ ausgedruckt wird. Jede derselben enthält ein paar Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

97. Um dieses zu begreifen, bemerke man, daß aus den vier Wurzeln, p, q, r, s, dieser Gleichung sechs Verbindungen je zweyer gemacht werden können, nämlich pq, pr, ps, qr, qs, rs. Da x jede dieser Wurzeln bedeuten kann, so sind die beiden Wurzeln der sechs quadratischen Gleichungen in diesen sechs Paaren enthalten. Sind alle vier Wurzeln, p, q, r, s, möglich, so müssen alle Werthe von y, A, B, mögliche Größen seyn, weil das unmögliche sich nicht in beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung heben kann. Sind zwey

derselben unmöglich, so können A und B nur einen möglichen Werth haben, wenn auch alle drey Werthe von y möglich sind. In vier unter den sechs quadratischen Gleichungen ist eine Wurzel möglich, die andere unmöglich, das erstere dadurch, daß sich das unmögliche bey der Entwickelung der Wurzelgrößen hebt, das andere dadurch, daß dieses nicht geschieht. In einer der quadratischen Gleichungen nur sind beide Wurzeln möglich, so wie in einer beide unmöglich. Sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung unmöglich, so kann keine der sechs quadratischen Gleichungen mögliche Wurzeln haben.

98. Exempel I. Es sey

$$x^4 = 220x^2 - 240x - 8064 = 0,$$

so ist $b = +220$; $c = -240$; $d = -8064$, und die Hülfsgleichung

$$8y^3 + 880y^2 - 64512y - 7153920 = 0,$$

oder

$$y^3 + 110y^2 - 8064y - 89420 = 0.$$

Ohne diese Gleichung nach den Regeln der Kunst zu behandeln suche man die positive Wurzel durch Vergleichung je zweyer entgegengesetzten Glieder zu entdecken. Das erste und dritte giebt y nahe $= 90$; das zweyte und vierte ebenfalls. Versucht man $+90$, so ist dies wirklich eine Wurzel. Nun läßt sich die Gleichung durch $y - 90$ dividiren, und der Quotient ist eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln -108 und -92 sind. Die drey Werthe von y sind also, $+90$; -92; -108. Nimmt man $y = +90$, so ist $A^2 = 400$, und $A = \pm 20$. Ferner $B^2 = +36$, und $B = \mp 6$. Zu bemerken ist, daß wegen des negativen Werthes von c die beiden, A, B, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wir bekommen nun wegen der doppelten Werthe von A und B die beiden Gleichungen,

$$x^2 - 20x = -96$$
$$x^2 + 20x = -84,$$

Die Wurzeln der erstern Gleichung sind $+10 \pm 2$; der zweyten, -10 ± 4. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind eben diese, nämlich $+12$; $+8$; -6; -14.

Nimmt man $y = -92$, so entstehen die Gleichungen

$$x^2 - 6x = +72,$$
$$x^2 + 6x = +112,$$

deren erstere die Wurzeln $+12$, -6; die andere die Wurzeln $+8$; -14 hat.

Exempel II. Die vorgegebene Gleichung sey

$$x^4 = 16x + 12.$$

Hier ist $b = 0$; $c = +16$; $d = +12$. Die Hülfsgleichung ist

$$8y^3 + 96y - 256 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel $= +2$. Es ist $A = \pm 2$; $B = \pm 4$, und die beiden quadratischen Gleichungen sind,

$$\text{I. } x^2 - 2x = 2; \quad \text{II. } x^2 + 2x = -6.$$

Die Wurzeln der erstern sind $1 \pm \sqrt{3}$; der zweyten, $-1 \pm \sqrt{-5}$, welche vier Wurzeln der biquadratischen zukommen.

Methode des Descartes.

99. Descartes hat zuerst in seiner Geometrie, 3. Buch, gewiesen, wie eine biquadratische Gleichung in zwey quadratische zerfällt werden könne. Er zeigt aber nicht, wie man die Coefficienten in diesen finde, sondern setzt sie ohne Erläuterung hin. Lambert hat in seinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, 2 Th. Art. VIII. diese Methode vorgetragen, aber den Zusammenhang der Hülfsgleichung mit der gegebenen nicht erklärt, welches ich hier thun werde.

100. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

wo A, B, C auch negativ seyn können, und es zum Theil oder alle sind, wenn x einen positiven Werth hat. Ist $x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$, so müssen a, b, c mögliche Werthe erhalten. Diese sollen nun aus den gegebenen Größen, A, B, C, hergeleitet werden. Das Product entwickelt ist

$$x^4 + (b + c - a^2)\,x^2 + (ac - ab)\,x + bc.$$

Also ist

$$A = b + c - a^2 \;;\quad B = ac - ab\,;$$
$$C = bc.$$

Hier ist $b + c = A + a^2$, und $c - b = \frac{B}{a}$,

also $2c = A + \frac{B}{a} + a^2$, und $2b = A - \frac{B}{a} + a^2$.

Nunmehr ist $4bc$, oder $4C = A^2 - \frac{B^2}{a^2} + 2Aa^2 + a^4$,

oder

$$a^6 + 2Aa^4 + (A^2 - 4C)\,a^2 - B^2 = 0.$$

Dieses ist eine cubische Gleichung für a^2. Sind alle drey Wurzeln möglich, so sind sie, wegen des Gliedes $-B^2$, entweder alle drey, (wenn A negativ und $A^2 > 4C$ ist) oder eine positiv, zufolge (58.). Die Vorzeichen des zweyten und dritten Gliedes mögen auch — seyn. Ist nur eine Wurzel möglich, so ist diese positiv. Denn da der Werth der Gleichung für $a = 0$ ist $-B^2$, und für ein hinlänglich großes positive a positiv wird, so geschieht der Übergang von dem negativen Werthe zum positiven für ein positives aa. In beiden Fällen ist also a eine mögliche Größe, daher auch b und c mögliche Werthe bekommen, und die biquadratische Gleichung läßt sich in zwey quadratische Factoren zerfällen.

101. Die biquadratische Gleichung habe vier mögliche Wurzeln, p, q, r, s, positive oder negative, so hat sie vier mögliche einfache Factoren, $x - p$; $x - q$; $x - r$; $x - s$. Je zwey von diesen geben den einen

quadratischen Factor, und die beiden übrigen den andern, daher hat in dem Factor $x^2 - ax + c$ der Coefficient a einen der sechs Werthe, $p + q$; $p + r$; $p + s$; $q + r$; $q + s$; $r + s$, und es wird für a eine Gleichung vom sechsten Grade gefunden. Weil aber, wegen des fehlenden zweyten Gliedes in der biquadratischen Gleichung, $p + q + r + s = 0$ ist, so sind drey jener Werthe von a den andern gleich und entgegengesetzt, und daher hat a drey positive, und drey eben so große negative Werthe, und aa wird durch eine cubische Gleichung gegeben, die in diesem Falle drey mögliche positive Wurzeln, als Werthe von aa, hat.

102. Die biquadratische Gleichung habe zwey mögliche Wurzeln, p, q, und zwey unmögliche, r, s. Die letztern haben die Form $m + n\sqrt{-1}$ und $m - n\sqrt{-1}$, deren Summe, 2m, möglich ist. Nun sind für a nur zwey mögliche Werthe $p + q$ und $2m = r + s$ vorhanden, da die andern vier Werthe eine unmögliche Größe, $n\sqrt{-1}$, enthalten. Jene beiden Werthe sind gleich und entgegengesetzt. Die cubische Gleichung für aa hat in diesem Falle nur eine mögliche positive Wurzel.

103. Die biquadratische Gleichung habe vier unmögliche Wurzeln. In diesem Falle werden ihre Factoren $x^2 + ax + b$ und $x^2 - ax + c$ durch keinen möglichen Werth von x auf 0 gebracht, oder, die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^2 - ax + c = 0$ haben unmögliche Wurzeln. Die Wurzeln jener bezeichne man durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, die Wurzeln dieser durch $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$. Die Summe derselben ist $= 0$, wie die Summe von vier möglichen Wurzeln, also $\alpha + \gamma = 0$. Nimmt man nun je zwey zusammen, so sind die Combinationen, I. 2α; II. $(\beta + \delta)\sqrt{-1}$; III. $(\beta - \delta)\sqrt{-1}$; IV. $\delta - \beta)\sqrt{-1}$; V. $-(\beta + \delta)\sqrt{-1}$; VI. $2\gamma = 2\alpha$. Dieses sind die sechs Werthe von a. Die Quadrate von I. und VI. sind sich gleich und positiv; die Quadrate von II. und V. sind sich gleich, aber beide negativ; so auch die Quadrate von III. und IV. Die cubische Gleichung für a^2 hat

nun drey mögliche Wurzeln, $4\alpha^2$; $-(\beta+\delta)^2$; $-(\beta-\delta)^2$. Da zwey derselben negativ sind, so hat a nur zwey mögliche, entgegengesetzte, gleiche Werthe.

104. Ist nun a gefunden, so hat man die quadratischen Gleichungen, $x^2 + ax + b = 0$, und $x^2 - ax + c = 0$, aufzulösen, welche die Wurzeln der biquadratischen enthalten. Aus der ersten ist

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)},$$

aus der zweyten

$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - c)}.$$

Es ist $\tfrac{1}{4}a^2 - b = \frac{B}{2a} - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a^2$,

$$\tfrac{1}{4}a^2 - c = -\frac{B}{2a} - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Diese Größen müssen möglich und positiv seyn, wenn x möglich seyn soll.

105. Exempel. Die Gleichung, $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$, aufzulösen.

Die cubische Gleichung ist $a^6 - 440a^4 + 16144a^2 - 57600 = 0$. Man suche die Wurzeln dieser Gleichung durch Vergleichung je zweyer entgegengesetzter Glieder. Erstlich setze man, daß $16144a^2$ etwas größer als 57600 sey, so ist a^2 etwa $+4$. Diesen Werth versucht, findet sich, daß $+4$ eine Wurzel ist. Nun läßt sich die Gleichung durch $a^2 - 4$ dividiren, und dadurch auf eine quadratische herabsetzen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+36$ und $+400$, einerley mit den beiden übrigen Wurzeln der cubischen Gleichung, außer der Wurzel $+4$. Nimmt man $a^2 = 4$, so ist $b = -168$, und $c = -48$, und die beiden quadratischen Gleichungen sind, $x^2 + 2x - 168 = 0$; und $x^2 - 2x - 48 = 0$. Die Wurzeln jener sind $+12$ und -14; die Wurzeln dieser $+8$ und -6. Diese vier Wurzeln sind demnach die Wurzeln der vorgegebenen biquadratischen Gleichung.

Setzt man $aa = +36$, so ist $b = -112$; $c = -72$; $x^2 + 6x - 112 = 0$; und $x^2 - 6x - 72 = 0$. Die Wurzeln der erstern Gleichung sind $+8$ und -14; der zweyten $+12$ und -6.

Setzt man $aa = +400$, so ist $b = +84$; $C = +96$; $x^2 + 20x + 84 = 0$; und $x^2 - 20x + 96 = 0$. Jene Gleichung hat die Wurzeln -6; -14: diese, $+12$; $+8$.

Eulers Auflösung biquadratischer Gleichungen.

106. Euler hat in einer Abhandlung: Conjectatio de formis radicum aequationum, Comm. Petrop vet. T. VI. eine Auflösung biquadratischer Gleichungen gelehrt, die von dem Verfahren bey cubischen Gleichungen hergeleitet ist. Sie besteht darin, die Wurzeln aus drey Stücken, und zwar Quadratwurzeln, zusammen zu setzen. In Eulers Algebra, 2 Th. 1. Abschn. 15. Cap. ist sie auch vorgetragen.

107. Es sey $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo x die Wurzeln der Gleichung bedeutet, und p, q, r, Größen sind, woraus die Coefficienten zusammengesetzt werden sollen, hier aber nicht Wurzeln der Gleichung, wie oben, bedeuten. Es ist

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Man setze $p + q + r = f$, so ist

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr},$$

und quadrirt

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Man setze $pq + pr + qr = g$, und $pqr = h$, so ist

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4g + 8(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{h},$$

oder $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$.

Wird diese Gleichung mit einer gegebenen biquadratischen Gleichung, worin der zweyte Terminus fehlt, verglichen, so werden f, g, h durch die Coefficienten in der-

selben bestimmt; es ist also noch nöthig p, q, r aus f, g, h herzuleiten. Da f die Summe derselben, g die Summe der Binionen, und h das Product aller drey ist, so sind p, q, r die Wurzeln einer cubischen Gleichung, in welcher die Coefficienten f, g, h, sind, nämlich der Gleichung,

$$y^3 - fy^2 + gy - h = 0.$$

Sind nun die Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so werden daraus die Wurzeln der biquadratischen hergeleitet.

108. Es sey die gegebene biquadratische Gleichung

$$x^4 - a^2 - bx + c = 0,$$

wo um der bequemen Vergleichung willen die Vorzeichen dieselben mit denen in der vorher aus der angenommenen Form der Wurzel hergeleiteten Gleichung sind. Man lasse beide Gleichungen dieselben seyn, so ist I. $2f = a$, und $f = \frac{1}{2}a$. II. $8\sqrt{h} = b$, also $h = \frac{1}{64}b^2$. III. $f^2 - 4g = c$, also $g = \frac{1}{4}(f^2 - c)$, oder $g = \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{4}c$. Solchergestalt ist die cubische Hülfsgleichung, $y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}aa - c)y - \frac{1}{64}b^2 = 0$, und es kommt nur darauf an, die Wurzeln derselben zu finden.

109. Da die Wurzeln aus p, q, r sowohl negativ als positiv seyn können, so lassen sich aus $\pm\sqrt{p}$; $\pm\sqrt{q}$; $\pm\sqrt{r}$ acht verschiedene Summen machen, wovon aber in jedem Falle nur vier Statt finden, aus folgendem Grunde. Wenn in der biquadratischen Gleichung der Coefficient von x das Vorzeichen — hat, so ist $\sqrt{h}$ oder $\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}$. positiv, also sind die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \mp \sqrt{r}$. Hat aber derselbe Coefficient das Vorzeichen +, so ist $\sqrt{h}$ negativ, also sind die vier Wurzeln $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$.

Hat die cubische Gleichung drey mögliche positive Wurzeln, so hat die biquadratische vier mögliche Wurzeln. Sind unter den drey möglichen Wurzeln jener negative vorhanden, so sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung unmöglich. Hat die cubische Gleichung unmög-

liche Wurzeln, so hat die biquadratische zwey dergleichen. Denn die einzige mögliche Wurzel, p, der cubischen Gleichung ist positiv, wegen des Gliedes h, welches immer positiv ($=\frac{1}{64}b^2$) ist, nach der schon in (100) gemachten Bemerkung. Also ist $\sqrt{p}$ eine mögliche Größe. Das Unmögliche in der Summe der Wurzeln aus den beiden andern $\pm\sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, hebt sich, aber nicht in dem Unterschiede derselben, $\pm\sqrt{q} \mp \sqrt{r}$, da die Summe $q+r$, eine mögliche Größe ist, aber nicht ihr Unterschied. Daher hat die biquadratische Gleichung zwey mögliche Wurzeln.

110. Exempel. $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$. Hier ist $f = 110$; $h = 900$; $g = 1009$. Die cubische Hülfsgleichung ist

$$y^3 - 110y^2 + 1009y - 900 = 0.$$

Diese hat drey positive Wurzeln, wenn alle möglich sind. Sucht man die kleinste, so giebt die Vergleichung der beiden letzten Terminorum für y nahe $+1$. Versucht man diesen Werth, so ist eine Wurzel $= +1$. Die Summe der beiden übrigen ist $= 109$; ihr Product $= 900$. Diese sind also $\frac{109}{2} \pm \sqrt{\frac{8281}{4}} = \frac{109}{2} \pm \frac{91}{2}$, das ist $+100$ und $+9$. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind, wegen des Vorzeichens $+$ in dem Gliede, $+240x$,

$$+1 + 3 - 10 = -6$$
$$+1 - 3 + 10 = +8$$
$$-1 + 3 + 10 = +12$$
$$-1 - 3 - 10 = -14.$$

Warings Methode zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

111. Waring hat in den Philosophical Transactions, 1779, für die Wurzeln der Gleichungen eine Form angegeben, die er für allgemein hält. Hier folgt

die Anwendung, die er auf biquadratische Gleichungen macht, unabhängig von der allgemeinen Form, mit einigen Zusätzen.

112. Die Wurzel einer solchen Gleichung werde aus drey Stücken zusammengesetzt, nämlich $x = p + q + r$, so ist

$$\begin{aligned} x^4 = \; & p^4 + 4p^3 q + 4p^3 r \\ & + q^4 + 4q^3 p + 4q^3 r \\ & + r^4 + 4r^3 p + 4 r^3 q \\ & + 6 p^2 q^2 + 6p^2 r^2 + 6 q^2 r^2 \\ & + 12 p^2 qr + 12q^2 pr + 12 r^2 pq, \end{aligned}$$

nämlich alle Combinationen mit Wiederholungen aus den drey Größen p, q, r, mit den als Factoren zugefügten Versetzungszahlen. S. Combination (33.), und polynomischer Lehrsatz.

Diese Partialproducte theile man in drey Theile, ein Product A aus $p + q + r$ in drey eintheilige Factoren, ein Product B aus $(p + q + r)^2$ in zwey solche Factoren, und einen Rest C, um x und x^2 in den Werth von x^4 zu bringen. Dieses kann auf mehr als eine Art geschehen. Es sey

$$A = (4p^2 r + 4q^2 r)\,(p + q + r)$$
$$B = (4pq + 2r^2)\,(p + q + r)^2,$$

so ist

$$C = p^4 + q^4 - r^4 + 4pqr^2 - 2p^2 q^2,$$

oder

$$C = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2,$$

und es ist

$$\begin{aligned} x^4 = & (4pq + 2r^2)x^2 + 4r(p^2 + q^2)x \\ & + (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2. \end{aligned}$$

112. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 = ax^2 + bx + c,$$

mit jener Normalgleichung identisch, so ist

$$a = 4pq + 2r^2; \quad b = 4r(p^2 + q^2);$$
$$c = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$c = \frac{b^2}{16r^2} - (2r^2 - \tfrac{1}{2}a)^2,$$

und daraus für r die Gleichung

$$r^6 - \tfrac{1}{2}ar^4 + (\tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}c)\,r^2 - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Die beiden andern Theile, p, q, der Wurzel x haben eine andere Relation zu den gegebenen Größen a, b, c, und müssen daher durch eine andere Gleichung, als die für r, gefunden werden. Sie selbst haben einerley Relation gegen die Coefficienten, a, b, c, und werden daher durch einerley Gleichung gefunden. Zu jedem Werthe von r gehört ein Werth von p und von q. Bezeichnet man diese überhaupt durch y, so wird die Gleichung für y auf den zwölften Grad steigen müssen, um sowohl die sechs Werthe von p als die von q darzustellen.

Ist r gefunden, so werden p und q durch die Gleichungen, $pq = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}r^2$, und $p^2 + q^2 = \frac{b}{4r}$ bestimmt. Es sey, um abzukürzen, $2pq = \alpha$; $p^2 + q^2 = \beta$, so ist

$$p + q = \pm\sqrt{(\beta + \alpha)}$$
$$p - q = \pm\sqrt{(\beta - \alpha)},$$

woraus p und q einzeln bekannt werden.

Zwey gleiche aber entgegengesetzte Werthe von r mit dem zugehörigen Doppelwerthe von p + q verbunden geben die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

114. Exempel. Es sey $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$, so ist die Gleichung für r,

$$r^6 - 110r^4 + 1009r^2 - 900 = 0.$$

Die Werthe von r sind ± 1; ± 9; ± 100. Das erste Paar giebt $p^2 + q^2 = \pm 60$; $2pq = +109$. Also ist $p + q = \pm\sqrt{(\pm 60 + 109)}$, oder $p + q = \pm 13$ und ± 7, und die Wurzeln x sind

$$+7+1=+8 \qquad +13-1=+12$$
$$-7+1=-6 \qquad -13-1=-14.$$

Die andern beiden Werthe von r geben dieselben Wurzeln x.

115. Zu dieser und zugleich zu der Eulerischen Methode diene als Beyspiel noch eine Gleichung mit zwey unmöglichen Wurzeln,

$$x^4+14x^2-40x-19=0.$$

Hieraus entsteht die Hülfsgleichung,

$$r^6+7r^4+17r^2-25=0.$$

Ein Paar Wurzeln dieser Gleichung ist ± 1. Da $a=-14$; $b=+40$, so ist $2pq=-8$; $p^2+q^2=\pm 10$; $p+q=\pm\sqrt{(\pm 10-8)}$, und die vier Werthe von x sind,

$$+\sqrt{2}+1 \;;\; +3\sqrt{-2}-1$$
$$-\sqrt{2}+1 \;;\; -3\sqrt{-2}-1.$$

116. Die Gleichung für r^2 ist dieselbe mit der nach der Eulerischen Auflösung gefundenen für y, wenn man r^2 für y setzt, und das Vorzeichen von c ändert. Denn die Wurzeln jener Gleichung sind die Quadrate von den Theilen, in welche die Wurzeln der biquadratischen zerlegt sind. Aber sie gilt nicht für die andern beiden Theile p, q, der Wurzel x. Die Coefficienten in der biquadratischen Normalgleichung sind nach der Eulerischen Normalgleichung anders zusammen gesetzt, als nach der Waringschen.

117. Die Zerfällung von $x^4=(p+q+r)^4$ läßt sich auch folgendergestalt vornehmen,

$$x^4=6(p^2+q^2+r^2)x^2-8(p^3+q^3+r^3)x$$
$$-3(p^2+q^2+r^2)^2+6(p^4+q^4+r^4).$$

Diese wird aus den Formeln für die Combinationen und Summen der Potenzen von den combinirten Größen (Art. Combination, 43.) leicht hergeleitet, durch Wegschaffung der Combinationen B und C. Die Combination D ist hier $=0$.

118. Aufg. Es ist gegeben die Summe von vier Größen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey das erste Glied $= x$, der Exponent $= u$; die Summe der Glieder $= a$; die Summe der Quadrate $= b^2$, so ist

I. $x(1 + u + u^2 + u^3) = a$

II. $x^2(1 + u^2 + u^4 + u^6) = b^2$.

Man multiplicire die erste Gleichung durch $1 - u$, die andere durch $1 - u^2$, so ist

III. $x(1 - u^4) = a(1 - u)$

IV. $x^2(1 - u^8) = b^2(1 - u^2)$.

Durch die Division wird

V. $x(1 + u^4) = \frac{b^2}{a}(1 + u)$

VI. $\frac{1 + u^4}{1 - u^4} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + u}{1 - u}$.

VII. $\frac{1 + u^4}{1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^4} = \frac{b^2}{a^2}$

VIII. $\frac{1 + u^4}{2u + 2u^2 + 2u^3} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}$.

Man setze $\frac{2b^2}{a^2 - b^2} = c$, so ist

IX. $u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 = 0$.

Diese Gleichung aufzulösen ist die Zerfällung derselben in zwey Factoren der bequemste Weg. Man setze

$$u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 =$$
$$(u^2 - mu + 1)(u^2 + nu + 1),$$

so ist $m - n = c$, und $mn = c + 2$.

Also ist (34.)

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}$$
$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}.$$

Die biquadratische Gleichung wird $= 0$, wenn der eine oder der andere ihrer beiden Factoren $= 0$ ist. Setzt man $u^2 - mu + 1 = 0$, so ist $u = \frac{1}{2}m \mp \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$. Wird $u^2 + nu + 1 = 0$ gesetzt, so ist $u = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(\frac{1}{4}n^2 - 1)}$ Diese sind die vier Wurzeln der Gleichung für u. Sollen sie alle vier möglich seyn, so muß sowohl m^2 als n^2 größer als 4 seyn.

Es ist aber $n^2 = \frac{1}{2}c^2 + c + 2 - c\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + c + 2)}$, also $n^2 - 4 = c(\frac{1}{2}c + 1) - 2 - c\sqrt{((\frac{1}{2}c + 1)^2 + 1)}$. Dieses ist offenbar eine negative Größe, da die Wurzelgrösse größer als $\frac{1}{2}c + 1$ ist.

Die Gleichung für u hat also immer wenigstens zwey unmögliche Wurzeln. Die möglichen, wenn solche vorhanden sind, sind in dem Factor $u^2 - mu + 1$, wenn derselbe $= 0$ gesetzt wird, enthalten.

Das Product der beiden möglichen Wurzeln, $\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ und $\frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ ist $= +1$, eben so wie das Product der beiden unmöglichen Wurzeln; das Product aller ist $= +1$, gleich dem gegebenen Gliede der Gleichung. Ist die eine mögliche Wurzel $= f$, so ist die andere $= \frac{1}{f}$; eben so mit den unmöglichen. Die eine ist das reciproke der andern. Daher heißt die Gleichung eine reciproke. Setzt man in derselben $\frac{1}{z}$ statt u, und multiplicirt alle Glieder mit z, so erhält man dieselbe Gleichung wie für u.

Die Duplicität und Reciprocität der möglichen Wurzel entsteht daher, daß man in einer geometrischen Reihe den Exponenten e umkehren muß, $\frac{1}{e}$ statt e nehmen, wenn die Glieder in entgegengesetzter Folge genommen werden.

Nachdem u gefunden ist, wird x mittelst der Gleichung I. bekannt, oder auch durch die aus I. und IX. hergeleitete Gleichung,

$$(2 + c)x = (1 + c)a - au.$$

Es ist nämlich

$$x(u^4 + u^3 + u^2 + u) = au,$$

und

$$x(u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1) = 0,$$

also

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x - x = au.$$

Die Gleichung I. durch $1 + c$ multiplicirt ist

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x + (1 + c)x = (1 + c)a,$$

folglich ist

$$(1 + c)x + x = (1 + c)a - au,$$

oder

$$\frac{2aa}{aa - bb}x = \frac{aa + bb}{aa - bb}a - au.$$

119. Aufg. Es ist gegeben die Summe von fünf Größen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey das erste Glied $= x$, der Exponent $= u$, die Summe der Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b^2$, so ist

$$\text{I. } x(1 + u + u^2 + u^3 + u^4) = a$$

$$\text{II. } x^2(1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8) = b^2$$

Auf gleiche Art wie in (118.) wird erhalten

$$\frac{1 + u^5}{1 - u^5} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Man dividire die Zähler durch $1 + u$, die Nenner durch $1 - u$, so entsteht

$$\frac{1 - u + u^2 - u^3 + u^4}{1 + u + u^2 + u^3 + u^4} = \frac{bb}{aa}.$$

Hieraus ist

$$\frac{1 + u^2 + u^4}{u + u^3} = \frac{aa + bb}{aa - bb}.$$

Es sey $\frac{aa + bb}{aa - bb} = c$, so ist

$$u^4 - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

Zerlegt man diese Gleichung in die Factoren $(u^2 - mu + 1)$ $(u^2 + nu + 1)$, so ist $m - n = c$; $mn = 1$, also

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)}$$
$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)},$$

und die vier Wurzeln sind

$$u = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}mm - 1)}$$
$$u = -\tfrac{1}{2}n \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}nn - 1)}.$$

Da $nn = \frac{1}{2}cc + 1 - c\sqrt{(\frac{1}{4}cc + 1)}$,
also $nn - 4 = \frac{1}{2}cc - 1 - c\sqrt{(\frac{1}{4}cc + 1)}$,
so ist das zweyte Paar Wurzeln unmöglich.

120. Nach dieser Methode kann man die Aufgaben in (118. 119.) für jede Anzahl von Größen auflösen. Es sey allgemein

$$\text{I. } x(1 + u + u^2 \ldots + u^{r-1}) = a$$
$$\text{II. } x^2(1 + u^2 + u^4 \ldots + u^{2r-2}) = b^2$$

und für ein gerades r, $\dfrac{2bb}{aa - bb} = c$,

so ist

$$u^r - cu^{r-1} - cu^{r-2} \ldots - cu^2 - cu + 1 = 0.$$

Für ein ungerades r sey $\dfrac{aa + bb}{aa - bb} = c$,

so ist

$$u^{r-1} - cu^{r-2} + u^{r-3} \ldots - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

121. Von den beiden Aufgaben in (118, 119.) sind in den Anfangsgründen der Algebra von Saunderson, am Ende des ersten Theils andere Auflösungen anzutreffen, die aber daselbst (pag. 260 — 263 der französischen Übersetzung) vier Seiten groß Quart einnehmen. Zur Erläuterung der Theorie der Gleichungen und zur Übung im Rechnen sind diese Aufgaben nützlich.

122. Man sieht aus der hier geführten Rechnung sehr gut ein, wie die Irrationalität der Coefficien-

ten eine Ursache ist, daß die Gleichung auf einen Grad steigt, der höher ist, als die Anzahl der gesuchten Größen, wenn die Irrationalität gehoben wird. In beiden Aufgaben läßt die Natur derselben nur zwey mögliche Werthe der gesuchten Größe zu, aber die Gleichung für diese beiden Werthe hat irrationale Coefficienten. Wird sie mit einem gewissen Factor multiplicirt, so erhält man zwar rationale Coefficienten, aber zugleich unmögliche Wurzeln.

V. Von den höhern Gleichungen.

123. Die frühzeitige Entdeckung der Methoden zur Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade ließ hoffen, daß man mit der Zeit auch Mittel zur Auflösung höherer Gleichungen finden würde. Allein in einem Zeitraume von mehr als zweyhundert Jahren ist alle Bemühung hierin vergeblich gewesen. Man hat die Eigenschaften der Gleichungen vollständiger, allgemeiner und bestimmter kennen gelernt, ist aber dadurch nicht zur Auflösung der Gleichungen in allgemeinen endlichen Ausdrücken gelangt. Die Entwickelung der Wurzeln durch unendliche Reihen, oder durch Kettenbrüche, welche die Analysis lehrt, die Anwendung der rücklaufenden Reihen, die Hülfsmittel, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, sind in manchen Fällen brauchbar, aber nicht zur Entdeckung aller Wurzeln einer Gleichung in allen Fällen geeignet. Zur Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade sind nach den Methoden der italienischen Algebraisten im 16ten Jahrhundert noch andere gefunden; allein diese scheinen auf höhere Gleichungen nicht anwendbar zu seyn, so daß die Gleichungen vom vierten Grade der allgemeinen Auflösung die Gränze setzen. Sind die Coefficienten in Zahlen gegeben, so kann es mühsam seyn, die möglichen Wurzeln einer Gleichung alle zu finden, es ist aber doch immer möglich.

124. Eigentlich sind es nur die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, von welchen die Wurzeln

unmittelbar durch die gegebenen Größen vollständig ausgedruckt werden. Bey den cubischen Gleichungen ist dieses nur in dem Falle einer einzigen möglichen Wurzel thunlich. Bey drey möglichen Wurzeln ist die Formel, welche sie darstellt, scheinbar unmöglich. (76.). Formeln für jede derselben setzen eine cubische Gleichung voraus, die ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat (77.). Bey den Gleichungen vom vierten Grade werden die Wurzeln nur mittelbar durch die Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade gegeben.

125. Damit man das bisherige Verfahren zur Auflösung der Gleichungen im allgemeinen übersehe, und die Schwierigkeiten bey der Anwendung auf höhere Gleichungen dadurch begreife, wird es gut seyn, die Methoden in der Kürze darzustellen.

Es kommt darauf an, mit der gesuchten Größe, x, eine andere, gleichfalls unbekannte, y, in Verbindung zu bringen, aus der gegebenen Gleichung und der angenommenen zwischen x und y die erstere wegzuschaffen, und eine Gleichung für y zu erhalten, die sich auflösen lasse, worauf man aus der Gleichung zwischen x und y die Werthe von x herleitet. Die Gleichung für y nenne man die Hülfsgleichung, die zwischen x und y die vermittelnde Gleichung. Jene nennt man auch die reducirte Gleichung, und diese die Hülfsgleichung.

126. Eine Gleichung vom zweyten Grade, $xx - ax + b = 0$, aufzulösen, gebraucht man zwar nicht nothwendig eine Hülfsgleichung, allein man kann eine solche in gewissen Fällen mit Vortheil anwenden. Nämlich es sey

$$x = y + \tfrac{1}{2} a,$$

so ist

$$yy + b - \tfrac{1}{4} aa = 0$$

$$y = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} aa - b)},$$

wodurch x gefunden wird.

127. Die cubische Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, aufzulösen, setze man $x = y - \frac{b}{3y}$, so ist

$$y^3 - c - \frac{b^3}{27y^3} = 0,$$

oder $y^6 - cy^3 - \frac{1}{27}b^3 = 0$,

eine quadratische für y^3. Daraus wird erhalten

$$y^3 = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)}.$$

Man nehme erstlich das obere Vorzeichen, so ist

$$\frac{1}{y^3} = \frac{27}{b^3}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c\right),$$

weil überhaupt $\frac{1}{m+n} = \frac{m-n}{mm-nn}$ ist. Also ist

$$x = \sqrt[3]{\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} + \tfrac{1}{2}c\right)}$$
$$- \sqrt[3]{\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c\right)}.$$

Nimmt man das andere Vorzeichen vor der Wurzelgröße, so erhält man denselben Werth von x, (s. 72.).

Vieta hat auf diese Art die cubischen Gleichungen aufgelöset, de emendatione aequationum, Cap. VII.

128. Zu der Auflösung biquadratischer Gleichungen, nach Ferrari's Methode (96.), wird zuerst die Hülfsgleichung für die eingeführte Größe y gefunden, und darauf die vermittelnde zwischen x und y. Dieses rührt daher, weil die Größe y so bestimmt werden muß, daß dadurch der eine Theil der vorgegebenen Gleichung ein vollständiges Quadrat werde, wie es der andere Theil durch den Zusatz von $2x^2y + y^2$ geworden ist. Die vorgegebene Gleichung sey

$$x^4 = bx^2 + cx + d,$$

so ist die Hülfsgleichung

$$8y^3 + 4by^2 + 8dy + 4bd - c^2 = 0,$$

und die vermittelnde Gleichung ist gedoppelt,

$$x^2 + y = \pm x \sqrt{(b + 2y)} \pm \sqrt{(d + y^2)},$$

wo die gleichnamigen Vorzeichen gebraucht werden, wenn c positiv ist, die ungleichnamigen in dem entgegengesetzten Falle. Wenn die beiden Theile der vermittelnden Gleichung quadrirt werden, so ergiebt sich durch Verbindung mit der Hülfsgleichung die Gleichung für x.

129. Wird die biquadratische Gleichung $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$ in zwey Factoren zerlegt, nach (100.), so führt dieses auf die Hülfsgleichung,

$$y^6 + 2Ay^4 + (A^2 - 4C)\,y^2 - B^2 = 0,$$

und die vermittelnden Gleichungen sind,

$$x^2 \pm xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}A \mp \frac{B}{2y} = 0.$$

130. Nach der Eulerischen Auflösungsart (106, ff.) ist für die Gleichung,

$$x^4 - ax^2 - bx + c = 0,$$

die vermittelnde Gleichung,

$$x = \sqrt{y'} + \sqrt{y''} + \sqrt{y'''},$$

und die drey Größen, y', y'', y''', sind die Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung,

$$y^3 - \tfrac{1}{2}ay^2 + \tfrac{1}{16}(a^2 - 4c)\,y - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in die vorhergehende (129.), wenn für y gesetzt wird $\frac{1}{4}y^2$, und die Coefficienten gehörig vertauscht werden, a mit $-A$; b mit $-B$ und c mit C.

130. Man nehme zur Hülfsgleichung die quadratische, $y^2 - my + n = 0$, und zur vermittelnden die quadratische, $x^2 - pxy + q = 0$, setze aus dieser in jene den Werth von y, so erhält man die biquadratische,

$$x^4 - mpx^3 + (np^2 + 2q)\,x^2 - mpqx + q^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist keine allgemeine, weil von den Coefficienten des zweyten, vierten und fünften Gliedes einer durch die beiden andern bestimmt wird.

Wenn $q = 1$ ist, so ist die Gleichung eine reciproke, dergleichen in (118. 119.) vorgekommen sind.

131. Die Auflösung höherer Gleichungen wird, wie man aus dem Verfahren für die niedrigern bis zur vierten schließen mag, auf die Erfindung zweyer Gleichungen, einer zwischen der gesuchten x und der neben eingeführten y, und einer Gleichung für y allein ankommen. Die Schwierigkeit ist nur eine Hülfsgleichung zu erhalten, die niedriger ist als die vorgegebene, oder die, wenn sie auf einen höhern Grad steigt, eine niedrigere Gleichung in Rücksicht einer Potenz der unbekannten Größe sey. Die vermittelnde Gleichung, sie mag nun einfach, oder durch die Veränderung der Vorzeichen vielfach seyn, muß durch die verschiedenen Werthe von y alle Werthe der Wurzeln x geben. Die Menge der Combinationen, die hier bey höhern Gleichungen möglich sind, mag auch diese Gleichung auf einen hohen Grad bringen.

132. Tschirnhausen hat in den Actis Erud. für 1683 eine Methode angegeben, wodurch aus der Hülfsgleichung so viele Glieder weggeschafft werden können, als man will, so daß sie eine quadratische werde, oder einer solchen gleichgültig sey, oder gar nur eine zwengliedrige werde. Allein dazu wird oft die Auflösung von Gleichungen eines höhern Grades, als die gegebene ist, erfordert. Daher ist die Methode für Gleichungen über den vierten Grad nicht brauchbar, und selbst für die Gleichungen vom dritten und vierten Grade ist sie viel beschwerlicher als die andern Auflösungsarten.

133. Man setze nämlich in einer für x gegebenen Gleichung $x = m + y$, wo m eine noch unbestimmte Größe ist, so erhält man eine transformirte Gleichung für y, in welcher man m so bestimmen kann, daß einer der Coefficienten Null werde. Setzt man $x^2 = mx + n + y$, so kann man durch gehörige Bestimmung von m und n zwey Coefficienten auf Null bringen, oder zwey Glieder wegschaffen. Setzt man $x^3 = mx^2 + nx + p + y$, so lassen sich m, n, p so annehmen, daß drey Glieder der

transformirten Gleichung wegfallen. Auf diese Art könnte man die Hülfsgleichung für y zu einer zweygliedrigen machen, wenn nicht die Bestimmung der Coefficienten in der Gleichung zwischen x und y zu große Schwierigkeiten entgegensetzte. Die Gleichung für y steigt auf eben den Grad, von welchem die für x gegebene ist. Denn in der vermittelnden Gleichung kann für x jede der Wurzeln der gegebenen Gleichung genommen werden, daher y eben so viele Werthe hat. Durch die Transformation gewinnt man also nichts, wenn nicht zugleich die Auflösung durch die Wegschaffung mehrerer Glieder erleichtert wird.

134. Es sey z. B. die gegebene Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

die vermittelnde,

$$x^2 = mx + n + y.$$

Durch die Elimination von x gelangt man zu einer Gleichung für y von der Form,

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

In dieser enthält der Coefficient P die ersten Potenzen von m und n; Q die zweyten und ersten nebst dem Producte mn; R die dritten, zweyten und ersten Potenzen nebst den Producten m^2n, mn^2 und mn, wozu in allen dreyen noch gegebene Coefficienten a, b, c, kommen. Sollen nun P und Q jedes = 0 seyn, damit $y^3 = -R$, oder $y = \sqrt[3]{-R}$ werde, so hat man, um m und n zu finden, eine Gleichung vom ersten und eine vom zweyten Grade aufzulösen. Sind diese bestimmt, so ist dadurch R bekannt, also y, und x wird durch die quadratische Gleichung, $x^2 = mx + n + y$, gefunden.

135. Man sieht, daß diese Auflösung einer cubischen Gleichung viel beschwerlicher ist, als die gewöhnliche. Die Auflösung einer biquadratischen ist noch viel mühsamer. La Grange, der über diese Methode sehr tiefsinnige und belehrende Untersuchungen in den Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1770 et 1771. (übersetzt in Michelsens Theorie der Gleichungen) angestellt hat, sagt, daß

die Rechnungen, welche nach derselben bey Gleichungen vom fünften Grade und höhern erfordert werden, so lang und verwickelt seyn würden, daß der unerschrockenste Rechner davon ablassen müßte.

Die Endgleichung zur Bestimmung der Coefficienten m, n, etc. in der vermittelnden Gleichung kann sehr hoch steigen. Wenn die Hülfsgleichung für y vom μten Grade ist, und alle Zwischenglieder weggeschafft werden sollen, so kann jene Endgleichung den Grad $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ erreichen.

136. Man könnte auch in der vermittelnden Gleichung $y = 0$ nehmen. Vereinigt man nun diese und die gegebene Gleichung zu einer einzigen, durch Wegschaffung von x, so kann man in dieser Gleichung zwischen den gegebenen Coefficienten, a, b, c, etc. und den unbestimmten m, n, etc. von den letztern alle bis auf einen so bestimmen, wie es jedesmahl am vortheilhaftesten ist, und dadurch in einzelnen Fällen zu einer Gleichung für x gelangen, die sich bequemer auflösen läßt, als die gegebene. Man muß aber wohl bemerken, daß diese substituirte Gleichung im allgemeinen nur eine Wurzel mit der gegebenen gemein hat.

137. Euler und Bezout haben fast zu gleicher Zeit, jener in den neuen Petersburger Commentarien, T. IX. (für 1762 und 1763) dieser in den Pariser Memoiren für 1765 allgemeine Auflösungsarten vorgetragen, die im wesentlichen einerley sind. (Michelsens Uebersetzung, S. 365. ff.) Das Verfahren besteht darin, daß man die vermittelnde Gleichung mit der Hülfsgleichung annimmt, und daraus die Gleichung herleitet, die mit der gegebenen identisch gesetzt wird. Z. B. es sey

$$x = a + by + cy^2, \text{ und}$$
$$y^3 = h,$$

so wird hieraus durch schickliche Substitution der Hülfsgröße y eine Gleichung für x gefunden. Diese ist

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - bch)x$$
$$- a^3 + 3abch - b^3h - c^3h^2 = 0.$$

Die gegebene Gleichung sey

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = o,$$

so erhält man durch die Vergleichung der Coefficienten in den beiden identischen Gleichungen für x drey Gleichungen zur Bestimmung der vier Größen, a, b, c, h, unter welchen also eine willkührlich ist. Nimmt man c beliebig an, so wird b^2 durch eine quadratische Gleichung gegeben, so daß b zwey Paare gleicher und entgegengesetzter Werthe hat. Daher erhält auch h vier Werthe von dieser Beschaffenheit. Für jeden Werth von h hat y drey Werthe, weil neben der möglichen Wurzel aus einer möglichen Größe noch zwey unmögliche Statt haben, und eine unmögliche Größe drey Wurzeln von dieser Beschaffenheit hat. Die Größe x kann aber nur drey Werthe erhalten. Man sieht, daß auch diese Methode beschwerlicher ist, als die gemeine. Sie giebt inzwischen Anlaß zu guten algebraischen Bemerkungen.

138. Für höhere Gleichungen wird die Rechnung auf diesem Wege so beschwerlich, daß sie so gut wie unausführbar ist. Euler und Bezout haben für die Gleichung vom fünften Grade,

$$x^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o,$$

die vermittelnde Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

und die Hülfsgleichung

$$y^5 = h,$$

angenommen, und daraus durch Elimination von y eine Gleichung für x gefunden, deren Vergleichung mit der gegebenen zwar die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung von vier der unbekannten, b, c, d, e, h, giebt, woraus sie aber diese zu scheiden, und jede, außer der willkührlichen, besonders darzustellen, wegen der ungeheuren Rechnung, die es gekostet haben würde, nicht unternommen haben.

139. Die Zusammensetzung der Wurzeln einer Gleichung aus Wurzelgrößen, wie bey der Auflösung cubischer Gleichungen, und nach der Eulerischen Methode

für biquadratische (106.) wird zu keiner Bestimmung derselben verhelfen können. Euler hat es einmahl als eine analogische Muthmaßung vorgetragen, daß die Wurzeln der Gleichungen allgemein eine solche Form haben möchten. De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. vet. Acad. Petrop. T. VI. Wenn $x = p + q$, so wird $p^n + q^n$ durch eine Gleichung vom nten Grade für x, in welcher die Coefficienten Functionen von n sind, und die Potenzen von pq der Folge nach enthalten, gegeben. Setzt man $\sqrt[n]{p}$ für p, und $\sqrt[n]{q}$ für q, so hat die Wurzel die Form $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q}$, wie in den Beyspielen (52, 53.)

140. Eine ganz ähnliche Form für die Wurzeln einer Gleichung hat Waring in den Philosophical Transactions, 1779, angegeben. Die Gleichung sey

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + dx^{n-4} - \text{etc.} = 0.$$

Man setze

$$x = py^{\frac{1}{n}} + qy^{\frac{2}{n}} + ry^{\frac{3}{n}} \ldots + vy^{\frac{n-1}{n}},$$

und bilde hieraus die Potenz x^n. In derselben schaffe man die Potenzen von y mit gebrochnen Exponenten durch Substitution von x, x^2, x^3, etc. heraus, so erhält man eine Reihe für x mit ganzen Exponenten, die man mit der gegebenen zu vergleichen hat, um die Werthe von p, q, r, etc. nebst y zu bestimmen. Setzt man $y = 1$, so ist $x = p + q + r + s + \text{etc.}$ welches von Eulers Annahme nur darin verschieden ist, daß x hier aus den formlosen Größen p, q, r, etc. zusammengesetzt wird, dort aber aus den nten Wurzeln solcher Größen. Bey einer Gleichung vom vierten Grade wird q^2 durch eine Gleichung vom dritten gefunden, $y = 1$ gesetzt, dieselbe, welche in (112.) für den durch r bezeichneten Theil gefunden ist.

141. Die Zerfällung einer Gleichung, die über den vierten Grad hinausgeht, in zwey Factoren, wie der biquadratischen, ist nicht anwendbar, weil man dabey auf

Gleichungen von einem nach höhern Grade geräth. Wenn man z. B. eine Gleichung vom fünften Grade in eine Gleichung vom dritten, und eine vom zweyten Grade zerlegen wollte, so haben die Coefficienten in beiden Gleichungen zehnerley Werthe, weil die Gleichung vom fünften Grade fünf Wurzeln hat, woraus sich zu der cubischen Gleichung drey Wurzeln, und zu der quadratischen zwey Wurzeln auf zehnerley Art nehmen lassen. Die Coefficienten werden daher durch Gleichungen vom zehnten Grade gefunden.

142. In besondern Fällen mögen sich Hülfsmittel anbieten, welche die Rechnung im Allgemeinen nicht geben kann. Wenn eine Gleichung nicht unmittelbar gegeben, sondern aus den Bedingungen einer Aufgabe gefunden wird, so ist man von der Beschaffenheit der unbekannten Größe schon vorläufig unterrichtet. Man kann wissen, wie viel mögliche Werthe sie überhaupt haben kann; steigt die Gleichung auf einen höhern Grad, als sie nach dieser Anzahl von möglichen Werthen steigen sollte, so wird man aus dem Gange der Rechnung beurtheilen können, woher dieses entsteht, ob aus der Wegschaffung der Irrationalität der unbekannten Größe oder der Coefficienten. Man wird suchen, ob die Gleichung nicht etwa die Antwort auf einen besondern Fall für die gesuchte Größe enthalte, um alsdann die Zerfällung in Factoren, deren einer den besondern Fall angiebt, zu unternehmen. Man wird, geleitet durch eine deutliche Einsicht in die Beschaffenheit der Untersuchung, vermittelnde Gleichungen entdecken können, die zu einer leichtern Hülfsgleichung führen.

143. Das Unvermögen der Algebra bey den allgemeinen Gleichungen vom fünften Grade an hindert nicht, jede in Zahlen gegebene Gleichung aufzulösen, und die Wurzeln alle, so genau als es erfordert wird, zu finden, wozu mehr als ein Weg vorhanden ist, s. unten IX.

VI. Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen.

144. Es sey die Summe von m Größen, $p + q + r + s +$ etc. $= a$; die Summe aller Producte von je zweyen $= b$; die Summe der Producte von je dreyen $= c$; die Summe der Producte von je vieren $= d$; von je fünfen $= e$; u. s. f. Das Product von allen $= k$, so ist, wenn x irgend eine dieser Größen bedeutet,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} \ldots\ldots \mp k = 0.$$

Bew. Die Summe der Unionen (der einzelnen) ohne eine derselben, wie p, sey $= \alpha$; die Summe der Binionen, in welchen kein p ist, sey $= \beta$; die Summe der Ternionen, die kein p enthalten, $= \gamma$; der Quaternionen ohne $p = \delta$, u. s. w. ist

$$\begin{array}{ll}
1)\ p + \alpha = a; & 2)\ p\alpha + \beta = b; \\
3)\ p\beta + \gamma = c; & 4)\ p\gamma + \delta = d; \\
5)\ p\delta + \varepsilon = e; & 6)\ p\varepsilon + \zeta = f, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
p\vartheta + \iota = i & p\iota = k.
\end{array}$$

Diese Gleichungen multiplicire man folgeweise durch p^{m-1}; p^{m-2}; p^{m-3}; etc. so ist

$$\begin{array}{ll}
1)\ p^m + p^{m-1}\alpha & = ap^{m-1} \\
2)\ p^{m-1}\alpha + p^{m-2}\beta & = bp^{m-2} \\
3)\ p^{m-2}\beta + p^{m-3}\gamma & = cp^{m-3} \\
4)\ p^{m-3}\gamma + p^{m-4}\delta & = dp^{m-4} \\
5)\ p^{m-4}\delta + p^{m-5}\varepsilon & = ep^{m-5} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
p^2\vartheta + p\iota & = ip \\
p\iota & = k
\end{array}$$

Man addire die Gleichungen, deren Stellenzahl ungerade ist, und subtrahire davon die Gleichungen von einer geraden Stellenzahl, so ist

$$p^m = ap^{m-1} - bp^{m-2} + cp^{m-3} - dp^{m-4} + ep^{m-5} \ldots\ldots \pm ip \mp k.$$

Eine völlig ähnliche Gleichung wird für jede der andern Größen, q, r, s, etc. gefunden. Bezeichnet man sie jede mit dem gemeinschaftlichen Zeichen x, und bringt alle Glieder auf dieselbe Seite, so ist

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} + \ldots\ldots \mp ip \pm k = 0.$$

Die obern Vorzeichen der letzten Glieder gelten für ein gerades m, die untern für ein ungerades, wenn nämlich alle Größen, p, q, r, etc. positiv sind.

145. Wenn eine oder mehrere der Größen, p, q, r, etc. ihr Vorzeichen ändern oder negativ werden, so wird angenommen, daß dieses in allen Combinationen, worin sie vorkommen, geschieht, daher ändert jede Combination, worin eine ungerade Anzahl negativer Factoren (oder ein einzelner) enthalten ist, das Vorzeichen + in —; da eine Combination, worin eine gerade Anzahl solcher Factoren sich findet, ihr Vorzeichen behält. Ist in der Summe der Combinationen einer Art die Summe der positiven Theile größer als die Summe der negativen, so bleibt das Vorzeichen des Aggregats oder des Coefficienten in der Gleichung, wie in der Normalgleichung (144); ist aber jene Summe kleiner als die letztere, so wird das Vorzeichen das entgegengesetzte. Alles dieses ist aus der Buchstabenrechnung und der Lehre von entgegengesetzten Größen klar, und die Entwickelungen der verschiedenen Fälle an den Gleichungen bis zum vierten Grade geben darüber die völligste Erläuterung.

146. Sind alle m Größen, p, q, r, s, etc. möglich, so ist in der Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, in welcher die

Coefficienten auch negativ seyn mögen, die Anzahl der Abwechslungen zweyer nächsten Vorzeichen (+ — oder — +) so groß als die Anzahl der positiven Wurzeln, und die Anzahl der Folgen gleicher Vorzeichen (+ + oder — —) so groß als die Anzahl der negativen Wurzeln.

Bew. Der für die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gebrauchte Beweis dieser Eigenschaft der Gleichungen würde schon für Gleichungen vom fünften Grade viel zu weitläufig und beschwerlich fallen. Der folgende Beweis für Gleichungen vom fünften Grade ist so beschaffen, daß er bey allen höhern angewandt werden kann.

Es seyn p, q, r, s, t fünf mögliche Größen; die Summen ihrer verschiedenen Combinationen seyn a, b, c, d, e, wie vorher erklärt ist, so ist

$$A)\ x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0.$$

Ferner bedeuten für vier jener Größen, als q, r, s, t, die Symbole, α, β, γ, δ, eben solche Summen, so ist die Gleichung für jede der vier Größen,

$$B)\ x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$$

Weil $a = p + \alpha$; $b = p\alpha + \beta$; $c = p\beta + \gamma$; $d = p\gamma + \delta$; $e = p\delta$ ist, so ist die Gleichung A) zusammengesetzt aus den beiden Theilen,

$$\left.\begin{array}{ll} C) & x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x \\ D) & \quad - px^4 + p\alpha x^3 - p\beta x^2 + p\gamma x - p\delta \end{array}\right\} = 0$$

und es entsteht A) aus B) durch die Multiplication mit $x - p$.

Wenn eine oder mehrere der q, r, s, t negativ sind, so werden dadurch einer oder mehrere der Coefficienten, α, β, γ, δ, negativ, und ändern ihre Vorzeichen. Ist p positiv, so sind die Vorzeichen der Reihe D, allemahl denen in der Reihe C bey der nächst höhern Potenz von x entgegengesetzt. Ist aber p negativ, so sind die Vorzeichen in der Reihe D einerley mit denen in der Reihe

C bey der nächst höhern Potenz von x. In beiden Fällen ist die Anzahl der Abwechslungen und der Folgen der Vorzeichen in D dieselbe wie in C oder in B, in dem ersten Falle nur mit durchgängiger Vertauschung von + und —.

Die Vorzeichen in der Reihe A werden durch die Vorzeichen in den beiden Reihen C und D, auf die bekannte Art (Buchstabenrechnung 10.) bestimmt. Sind die Vorzeichen zu einer Potenz in beiden Reihen C, D, einerley, so hat das Glied mit dieser Potenz in A dasselbe Vorzeichen wie das gleichstellige in B; sind sie aber verschieden, so kann dadurch eine Abänderung in der Combination der Vorzeichen in der Reihe A gegen die in B entstehen.

Es sey zuerst p positiv, oder A) entstehe aus B) durch die Multiplication mit x — p.

Man nehme irgend drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entspringenden in D, so sind ihre Vorzeichen in einer der folgenden acht Combinationen enthalten.

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + —	+ — +	+ — —
— — —	— — +	— + —	— + +
V.	**VI.**	**VII.**	**VIII.**
— + +	— + —	— — +	— — —
+ — —	+ — +	+ + —	+ + +

Der Übergang von dem Vorzeichen in der Reihe C zu dem in der Reihe D oder umgekehrt, geschehe bey dem mittlern Gliede jeder derselben, so findet derselbe aus C in D nur Statt in den Combinationen I. II. VII. VIII. Dabey wird immer eine Folge in eine Abwechslung verwandelt. Ein Übergang aus D in C geschieht nur in den Combinationen I. IV. V. VIII. dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung, oder eine Abwechslung

in eine Folge verwandelt. Nun ist die Anzahl der Übergänge aus C in D nothwendig um Eins größer als die Anzahl der Rückgänge aus D in C, weil das letzte Glied in D kein zugehöriges in C hat. Folglich ist die Anzahl der Verwandlungen einer Folge in eine Abwechslung nothwendig größer als die Anzahl der entgegengesetzten Verwandlungen, selbst wenn jeder Rückgang die Vertauschung einer Abwechslung in eine Folge mit sich brächte. Die Gleichung A enthält also wenigstens eine Abwechslung der Vorzeichen mehr als die Gleichung B. Sie kann auch die Abwechslungen in einer noch größern Anzahl enthalten, wenn die Rückgänge in den Fällen I. und VIII. geschehen.

Es sey zweytens p eine negative Größe, so entsteht, wenn p die absolute Quantität derselben bedeutet, die Gleichung A aus B durch die Multiplication mit $x + p$, oder wird zusammengesetzt aus

$$\begin{array}{ll} \text{C)} & x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x \\ \text{D)} & \quad + p x^4 - p\alpha x^3 + p\beta x^2 - p\gamma x + p\delta \end{array} = 0.$$

Man nehme wiederum drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entspringenden in D, so sind die verschiedenen Combinationen der Vorzeichen,

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −
V.	**VI.**	**VII.**	**VIII.**
− + +	− + −	− − +	− − −
− + +	− + −	− − +	− − −

Ein Übergang aus C in D kann in dem mittlern Gliede der obern Reihe nur in den Fällen III IV V. VI. erfolgen. Dabey wird immer eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Ein Rückgang aus D in C bey dem mittlern Gliede der untern Reihe geschieht nur in

II. III. VI. VII. Dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung oder eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Da die Anzahl der Rückgänge um Eins geringer ist, als die der Übergänge aus C in D, so entsteht dadurch in A wenigstens eine Folge der Vorzeichen mehr als in B.

Es sey unter den 5 Größen, p, q, r, s, t, die Anzahl der positiven $= n$, also der negativen $5 - n$. Man nehme p für eine der positiven Wurzeln, so hat die Gleichung B $(n - 1)$ positive Wurzeln und $(5 - n)$ negative Wurzen. Sie hat $(n - 1)$ Abwechslungen der Vorzeichen und $(5 - n)$ Folgen (88.). Die Gleichung A hat daher entweder $(n - 1 + 1)$ Abwechslungen oder mehr. Die überschießende Anzahl derselben über n sey $= u$, so daß die Anzahl der Abwechslungen $N = n + u$ ist. Ferner nehme man p für eine der negativen Wurzeln, so hat die Gleichung B (die nun eine andere als bey der ersten Annahme für p ist) n positive Wurzeln, und $(4 - n)$ negative; also n Abwechslungen, und $(4 - n)$ Folgen der Vorzeichen. Die Gleichung A hat daher entweder $(4 - n + 1)$ Folgen oder noch mehr. Die Anzahl sey $N' = 5 - n + v$. Es ist aber $N + N' = 5$, also $5 = n + u + 5 - n + v$, folglich $u + v = 0$. Da u und v beide additiv oder gleichnamig seyn müßten, so findet kein anderer Werth für u und v Statt, als 0, und es ist $N = n$; $N' = 5 - n$, oder, in einer Gleichung vom fünften Grade ist die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen gleich der Anzahl der positiven Wurzeln; die Anzahl der Folgen gleich der Anzahl der negativen Wurzeln.

Hieraus läßt sich nun der Satz leicht allgemein erweisen. Gilt er nämlich für eine Gleichung vom mten Grade, so gilt er auch für eine Gleichung vom $(m + 1)$ten Grade, daher auch für eine vom $(m + 2)$ten, u. s. f. Man braucht nur in dem geführten Beweise m statt der bestimmten Zahl 5 zu setzen.

147. Wenn bey der Multiplication einer Gleichung durch $x - p$ die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen, oder bey der Multiplication durch $x + p$ die Anzahl der Folgen nicht um Eins größer wird als sie in der multiplicirten Gleichung ist, so zeigt dieser Widerspruch gegen den erwiesenen Satz unmögliche Werthe der Wurzeln an. Es sey die Gleichung, $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 10x - 50 = 0$. Multiplicirt man diese durch $x + 1$, daher die Wurzel -1 hinzu kommt, so ist das Product $x^5 - 7x^4 - x^3 - 3x^2 - 60x - 50 = 0$; diese hat zwey Folgen mehr als jene Gleichung, die daher unmögliche Wurzeln enthält. Auch ist sie das Product aus $x^2 - 6x - 10$ in $x^2 - 2x + 5$, welcher letztere Factor nicht null werden kann.

148. Wenn ein Glied in der Gleichung fehlt, so kann man für dasselbe ± 0 setzen. Haben die beiden nächsten Glieder, das vorhergehende und das folgende, entgegengesetzte Vorzeichen, so darf man daher auf eine positive und eine negative Wurzel schließen, wenn sonst keine Widersprüche gegen die Möglichkeit in den Coefficienten und ihren Vorzeichen liegen. Haben die beiden nächsten Glieder aber einerley Vorzeichen, so sind wegen des fehlenden Gliedes zwey Wurzeln unmöglich. Denn bey dem Gebrauche des einen Vorzeichens vor 0 werden zwey positive, bey dem Gebrauche des andern zwey negative angezeigt. Bey den cubischen Gleichungen haben wir z. B. gesehen, daß die Gleichung $x^3 + bx \pm 0 = 0$ zwey unmögliche Wurzeln hat.

149. Wegen der unmöglichen Wurzeln, die eine Gleichung haben kann, ist der Satz auf diesen Fall so einzuschränken, daß eine Gleichung nicht mehr positive Wurzeln als Abwechslungen der Vorzeichen, und nicht mehr negative Wurzeln als Folgen gleicher haben könne. Es wird unten gezeigt, daß die Form der unmöglichen Wurzeln ist $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, so daß das Product $x - (\alpha + \beta \sqrt{-1})$ in $x - (\alpha - \beta \sqrt{-1})$ ist $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. Das Product aller unzerleg-

baren Doppelfactoren in einer Gleichung nenne man P, das Product der einfachen von der Form $x - p$ nenne man Q. Wird das Product P mit einem Factor $x - p$ multiplicirt, wo p positiv ist, so kommt zu der Combination der Vorzeichen in P wenigstens eine Abwechslung hinzu; wird P durch $x + p$ multiplicirt, so kommt wenigstens eine Folge gleicher Vorzeichen hinzu. Durch die Multiplication mit allen Factoren von der Form $x - p$ in Q kommen also zu der Combination der Vorzeichen in P wenigstens so viele Abwechslungen als positive Wurzeln vorhanden sind, hinzu, und durch die Multiplication mit Factoren von der Form $x + q$ wenigstens so viele Folgen gleicher Vorzeichen als negative Wurzeln da sind. Die Anzahl der Abwechslungen kann daher wohl größer als die Anzahl der positiven Wurzeln seyn, aber nicht kleiner, so wie die Anzahl der Folgen wohl größer als die Anzahl der negativen Wurzeln seyn kann, aber nicht kleiner.

Daher hat eine Gleichung, in welcher nur eine Abwechslung der Vorzeichen ist, nur eine mögliche positive Wurzel; hat sie nur eine Folge gleicher Vorzeichen, so hat sie nur eine negative Wurzel.

150. Der Satz (146) wird oft Harriots Lehrsatz genannt, aber mit Unrecht, s. Algebra, Th. I. S. 50. Man hat ihn lange Zeit ohne andern Beweis als durch Induction aufgestellt. Saunderson sagt in seiner Algebra §. 434, daß er in keinem Lehrbuche von dieser Wissenschaft einen Beweis dieses Satzes angetroffen habe, ob er gleich fast in allen vorkommt. Er setzt hinzu daß man wegen der ungeheuren Menge von Fällen, die man durchgehen müßte, schwerlich es versuchen möchte einen allgemeinen Beweis zu finden. Stübner hat zuerst in einer Disputation, Leipzig 1720, den Satz bewiesen, aber auf einem zu beschwerlichen Wege. Der Abbé de Gua hat einen gedoppelten Beweis des Satzes gegeben, in den Mém. de l'Acad. des Scienc. 1741. Segner hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1756,

und in seinen Elem. Anal. Finit. §. 506 — 519 einen Beweis mitgetheilt, der nach Kästners Urtheil aber in große Weitläufigkeit zu führen scheint, wenn man alles darin genau auseinander setzen wollte. Schon in einer akademischen Schrift zu Jena 1718 legte er den nachher weiter ausgeführten Beweis vor. Von Äpinus ist ein Beweis in den Mém. de l'Ac. de Berlin 1758 anzutreffen. Kästner beweiset den Satz durch die Differentialrechnung, mehr scharfsinnig als methodisch, in einer akademischen Schrift 1745, hernach in seiner Analysis des Unendlichen §. 186. Man sehe auch Tempelhoffs Anal. endl. Größen §. 550 ff. Karsten Mathesis theoretica, §. 86 — 92. Der Beweis, den ich hier geführt habe, hat einiges mit dem Segnerischen gemein, ist aber kürzer und einleuchtender, besonders durch die Verbindung mit dem für Gleichungen vom vierten Grade schon geführten Beweise.

151. Die Gleichung $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots \mp ix \pm k = 0$, hat m Wurzeln, deren Summe $= a$, Summe der Producte nach Binionen $= b$; nach Ternionen $= c$; nach Quaternionen $= d$; u. s. f. Summe von je $(m - 1)$ derselben $= i$; Product aller $= k$ ist, die obern Zeichen gebraucht für ein gerades m, die untern für ein ungerades. Nur müssen, wenn die Wurzeln alle mögliche Größen seyn sollen, alle Bedingungen erfüllt werden, die in der Form der Coefficienten versteckt liegen.

Bew. Denn es werden hier durch die m Coefficienten von dem zweyten Terminus an m Bestimmungen für eben so viele Größen, p, q, r, s, etc. gegeben. Setzt man nämlich ihre Summe $= a$; die Summe der Producte von je zweyen $= b$, u. s. f. wie in (144), so erhält man die vorgegebene Gleichung, und es ist jede der p, q, r, etc. eine der durch x bezeichneten Größen, die der Gleichung ein Genüge thut, das ist, eine Wurzel derselben. Nur muß dabey noch untersucht werden, ob die m Coefficienten alle Bedingungen für die gesuchten Größen

enthalten, oder ob nicht noch in der Form der Coefficienten Bedingungen versteckt liegen.

152. Es ist nämlich, wenn das Aggregat von m möglichen Größen mit einerley oder verschiedenen Vorzeichen gegeben wird, nicht mehr ganz willkührlich, wie man das Aggregat der Producte nach den Combinationen je zweyer oder mehrerer aus ihnen allen annehmen wolle. So ist, wenn a das Aggregat der Größen selbst, und b das Aggregat der Producte je zweyer ist, allemahl $aa > 2b$, da die Summe der Quadrate $= aa - 2b$ ist, also allemahl eine positive Größe bleibt. (Combination, 43. 44. und combinatorische Analysis, 53.). Ist b negativ, so ist die Quantität davon ganz willkührlich, aber nicht, wenn b positiv ist.

Ist c das Aggregat aller Producte nach Ternionen, und d das aller Quaternionen, so ist die Summe der Biquadrate $= a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d$, (comb. Anal. 53.), also $a^4 + 2b^2 > 4a^2b - 4ac + 4d$. Die Formeln für die Summen der geraden Potenzen combinirter Größen a. a. O. geben noch mehr solche Bedingungen.

Aus den Formeln für die Summen der Quadrate von den Combinationen (Combination 48.) folgen auch Bedingungen für die Relationen derselben.

Es ist $bb > 2ac - 2d$

$cc > 2bd - 2ae + 2f$

$dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h$

u. s. f.

wo die kleinen Buchstaben statt der großen a. a. O. gesetzt sind.

153. Wenn die in jenen Formeln enthaltenen Bedingungen durch die Coefficienten einer Gleichung nicht erfüllt werden, so sind nothwendig unmögliche Wurzeln vorhanden; allein umgekehrt folgt nicht, daß alle Wurzeln möglich sind, wenn den Bedingungen Genüge geschieht. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 8x^3 + 7x^2$

$-10x-50=0$, die zwey unmögliche Wurzeln hat (147), ist $a=+8$; $b=+7$; $c=+10$; $d=-50$. Hier ist $aa>2b$; auch ist $a^4+2b^2>4a^2b-4ac+4d$; aber es ist nicht $bb>2ac-2d$, da $bb=+49$; $2ac-2d=160+100$ ist.

154. Wenn die Gleichung in (151.) lauter mögliche Wurzeln hat, so ist

$$(m-1)\,aa>2mb;$$
$$2(m-2)\,bb>3(m-1)\,ac;$$
$$3(m-3)\,cc>4(m-2)\,bd;$$
$$4(m-4)\,dd>5(m-3)\,ce;$$
$$5(m-5)\,ee>6(m-4)\,df;$$

etc.

Der Beweis durch Anwendung der Differentialrechnung ist in Eulers Differentialrechnung, Th. II. Kap. 13 anzutreffen. Daselbst und in dem vorhergehenden Kapitel ist die Lehre von der Entdeckung unmöglicher Wurzeln umständlich vorgetragen. Man sehe auch noch seine Abhandlung: Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi. Comm. novi Ac. Retrop. T. XIII. Newtons Regel dazu, in der Arithm. universali, pag. 184. gründet sich auf die hier zuletzt angeführten Bedingungsformeln. Den Beweis der Newtonischen Regel hat Campbell in den Philos. Trans. nr. 404. geführt, woraus er Newtons Arithm. univ. von dem Herausgeber s'Gravesand angehängt ist. Er hat noch eine künstliche Regel beygefügt, wodurch man finden kann, wie viele unmögliche wenigstens Wurzeln in einer Gleichung enthalten sind. S. Algebra, Th. I. S. 62.

155. Die Betrachtung quadratischer Gleichungen hat gezeigt, daß in dem Falle eines Widerspruches gegen die Bedingungen über die Relationen der Coefficienten dennoch eine Form der Wurzeln sich ergiebt, durch welche sie in Verbindung mit einander eben so die Coeffi-

cienten hervorbringen, wie es bey möglichen Wurzeln geschieht. Bey cubischen und biquadratischen Gleichungen entstehen aus der Verbindung unmöglicher Wurzeln mit möglichen die Coefficienten eben so, wie sie aus möglichen zusammengesetzt werden. Diese Form ist $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$. Die unmöglichen Wurzeln sind in den bisher betrachteten Gleichungen paarweise vorhanden. Dadurch wird ihre Summe etwas mögliches, so auch das Product $\alpha^2 + \beta^2$, und die Summe der Producte aus jeder in die übrigen möglichen Wurzeln.

156. Solchergestallt erhellt, wie unter der Bedingung, daß die unmöglichen Wurzeln paarweise, von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ genommen werden, aus den Combinationen derselben sowohl unter einander als mit möglichen Größen eben eine solche Gleichung entsteht, als für den Fall, da alle combinirten Größen möglich sind. Inzwischen darf man doch fragen, ob jede gegebene Gleichung entweder auf die eine oder die andere Art hervorgebracht werde, und ob nicht auch in gewissen Fällen selbst die Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, unbrauchbar seyn könne.

157. Diesen Zweifel zu heben, bemerke man, daß bey der Aufnahme unmöglicher Größen von der Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, die Zusammensetzungen der Combinationen nicht mehr den Bedingungen unterworfen bleiben, welche bey möglichen Größen die relative Quantität derselben einschränken, und ihr gewisse Gränzen anweisen. Diese Bedingungen sind als Gleichungen neben denjenigen anzusehen, welche die Coefficienten, als Summen von Combinationen der Wurzeln, geben. Werden jene Bedingungen bey Seite gesetzt, so erhält man aus einer Gleichung vom mten Grade aus den m Coefficienten (den von der höchsten Potenz der Einheit gleich genommen) eben so viele unbedingte Gleichungen, wodurch m Wurzeln der Gleichung, nicht mehr und nicht weniger, bestimmt sind, unter welchen aber Paare von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, vorhanden seyn können. Bey der Multiplication erdich-

teter oder eingebildeter Größen, $\beta\sqrt{-1}$, werden die Regeln für die Vorzeichen der Producte möglicher Größen umgeändert, daher auch die einfach geraden Potenzen einer solchen Größe das Vorzeichen — erhalten. Bey diesen Annahmen steht nichts im Wege, den Satz (151.) als allgemein aufzustellen.

Die Anwendung dieser Bemerkungen auf Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade wird sie hinlänglich erläutern und bestätigen.

158. Die beiden möglichen Wurzeln der quadratischen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, seyn $\alpha + \beta = p$, und $\alpha - \beta = q$, so ist $a = 2\alpha$; $b = \alpha^2 - \beta^2$. Also ist $4b < a^2$, und $2b < p^2 + q^2$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ statt β, also $-\beta^2$ statt $+\beta^2$, oder β^2 statt $-\beta^2$, so ist $4b > a^2$, und $2b > p^2 + q^2$.

159. Die drey möglichen Wurzeln der cubischen Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, seyn $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$, und r, so ist $a = 2\alpha + r$; $b = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha r$; $c = (\alpha^2 - \beta^2)\, r$. Hieraus ist

$$a^2 - 2b = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + r^2,$$
$$a^2 - 3b = (\alpha - r)^2 + 3\beta^2,$$
$$b^2 - 3ac = (\alpha^2 - \beta^2 - \alpha r)^2 + 3r^2\beta^2.$$

Sind alle drey Wurzeln möglich, so ist nicht allein nothwendig $aa > 2b$, sondern auch $aa > 3b$, und dann auch $bb > 3ac$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ für β, wodurch $-\beta^2$ statt $+\beta^2$ zu stehen kommt, so kann von jenen Sätzen das Gegentheil Statt haben. Findet sich dieses Gegentheil, so sind zwey Wurzeln unmöglich.

160. Die Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, hat nothwendig unmögliche Wurzeln, wenn b positiv ist, da alsdann eine Summe von Quadraten negativ ist. Aber die Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, giebt, $2\alpha + r = 0$; daher $b = 3\alpha^2 + \beta^2$; $c = 2\alpha(\beta^2 - \alpha^2)$. Hieraus ist

$$4b^3 - 27c^2 = 4\beta^2(9\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

In dem Falle dreyer möglichen Wurzeln ist nothwendig $4b^3 > 27c^2$, so wie in dem Falle, da zwey Wurzeln unmöglich sind, $4b^3 < 27c^2$ ist. Daher auch umgekehrt sind alle drey Wurzeln möglich, wenn $4b^3 > 27c^2$ ist; und zwey unmöglich, wenn $4b^3 < 27c^2$ ist. Dieses rührt daher, daß β^2 ein Factor der Bedingungsformel ist.

161. Die biquadratische Gleichung $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, habe die möglichen Wurzeln, $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$; $\gamma + \delta = r$; $\gamma - \delta = s$, so ist

$$\text{I. } a = 2\alpha + 2\gamma$$

$$\text{II. } b = 4\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2$$

$$\text{III. } c = 2(\alpha^2 - \beta^2)\gamma + 2(\gamma^2 - \delta^2)\alpha$$

$$\text{IV. } d = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2).$$

Die Summe der Quadrate der Wurzeln, oder $aa - 2b$, ist $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2$, eine nothwendig positive Größe. Auch ist $3aa - 8b$ positiv. Denn $3aa = 12(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2$, also $3aa - 8b = 4\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 4\gamma^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2 = 4(\alpha - \gamma)^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2$. Nimmt man $\beta\sqrt{-1}$ statt β, oder $\delta\sqrt{-1}$ statt δ, oder beides, so können beide Formeln negativ werden.

162. Man sieht hieraus, warum die Erfüllung der Bedingung wegen des positiven Werthes einer Formel nicht nothwendig mögliche Wurzeln anzeigt. Denn das Quadrat der unmöglichen Größe kann klein genug seyn, um eine Formel positiv zu lassen.

163. Der Beweis des Satzes, daß die Wurzeln einer jeden Gleichung, in welcher die Exponenten der unbekannten Größe alle ganze Zahlen sind, entweder mögliche Größen, oder unmögliche von der Form, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, sind, ist auf mehrere Arten versucht worden. Zuerst von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, dessen Beweis auch in dem Traité du Calcul

intégral par Bougainville, T. I. p. 47. angetroffen wird. Ein Nachtrag, worin d'A. auf eine ihm gemachte Bedenklichkeit anwortet, steht in seinen Opuscules mathém. T. IV. Mem. XXVIII. Euler hat zweyerley Methoden den Satz zu erweisen angegeben, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1749. Foncenex, der bey dem ersten Eulerischen Beweise einen Anstoß fand, hat in den Miscellaneis philosophico - mathematicis societatis Taurinensis, T. I. (Taurini 1759.) selbst einen Beweis zu geben gesucht. Nachher hat la Grange hierüber Untersuchungen angestellt, in dem Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772, worin er insbesondere zwey Mangel des ersten Eulerischen Beweises hebt. In den Actis Acad. Petrop. für 178 ist ein Beweis von Fuß enthalten. La Place hat in dem Journal de l'école normale einen Beweis mitgetheilt, den la Croix in seinem Traité du calcul diff. et int. T. I. nr. 162. 163. eingerückt hat. La Grange, der in seiner Schrift über die Auflösung numerischer Gleichungen S. 181 ff. einen Abriß der vornehmsten Beweisarten unsers Satzes giebt, sagt von dem letzten Beweise, dem von la Place, daß er bloß als Beweis betrachtet vollkommen genüge, aber daß es so gut als unmöglich sey, nach der dabey angewandten Analysis eine Gleichung in mögliche Factoren von zwey Dimensionen zu zerlegen. Gauß hat in einer kleinen Schrift: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Helmstadii 1799, 4. die mehresten der vorher angezeigten Beweise mit Scharfsinn geprüft und giebt am Ende einen neuen Beweis, der aber auf trigonometrischen Hülfssätzen beruht, also nicht rein algebraisch ist. Alle die hier angeführten Beweise sind schwer zu fassen, wenn man auch schon einige Übung in analytischen Untersuchungen hat. Die vorher (157.) gemachte Bemerkung erklärt den Ursprung und die Form der unmöglichen Wurzeln unmittelbar aus der Natur der Combinationen der Wurzeln. Die Vorzeichen

der Producte und Potenzen den Regeln, die bey möglichen Größen gelten, zuwider setzen, heißt unmögliche Größen einführen.

164. Die unmöglichen Wurzeln können auch andere Formen zu haben scheinen, als die, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, aber dergleichen lassen sich immer auf diese bringen. D'Alembert hat dieses an einigen Beyspielen gezeigt, sur la cause des vents, pag. 102. Man sehe auch la Grange a. a. O. S. 182. und la Croix a. a. O. nr. 164 — 188. Davon noch in dem Artikel, unmögliche Größen.

165. Die Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe lauter mögliche Wurzeln, p, q, r, s, etc. an der Zahl m. Für x werde irgend ein Werth, positiver oder negativer, gesetzt, und der Werth des Aggregats aller Glieder, oder der Werth der Gleichung sey $= y$, so ist

$$(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)\,\text{etc.} = y.$$

Bew. Es sey nach Absonderung einer der Wurzeln, als p, das Aggregat der übrigen $= \alpha$; das Aggregat ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$; ihrer Quaternionen $= \delta$; u. s. f. und $x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} - \gamma x^{m-4} + \delta x^{m-5} - \text{etc.} = z$. Diese Function von x werde multiplicirt durch $x - p$, so ist

$$\begin{array}{l} x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} - \text{etc.} \\ \quad - p\,.\,. \quad + \alpha p\,.\,. \quad - \beta p\,.\,. + \gamma p\,.\,. - \text{etc.} \\ = (x-p)\,z. \end{array}$$

Nun ist $\alpha + p$ das Aggregat aller Wurzeln der vorgegebenen Gleichung; $\beta + \alpha p$ das Aggregat ihrer Binionen; $\gamma + \beta p$ ihrer Ternionen; $\delta + \gamma p$ ihrer Quaternionen, u. s. f. wie in dem Beweise (144.). Da nun a, b, c, d, etc. eben diese Aggregate sind, so ist $y = (x-p)\,z$. Nimmt man statt p eine der andern Wurzeln, q, r, s, etc. so ergiebt sich auf gleiche Art, daß die Function y auch die Factoren, $(x-q)$, $(x-r)$, $(x-r)$, u. s. f. enthält. Die Anzahl aller dieser Facto-

ren nebst dem zuerst genommenen, $x - p$, ist $= m$, und die höchste Potenz von x in dem Producte ist x^m. Folglich enthält y nicht mehr Factoren als die m Factoren von der Form $x - p$.

166. Die Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{etc}, = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln, $p = A + B\sqrt{-1}$; $q = A - B\sqrt{-1}$, die übrigen möglichen seyn r, s, t, etc. Für irgend einen Werth von x sey der Werth der Gleichung $= y$, es ist

$$(x^2 - (p + q)x + pq)(x - r)(x - s)(x - t)\,\text{etc.} = y.$$

Bew. Man setze das Aggregat der möglichen Wurzeln $= \alpha$; ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$, u. s. f. daraus formire man die Function,

$$x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \gamma x^{m-5} + \delta x^{m-6} + \text{etc.} = z.$$

Diese werde mit $x^2 - (p + q)x + pq$ multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{llll}
x^m - \alpha x^{m-1} & + \beta x^{m-2} & - \gamma x^{m-3} & + \delta x^{m-4} - \text{etc.} \\
- p\,.. & + \alpha p\,.. & - \beta p\,.. & + \gamma p\,.\ . \\
- q\,.. & + \alpha q\,.. & - \beta q\,.. & + \gamma q\,.\ . \\
 & + pq\,.. & - \alpha pq\,.. & + \beta pq\,.\ .
\end{array}$$

$$= (x^2 - (p + q)x + pq)z.$$

Die Coefficienten sind mögliche Größen, weil $p + q = 2A$; $pq = A^2 + B^2$ ist. Sie sind die Aggregate der Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. f. von den Wurzeln, p, q, r, s, etc. wie es a, b, c, d, etc. sind (151.). Also ist $y = (x^2 - (p + q)x + pq)(x - r)(x - s)$ etc.

167. Die Gleichung, $x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln r, s, so hat sie den Factor, $(x^2 - (r + s)x + rs)$, und die Gleichung, $y = 0$, hat zwey solche quadratische mögliche Factoren. Auf diese Art erhellt, daß die Gleichung, $y = 0$, so viele mögliche quadratische Factoren

enthält, als Paare unmöglicher Wurzeln in ihr vorhanden sind.

Daher gilt der Satz (165.) auch für den Fall, da eine Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

168. Exempel. Es sey $x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind, $+2$, $+3$, -4, $+3 \pm 2\sqrt{-1}$. Daher ist der Werth der Gleichung $= (x-2)(x-3)(x+4)(x^2 - 6x + 13)$. Der Werth der Gleichung so wie des Products für $x = +5$ ist $= +432$, für $x = +1$ ist der Werth beider $= +80$; für $x = -2$ ist der Werth $= +1160$; für $x = -5$ ist der Werth $= -3808$.

169. Ist für eine Gleichung eine mögliche Wurzel, p, oder ein Paar unmöglicher Wurzeln, $A \pm B\sqrt{-1}$, gefunden, so läßt sich die Gleichung durch die Division mit $x - p$, oder mit $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, um einen Grad, oder um zwey Grade erniedrigen.

170. Exempel. Es sey $x^4 - ax^3 - bx^2 + ax - (1-b) = 0$. Diese Gleichung hat die beiden Wurzeln, ± 1, und läßt sich daher durch $x - 1$ und $x + 1$, oder durch $x^2 - 1$ dividiren. Der Quotient ist $x^2 - ax + (1-b) = 0$. Jene beiden Wurzeln lassen sich gar nicht als Antworten auf die Frage, deren Beantwortung in der Gleichung enthalten ist, ansehen. Denn die Wurzeln, welche diese Antworten sind, müssen von den gesammten Coefficienten, als den durch die Frage gegebenen Größen, abhangen. Diese echten Wurzeln sind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b + 1.)}$

Die Frage von der Zeit des Jahrs oder dem Orte der Sonne, bey welchen die Dämmerung am kleinsten ist, führt auf diese Gleichung. Die gesuchten Wurzeln sind Sinus der Declination der Sonne. (Kastners astronom. Abh. I. S. 434. Fuß im astron Jahrb. 1787. S. 233.). Wenn die Frage auch allgemeiner

abgefaßt würde, so sind die Wurzeln ± 1 doch unbrauchbar, weil die Frage für einen Stern in dem einen oder dem andern Weltpole nicht gethan werden kann; es würde daraus folgen, daß ein Cosinus unendlich groß sey. Nur für die Gleichung in abstracto können sie als Wurzeln gelten.

171. Man unterscheide die wesentlichen (echten) und fremden (zufälligen) Wurzeln einer Gleichung. Jene sind die, welche von allen Coefficienten, oder von allen Größen, woraus diese zusammengesetzt sind, abhangen; die fremden hängen nur von einigen dieser Größen ab. Joh. Bernoulli nennt dergleichen Wurzeln radices peregrinas, die wesentlichen genuinas. Opp. T. IV. p. 42. Die fremden Wurzeln gelten also für einen besondern Fall der Frage, oder die Gleichung hat durch Multiplicationen bey der Wegschaffung der Irrationalität, oder bey der Elimination der andern gesuchten Größen einen höhern Grad erhalten, als sie nach der Anzahl der möglichen Werthe für die unbekannte Größe haben sollte. In dem Falle, daß man auf eine Gleichung mit fremden Wurzeln geräth, wird man sich nach einer solchen Auflösung umzusehen haben, welche diese erspart. Bey der Frage von der kürzesten Dämmerung ist eine solche Auflösung möglich. Noch zwey Beyspiele, wo durch Quadrirung zufällige oder fremde Wurzeln in die Gleichung gekommen sind, sehe man in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie, 12; 14.

172. Eine Gleichung kann mögliche Wurzeln enthalten, welche in einem besondern Falle nicht anwendbar sind, weil dieser noch eine Bedingung enthält, die durch diese Wurzeln nicht erfüllt wird. Z. B. man suche aus dem Umfange und dem Inhalte eines gleichschenklichten Dreyecks das Dreyeck zu bestimmen, so kommt man auf eine cubische Gleichung für die Schenkel des Dreyecks, wiewohl es nur zwey Dreyecke von der gegebenen Beschaffenheit giebt. Denn die eine Wurzel ist größer als der halbe Umfang, welches nicht möglich ist.

173. Wenn der Werth einer Gleichung für einen Werth von x positiv, und für einen andern negativ ist, so liegt zwischen diesen beiden Werthen von x eine mögliche Wurzel, oder auch eine ungerade Anzahl von Wurzeln. Sind zwey Werthe der Gleichung gleichnamig, so liegt zwischen den zugehörigen Werthen von x entweder gar keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.

Bew. Der Werth der Gleichung ist, wenn p, q, r, s, etc. die Wurzeln, sowohl die möglichen, als die unmöglichen, bedeuten, =

$$(x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s),\ \text{etc.}$$

in welchem Product je zwey zusammengehörige unmögliche Factoren ein mögliches Product geben (166.). Jeder mögliche Factor kann positiv, oder negativ, oder null seyn; die unmöglichen sind keins von diesen. Das Product zweyer zusammengehörigen, $x - A - B\sqrt{-1}$ und $x - A + B\sqrt{-1}$, nämlich $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, wird für keinen Werth von x null, weil sonst dasselbe zwey mögliche Factoren hätte, und ist immer positiv Man gedenke sich die möglichen Factoren nach der Größe der dazu gehörigen Wurzeln geordnet, so daß p die größte positive Wurzel, q die nächst folgende kleinere, u. s. f. bedeute. Unter den negativen Wurzeln sehe man die absolut kleinere, als eine relativ größere an. Es erhalte x erstlich einen positiven Werth, der größer als die größte positive Wurzel ist, so ist der Werth der Gleichung positiv. Von diesem Werthe an gedenke man sich eine stetige Reihe von positiven Werthen für x bis zu 0, und ferner eine solche Reihe von negativen bis über die kleinste (absolut größte) negative hinaus, und nehme alle mögliche Wurzeln unter einander ungleich an. Jedem Werthe von x ist ein Werth der Gleichung, der y heiße, zugeordnet. So oft der Werth von x eine Wurzel der Gleichung ist, ist der zugehörige Factor der Gleichung = 0, also auch y = 0, und es geschieht für die Werthe von y ein Übergang ins Entgegengesetzte. Nämlich, wenn x größer als p ist, so sind alle Factoren der

Gleichung positiv, und y ist es auch. Für alle Werthe von x zwischen p und q ist ein Factor negativ, also sind alle zugehörigen Werthe von y negativ. Für alle Werthe von x zwischen q und r sind zwey Factoren negativ, aber dadurch sind die Werthe von y positiv. Die Werthe von x zwischen r und s machen drey Factoren der Gleichung negativ, und dadurch wird y wieder negativ. Solchergestalt geschieht in der Reihe der Werthe von y ein Übergang vom positiven zum negativen, oder vom negativen zum positiven, wenn $y = o$ wird, indem x eine Wurzel der Gleichung ist. Dieses ereignet sich auch in der Reihe der y, die zu negativen Werthen von x gehören. Die negativen Wurzeln der Gleichung seyn $-p'$, $-q'$, $-r'$, etc. nach der Folge ihrer absoluten Quantität von der kleinsten an, so entstehen daraus die Factoren, $x + p'$; $x + q'$; $x + r'$, etc. Jeder dieser ist positiv, wenn der absolute Werth des negativen x darin kleiner ist als die darin enthaltene Wurzel, aber negativ in dem entgegengesetzten Falle. Bey den Werthen von x, die eine Wurzel der Gleichung sind, und $y = o$ machen, geschieht also ebenfalls ein Übergang der Werthe der Gleichung zum Entgegengesetzten.

Die Gleichung habe zwey gleiche Wurzeln, q, die nächst größere sey p, die nächst kleinere r, so entstehen daraus die Factoren $(x - p)(x - q)(x - q)(x - r)$. Bey dem Übergange des Werthes x von q zu r (wenn x zwischen p und r fällt), ändert sich das Vorzeichen von y nicht, oder es ist kein Übergang zum Entgegengesetzten, weil zwey Factoren zugleich negativ werden. Eben so bey jeder geraden Anzahl gleicher Wurzeln.

Hingegen bey einer ungeraden Anzahl gleicher Wurzeln geschieht in den Werthen der Gleichung ein Übergang zum Entgegengesetzten, wenn x einer solchen Wurzel gleich ist.

Man mag für jede der gleichen Wurzeln auch einen Übergang zum Entgegengesetzten sich gedenken, nur daß bey einer geraden Anzahl alle Übergänge unmittelbar auf-

einander folgen und dadurch sich aufheben, eben so wie bey einer ungeraden Anzahl alle bis auf einen.

Umgekehrt ist aus einer entgegengesetzten Beschaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung zu schließen, daß zwischen den zugehörigen Werthen von x eine Wurzel oder eine ungerade Anzahl derselben liege. Denn es kann in der Reihe der Werthe von y kein Übergang zum Entgegengesetzten anders geschehen, als wenn ein Factor Null wird.

Hingegen ist eine gleichnamige Beschaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung nur dadurch möglich, daß entweder zwischen den dazu gehörigen Werthen von x keine Wurzel liegt, oder daß eine gerade Anzahl von Übergängen geschieht, indem zwischen den zugehörigen Werthen von x zwey, vier, oder irgend eine gerade Anzahl Wurzeln, auch gleicher, liegt.

174. Da das Product zweyer unmöglichen Wurzeln positiv ist, so mag man sie in dem Producte aller Wurzeln so gut zu den positiven als zu den negativen rechnen. In einer Gleichung eines ungeraden Grades sey das letzte Glied $= + k$, so ist $- k$ das Product aller Wurzeln, und die Gleichung hat eine ungerade Anzahl negativer Wurzeln, also wenigstens eine solche. Sie mag aber gar keine positive haben. Ist das letzte Glied $= - k$, so ist $+ k$ das Product aller Wurzeln, und die Anzahl der positiven ist ungerade, so daß es wenigstens eine mögliche positive giebt, dagegen die negativen alle fehlen können.

Die Gleichung sey von einem geraden Grade, und das letzte Glied $= + k$, so ist eben dieses das Product aller Wurzeln, die daher alle unmöglich seyn können. Ist das letzte Glied $= - k$, so hat die Gleichung eine ungerade Anzahl sowohl positiver als negativer Wurzeln, letztere wegen des Vorzeichens —, und dadurch eine ungerade Anzahl positiver, weil der Grad der Gleichung gerade ist, und die unmöglichen nur paarweise vorhanden sind.

175. Der Übergang von zwey möglichen, einander zunächst liegenden Wurzeln, zu zwey unmöglichen, durch die dazu dienliche Veränderung der Coefficienten, geschieht durch zwey einander gleiche Wurzeln. Zwischen zwey Wurzeln p und q liegen zwey mögliche $m + n$ und $m - n$, und keine andere. Wird $n = 0$ genommen, so entstehen daraus zwey gleiche, m, m, und wenn $n\sqrt{-1}$ statt n gesetzt wird, die unmöglichen $m \pm n\sqrt{-1}$. Die Summe ist für jedes Paar $= 2m$. Das Product jener erstern ist $= mm - nn$; das Product der gleich großen $= mm$, dasjenige der unmöglichen $= mm + nn$. Der Werth der Gleichung macht keinen Übergang zum entgegengesetzten, wenn der zugehörige Werth von x zwischen p und q genommen wird, sowohl in dem Falle zweyer gleichen Wurzeln als zweyer unmöglichen.

Dieses und das nächst vorhergehende kann man sich durch eine Zeichnung der Werthe einer Gleichung als Ordinaten einer Curve zu den Werthen von x als Abscissen sehr erläutern, nach der Anweisung in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

176. Wenn für die unbekannte Größe in einer Gleichung die Glieder einer arithmetischen Reihe gesetzt werden, so sind in einer Gleichung vom zweyten Grade die zweyten Unterschiede der Werthe der Gleichung unveränderlich, in einer Gleichung vom dritten Grade die dritten Unterschiede, allgemein in einer Gleichung vom mten Grade die mten Unterschiede der Werthe der Gleichung.

Der Satz ist schon in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 24, erwiesen. Man kann den Satz auch aus der allgemeinen Form der Glieder arithmetischer Reihen irgend einer Ordnung herleiten.

177. Es sey y ein Glied einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung, die Stelle desselben x, das Anfangsglied der Reihe sey A, die Anfangsglieder der Differenzreihen, nach ihrer Folge, a, b, c, d, etc. so ist (a. a. O. 7.)

$$y = A + x.a + \frac{x.x-1.}{1.2} b + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3} c$$

$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4} d \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x.x-1\ldots\ldots x-m+1}{1.2\ldots\ldots m} m',$$

wo m′ das beständige Differenzglied der mten Differenzreihe bedeutet. Entwickelt man die Glieder durch wirkliche Multiplication, und ordnet das Aggregat nach den Potenzen von x, so erhält y die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots Mx^m,$$

das ist, eben diejenige, welche der Werth einer Gleichung vom mten Grade mit ganzen Exponenten der unbekannten Größe hat. Dieser Werth ist also ein Glied einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung, deren mte Differenzreihe beständige Glieder enthält. Ist x eine ganze, positive, oder negative Zahl, so ist y ein Glied der Reihe, zu welcher die Differenzreihen mit den Anfangsgliedern, a, b, c, d, ... m′ gehören; ist x eine gebrochne Zahl, so ist y ein eingeschaltetes Glied. Sind die Stellen der Glieder der erweiterten Reihe in einfacher arithmetischer Fortschreitung, so sind die mten Unterschiede ebenfalls beständig, wie in der ursprünglichen Reihe (a. a. O. 25. ff.).

178. Vergleicht man die Coefficienten einer Gleichung mit den Coefficienten von x in dem entwickelten Werthe des Gliedes einer arithmetischen Reihe, so ergeben sich die Anfangsglieder der Differenzreihen, auf die Art, wie das folgende Beyspiel zeigt.

Die Gleichung sey

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

Man nehme die Werthe dieser Gleichung für die positiven Werthe 1, 2, 3, 4, 5 von x, und setze diese den Werthen der Glieder einer arithmetischen Reihe der fünften Ordnung für dieselben Werthe von x gleich, so ist

I. $A + B + C + D + E + F = A + a$

II. $A + 2B + 4C + 8D + 16E + 32F = A + 2a + b$

III. $A + 3B + 9C + 27D + 81E + 243F = A + 3a + 3b + c.$

IV. $A + 4B + 16C + 64D + 256E + 1024F = A + 4a + 6b + 4c + d$

V. $A + 5B + 25C + 125D + 625E + 3125F = A + 5a + 10b + 10c + 5d + e.$

Hieraus ergiebt sich nach der Reihe ganz leicht

$$a = B + C + D + E + F$$
$$b = 2C + 6D + 14E + 30F$$
$$c = 6D + 36E + 150F$$
$$d = 24E + 240F$$
$$e = 120F$$

In diesen Formeln liegen auch die für niedrige Gleichungen gehörige.

179. Exempel. Die Gleichung sey $x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 4x - 140 = 0$, so ist $A = -140$; $B = -4$; $C = +20$; $D = -10$; $E = +1$; $F = 0$. Daraus ist $a = +7$; $b = -6$; $c = -24$; $d = +24$. Die Reihe der Werthe der Gleichung mit den Gliedern der Differenzreihen für die ganzen Werthe x von $+8$ bis -2 enthält die folgende Tafel

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
— 2	+ 44	— 149	+ 114	— 72	+ 24
— 1	— 105	— 35	+ 42	— 48	+ 24
0	— 140	+ 7	— 6	— 24	+ 24
+ 1	— 133	+ 1	— 30	0	+ 24
+ 2	— 132	— 29	— 30	+ 24	+ 24
+ 3	— 161	— 59	— 6	+ 48	+ 24
+ 4	— 220	— 65	+ 42	+ 72	+ 24
+ 5	— 285	— 23	+ 114	+ 96	+ 24
+ 6	— 308	+ 91	+ 210	+ 120	+ 24
+ 7	— 217	+ 301	+ 330	+ 144	+ 24
+ 8	+ 84	+ 631	+ 474	+ 168	+ 24

180. Durch Hülfe der Differenzreihen lassen sich die Werthe einer numerischen Gleichung für eine Folge der x bequem berechnen, woraus man, mittelst des Vorzeichenwechsels die Zahlen erfährt, zwischen welchen Wurzeln liegen. In dem Exempel fällt eine Wurzel zwischen + 7 und + 8; eine zwischen — 1 und — 2. Die Beschaffenheit der Glieder in der Hauptreihe und in den Differenzreihen zeigt, daß die Gleichung nicht mehr als diese beiden möglichen Wurzeln haben kann.

181. Die Vorzeichenwechsel in der Reihe der Δy geschehen da, wo die Werthe von y am größten sind, in Beziehung auf die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder. Hätte die Gleichung vier mögliche Wurzeln, so müßte bey dem mittlern Wechsel der Vorzeichen in der Reihe Δy der Werth der Gleichung positiv seyn, (das Vorzeichen + haben), da er hier negativ ist. S. Größtes und Kleinstes.

VII. Von Gleichungen, in welchen zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind.

182. Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, habe zwey gleiche Wurzeln, so ist diejenige,

welche ihr zweymahl zukommt, eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung, $3x^2 - 2ax + b = 0$.

Bew. Die Wurzeln der cubischen Gleichung seyn p, p, q, so ist I. $2p + q = a$; II. $p^2 + 2pq = b$ (59.). Jene werde mit 2p multiplicirt, und darauf die zweyte abgezogen, so ist $3pp = 2ap - b$. Diese Gleichung giebt zwey Werthe für p, welches daher rührt, daß von den drey Wurzeln einer cubischen Gleichung, p, q, r, sowohl p und q als q und r gleich groß gesetzt werden können, wenn p, q, r die Folge der Wurzeln nach ihrer Größe und Beziehung ist. Da dies aber nicht zugleich geschehen kann, wenn nur zwey Wurzeln einander gleich seyn sollen, so giebt die quadratische Gleichung mit der gesuchten Wurzel noch eine fremde verbundene. Setzt man x statt p, so ist $3x^2 - 2ax + b = 0$.

183. Die Wurzel welche der biquadratischen Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, zweymahl zukommt, ist eine der Wurzeln der cubischen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$.

Bew. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung seyn p, p, q, r, so ist (89.)

$$\text{I. } 2p + q + r = a$$
$$\text{II. } p^2 + 2p(q + r) + qr = b$$
$$\text{III. } p^2(q + r) + 2pqr = c.$$

Daraus ist

$$\text{I. } 6p^3 + 3p^2(q + r) = 3ap^2$$
$$\text{II } 2p^3 + 4p^2(q + r) + 2pqr = 2bp$$
$$\text{III } p^2(q + r) + 2pqr = c.$$

Aus diesen folgt sogleich

$$\text{IV. } 4p^3 = 3ap^2 - 2bp + c.$$

Diese Gleichung für p steigt auf den dritten Grad, weil von den vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung

jede ihrer nächsten gleich gesetzt werden kann. Da aber nur zwey Wurzeln gleich groß seyn sollen, so sind mit der gesuchten Wurzel noch zwey fremde verbunden, und p ist eine der Wurzeln der Gleichung

$$4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0.$$

Man bemerke, daß hier wie bey der quadratischen Gleichung die Coefficienten die Exponenten der vorgegebenen Gleichung mit zwey gleichen Wurzeln sind.

184. Die biquadratische Gleichung habe drey gleich große Wurzeln, p, p, p, nebst einer andern q, so ist die Wurzel p eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$.

Denn es ist $3p + q = a$, und $3pp + 3pq = b$, woraus $6pp = 3ap - b$, so daß p eine der Wurzeln der Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$, ist.

Diese Gleichung hat mit der in (183.) gefundenen cubischen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$, die Wurzel gemein, welche derselben zweymahl zukommt. Denn sie entsteht daraus durch die Multiplication der Coefficienten mit den Exponenten von x, und Division aller durch die Zahl 2. Die cubische Gleichung hat daher in diesem Falle zwey gleich große Wurzeln mit der biquadratischen gemein. Von den vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung lassen drey sich nächste auf zweyerley Art sich gleich setzen.

185. Es sey gegeben die Gleichung,
$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, (A), und es sey zugleich $mx^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} - (m-3)cx^{m-4} + (m-4)dx^{m-5} - \text{etc.} = 0$, (B), so hat die Gleichung (A) zwey gleich große Wurzeln, von welchen eine der Gleichung (B) zukommt.

Ist zugleich $m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)ax^{m-3} + (m-2)(m-3)bx^{m-4} - (m-3)(m-4)cx^{m-5} + (m-4)(m-5)dx^{m-6} - \text{etc.} = 0$, (C),

so hat die Gleichung (A) drey gleiche Wurzeln, von welchen zwey der Gleichung (B) gehören, und eine in der Gleichung (C) enthalten ist.

Ist noch zugleich $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$
$-(m-1)(m-2)(m-3)ax^{m-4}$
$+(m-2)(m-3)(m-4)bx^{m-5}$
$-(m-3)(m-4)(m-5)cx^{m-6} + \text{etc.} = 0$,
(D), so hat die Gleichung (A) vier gleiche große Wurzeln, von welchen drey in (B), zwey in (C) enthalten sind, und eine in (D).

Bew. I Es sey p eine der Wurzeln in der Gleichung (A), eine andere $= p + u$, so ist

$$p^m - ap^{m-1} + bp^{m-2} - cp^{m-3} + dp^{m-4} - \text{etc.} = 0$$

und

$$(p+u)^m - a(p+u)^{m-1} + b(p+u)^{m-2} - c(p+u)^{m-3} + d(p+u)^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

II. Entwickelt man die Potenzen des Binomium (binomischer Lehrsatz, 1.), und zieht die erste Gleichung von der zweyten ab, ordnet auch die Glieder nach den Potenzen von u, so entsteht eine Gleichung von der Form,

$$Pu + Qu^2 + Ru^3 + Su^4 \ldots + u^m = 0, \text{ (M).}$$

III. Die Coefficienten sind

$$P = mp^{m-1} - (m-1)ap^{m-2} + (m-2)bp^{m-3} - (m-3)cp^{m-4} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{m.m-1.}{1.2}p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2}ap^{m-3} + \frac{m-2.m-3.}{1.2}bp^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2}cp^{m-5} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} ap^{m-4}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} bp^{m-5} - \text{etc.}$$
$$S = \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4} p^{m-4} - \frac{m-1..m-4.}{1..4} ap^{m-5}$$
$$+ \frac{m-2..m-5.}{1..4} bp^{m-6} - \text{etc.}$$

u. s. f.

IV. Die Gleichung (M) ist $= 0$, entweder dadurch, daß $u = 0$ ist, oder dadurch, daß

$$P + Qu + Ru^2 + Su^3 \ldots u^{m-1} = 0, \quad (N)$$

ist. Die Gleichung (N) steigt auf den $(m - 1)$ten Grad, weil der Unterschied einer Wurzel p in (A) von den übrigen $m - 1$ Wurzeln der Gleichung $m - 1$ Werthe hat. Der Unterschied der Wurzel p von ihr selbst, oder $p - p = 0$, giebt die Wurzel $u = 0$ der Gleichung (M).

V. Da die Gleichung (A) m Wurzeln hat, so entstehen m Gleichungen wie (N), und dadurch werden $m(m - 1)$ Werthe für u erhalten. Es sind so viele Unterschiede je zweyer Wurzeln in (A) vorhanden, als Paare von Wurzeln genommen werden können, also $\frac{1}{2}m(m - 1)$. Die Unterschiede können sowohl positiv als negativ seyn, wodurch $m(m - 1)$ Unterschiede entstehen.

VI. Es sey $P = 0$, aber nicht $Q = 0$, so wird in (N) eine Wurzel $u = 0$, also ein Werth von $p + u = p$, und die Gleichung (A) hat zwey gleich große Wurzeln. Die Annahme, $P = 0$, giebt

$$0 = mp^{m-1} - (m - 1)ap^{m-2} + (m - 2)bp^{m-3}$$
$$- (m - 3)cp^{m-4} + (m - 4)dp^{m-5} - \text{etc.} \quad (P),$$

Diese Gleichung steigt auf den (m — 1)ten Grad, weil es m — 1 Fälle giebt, wie unter m Wurzeln zwey gleiche seyn können. Ordnet man sie nämlich nach ihrer Größe, die größte positive voran, bis zu der kleinsten positiven, dann die absolut kleinste negative, bis zu der absolut größten, so können die erste und zweyte, oder die dritte und vierte, u. s. f. gleich groß seyn.

VII. So viele Paare gleicher Wurzeln (A) hat, so viele Wurzeln hat sie mit der Gleichung (P) gemein. Für jede andere Wurzel in (A), die keine ihr gleiche hat, findet die Gleichung (N) nicht Statt, als welche darauf beruht, daß der Unterschied zwischen zwey Wurzeln, p und $p + u$, Null sey. Die andern Wurzeln in (P), außer den mit (A) gemeinschaftlichen, sind daher als fremde Wurzeln zu betrachten.

VIII. Da $P = 0$ gesetzt ist, so verwandelt die Gleichung (N) sich in folgende,

$$Q + Ru + Su^2 + Tu^3 \ldots u^{m-2} = 0,$$

welche m — 2 Werthe von u, die nicht $= 0$ sind, enthält. Es sey $Q = 0$, aber nicht $R = 0$, so hat die Gleichung (N) zwey Wurzeln, die $= 0$ sind. Unterscheidet man die Wurzeln dieser Gleichung durch die Bezeichnungen u', u'', u''', etc. nach der Folge ihrer Quantität, so werden von den Wurzeln in (A), die nun durch p, $p + u'$, $p + u''$, $p + u'''$, etc. bezeichnet werden, die drey hier zuerst gesetzten gleich groß. Die Annahme, $Q = 0$, giebt

$$0 = \frac{m.m-1.}{1.2} p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2} a p^{m-3}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.}{1.2} b p^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2} c p^{m-5}$$
$$+ \text{etc. (Q).}$$

Die Gleichung steigt auf den (m — 2)ten Grad, weil es (m — 2) Fälle giebt, daß unter m Wurzeln drey gleich große vorhanden sind, als die erste, zweyte und

dritte, oder die zweyte, dritte und vierte, u. s. f. So oft (A) drey gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (Q) mit (A) gemein.

IX. Die Gleichung $Q = 0$ entsteht aus der, $P = 0$, auf gleiche Art, wie diese aus der, $A = 0$, entsteht. Es hat also die Gleichung, $P = 0$, zwey gleich große Wurzeln (oder Paare gleicher), von welchen eine (oder so viele als jene Paare) der Gleichung $Q = 0$ zukommt. Jene beiden sind daher zwey von den drey gleichen in der Gleichung, $A = 0$.

X. Da P und $Q = 0$ gesetzt sind, so verwandelt die Gleichung (N) sich in diese,

$$R + Su + Tu^2 \ldots u^{m-3} = 0,$$

welche $m - 3$ Werthe von u, die nicht $= 0$ sind, enthält. Ist $R = 0$, aber S nicht $= 0$, so hat die Gleichung (N) drey Wurzeln $= 0$, und die Gleichung (A) hat vier gleiche Wurzeln. Diese Annahme giebt

$$0 = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} a p^{m-4}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} b p^{m-5} - \text{etc.} \quad (R.)$$

So vielmahl (A) vier gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (A) mit (R) gemein. Die Gleichung, $P = 0$, enthält je drey von jenen Wurzeln, und die Gleichung, $Q = 0$, je zwey von denselben.

XI. Auf dieselbe Art werden die Gleichungen gefunden, welche von n gleichen Wurzeln der Gleichung (A) enthalten $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, ... 2, 1 Wurzeln.

XII. Multiplicirt man die gefundenen Gleichungen jede mit dem gemeinschaftlichen Theiler ihrer Glieder, und setzt x statt p, so erhält man die in dem Satze aufgeführten derivirten Gleichungen, welche mit der gegebenen Gleichung (A) eine Wurzel gemein haben, entweder einfach oder mehrfach.

XIII. Die Gleichung $P = 0$ ist der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn y der Werth der Gleichung (A) ist. Ferner ist die Gleichung $Q = 0$, der Differentialquotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$; die Gleichung $R = 0$, der Differentialquotient $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$, u. s. f. S. Größte und kleinste Werthe einer Function.

186. Die Gleichung (N) enthält die Relation irgend einer Wurzel von (A) und ihrem Unterschiede von jeder der übrigen Wurzeln. Verbindet man beide Gleichungen mit einander, so läßt sich x herausschaffen, und es ergiebt sich eine Gleichung zwischen u und den gegebenen Größen der Gleichung. Diese steigt aber auf den m(m —)ten Grad, weil der Unterschied u so viele Werthe hat, als Binionen zweyer Wurzeln, positiv oder negativ (p — q oder q — p) möglich sind, (185. V.) Wegen des gedoppelten Vorzeichens, $\pm$, sind in der Gleichung für u bloß die geraden Potenzen davon vorhanden.

187. Die Coefficienten dieser absoluten Gleichung für u werden auf dem Wege der Elimination sehr mühsam gefunden. La Grange hat eine sinnreiche Methode in den Mem. de l'Ac. de Berlin 1767. p. 330, sur la resolution des équations numériques, angegeben, die sich auf die Lehrsätze von der Relation der Summen der Combinationen und der Potenzen einer Anzahl Größen gründet. Sie kann aber nicht in der Kürze vorgetragen werden, daher hier die Anzeige für den geübten Leser genügen muß. Man findet sie auch in der vermehrten Ausgabe dieser beiden Abhandlungen à Paris An. VI. pag. 9. ff. p. 24. ff. und p. 118. ff. und in Michelsens Theorie der Gleichungen, S. 66. ff.

188. Wenn die Gleichung für u^2 gefunden ist, so dient sie zu entdecken, wie viele Paare gleich großer Wurzeln die Gleichung (A) hat. Sind zwey gleiche Wurzeln in derselben, so ist ein Werth von $u^2 = 0$, also das gegebene Glied $= 0$. Sind zwey Paare gleicher Wurzeln in (A), so ist zugleich der Coëfficient von $u^2 = 0$. Sind drey gleiche Wurzeln, oder drey Paare gleicher Wurzeln vorhanden, so sind außer dem gegebenen Gliede, die Coefficienten von u^2 und von $u^4 = 0$, u. s. w.

189. Auch dient die absolute Gleichung für u zur Entdeckung und Bestimmung der unmöglichen Wurzeln, s. Mém. de l Acad. de Berlin 1768. p. 113. ff. in den Zusätzen zu den angeführten Abh. von la Grange. Jeder positive Werth von u^2 zeigt zwey mögliche Wurzeln in (A) an. Ein negativer möglicher Werth von u^2 zeigt zwey unmögliche zusammengehörige Wurzeln $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ an. Ein unmöglicher Werth von u^2 entsteht aus dem Unterschiede einer möglichen und unmöglichen Wurzel, oder zweyer unmöglichen nicht zusammengehörigen. Allein wegen der Höhe der Gleichung für u, wenn (A) noch eine mäßige Höhe hat, ist es nicht leicht sich derselben zu diesen Absichten zu bedienen.

190. Wie die mehrfachen Wurzeln und die dazu erforderliche Relation der Coefficienten gefunden werden, zeigt das Verfahren an den niedrigern Gleichungen, durch Elimination der höhern Potenzen von x.

Die cubische Gleichung,

I. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$,

habe zwey gleiche Wurzeln, so ist

II. $3x^2 - 2ax + b = 0$,

zufolge (182.). Aus beiden wird

III. $ax^2 - 2bx + 3c = 0$,

Aus II. und III. entsteht

IV. $(2a^2 - 6b)x - (ab - 9c) = 0,$

und

V. $(ab - 9c)x - (2bb - 6ac) = 0.$

Hieraus ist $x = \frac{ab - 9c}{2aa - 6b},$

und $x = \frac{2bb - 6ac}{ab - 9c},$

also ist die Relation der Coefficienten in der Gleichung,

$(ab - 9c)^2 = 4(aa - 3b)(bb - 3ac),$

enthalten.

191. Die biquadratische Gleichung,

I. $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0,$

habe zwey gleiche Wurzeln, so ist (183.)

II. $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0.$

Aus der Verbindung beider Gleichungen folgt

III. $ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4d = 0.$

Aus II. und III. wird

IV. $(3aa - 8b)x^2 - (ab - 12c)x + (ac - 16d) = 0.$

V. $(ac - 16d)x^2 - (2bc - 12ad)x + (3cc - 8bd) = 0.$

Man setze zur Abkürzung

$3aa - 8b = A;\ 2ab - 12c = B;\ ac - 16d = C;$
$ac - 16d = \alpha;\ 2bc - 12ad = \beta;\ 3cc - 8bd = \gamma;$

so ist

VI. $(A\beta - B\alpha)x - (A\gamma - C\alpha) = 0,$

VII. $(A\gamma - C\alpha)x - (B\gamma - C\beta) = 0.$

Also ist $x = \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha},$

$$\text{und } x = \frac{B\gamma - C\beta}{A\gamma - C\alpha}.$$

Folglich

$$(A\gamma - C\alpha)^2 = (A\beta - B\alpha)(B\gamma - C\beta).$$

192. Exempel. Es sey $x^4 - 18x^3 + 93x^2 - 80x - 300 = 0$, so ist $A = +228$; $B = +2388$; $C = +6240$; $\alpha = +6240$; $\beta = +79680$; $\gamma = +242400$; $A\gamma - C\alpha = +16329600$; $A\beta - B\alpha = +3265920$; $B\gamma - C\beta = +81648000$. Beide Werthe von x sind sich gleich, und $= +5$.

193. Wenn $A\gamma = C\alpha$, und $B\gamma = C\beta$, daher auch $A\beta = B\alpha$ ist, so sind die Werthe $x = \frac{0}{0}$. Diese Form zeigt an, daß Zähler und Nenner einen Factor enthalten, der Null ist. Die Gleichung VII. entstehe aus VI. durch die Multiplication mit einer gewissen Größe, so ist $A : B = \alpha : \beta$; und $A : C = \alpha : \gamma$; auch $B : C = \beta : \gamma$, woraus sich jene drey Gleichungen ergeben. Die beiden quadratischen Gleichungen sind dadurch sich gleichgültig. Daher hat die biquadratische Gleichung zwey Paare gleicher Wurzeln, die durch die eine oder die andere quadratische Gleichung gegeben werden. Der Werth von x ist in diesem Falle zweyfach, und kann nicht durch eine einfache Gleichung gegeben werden. Drey gleiche große Wurzeln geben auch zwey Paare gleicher Wurzeln.

194. Dieses noch deutlicher einzusehen, bilde man eine biquadratische Gleichung durch die Multiplication der Quadrate,

$$x^2 - 2mx + m^2, \text{ und } x^2 - 2nx + n^2,$$

so daß

$$x^4 - 2(m+n)x^3 + (m^2 + n^2 + 4mn)x^2 - 2mn(m+n)x + m^2n^2 = 0.$$

Hier ist $a = 2(m+n)$; $b = m^2 + n^2 + 4mn$; $c = 2mn(m+n)$; $d = m^2n^2$; also $A = 4(m-n)^2$;

$B = 4(m+n)(m-n)^2$; $C = 4mn(m-n)^2$; dann noch $\alpha = 4mn(m-n)^2$; $\beta = 4mn(m+n)(m-n)^2$; $\gamma = 4m^2n^2(m-n)^2$. Folglich ist $A\gamma = C\alpha$; und $A\beta = B\alpha$; auch $B\gamma = C\beta$. Die beiden Gleichungen VI. und VII. in (191.) sind, nach geschehener Division durch die gemeinschaftlichen Factoren ihrer Glieder,

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0.$$

Diese Gleichung enthält die beiden Wurzeln, m, n, welche in der biquadratischen Gleichung beide zweymahl vorhanden sind.

195. Hat die biquadratische Gleichung die Wurzeln, p, p, p, q, so ist sie

$$x^4 - (3p+q)x^3 + 3p(p+q)x^2 - p^2(p+3q)x + p^3q = 0.$$

Aus den Coefficienten dieser Gleichung wird ebenfalls $A\beta = B\alpha$; $A\gamma = C\alpha$; $B\gamma = C\beta$, und die Gleichungen IV. V. in (191.) sind jede $x^2 - 2px + p^2 = 0$.

196. Die gleichen Wurzeln lassen sich auch dadurch finden, daß man den gemeinschaftlichen Theiler der gegebenen Gleichung und der abgeleiteten sucht, auf ähnliche Art wie bey Zahlen (s. Theiler gemeinschaftlicher). Die Form dieses Theilers ist durch die Voraussetzung wegen der Gleichheit der Wurzeln gegeben. Wenn $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$ ist, so haben C und B den gemeinschaftlichen Factor, den A und B enthalten. Ist ferner $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, so haben D und C denselben gemeinschaftlichen Factor wie B und C, also auch wie B und A, u. s. f.

Man kann auch zu A, B, C und D irgend welchen Factor setzen, oder von jedem einen in den andern nicht enthaltenen Factor absondern, ohne dadurch in Rücksicht der gemeinschaftlichen Factoren etwas zu ändern.

197. Exempel. Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, und die daraus hergeleitete, $3x^2 - 2ax + b = 0$, haben eine Wurzel gemeinschaftlich. Also haben die beiden Functionen,

$$A)\quad x^3 - ax^2 + bx - c$$
$$B)\quad x^2 - \tfrac{2}{3}ax + \tfrac{1}{3}b,$$

einen gemeinschaftlichen Factor, $x - p$, worin p die gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen ist. Multiplicirt man beyde mit 3, und dividirt 3(A) durch 3(B), so ist der erste Rest $= -ax^2 + 2bx - 3c$, wofür man auch das entgegengesetzte nehmen kann. Mit diesem dividire man die Function a(B), so ist der erste Rest $= -(2aa - 6b)x + (ab - 9c)$, oder auch $(2aa - 6b)x - (ab - 9c)$, das ist, $\left(x - \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}\right)(2aa - 6b)$. Der gemeinschaftliche Factor, $x - p$, der beiden Functionen, A, B, ist es auch von diesem Reste; also ist $x - p$ gleich dem Factor des Restes, der dieselbe Form hat; folglich ist $p = \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}$.

198. Die beiden Functionen,

$$P)\quad x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$
$$Q)\quad 4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c,$$

haben eine gemeinschaftliche Wurzel, p, wodurch jede derselben Null wird, oder P und $\frac{1}{4}Q$ haben den gemeinschaftlichen Factor, $x - p$. Um p zu finden, dividire man 4P durch Q, so ist der erste Rest

$$R)\quad -ax^3 + 2bx^2 - 3cx + 4d.$$

Das entgegengesetzte nehme man zum Divisor aQ, so ist der erste Rest entgegengesetzt genommen

S) $(3aa - 8b)x^2 - (2ab - 12c)x + (ac - 16d)$.

Nimmt man bey der Division den niedrigsten Theil, $+ 4d$, zum ersten Theil, so ist der erste Rest

T) $+ (8abd - 3ac^2)x - (12aad - 2abc)x^2$
$+ (16ad - aac)x^3$,

wovon die Factoren a und x abgesondert werden können. So wird dieser Rest, entgegengesetzt genommen,

T) $(ac - 16d)x^2 - (2bc - 12ad)x + (3cc - 8bd)$.

Dieser Rest hat wie S den Factor $x - p$. Gebraucht man die in (10) gemachten Bezeichnungen, so ist

S) $Ax^2 - Bx + C$.

T) $\alpha x^2 - \beta x + \gamma$.

Multiplicirt man S durch α, und dividirt durch T, so ist der Rest, entgegengesetzt genommen,

U) $(A\beta - B\alpha)x - (A\gamma - C\alpha)$,

oder

$$\left(x - \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}\right)(A\beta - B\alpha).$$

Da U den Factor $x - p$ hat, so ist $x - p$ gleich dem Factor von derselben Form, und daher

$$p = \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}.$$

Dividirt man T durch S, so erhält man für $x - p$ dasselbe Resultat. Nimmt man aber zum ersten Theil des Divisors das niedrigste Glied von T, nämlich γ, und multiplicirt C mit γ, so wird der Rest

V) $-(B\gamma - C\beta)x + (A\gamma - C\alpha)x^2$,

oder nach Absonderung des Factors x,

$(A\gamma - C\alpha)x - (B\gamma - C\beta)$.

Hieraus folgt $p = \dfrac{B\gamma - C\beta}{A\gamma - C\alpha}$.

199. Hat die biquadratische Gleichung zwey verschiedene Paare gleicher Factoren, so haben die Functionen P und $\frac{1}{4}Q$ einen quadratischen Factor, $x^2 - (m+n)x + mn$, gemein. Dieser ist in dem Reste S enthalten. Man gebe diesem, mit den abgekürzten Bezeichnungen, die Form,

$$\left(x^2 - \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) A,$$

so ist $m + n = \frac{B}{A}$; $mn = \frac{C}{A}$.

Eben derselbe ist aber auch in T enthalten. Dieser Rest giebt $m + n = \frac{\beta}{\alpha}$; $mn = \frac{\gamma}{\alpha}$. Dadurch ist $A\beta = B\alpha$; und $A\gamma = C\alpha$.

Hat die biquadratische Gleichung zwey gleiche Paare gleicher Wurzeln, das ist, drey gleiche, so ist $m = n$, und $2m = \frac{B}{A}$; $m^2 = \frac{C}{A}$, wo m die dreymahl vorhandene Wurzel bedeutet.

200. Der Satz (185.) oder eigentlich der umgekehrte läßt sich auch auf eine andere Art aus dem binomischen Lehrsatze herleiten, wozu folgender Vorbereitungssatz nöthig ist.

Es ist

$$(p + x)^n = p^n + {}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x + {}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + {}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3 + {}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + x^n,$$

wo die Binomial-Coefficienten auf die Th. I. S. 308, angegebene Art bezeichnet sind Die Glieder der Reihe rechter Hand multiplicire man folgeweise durch 0, 1, 2, 3, 4 . . n, so wird sie

$$1.\,{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x + 2.\,{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + 3.\,{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3 + 4.\,{}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + nx^n$$

Es ist

$$^{n}\mathfrak{A} = n; \quad 2 . {}^{n}\mathfrak{B} = n . n - 1 = n . {}^{n-1}\mathfrak{A};$$

$$3 . {}^{n}\mathfrak{C} = \frac{n . n - 1 . n - 2}{1 . 2} = n . {}^{n-1}\mathfrak{C}; \quad 4 \, {}^{n}\mathfrak{D}$$

$$= \frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2 . 3} = n . {}^{n-1}\mathfrak{D}; \text{ u. s. f.}$$

Also ist diese Reihe =

$$nx(p^{n-1} + {}^{n-1}\mathfrak{A}p^{n-2}x + {}^{n-1}\mathfrak{B}p^{n-3}x^2 + {}^{n-1}\mathfrak{C}p^{n-4}x^3$$
$$+ {}^{n-1}\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + x^{n-1}) = nx(p + x)^{n-1}.$$

201. Man multiplicire die Glieder der entwickelten Reihe für $(p + x)^n$ folgeweise mit den Zahlen $r, r + 1, r + 2, r + 3; \ldots r + n$, so ist dieses so viel als sie alle mit r, und sie dann noch folgeweise durch $0, 1, 2, 3 \ldots n$ multipliciren. Es ist also die Summe der folgeweise durch $r, r + 1; r + 2 \ldots r + n$ multiplicirten Glieder $= (nx + r(p + x))(p + x)^{n-1}$.

202. Die Function,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots + x^m,$$

sey ein Product aus den Factoren $(p + x)^n$ und $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + x^{m-n}$, so enthält die Function,

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots + mx^{m-1}$$

den Factor $(p + x)^{n-1}$; ferner

$$1 . 2C + 2 . 3Dx + 3 . 4Ex^2 \ldots (m - 1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p + x)^{n-2}$; ferner

$$1 . 2 . 3D + 2 . 3 . 4Ex \ldots + (m - 2)(m - 1)mx^{m-3}$$

den Factor $(p + x)^{n-3}$; u. s. f.

Bew. Man entwickele das angegebene Product folgendergestalt,

$$ap^n + a . {}^{n}\mathfrak{A}p^{n-1}x + a . {}^{n}\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + a . {}^{n}\mathfrak{C}p^{n-3}x^3$$
$$\ldots\ldots + ax^n$$
$$+ bp^n x + b . {}^{n}\mathfrak{A}p^{n-1}x^2 + b . {}^{n}\mathfrak{B}p^{n-2}x^3 + b . {}^{n}\mathfrak{C}p^{n-3}x^4$$
$$\ldots\ldots + bx^{n+1}$$

$$+cp^n x^2 + c.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^3 + c.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^4 + c.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^5$$
$$\ldots\ldots + cx^{n+2}$$
$$+dp^n x^3 + d.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^4 + d.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^5 + d.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^6$$
$$\ldots\ldots + d.x^{n+3}$$

+ etc.

Die Glieder der ersten Reihe multiplicire man folgeweise durch 0, 1, 2, 3 . . . n; die Glieder der zweyten eben so durch 1, 2, 3 . . n + 1; die Glieder der dritten durch 2, 3, 4 . . . n + 2; die Glieder der vierten durch 3, 4, 5 . . . n + 3, u. s. f. Dadurch entsteht aus der

ersten Reihe die Function	$nx(p+x)^{n-1}a$
zweyten Reihe	$(nx+p+x)(p+x)^{n-1}bx$
dritten Reihe	$(nx+2(p+x))(p+x)^{n-1}cx^2$
vierten Reihe	$(nx+3(p+x))(p+x)^{n-1}dx^3$

u. s. f.

Die Glieder jener Reihen, welche zu derselben Potenz von x gehören, werden mit derselben Zahl multiplicirt. Die Glieder der Function, $A + Bx + Cx^2 \ldots + x^m$, bestehen aus solchen Gliedern jener Reihen, welche mit ihnen dieselbe Potenz von x enthalten; die vorgenommene Multiplication der Glieder in diesen Reihen giebt daher eben das Resultat, als die Multiplication der Glieder in

$$A + Bx + Cx^2 \ldots + x^m$$

durch die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . m folgeweise wie die Glieder genommen. Die Summe aller dieser Producte, nämlich

$$0.A + 1.Bx + 2.Cx^2 + 3.Dx^3 \ldots + mx^m$$

ist daher der Summe der vorher gefundenen Functionen gleich. Sie enthält folglich den Factor $(p+x)^{n-1}$, der in allen diesen Functionen enthalten ist, oder die Function

$$B + 2Cx + 3Dx^2 \ldots + mx^{m-1}$$

hat den Factor $(p + x)^{n-1}$.

Daraus folgt nun eben so, daß

$$2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots + (m - 1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p + x)^{n-2}$ enthält, und so weiter bis daß n Factoren, $p + x$, abgesondert sind.

VIII. Von den Verwandlungen der Gleichungen.

203. Die gewöhnlichste Verwandlung der Gleichungen ist, daß man für die unbekannte Größe x eine andere, $k + y$, setzt, in welcher das Stück k willkührlich, nach einer besondern Absicht, bestimmt wird, als um das zweyte Glied wegzuschaffen, oder y einen Werth, kleiner als die Einheit zu geben. Bey der Aufsuchung der Gränzen der Wurzeln bedient man sich auch dieser Substitution.

204. Die gegebene Gleichung sey

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

Setzt man $x = k + y$, so ist (binomischer Lehrsatz) wenn die Binomial-Coefficienten nach (Binomial-Coefficienten, 1.) bezeichnet werden,

$$\begin{array}{lllll}
x^m & = y^m & + {}^m\mathfrak{A}ky^{m-1} & + {}^m\mathfrak{B}k^2y^{m-2} & + {}^m\mathfrak{C}k^3y^{m-3} + \text{etc.} \\
-ax^{m-1} & = & - \quad a \ldots & - {}^{m-1}\mathfrak{A}ak \ldots & - {}^{m-1}\mathfrak{B}ak^2 \ldots - \text{etc.} \\
+bx^{m-2} & = & & + \quad b \ldots & + {}^{m-2}\mathfrak{A}bk \ldots + \text{etc.} \\
-cx^{m-3} & = & & & - \quad c \ldots - \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Soll das zweyte Glied weggeschafft werden, so hat man ${}^m\mathfrak{A}k - a = 0$, das ist, $k = \frac{1}{m}a$, zu setzen. Sollte das dritte Glied wegzuschaffen seyn, so hätte man

eine quadratische Gleichung für k aufzulösen; um das vierte wegzuschaffen, eine Gleichung vom dritten Grade u. s. f.

205. Durch gehörige Annahme von k kann man allen Gliedern entweder wechselsweise verschiedene, oder durchgehends dieselben Vorzeichen geben, wodurch in jenem Falle alle Wurzeln y positiv, in diesem alle negativ werden. Dieses geschieht am leichtesten durch successive Versuche.

206. Wenn zwey Glieder zugleich weggeschafft werden sollen, so muß man setzen $x^2 + \alpha x = \beta + y$, wobey die Größen, α, β, so zu bestimmen sind, daß zwey gewisse Glieder in der neuen Gleichung für y wegfallen. Dieses muß durch Elimination der Größe x geschehen. Die Rechnung wird aber schon für niedrige Gleichungen weitläufig.

207. Es sey die gegebene Gleichung

I. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Mit dieser verbinde man folgende,

II. $x^2 - \alpha x + \beta = 0$,

welche mit jener eine Wurzel gemein habe. Aus der Verbindung beider wird erhalten,

III. $(a - \alpha)x^2 - (b - \beta)x + c = 0$.

Aus dieser und II. folgt

IV. $(a\alpha - \alpha^2 - b + \beta)x - a\beta + \alpha\beta + c = 0$,

$$\text{und } x = \frac{(a - \alpha)\beta - c}{(a - \alpha)\alpha - b + \beta}.$$

Aus II. und III. wird durch Wegschaffung der gegebenen Glieder erhalten,

V. $((a - \alpha)\beta - c)x + c\alpha - (b - \beta)\beta = 0$.

$$\text{also } x = \frac{(b - \beta)\beta - c\alpha}{(a - \alpha)\beta - c}.$$

Aus diesen beiden Werthen von x ergiebt sich die Relation zwischen α und β. Es ist

$$\text{VI. } \beta^3 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^2 + (ba\alpha - (ab - 3c)\alpha - 2ac + bb)\beta - c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2 = 0.$$

Wird α hier willkührlich angenommen, so ist β gegeben, aber wieder durch eine cubische Gleichung. Es kann nämlich jede der drey Wurzeln der cubischen Gleichung mit einer andern Wurzel in der quadratischen verbunden werden.

208. Nun setze man $\beta + y$ statt β, so wird eine cubische Gleichung für y erhalten, worin die zwey Größen α und β zu bestimmen bleiben. Diese Gleichung hat die Form,

$$y^3 + My^2 + Ny + P = 0.$$

Der Werth dieser Gleichung für irgend ein y sey $= z$. Für $y = 0$, ist $z = P$, dem Werthe der Gleichung VI. Nun wird z aus P, wenn $\beta + y$ statt β gesetzt wird. Also ist

$$z = P + \frac{\partial P}{\partial \beta} y + \frac{\partial^2 P}{2\partial \beta^2} y^2 + \frac{\partial^3 P}{6\partial \beta^3} y^3,$$

s. Differenzenrechnung, 17, 38. wo für x, fx, u, f(x+u) hier kommen β, P, y, z. Wird $z = 0$ gesetzt, so ist

$$N = \frac{\partial P}{\partial \beta}; \; M = \frac{\partial^2 P}{2\partial \beta^2}; \; 1 = \frac{\partial^3 P}{6\partial \beta^3}$$

Es ist also

$$P = \beta^3 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^2 + (ba\alpha - (ab - 3c)\alpha - 2ac + bb)\beta - c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2$$

$$N = 3\beta^2 - 2(a\alpha - aa + 2b)\beta + b\alpha^2 - (ab - 3c)\alpha - 2ac + b^2.$$

$$M = 3\beta - a\alpha + aa - 2b$$

Setzt man $M = 0$; $N = 0$, so sind dadurch die Werthe von α und β bestimmt, und jeder wird unmittelbar durch eine quadratische Gleichung gefunden. Durch die Werthe von α und β ist P gegeben, also $y = -\sqrt[3]{P}$, und daraus endlich x mittelst der quadratischen Gleichung, $x^2 - \alpha x + \beta + y = 0$.

Dieses ist eine Probe von der Tschirnhausischen Methode, die in (132.) erwähnt ist. Nach dieser Probe wird man sich derselben zu bedienen schwerlich Lust haben.

209. Eine andere Verwandlung ist, $x = \frac{k}{y}$ zu setzen. Dadurch werden die größern Wurzeln in kleinere, und die kleinern in größere verwandelt. Ist $k = 1$, so treten dadurch in die Stelle der Wurzeln x, die eigentliche Brüche sind, in der verwandelten Gleichung alle y, die größer als die Einheit sind. Hat die Gleichung für x keine Wurzeln zwischen $+1$ und -1, so hat die Gleichung für y alle ihre Wurzeln zwischen diesen Gränzen. Sind die ganzen Zahlen g und $g + 1$ zwey Gränzen für eine oder mehrere Wurzeln x, so setze man $x = g + \frac{1}{y}$, und die Gleichung für y enthält so viele Wurzeln, größer als $+1$, als so viele x zwischen g und $g + 1$ liegen. Dieses Verfahren wird unten zur Entdeckung der mehrern Wurzeln zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen angewandt werden.

210. Wenn in einer Gleichung die höchste Potenz der unbekannten Größe einen Coefficienten hat, wie in der Gleichung, $ax^m - bx^{m-1} + cx^{m-2} - dx^{m-3} + \text{etc.} = 0$, so dividire man, um diesen Coefficienten wegzuschaffen, die ganze Gleichung durch a, oder man setze $x = \frac{y}{a}$, und multiplicire die dadurch entstandene Gleichung mit a^{m-1}, so ist die transformirte,

$$y^m - by^{m-1} + acy^{m-2} - a^2dy^{m-3} + a^3ey^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

211. Die Gleichung,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \ldots \pm k = 0,$$

werde durch das letzte gegebene Glied dividirt, so erhält sie die Form,

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots \mp \frac{a}{k} x^{m-1} \pm \frac{1}{k} x^m = 0.$$

Sind die Wurzeln jener Gleichung, p, q, r, s, t etc. so sind die Wurzeln in der zweyten Form noch dieselben, aber der Werth der Gleichung für irgend einen Werth von x nach der zweyten Form ist =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$
$$\left(1 - \frac{x}{t}\right). \text{ etc.}$$

Denn in der erstern Form ist (165. 167.) der Werth der Gleichung das Product

$$(x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s).\ \text{etc.}$$

Das gegebene Glied $\pm k$ ist das Product aus allen, den Wurzeln entgegengesetzten Größen, oder $(-p)\ (-q)\ (-r)\ (-s)$ etc. Wird die Gleichung durch $\pm k$ dividirt, so wird ihr Werth, oder das Product, $(x-p)(x-q)$ etc. auch dadurch dividirt. Dieses geschieht dadurch, daß man jeden Factor durch das entgegengesetzte der zugehörigen Wurzel dividirt. Dadurch ist der Quotient =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$
$$\left(1 - \frac{x}{t}\right). \text{ etc.}$$

so wie der Quotient von der Division der Gleichung durch $\pm k$ ist

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots \pm \frac{1}{k} x^m.$$

212. In der zweyten Form ist I. α die Summe aller reciproken Wurzeln, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$ II. β die Summe aller Producte der reciproken Wurzeln nach Binionen, $\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} + \text{etc.}$ III. γ die Summe aller Producte nach Ternionen, $\frac{1}{pqr} + \frac{1}{prs} + \frac{1}{qrs} + \text{etc.}$ IV. δ die Summe aller Producte nach Quaternionen, als $\frac{1}{pqrs}$, etc. u. s. w. Der Beweis ist schon in dem Artikel, Buchstabenrechnung, 19. gegeben.

Hievon wird bey unendlichen Reihen, als Gleichungen von einem unendlich hohen Grade, oder Werthen solcher Gleichungen, Gebrauch gemacht, um die Relationen ihrer Wurzeln zu den Combinationen nach Producten zu finden.

213. Gleichungen, worin gebrochne Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, rational zu machen, setze man die höchste Radikalgröße auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, die übrigen Glieder alle auf die andere, und erhebe jene auf die Potenz des gleichen Grades wie die Wurzel. Dann bringe man die Radikalgröße, welche nun von dem höchsten Grade ist, auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, und mache sie durch Erhebung rational. So fahre man fort, bis alle irrationale Größen aufgehoben sind.

214. Exempel. Es sey $a - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$. Auf beiden Seiten quadrirt, ist $a^2 - 2a\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$. Es ist hier die Erhebung auf die vierte Po-

tenz nicht nöthig, weil nur bloß die zweyte und vierte Wurzel vorkommen, wovon jene das Quadrat dieser ist. Ferner ist

$$a^2 + x = (2a + x)\sqrt{x}, \text{ also}$$

$$a^4 + 2a^2x + x^2 = 4a^2x + 4ax^2 + x^3,$$

oder

$$x^3 + (4a - 1)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0.$$

215. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Gleichung vorhanden sind, und die Irrationalität bloß von der Ausziehung der Quadratwurzel herrührt, so kann man die gezeigte Methode auch bey denselben anwenden; aber nicht, wenn höhere Wurzelgrade vorkommen.

216. In einer Gleichung M) verwandle man die Vorzeichen aller ungeraden Potenzen in die entgegengesetzten, so sind in der neuen Gleichung N) die Wurzeln denen in M) gleich, aber entgegengesetzt. Ist das höchste Glied eine ungerade Potenz, so verwandle man darauf in N) alle Vorzeichen durchgehends in die entgegengesetzten, um dem höchsten Gliede das Vorzeichen + zu lassen. Oder, man verwandle in diesem Falle gleich anfangs die Vorzeichen der geraden Potenzen in M) in die entgegengesetzten.

217. Die beiden Gleichungen,

$$\text{M)}\ x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0,$$

$$\text{N)}\ x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0,$$

welche dieselben, aber entgegengesetzte Wurzeln haben, multiplicire man in einander, so entsteht daraus die Gleichung,

$$P)\ 0 = x^{2m} + 2bx^{2m-2} + 2dx^{2m-4} + 2fx^{2m-6} + \text{etc.}$$
$$-aa\ ..\ -2ac\ ..\ -2ae\ ..$$
$$+bb\ ..\ +2bd\ ..$$
$$-cc\ ..$$

Die Gleichung P) enthält die Wurzeln von M) und N) zusammen, oder m Paare gleicher und entgegengesetzter Wurzeln.

218. Den Unterschied der Exponenten setze man $\frac{1}{2}$, wodurch die Gleichung M) Quadratwurzeln enthält, auch sey m eine ganze Zahl, oder habe die Form $\frac{1}{2}(2n+1)$. Durch die Verwandlung von M) in die Gleichung P) wird jene Gleichung eine rationale.

Der Unterschied der Exponenten sey $\frac{1}{4}$, und 4m eine ganze Zahl, so enthält die Gleichung M) theils Quadratwurzeln, theils Biquadratwurzeln. Sie werde zuerst in eine Gleichung P) verwandelt, die nun noch bloß Quadratwurzeln enthält; und diese darauf in eine Gleichung Q), die ganz rational ist.

219. Exempel. Wie in (214.) sey

$$M)\ 0 = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{4}} - c.$$

Hier ist die Einheit für die Exponenten $\frac{1}{4}$, so daß das dritte Glied fehlt. Mit dieser Gleichung verbinde man die Gleichung,

$$N)\ 0 = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{4}} + c,$$

so entsteht daraus

$$P)\ 0 = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{2}} + 2cx^{\frac{1}{2}} - c^2.$$

Diese multiplicire man durch die Gleichung,

$$Q)\ 0 = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{2}} + 2cx^{\frac{1}{2}} + c^2,$$

so entsteht die rationale Gleichung,

$$S)\ 0 = x^3 + (4c - 1)x^2 + 2c^2x - c^4,$$

wie oben.

220. Die Gleichung

$$M)\ 0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.}$$

multiplicire man mit der

$$N)\ 0 = x^{2m} - \alpha x^{2m-1} + \beta x^{2m-2} - \gamma x^{2m-3} + \delta x^{2m-4} - \text{etc.}$$

so entsteht daraus die Gleichung

$$\begin{array}{llllll} P)\ 0 = x^{3m} & - ax^{3m-1} & + bx^{3m-2} & - cx^{3m-3} & + dx^{3m-4} & \\ & - \alpha x\ .\ . & + a\alpha\ .\ . & - b\alpha\ .\ . & + c\alpha\ .\ . & \\ & & + \beta\ .\ . & - a\beta\ .\ . & + b\beta\ .\ . & \\ & & & - \gamma\ .\ . & + a\gamma\ .\ . & \\ & & & & + \delta\ .\ . & \\ & & & + \text{etc.} & & \end{array}$$

Man setze hier die Coefficienten derer Glieder, worin die Exponenten von x durch 3 nicht theilbar sind, $= 0$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$Q)\ 0 = x^{3m} - Ax^{3m-3} + Bx^{3m-6} - Cx^{3m-9} + \text{etc.}$$

deren Coefficienten durch die Werthe von α, β, γ, δ, etc. gefunden werden. Für diese Größen, deren Anzahl $2m$ ist, sind eben so viele Gleichungen des ersten Grades vorhanden, wodurch sie eine nach der andern bestimmt werden.

Da die Gleichung Q bloß Potenzen von x^3 enthält, so dient sie eine Gleichung von der Form

$$0 = x^{\frac{m}{3}} - ax^{\frac{m-1}{3}} + bx^{\frac{m-2}{3}} - cx^{\frac{m-3}{3}} + \text{etc.}$$

rational zu machen.

221. Exempel. Es sey

$$M)\ x^{\frac{2}{3}} - ax^{\frac{1}{3}} + b = 0;$$

so ist

$$\begin{aligned} 0 &= a + \alpha \\ 0 &= b + a\alpha + \beta \\ 0 &= b\beta + a\gamma + \delta \\ 0 &= b\gamma + a\delta \end{aligned}$$

indem hier

$$N)\ 0 = x^{\frac{4}{3}} - \alpha x^{\frac{3}{3}} + \beta x^{\frac{2}{3}} - \gamma x^{\frac{1}{3}} + \delta$$

ist.

Daraus ist

$$\alpha = -a; \qquad \beta = aa - b$$
$$\gamma = -ab; \qquad \delta = +bb.$$

Hieraus ist

$$A = b\alpha + a\beta + \gamma = a^3 - 3ab$$
$$B = b\delta = b^3,$$

also

$$Q)\quad x^2 - (a^3 - 3ab)x + b^3 = 0.$$

222. Exempel in Zahlen. Es sey $\sqrt[3]{x} = y$, und $y^2 - 7y + 10 = 0$. Diese Gleichung auf den sechsten Grad erhöht, so daß sie einer quadratischen gleichgültig bleibe, ist

$$y^6 - 133y^3 + 1000 = 0,$$

oder

$$(y^3)^2 - 133\,(y^3) + 1000 = 0.$$

Die Wurzeln jener sind + 2 und + 5; die Wurzeln von der erhöheten, aber als einer quadratischen, sind die Cubi von 2 und 5, oder + 8 und 125.

223. Man sehe über diese Elevations-Methode, Lamberts Beyträge zur Mathematik, 2 Th. VIII. Fischers Aufsätze über die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen, in Hindenburgs Archiv der Mathematik, 6tes und 8tes Heft. Haubers Auflösung des Elevationsproblems für Gleichungen, in Hindenburgs Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Von Fermats Methode, irrationale complexe Größen wegzubringen, in dem Artikel Irrational.

224. Die erhöhte Gleichung enthält alle Wurzeln der niedrigern M), und noch dazu die Wurzeln der Gleichung N). Dieses sind fremde Wurzeln, die nicht zu den in der Frage gesuchten gehören, und nur durch die Wegschaffung der Irrationalität eingeführt sind. Die erhöhte Gleichung ist ein Product aus zwey Gleichungen, von welchen eine nur eine solchergestalt angenommene ist, so daß sie gewissen Bedingungen Genüge thut.

225. Wie die Brüche aus den Coefficienten wegzuschaffen sind, zeigt folgendes Beyspiel.

Die Gleichung sey

$$x^3 - \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{n}x - \frac{c}{p} = 0.$$

Man nehme die kleinste Zahl h, worin die Nenner m, n, p, aufgehen, und setze $x = \frac{y}{h}$, so ist

$$\frac{y^3}{h^3} - \frac{ay^2}{mh^2} + \frac{by}{nh} - \frac{c}{p} = 0.$$

Multiplicirt man mit h^3, so ist

$$y^3 - \frac{ah}{m}y^2 + \frac{bh^2}{n}y - \frac{ch^3}{p} = 0,$$

wo die Coefficienten zufolge der gemachten Bedingung für die Zahl h alle ganze Zahlen sind.

IX. Auflösung numerischer Gleichungen.

226. Die Gleichungen mit numerischen Coefficienten können alle entweder ganz genau, oder so genau als es nöthig ist, durch Näherung aufgelöset werden; selbst die unmöglichen Wurzeln lassen sich zufolge (189.) durch die Hülfsgleichung für die Unterschiede je zweyer Wurzeln bestimmen.

227. Eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, und der zu dem höchsten Gliede gehörige $= 1$ ist, hat keine rationale gebrochne Wurzeln.

In der qaudratischen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, seyn die Coefficienten ganze Zahlen. Wäre eine Wurzel der rationale Bruch $\frac{p}{m}$, in den kleinsten Zahlen ausgedruckt, so wäre die andere $= a - \frac{p}{m} = \frac{ma - p}{m}$, gleichfalls in den kleinsten Zahlen. Das Product $\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{m}$ zweyer auf die kleinsten Zahlen gebrachten Brüche kann nicht eine ganze Zahl, b, seyn, da kein Factor von m in p und in q enthalten ist.

Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ habe bloß ganze Zahlen zu Coefficienten. Man setze, daß sie rationale Brüche zu Wurzeln habe. Nun zerlege man sie in das Product,

$$(x^2 - \alpha x - \beta)\left(x - \frac{p}{m}\right),$$

wo $\frac{p}{m}$ eine der Wurzeln ist. Dieses Product entwickelt ist

$$\begin{array}{llll} x^3 - & \alpha x^2 + & \beta x & \\ & -\frac{p}{m} \cdot\cdot + & \frac{\alpha p}{m} \cdot\cdot - & \frac{\beta p}{m}. \end{array}$$

Hier ist $\alpha + \frac{p}{m}$ eine ganze Zahl, also α ein Bruch, $\frac{q}{m}$, der sich nicht verkleinern läßt, (denn der Factor von m, der in q aufgeht, müßte auch in p auf-

gehen), und $\frac{\alpha p}{m} = \frac{pq}{mm}$, eben ein solcher Bruch. Da b eine ganze Zahl ist, so ist β ein Bruch, $\frac{r}{mm}$, der sich nicht verkleinern läßt. Das gegebene Glied des Products ist nun eben ein solcher Bruch, $\frac{pr}{m^3}$, welcher nicht dem als eine ganze Zahl angesetzten Gliede, c, gleich seyn kann.

Auf dieselbe Art wird für alle Gleichungen gezeigt, daß sie keine rationale Brüche zu Wurzeln haben, wenn die Coefficienten alle ganze Zahlen sind.

228. Ist eine solche Gleichung gegeben, so suche man zuerst, ob sie nicht ganze Zahlen zu Wurzeln habe. Da das gegebene Glied das Product aller Wurzeln ist, so versuche man alle ganze Factoren desselben mit beiderley Vorzeichen. Die Arbeit ist langwierig, wenn das gegebene Glied viele Factoren hat. Sie wird durch folgendes Verfahren sehr abgekürzt. In der gegebenen Gleichung A) setze man $y + 1$ und $y - 1$ für x, so erhält man zwey neue Gleichungen B) und C). Hat A eine ganze Zahl (oder mehrere) zur Wurzel, so muß das letzte Glied in B) einen Factor enthalten, der um 1 kleiner ist als einer der Factoren des letzten Gliedes in A), wenn diese mit beiden Vorzeichen genommen werden. Hingegen das gegebene Glied in C) muß einen Factor enthalten, der um 1 größer ist, als eben dieser Factor des letzten Gliedes in A). So viele Wurzeln in A) ganze Zahlen sind, so oft muß dieses eintreffen. Um das letzte Glied von B) zu finden, hat man nur nöthig für x zu setzen $+ 1$, und um denselben in C) zu erhalten, $x = - 1$ zu setzen.

229. Exempel. Es sey $x^6 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Man setze $x = + 1$, so ist das Aggregat der Glieder $= + 80$; setzt man

$x = -1$, so ist es $= +720$. Die absoluten Factoren von 312 sind

einfache . . . 1, 2, 2, 2, 3, 13
zweyfache . . . 4, 6, 26, 39
dreyfache . . . 8, 12, 52, 39
vierfache . . . 24, 104, 156
die Zahl . . . 312.

Von der Zahl 80 braucht man unmittelbar nur die einfachen Factoren, 1, 2, 2, 2, 2, 5, und von der Zahl 720 ebenfalls nur diese, nämlich 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, anzuzeichnen. Unter den Factoren der Zahl 312 sind nur folgende, welche um 1 vermindert einen Factor von 80 geben, $+2$, $+3$, $+6$, -1, -8, -4, -39. Folgende um 1 vergrößert geben Factoren von 720, nämlich $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+39$, $+8$, -2, -3, -13, -4, -5. Von diesen Factoren der Zahlen 80 und 720 können nur die gemeinschaftlichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung seyn, also $+2$, $+3$, -3, -4. Da hier nur vier Wurzeln gefunden sind, und fünf sich zeigen müßten, wenn alle möglich wären, so ist eine von den gefundenen vier Zahlen keine Wurzel. Diese ist, wie die Probe mit den Zahlen zeigt, die Zahl -3. Die möglichen Wurzeln sind $+2$, $+3$, -4.

Man sehe Newtons Arithm. univers. p. 37. de inventione divisorum. Auch Clairauts Algebra, III. Theil, und mehrere Schriftsteller von der Algebra.

230. Ist eine Wurzel, die p heiße, in ganzen Zahlen gefunden, so wird die Gleichung durch den Factor $x - p$, wodurch sie theilbar ist, dividirt, und dadurch um einen Grad erniedrigt. So viele Wurzeln gefunden sind, so viele Divisionen.

231. Die irrationalen Wurzeln einer Gleichung, es sey der gegebenen unmittelbar, oder der erniedrigten, zu finden, suche man zuerst die Gränzen sämmtlicher Wurzeln in ganzen Zahlen. Dieses geschieht dadurch, daß

man in der Gleichung für x zuerst setzt $x = y - g$, und g so bestimmt, daß alle Wurzeln der Gleichung für y positiv sind, oder daß die Vorzeichen alle abwechseln, für $x = y - g + 1$ aber eine einzige Folge gleichnamiger Vorzeichen entstehe. Zweytens setzt man $x = y + h$, und sucht einen Werth von h, wodurch alle Wurzeln in der Gleichung für y negativ werden, indem alle Vorzeichen gleichnamig sind, so aber daß $x = y + h - 1$ eine Abwechslung der Vorzeichen gebe, also eine Wurzel positiv wird.

Die erste Bestimmung, $x = y - g$ giebt $y = x + g$, also ist, wenn jede Wurzel y positiv ist, g größer als jede negative Wurzel x. Ist aber $x + g - 1$ zugleich negativ, so zeigt dies an, daß $g - 1$ kleiner als die größte negative Wurzel, absolut genommen, ist.

Die zweyte Bestimmung $x = y + h$ giebt $y = x - h$: also ist, wenn jede Wurzel y negativ ist, h größer als jede positive Wurzel x. Da aber zugleich $x - h + 1$ ein positives y giebt, so ist $h - 1$ kleiner als die größte positive Wurzel x.

232. Hierauf setze man für x die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche zwischen den beiden Gränzen, g, h, enthalten ist, und berechne die zugehörigen Werthe y der Gleichung. Für eine Gleichung vom dritten Grade hat man nur vier Werthe von y unmittelbar zu berechnen nöthig, für eine Gleichung vom vierten Grade fünf, u. s. f. Aus diesen finde man die ersten Unterschiede, daraus die zweyten, und so weiter, bis zu dem beständigen Unterschiede. Hat man diesen gefunden, so erhält man daraus rückwärts die vorletzten Unterschiede, aus diesen die nächst vorhergehenden, u. s. w. bis daß man auf die Werthe y selbst kommt. Werden für x die ganzen Zahlen nach der Reihe gesetzt, so bediene man sich der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen, (178.), wie in (179.) geschehen ist.

233. Zwischen denjenigen Werthen von x, bey welchen die Vorzeichen von y wechseln, liegt eine Wurzel

der Gleichung; finden sich so viele Zeichenwechsel als die Gleichung Wurzeln haben kann, so ist weiter nichts nöthig, als die Wurzeln genauer zu bestimmen. Sonst aber muß man suchen, wo zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen Wurzeln versteckt seyn mögen, ob es gleiche Wurzeln gebe, oder ob unmögliche vorhanden seyn müssen.

234. Für $x = p$, einer ganzen Zahl, sey der Werth der Gleichung $= \pm A$; für $x = p + 1$ sey der Werth $= \mp B$, wo A und B bloß die Quantität bedeuten. Da $A + B$ die Veränderung des Werthes der Gleichung für die Veränderung 1 von x ist, so ist $\frac{A}{A+B}$ beynahe die Veränderung von $x = p$, wodurch der Werth der Gleichung $= 0$ wird, und $p + \frac{A}{A+B}$ ist der erste genäherte Werth der Wurzel.

235. Man setze $p + \frac{A}{A+B} = q$, und die Wurzel $x = q + u$. Diesen Werth setze man in der Gleichung für x, so erhält man eine Gleichung für u, zwar von demselben Grade wie die für x, worin aber eine Wurzel ein Bruch ist, daher die Glieder, worin das Quadrat und die höhern Potenzen von u enthalten sind, wenigen Einfluß auf den Werth von u haben, es müßten denn die Coefficienten groß seyn. Der Werth von u wird also beynahe durch eine einfache Gleichung gefunden. Den genäherten Werth von u setze man r, und $u = r + v$, so erhält man durch die Substitution von $r + v$ für u eine Gleichung für v, worin v ein kleinerer Bruch als die Wurzel in der Gleichung für u ist. Auf diese Art hat man fortzufahren, so weit als es zur Bestimmung der Wurzel x nach den Umständen erforderlich ist.

236. Bequemer behält man die Gleichung für u bey, und setzt folgeweise die genäherten Werthe von u in die Glieder mit den höhern Potenzen, wodurch der Werth

von u immer genauer bestimmt wird. Ein Beyspiel wird dieses ohne umständliche Vorschriften deutlich machen.

237. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ zu finden.

I. Man setze $x = y - g$, so ist

$$\begin{array}{rlllll} & x^3 = & y^3 & - 3gy^2 & + 3g^2y & - g^3 \\ - & 9x^2 = & & - 9 \;.. & + 18g \;.. & - 9g^2 \\ - & 4x = & & & - 4 \;.. & + 4g \\ + & 100 = & & & & + 100 \end{array}$$

Damit je zwey Vorzeichen wechseln, ist es nur nöthig, das letzte Glied subtractiv zu machen. Für $g = 3$ ist es $+ 4$; für $g = + 4$ ist es $- 92$. Die Gränze der negativen Wurzeln ist daher $- 4$.

II. Man setze $x = y + g$, so ist

$$\begin{array}{rlllll} & x^3 = & y^3 & + 3gy^2 & + 3g^2y & + g^3 \\ - & 9x^2 = & & - 9 \;.. & - 18g \;.. & - 9g^2 \\ - & 4x = & & & 4 \;.. & - 4g \\ + & 100 = & & & & + 100 \end{array}$$

Nun nehme man g so, daß alle Vorzeichen + werden. Wegen des zweyten Gliedes ist $g > 3$; wegen des dritten ist $g > 6$; wegen des letzten ist $g > 7$, und $+ 8$ ist die Gränze der positiven Wurzeln.

III. Da die dritte Wurzel sich aus den zwey andern ergiebt, so ist es nicht nöthig, eine Folge von Werthen der Gleichung zu berechnen.

IV. Der Werth der Gleichung für $x = + 7$ ist $= - 26 = - A$; und für $x = + 8$ ist der Werth $= + 4 = + B$. Also $\frac{A}{A + B} = \frac{26}{30} = 0,9$ beynahe. Es sey $x = 7,9 + u$, so ist

$$x^3 = +493{,}039 + 187{,}23u + 23{,}7u^2 + u^3$$
$$-9x^2 = -561{,}690 - 142{,}20.. - 9{,}0..$$
$$-4x = -31{,}600 - 4{,}00..$$
$$+100 = +100$$

$$0 = -0{,}251 + 41{,}03u + 14{,}7u^2 + u^3$$

oder

$$41{,}03u = +0{,}251 - 14{,}7u^2 - u^3.$$

Demnach $u = 0{,}006$ nahe. Dieser Werth in die beiden höchsten Glieder gesetzt, giebt

$$41{,}08u = +0{,}251 - 0{,}0005292$$
$$- 0{,}000000216$$
$$= 0{,}250471 \ldots$$

Daher $u = 0{,}006104$, weil das in dem ersten Werthe von u weggelassene Stück, 0,0001 einen Fehler von nicht 0,00002 giebt, daher man die Division bis zu der vierten Ziffer des Quotienten fortsetzen darf. Setzt man nun für u^2 und u^3 die verbesserten Werthe, so wird u noch viel genauer gefunden. Es genüge $u = 0{,}006104$, so ist $x = 7{,}906104$.

V. Die hier einzige negative Wurzel fällt zwischen -3 und -4. Es ist $+A = +4$; $-B = -92$, also $\frac{A}{A+B} = \frac{4}{92}$, und $x = -3{,}04 - u$. Demnach ist

$$x^3 = -28{,}094464 - 27{,}7248u - 9{,}12u^2 - u^3$$
$$-9x^2 = -83{,}1744 - 54{,}72 .. - 9{,}00..$$
$$-4x = +12{,}16 + 4{,}00 ..$$
$$+100 = +100{,}00$$

$$0 = +0{,}891136 - 78{,}4448u - 18{,}12u^2 - u^3$$

oder

$$78{,}4448\,u = 0{,}891136 - 18{,}12\,u^2 - u^3,$$

und $u = 0{,}0113$ beynahe, da das zweyte Glied in der dritten Decimalstelle anfängt. Setzt man diesen Werth in das zweyte und dritte Glied des zweyten Theils der Gleichung, so wird $u = 0{,}0113305$, also $x = -3{,}0513305$.

VI. Die dritte Wurzel wird aus dem Coefficienten von x^2 gefunden. Es ist 9 die Summe der drey Wurzeln, also ist die dritte Wurzel $= +9 - 7{,}906104 + 3{,}051330 = +4{,}145226$.

VII. Zur Probe der Rechnung dient das gegebene Glied der Gleichung. Das Product der drey Wurzeln, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, ist $= 100$. Nun ist

$$\log. 7{,}906104 = 0{,}8979625$$
$$\log. 4{,}145226 = 0{,}6175482$$
$$\log. 3{,}051330 = 0{,}4844892$$

$$\log. \text{Products} = 1{,}9999999$$

also das Product sehr nahe $= 100$.

238. Ob zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen zwey oder mehrere ungleiche Wurzeln liegen, wird auf folgende Art gefunden.

Es seyn diese ganze Zahlen p und $p + 1$; die Gleichung sey

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \ldots \pm k = 0.$$

Man setze $x = p + \frac{1}{z}$, und multiplicire die verwandelte Gleichung durch z^m, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$Az^m - Bz^{m-1} + Cz^{m-2} \ldots \pm K = 0.$$

Da einer oder mehrere Werthe von x sind $p + \frac{1}{z}$, wo $\frac{1}{z}$ ein eigentlicher Bruch ist, so hat die Gleichung für z wenigstens eine positive Wurzel, die größer als die Einheit ist. Setzt man nun in dieser Gleichung die ganzen positiven Zahlen von 0 an für z, so giebt der Vorzeichenwechsel die nächsten ganzen Zahlen für z. So viele positive Wurzeln über 1 die Gleichung für z hat, so viele Wurzeln zwischen p und p + 1 hat die Gleichung für x. Man muß auch darauf Acht haben, ob auch zwey oder mehrere Wurzeln z zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen liegen, wenn zu der Gleichung für x noch nicht die Gränzen aller Wurzeln in ganzen Zahlen gefunden sind.

239. Exempel. Es sey

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0.$$

Die Werthe dieser Gleichung für $x = +2; +3; +4; +5$ sind $-56; -3; -8; -35$. Es ist leicht möglich, daß zwischen + 3 und + 4 zwey Wurzeln liegen. Man setze $x = 3 + \frac{1}{z}$, so ist die verwandelte Gleichung

$$0 = -3 + \frac{20}{z} - \frac{30}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4},$$

oder

$$0 = 3z^4 - 20z^3 + 30z^2 - 4z - 1.$$

Die Werthe dieser Gleichung für $z = +1; +2; +3; +4; +5$, sind folgende: $+8; -1; -40; -9; +104$, so daß zwey positive Wurzeln z größer als 1 vorhanden sind, eine zwischen + 2 und + 3; die andere zwischen + 4 und + 5. Daher liegen zwey Wurzeln x zwischen + 3 und + 4, die eine ist etwas kleiner als $3 + \frac{1}{2}$, die andere als $3 + \frac{1}{4}$. Nun setze man $x = 3,25 - u$, und dann auch $x = 3,5 - u$, so erhält man nach dem obigen

Verfahren die beiden Werthe von x so genau als es erforderlich seyn mag.

240. Wie die gleichen Wurzeln für Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, gefunden werden, ist in dem VII. Abschnitte gezeigt. Bey höhern Gleichungen hat man sich der daselbst (187.) angezeigten Methode von la Grange zu bedienen.

241. In der Abhandlung über die numerische Auflösung der Gleichungen von la Grange ist von der Gleichung für die Unterschiede je zweyer Wurzeln einer Gleichung die Anwendung gemacht, eine Zahl zu finden, die kleiner als der kleinste Unterschied irgend zweyer Wurzeln ist, zu dem Ende, daß man in der arithmetischen Reihe der Werthe von x die Unterschiede weder unnöthiger weise zu klein nehme, welches die Berechnung zu weitläufig macht, noch auch sie zu groß setze, wobey zwey oder mehr Wurzeln übersehen werden könnten. Allein man muß, um das schicklichste Intervall der Werthe von x zu erhalten, eine Gleichung bilden, die auf einen hohen Grad steigen kann, auf den $\frac{m(m-1)}{2}$ ten Grad, wenn die für x vom mten ist. Die Gleichung zu finden, und die Gränzen der Wurzeln zu suchen ist mühsamer als eine beträchtliche Anzahl Werthe einer Gleichung zu berechnen. Wenn man auf das Zunehmen und Abnehmen der Werthe der Gleichung und die Beschaffenheit der Glieder in den verschiedenen Differenzreihen Acht giebt, so wird man leicht merken, wo zwey oder mehr Wurzeln innerhalb eines Intervalls liegen können, und hier die Intervalle in der Reihe der x kleiner machen. Da man die Anzahl der möglichen und unmöglichen Wurzeln zusammen genommen weiß, so kann man keine aus Unvorsichtigkeit aus der Acht lassen.

242. Die Wurzeln lassen sich auch in Form von Kettenbrüchen, die wechselnd größer und kleiner als der

genaue irrationale Werth der Wurzel sind, darstellen. Davon in dem Artikel, Kettenbrüche.

Die Glieder rücklaufender Reihen dienen auch zur Erfindung der größten und kleinsten Wurzel, s. rücklaufende Reihe.

X. Auflösung literaler Gleichungen.

243. Die literalen Gleichungen, in welchen die Coefficienten allgemeine Größen sind, lassen sich, wie schon bemerkt ist, außer denen von den ersten drey Graden, nicht so auflösen, daß die Wurzeln durch endliche Formeln dargestellt würden. Durch Reihen mit einer unendlichen Anzahl von Gliedern ist es zwar möglich; es ist aber unbequem, daß solche Reihen oft wenig convergiren, oder gar divergiren, und daß sie unmögliche Größen in einer möglichen Gestalt geben. Weil die Entwickelung der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung mittelst ihrer Coefficienten auf der Lehre von der Umkehrung der Reihen beruht, so wird dieselbe erst in dem Artikel, Umkehrung der Reihen, vorgetragen werden können.

244. Der Taylorsche Lehrsatz dient zur Auflösung der Gleichungen, wenn für eine Wurzel schon ihre nächsten Gränzen in ganzen Zahlen gefunden sind. Die Gleichung

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots + k = 0$$

werde als eine Function einer veränderlichen Größe x betrachtet, und der Werth dieser Function für irgend ein x sey $= y$, also $= 0$, wenn x eine der Wurzeln ist. Man bezeichne diese Relation durch $\varphi x = y$, wo φ das Functionszeichen ist (s. Function). Es verändere sich x um u, so ist (Differenzenrechnung, 38.)

$$\varphi(x+u) = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$

$$+ \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 \varphi x}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Wenn hier x von einer der Wurzeln wenig verschieden ist, so erhält man eine solche Formel, wie in (237.) zur Annäherung an den Werth der Wurzel gebraucht ist. In dem Exempel daselbst ist $x = 7{,}9$; $\varphi x = -0{,}251$.

245. Es sey $x + u$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $\varphi(x+u) = 0$, und

$$0 = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} . u + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Der Kürze wegen setze man die Differentialquotienten nach der Folge p, q, r, s, etc. und $\varphi x = y$, so ist

$$0 = y + pu + \tfrac{1}{2} q u^2 + \tfrac{1}{6} r u^3 + \tfrac{1}{24} s u^4 + \text{etc.}$$

Um hieraus den Werth von u herzuleiten, setze man u aus einer Reihe von Theilen, A, B, C, D, etc. zusammen, deren jeder gegen den vorhergehenden so klein sey, daß B sich nur mit AA vergleichen lasse, C mit A^3 und AB; D mit A^4, A^2B, AC, B^2, u. s. f. Nun setze man in der Gleichung für u den Werth

$$u = A + B + C + D + \text{etc.}$$

so ist

$$\begin{aligned}
y &= y \\
pu &= Ap + Bp + Cp + Dp + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{2} q u^2 &= \quad + A^2 q + ABq + ACq + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{2} B^2 q + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{6} r u^3 &= \qquad\qquad + \tfrac{1}{6} A^3 r + \tfrac{1}{2} A^2 B r + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{24} s u^4 &= \qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{24} A^4 s + \text{etc.} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Glieder rechter Hand zusammengenommen sind Null. Da sie von verschiedenen Ordnungen der Größe sind, so kann dieses nur erhalten werden, wenn die Größen von einerley Ordnung der Größe, die unter einander gesetzten, sich aufheben, zufällige Modificationen durch die Coefficienten, und durch die Voraussetzung selbst nicht geachtet. Dadurch werden folgende Bestimmungen erhalten.

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{q}{2p^3}y^2$$

$$C = -\frac{q^2}{2p^5}y^3 + \frac{r}{6p^4}y^3$$

$$D = -\frac{5q^3}{8p^7}y^4 + \frac{5qr}{12p^6}y^4 - \frac{s}{24p^5}y^4.$$

etc.

246. Exempel. Die Gleichung, $x^5 + 2x - 2 = 0$, aufzulösen. Hier ist

$$y = x^5 + 2x - 2;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = 5x^4 + 2; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = 20x^3;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = 60x^2; \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s = 120x;$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = t = 120.$$

Für $x = 0$ ist $y = -2$, für $x = +1$ ist $y = +1$, also ist, wenn $x = +1$ genommen wird, der Werth von u klein und negativ. Dadurch ist $p = +7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$; $t = 120$, und

$$u = -\tfrac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \left(\frac{200}{7^5} - \frac{10}{7^4}\right)$$

$$-\left(\frac{5.1000}{7^7} - \frac{5.100}{7^6} + \frac{5}{7^5}\right) - \text{etc.}$$

oder

$$u = -\tfrac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} - \text{etc.}$$

das ist $u = -0{,}18$ nahe, und die Wurzel $x + u = 1 - 0{,}18 = +0{,}82$ nahe. Wird dieser Werth für x in die Gleichung gesetzt, so wird daraus durch eine neue Rechnung der Unterschied von der Wurzel sehr genau gefunden werden können.

247. Man kann x auch als eine Function von y ansehen, so daß $x = \varphi y$, und $x - u = \varphi(y - z)$. Nun ist

$$\varphi(y - z) = \varphi y - \frac{\partial x}{\partial y}.z + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{z^2}{1.2}$$

$$-\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{z^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Ist $x - u$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $y - z = 0$, und $y = z$, also

$$x - u = x - \frac{\partial x}{\partial y}\,y + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} - \text{etc.}$$

oder

$$u = \frac{\partial x}{\partial y}.y - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{y^3}{1.2.3}$$

$$-\frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Man hat nun für einen Werth von x, welcher einer Wurzel nahe kommt, den zugehörigen Werth der Gleichung y, und die Werthe der Differentialquotienten zu suchen, und die daraus entstehenden Glieder mit Beobachtung der Vorzeichen, die sie erhalten müssen, zusammen zu neh-

men, so wird der Werth von u, dem Unterschiede der Wurzel und des gesetzten Werthes von x, dadurch mehr oder weniger genau gefunden, nachdem die Reihe schneller oder langsamer convergirt. In dem letztern Falle hat man den durch die erste Rechnung verbesserten Werth von x statt des zuerst gebrauchten zu nehmen.

248. Exempel. Die Gleichung sey, $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, so daß

$$y = x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4; \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{4(x^3 - x + 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{3x^2 - 1}{16(x^3 - x + 1)^3};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial x} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{16(x^3 - x + 1)^4};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^5}, \text{ etc.}$$

Also ist

$$u = \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} + \frac{(3x^2 - 1)y^2}{32(x^3 - x + 1)^3}$$
$$+ \frac{(7x^4 - 4x^2 - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = +1$, so ist $y = -5$; setzt man $x = +2$, so ist $y = -8$; also liegt die Wurzel näher an $+2$ als an $+1$. Man setze $x = 1,6$, so ist $y = -0,1664$, und

$$\left.\begin{array}{r} u = -0,0118993 \\ +0,0001353 \\ -0,0000023 \end{array}\right\} = -0,0117663$$

da die Wurzel ist $x - u$, so ist sie sehr nahe $= 1,6117663$.

In Eulers Differentialrechnung, 2 Th. S. 563, woraus die Methode mit dem Exempel genommen ist, ist der dritte Differentialquotient im Zähler unrichtig. Dieser ist daselbst $21x^4 - 12xx - 3$. Die Wurzel findet Euler $= 1,6117632$. Er hat aber $x = 1,61$ gesetzt. Lange nachher hat Euler diese Methode dahin erweitert, daß sie dient, jede Potenz einer Wurzel und ihren natürlichen Logarithmen zu finden. Nova Acta Petrop T. VI.

249. Die Formel für die Wurzel (247.) hat Euler im J. 1740 an die Pariser Akademie der Wissenschaften ohne Beweis geschickt. S. eine Abhandlung von dem Marquis de Courtivron, sur une maniere de resoudre par approximation les équations de tous les degrés. Mem de l'Ac. 1744. Courtivron verwandelt die Gleichung für x in eine für u, wenn $x = k + u$, und u klein ist. Diese kehrt er um, so daß u durch eine Reihe dargestellt wird. Seine Formel findet er, wie es nothwendig ist, mit der Eulerischen übereinstimmend.

250. Eine andere allgemeine Methode, die noch nicht angewandt worden, ist folgende:

I. Die gegebene Gleichung für x werde in eine Gleichung für u verwandelt, so daß eine Wurzel derselben kleiner als 1 sey, wenn jene Gleichung nicht selbst so beschaffen ist. Die verwandelte Gleichung sey

$$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} = 0.$$

Man multiplicire sie durch eine unbestimmte Function,

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$

so ist das Product =

$$\begin{array}{l} a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} \\ \quad + a\alpha .. + b\alpha .. + c\alpha .. + d\alpha .. + e\alpha .. + \text{etc.} \\ \qquad + a\beta .. + b\beta .. + c\beta .. + d\beta .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + a\gamma .. + b\gamma .. + c\gamma .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad + a\delta .. + b\delta .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a\varepsilon .. + \text{etc.} \end{array}$$

In diesem Producte setze man die Coefficienten von u^2, u^3, u. s. f. $= 0$, so erhält man dadurch Bestimmungen von α, β, γ, etc. und es ist nahe $a + (b + a\alpha)u = 0$, also $u = -\frac{a}{b + a\alpha}$, nahe.

II. Zuerst setze man nur die beiden Coefficienten von u^2 und u^3 Null, so ist

$$c + b\alpha + a\beta = 0$$
$$d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0.$$

Da hier eine unbestimmte Größe mehr ist, als Gleichungen vorhanden sind, so ist eine willkührlich anzunehmen. Man setze $\gamma = 0$, und zugleich δ, ε, etc auch $= 0$, so ist die multiplicirende Function $= 1 + \alpha u + \beta u^2$. Aus jenen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Wegschaffung von β der Werth von α, nämlich $\alpha = \frac{ad - bc}{bb - ac}$, also

$$u = -\frac{a(bb - ac)}{b(bb - ac) + a(ad - bc)}.$$

251. Exempel. Die gegebene Gleichung sey $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$. Eine Wurzel derselben fällt zwischen $+7$ und $+8$, näher an 8 (137.). Man setze $x = 8 - u$, so ist die transformirte Gleichung,

$$0 = +4 - 44u + 15u^2 - u^3,$$

also

$$a = +4;\ b = -44;\ c = +15;\ d = -1.$$

Diese Werthe in die Formel für u gesetzt, geben $u = + \frac{7504}{79920} = \frac{938}{9990} = 0{,}093894$, folglich die gesuchte Wurzel $x = 7{,}906106$.. Die mühsamere Rechnung a. a. O. gab 7,906104.

252. Wenn es nöthig ist, kann man den gefundenen Werth leicht verbessern. Das fünfte Glied des Products ist $= (d\alpha + c\beta)u^4$, da γ, δ, etc. $= 0$ gesetzt sind. In diesem setze man für u den gefundenen Werth, und addire dieses Glied zu a, worauf man u aufs neue berechnet. Es ist $\beta = \frac{cc - bd}{bb - ac}$.

253. Nun nehme man zum Multiplicator der Gleichung die Function, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, und setze die Coefficienten von u^2, u^3, u^4 jeden Null, so ist

$$\text{I. } c + b\alpha + a\beta = 0$$

$$\text{II. } d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0$$

$$\text{III. } e + d\alpha + c\beta + b\gamma = 0.$$

Die Gleichungen II. und III. geben durch die Wegschaffung von γ.

$$\text{IV. } bd - ae + (bc - ad)\alpha + (bb - ac)\beta = 0.$$

Diese und I. geben durch die Wegschaffung von β

$$\text{V. } (bb - ac)c - (bd - ae)a + (bb - ac)b\alpha - (bc - ad)a\alpha = 0.$$

Also

$$\alpha = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}.$$

$$b + a\alpha = \frac{2(ad - bc)ab - (ac - bb)bb - (ae - cc)aa}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$u = \frac{(ad - bc)aa - (ac - bb)ab}{(ac - bb)bb - 2(ad - bc)ab + (ae - cc)aa}$$

254. Exempel. Es sey in der Gleichung (239.),

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0,$$

die an $+13$ nächste Wurzel zu finden. Setzt man $x = 3 + u$, so ist die verwandelte Gleichung

$$0 = 3 - 20u + 30u^2 - 4u^3 - u^4,$$

wo $a = +3$; $b = -20$; $c = +30$; $d = -4$; $e = -1$ ist. Ferner ist $(ad - bc)aa = 5292$; $(ac - bb)ab = +18600$; $(ac - bb)bb = -124000$; $2(ad - bc)ab = -70560$; $(ae - cc)aa = -8127$. Daher

$$u = \frac{13308}{61567} = 0,216155\ldots$$

und $x = 3,216155\ldots$

255. Um mit Sicherheit die Gränze zu bestimmen, bis auf welche nach diesem Verfahren die Wurzel gefunden wird, muß das erste der weggelassenen Glieder des Products, nämlich $(e\alpha + d\beta + c\gamma)u^5$ berechnet werden, wenn nämlich zu dem Multiplicator vier Glieder genommen sind. Es ist

$$\alpha = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\beta = \frac{(ae - bd)b - (ad - bc)c}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\gamma = \frac{(bd - cc)c - (ad - bc)d + (ac - bb)e}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

256. Anstatt den genäherten Werth von u durch eine einfache Gleichung zu finden, kann man auch eine quadratische anwenden. Man setze die Coefficienten von u^3 und mehrere folgende gleich Null. Der Multiplicator der Gleichung sey $1 + \alpha u + \beta u^2$, so erhält man die Gleichungen,

$$\text{I. } d + c\alpha + b\beta = 0$$

$$\text{II. } e + d\alpha + c\beta = 0,$$

wodurch α und β, also die Coefficienten der Näherungs-Gleichung,

$$a + (b + a\alpha)u + (c + b\alpha + a\beta)u^2 = 0,$$

bestimmt werden.

Nimmt man den Multiplicator, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, so kann man drey Coefficienten Null setzen, die von u^3, u^4, u^5, wodurch die quadratische Gleichung noch viel genauer den Werth von u giebt.

257. Hat u zwey Werthe, die kleiner als die Einheit sind, so findet man sie mittelst der quadratischen Gleichung beide. Die einfache Gleichung giebt nur den kleinern Werth, der die gemachte Voraussetzung am nächsten erfüllt, wie in dem zweyten Exempel (254.), worin zwey Wurzeln x zwischen + 3 und + 4 fallen.

258. Auf eine ähnliche Art kann man eine Näherungsgleichung vom dritten, oder einem noch höhern Grade sich verschaffen, es sey nun eine Gleichung zu erniedrigen, oder die mehrern Wurzeln, die zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen liegen, zu finden.

259. Auch für große u läßt sich eine Annäherungsgleichung nach der für kleine u gebrauchten Methode finden. Es sey die Gleichung

$$0 = u^m + au^{m-1} + bu^{m-2} + cu^{m-3} + du^{m-4} + \text{etc.}$$

Diese werde durch $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{u^3} + \frac{\delta}{u^4} + \text{etc.}$ multiplicirt. Das Product ist $= 0 =$

$$\begin{array}{lllll}
u^m + au^{m-1} & + bu^{m-2} & + cu^{m-3} & + du^{m-4} & + \text{etc.} \\
+ \alpha \,.. & + a\alpha \,.. & + b\alpha \,.. & + c\alpha \,.. & + \text{etc.} \\
 & + \beta \,.. & + a\beta \,.. & + b\beta \,.. & + \text{etc.} \\
 & & + \gamma \,.. & + a\gamma \,.. & + \text{etc.} \\
 & & & + \delta \,.. & + \text{etc.} \\
 & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Man nehme den Multiplicator $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2}$, und setze die Coefficienten von u^{m-2} und u^{m-3} Null, so ist

$$\text{I. } b + a\alpha + \beta = 0$$

$$\text{II. } c + b\alpha + a\beta = 0.$$

Hieraus ist $\alpha = \frac{c - ab}{aa - b}$, also ist

$$u = a + \alpha = \frac{a^3 - 2ab + c}{aa - b} \text{ nahe.}$$

Auch ist $\beta = \frac{bb - ac}{aa - b}$, und

$$c\alpha + b\beta = \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}.$$

Aus dem Werthe von $c\alpha + b\beta$ ist der Grad der Annäherung zu beurtheilen. Das erste der weggelassenen Glieder ist $\left(d + \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}\right) u^{m-4}$.

260. Die durch die Multiplication mit einer Function von u entstandene Gleichung ist in beiden Fällen eine Hülfsgleichung von einem höhern Grade als die vorgegebene. Weil aber einige Glieder in ihr fehlen, und die darauf folgenden gegen die ersten klein sind, so ist sie leicht aufzulösen, mit einem größern oder geringern Grade der Genauigkeit.

* * *

Zu den Abhandlungen algebraischen Inhalts von Euler sind hier noch einige aus den Novis Actis Acad. Petrop. beyzufügen.

In dem IV. Bande sind zwey Abhandlungen, welche beide die Darstellung der Wurzeln einer Gleichung oder irgend welcher Potenzen derselben durch Reihen betreffen. In der ersten wird aus der

Gleichung $Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta}$ eine Reihe für Z hergeleitet, deren Glieder Functionen des Exponenten n sind, woraus ferner Reihen für die Potenzen der Wurzeln von Gleichungen mit mehr Gliedern hergeleitet werden. Die Reihen sind sehr zusammengesetzt, daher Euler sie auch in der Aufschrift der Abhandlung maxime abstrusas nennt. Mit derselben ist eine frühere Abhandlung in den Actis Petrop. T. III. a. a. 1779. zu verbinden, worin Betrachtungen über eine von Lambert entwickelte Reihe zur Auflösung einer trinomischen Gleichung angestellt sind.

In der zweyten Abhandlung wird die Methode zur Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen durch Reihen, welche der Verfasser schon in dem XV. Bande der neuen Commentarien (1771) gelehrt hatte, besser begründet.

In dem VI. Bande sind zwey Abhandlungen, von welchen die erstere zeigt, wie die Werthe der Wurzeln durch Annäherung gefunden werden, wenn sie schon einigermaßen bekannt sind. Es ist die von dem Verfasser schon vor langer Zeit angegebene, und in dem letzten Abschnitte dieses Artikels erklärte Methode, mit Erweiterung auf Potenzen der Wurzeln.

In der zweyten Abhandlung des VI. Bandes wird gezeigt, wie unzählige Formen von Gleichungen angegeben werden können, die alle auflösbar sind.

In dem XII. Bande wird die Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen noch einmahl vorgenommen, nach der Methode, die in den Comm. novis, T. XV. gezeigt war, aber mit Erweiterung und Verbesserungen.

Eulers Algebra ist von Bernoulli ins Französische übersetzt, und von la Grange mit Anmerkungen bereichert. Diese gehen die unbestimmte Analytik an. Eine neue vermehrte Ausgabe dieser Übersetzung ist zu Lyon 1795. in zwey Octavbänden erschienen. Die Zusätze von la Grange hat Kaußler besonders übersetzt geliefert, Frankfurt am Mayn, 1796.

Unter den ältern Lehrbüchern zeichnet sich die Algebra von dem tiefsinnigen Maclaurin durch Deutlichkeit wie durch Gründlichkeit aus. Treatise of Algebra, the second edition, London 1756. 8.

Wer viele Beyspiele und Erläuterungen verlangt, findet sie in Saundersons Elements of Algebra, Cambridge, 1740. 2 vol. in 4. Übersetzt ins Französische von Joncourt. Amsterdam, 1756.

Clairauts Algebra, die zuerst 1746 herauskam, ist mehrmahls aufgelegt. Neuerlich ist sie von Lacroix neu herausgegeben, und mit Anmerkungen von la Grange und la Place ausgestattet, 2 vol. in 8. Eine deutsche Übersetzung ist von Mylius 1752 gemacht, von welcher Tempelhof 1778 eine zweyte Auflage mit Zusätzen besorgt hat.

Die deutschen Lehrbücher von Segner, Kästner, Tempelhof, Pasquich, werden den Liebhabern der Mathematik bekannt genug seyn. Anfängern ist zu empfehlen Busse erster Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben. Dessau 1782. 2 Bde in 8.

Glied (terminus) ist ein einzelnes Stück einer Gleichung, Reihe oder Function. Das lateinische Wort, membrum, bedeutet alle Glieder einer Gleichung, die auf derselben Seite des Gleichheitszeichens stehen. Weil das Wort terminus im deutschen sich nicht gut gebrauchen läßt, so muß man es durch Glied geben, und membrum durch Theil.

Gnomon in der Geometrie ist eine Figur, die in einem Parallelogramm übrig bleibt, wenn ein kleineres Parallelogramm, dessen Diagonale in der Diagonale jenes liegt, weggenommen wird. In Fig. 26. Tab. X. worin B H und E D jede einer Seite des Parallelogramms parallel ist, ist Gnomon die Figur, welche aus den beiden Complementen A C, A K zu den Parallelogrammen A F, A G längs der Diagonale F G, und einem dieser Parallelogram-

me selbst besteht, nämlich ABCGKEA, oder ADCFKHA. Euklides gebraucht das Wort in seinen Anfangsgründen, 2. Buch. Es bedeutet auch ein Winkelmaaß, daher die Anwendung auf die geometrische Figur.

Gnomon ist an einer Sonnenuhr der Zeiger, der durch seinen Schatten die Stunden zeigt. Hier ergiebt sich die Herleitung von dem griechischen Stammworte, erkennen, noch deutlicher.

Gnomon in der Astronomie ist eine besondere Vorrichtung, Höhen der Sonnen zu beobachten.

Goniometrie ist der Inbegriff der Sätze und Aufgaben, welche die Vergleichung der Winkel mittelst der von den Winkeln abhängigen Linien, und die Relationen dieser Linien selbst betreffen. Das Wort Goniometrie ist in dieser weiten Bedeutung sonst nicht gewöhnlich, sondern man versteht darunter nur die Methoden Winkel zu messen. In diesem Verstande gebraucht de Lagny den Ausdruck in einigen Abhandlungen der Pariser Akademie von den J. 1724, 1725, 1729. Von seinem Verfahren, Winkel ohne Transporteur oder Maaßstab zu messen, wird in dem Artikel, Winkelmessung, Anzeige geschehen. Das Wort Goniometrie ist im Griechischen dasselbe was Winkelmessung im deutschen. So wie aber Geometrie eine Wissenschaft ist, welche alle Arten von Vergleichungen ausgedehnter Größen begreift, ohngeachtet das Wort nur Landmessung andeutet, so mag auch Goniometrie die Benennung für ein System seyn, das viel mehreres in sich schließt, als das Wörtliche zu erkennen giebt. In einer kleinen Schrift, betitelt Anfangsgründe der Goniometrie von Däzel, München 1800, bedeutet das Wort Trigonometrie und Polygonometrie zusammen.

2. Die Goniometrie pflegt als ein Theil der Trigonometrie angesehen zu werden. Ihre Grundlehren, werden auch in dieser Wissenschaft gebraucht, um die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreyecke, und der

daraus zusammengesetzten Figuren herzuleiten. Die Trigonometrie bekommt durch sie einen weitern Umfang als die Wortbedeutung angiebt. Vieles in der Goniometrie betrifft bloß Vergleichungen der Winkel, ohne Rücksicht auf Dreyecke oder Figuren; anderes bezieht sich auf die Kreismessung; selbst in der Analysis, wo auch keine geometrische Größen betrachtet werden, kommen oft Functionen von Winkeln vor. In einer vollständigen Abhandlung von der Trigonometrie darf zwar die Goniometrie nicht fehlen; allein in diesem Wörterbuche würde jene durch diese einen zu weitläuftigen Artikel ausmachen. Um aber auch nicht die Materie von der Vergleichung der Winkel zu zerstückeln, werden alle dahin gehörigen Formeln hier in einem Artikel, unter dem Titel, Goniometrie, vorgetragen.

3. Die analytische Geometrie, so fern sie die Winkel entweder unabhängig von der Verbindung mit den Linien einer Figur vergleicht, oder sowohl die Linien und ihre Winkel in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit betrachtet, begreift drey Hauptstücke, die Goniometrie, Cyklometrie (Bogenmessung) und Trigonometrie mit der Polygonometrie. Das erste ist gleich Anfangs erklärt; die Cyklometrie, welche die Winkel durch zugehörige Kreisbogen darstellt, enthält die Formeln zur Vergleichung der Bogen und der zu ihnen gehörigen Linien (Sinus, Tangenten u. s. m.); die Trigonometrie entwickelt die Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel ebener und sphärischer Dreyecke aus gegebenen Bestimmungsstücken; die Polygonometrie sucht dasselbe für mehrseitige Figuren zu leisten. Beyde gründen sich, so wie die Cyklometrie, auf die Lehren der Goniometrie.

4. Ein Winkel wird, wie jede Größe überhaupt durch eine gleichartige gemessen wird, unmittelbar nur durch einen andern Winkel gemessen. So giebt man z. B. die Größe eines Winkels in Graden an, da ein Grad der 90ste Theil eines rechten Winkels ist, und hat dadurch das Verhältniß des Winkels zu einem Rechten.

In der praktischen Geometrie hat man allerhand Werkzeuge zur Messung der sinnlich gegebenen Winkel. In der theoretischen Geometrie sind nur wenig Fälle, wo ein Winkel unmittelbar mit einem andern Winkel verglichen werden kann. Die Elementar-Geometrie kann nur Winkel vergleichen, deren einer doppelt so groß ist als der andere. Allein es giebt auch eine andere Art Winkel mit einander zu vergleichen, als durch ein gemeinschaftliches Maaß, und das geschieht durch Linien, die von den Winkeln auf gewisse Art abhangen, so wie die Winkel von ihnen. Die Relationen dieser Linien geben gewisse Relationen der zugehörigen Winkel zu erkennen. Diese Linien heißen daher auch Functionen der Winkel, und umgekehrt sind die Winkel Functionen jener Linien, indem Function einer Größe irgend eine Zusammensetzung aus dieser und gegebenen anzeigt.

I. Goniometrische (trigonometrische) Functionen der Winkel.

5. Es ist ADBE (Tab. XII. Fig. 56.) ein Kreis aus dem Mittelpunkte C über dem Durchmesser AB beschrieben, in welchem der Durchmesser DE senkrecht auf AB steht. Irgend ein Durchmesser Ff schneide AB unter dem Winkel ACF. Von dem Puncte F des Kreises werde FG senkrecht auf AB gezogen. Nun ist in dem gegebenen Kreise FG durch den Winkel, und der Winkel durch FG bestimmt. Die Linie FG heißt der Sinus des Winkels ACF.

Der Sinus ist Null, wenn der Winkel Null ist. Er ist dem Radius des Kreises gleich, wenn der Winkel ein Rechter ist, und heißt alsdann der Sinus totus.

Der Winkel der beiden Linien AB und Ff ist nicht allein der spitze ACF, sondern auch der stumpfe BCF. Es gehört also derselbe Sinus FG zu zwey Winkeln, die zusammen aber zwey Rechte ausmachen.

Man ziehe den Durchmesser HCh unter dem Winkel BCH = ACF, und fälle die senkrechte Hg auf AB, so ist Hg = FG, und Hg ist der Sinus des Winkels ACH, so wie es FG von BCF ist. Die Folge der Sinus bricht mit dem Sinus totus für den rechten Winkel nicht ab, sondern wird für die stumpfen fortgesetzt, indem nun die Sinus auf dieselbe Art, bey wachsenden Winkeln, abnehmen, als sie für Winkel unter einem Rechten zunehmen.

Für zwey Rechte ist der Sinus = o. Allein auch hier bricht die Folge der Sinus nicht ab, sondern geht fort, nur werden die Sinus negativ.

Nämlich zwey gleiche Winkel, wie ACF, ACh, oder ACH, ACf, können entgegengesetzte Lage haben, indem der Schenkel, durch dessen Bewegung von dem fixen Schenkel an der Winkel beschrieben wird, nach einer Gegend sich bewegt, die der für den andern Winkel entgegen gesetzt ist. Es seyn hG, fg senkrecht auf AB, so sind diese die Sinus von ACh, ACf, aber den Sinus von ACF, ACH eben so entgegengesetzt, wie die zugehörigen Winkel. Wenn man Cf in CB fallen läßt, so schließen die negativen Sinus sich an die positiven. Die Winkel nach der Gegend von A nach F sehe man als positiv an, und also auch ihre Sinus. Das Complement des negativen Winkels ACf zu vier Rechten, oder ACBCf ist positiv, weil es nach der Richtung der positiven Winkel genommen wird, aber der Sinus desselben, fg, ist negativ. Eben so ist das Complement von ACh, oder ACBCh positiv, und der Sinus hG negativ.

6. Das Segment des Halbmessers, CG, welches der Sinus abschneidet, von dem Mittelpuncte an genommen, heißt der Cosinus. Für einen stumpfen Winkel ACH liegt der Cosinus Cg nach einer entgegengesetzten Seite in Beziehung auf die Cosinus der spitzen Winkel, und sind daher negativ, wenn diese positiv genommen werden. Es ist $\cos ACF = \sin (R - ACF)$, also auch $\cos ACH = \sin (R - ACH) = -\sin (ACH - R)$.

Der Cosinus ist dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel Null ist; er ist Null, wenn der Winkel ein Rechter ist.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh ist der Cosinus CG positiv, und so groß als für denselben Winkel positiv genommen. Für einen negativen stumpfen ACf ist der Cosinus Cg negativ. Daher ist für positive Winkel zwischen zwey und drey Rechten der Cosinus negativ, zwischen drey und vier Rechten positiv.

7. Das Stück des Durchmessers AG oder Ag von dem Endpuncte A bis an den Punct, wo der Sinus ihn trifft, heißt der Quersinus oder sinus versus. Es ist der Unterschied zwischen dem Halbmesser und dem Cosinus, daher die arithmetische Summe, wenn der Cosinus negativ ist.

8. Man ziehe auf AC durch A die senkrechte TAt oder die berührende in A, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in T geschnitten werde. Es heißt AT die Tangente des W. ACT. Sie ist die vierte Proportionallinie zu dem Cosinus, Sinus und Halbmesser.

Die Tangente ist Null, wenn der Winkel Null ist. Sie ist dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel ein halber Rechter ist. Sie ist unendlich groß, wenn der Winkel ein Rechter ist. Der unendlich große Werth einer Tangente macht den Übergang zu den Werthen der Tangenten stumpfer Winkel. Ohne diesen Werth einzuführen, bliebe immer eine Lücke, die man nie ausfüllen würde.

Bey einem stumpfen Winkel ACH schneidet der Schenkel CH entgegengesetzt verlängert die Tangente an der in Beziehung auf AT entgegengesetzten Gegend in t. Die Tangente At ist daher negativ. Die vorher angeführte Proportion erfordert dieses auch. Einige angesehene Mathematiker (de la Caille, Segner) haben die Tangente eines stumpfen Winkels als positiv angesehen, weil sie den Schenkel CH bis an eine Tangente in B verlängerten, welche freylich eine Lage wie AT hat. Die

Versetzung der berührenden Linie geschieht ohne Grund dazu zu haben.

Die Tangente At eines negativen spitzen Winkels ACh ist negativ. Die Tangente eines negativen stumpfen ist das Entgegengesetzte einer negativen. Der Schenkel Cf des Winkels ACf schneidet entgegengesetzt verlängert die Tangente in T, nach der Gegend, in welcher die Tangenten positiv sind.

Die Tangenten der positiven Winkel zwischen zwey und drey Rechten sind positiv; zwischen drey und vier Rechten negativ.

9. Durch den Endpunct D des Halbmessers CD, der auf AC senkrecht ist, ziehe man eine senkrechte oder berührende, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in K geschnitten werde. Es heißt DK die Cotangente des Winkels ACF, und es ist cot. ACF = tang (R — ACF). Die Cotangente ist die dritte Proportionallinie zu der Tangente und dem Halbmesser, da AT:AC = CD:DK ist.

Ist der Winkel stumpf, wie ACH, so schneidet der Schenkel CH die berührende in k, und es ist die Cotangente Dk negativ in Beziehung auf die positive DK. Wird CH nach t auf der berührenden in A verlängert, so ist At : AC = CD : Dk. Wenn eine von beiden, Tangente und Cotangente, negativ ist, so ist es die andere auch.

Die Cotangente eines negativen spitzen Winkels ACh ist Dk, negativ; die Cotangente eines negativen stumpfen Winkels ist DK, positiv.

10. Die Hypotenuse CT in dem rechtwinklichten Dreyeck CAT, dessen Katheten der Halbmesser und die Tangente des Winkels ACT sind, heißt die Secante dieses Winkels. Sie ist die dritte Proportionallinie zu dem Cosinus und Halbmesser.

Wenn der Winkel Null ist, so ist die Secante dem Halbmesser gleich Ist der Winkel ein Rechter, so ist die Secante unendlich groß. Für einen stumpfen Winkel

ACH ist die Secante die Linie Ct, welche negativ ist, weil sie der Richtung des Schenkels CH entgegengesetzt ist, auch zufolge der angeführten Proportion.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh ist die Secante Ct positiv, weil sie in die Richtung des Schenkels Ch fällt. Für einen stumpfen negativen Winkel ACf ist die Secante CT negativ. Oder, für positive Winkel zwischen zwey und drey Rechten ist die Secante negativ; zwischen drey und vier Rechten ist sie positiv; alles der Proportion cos : rad = rad : sec. gemäß.

11. Die Hypotenuse CK an dem rechtwinklichten Dreyeck CDK ist die Cosecante des Winkels ACF. Sie ist die dritte Proportionallinie zu dem Sinus und dem Halbmesser. Für einen stumpfen Winkel ACH ist die Cosecante die Hypotenuse Ck, positiv, weil sie in die Richtung des Schenkels, wie bey spitzen Winkeln fällt. Die Beziehung auf den Sinus desselben Winkels erfordert dies auch.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh (oder positiven über drey Rechte) ist die Cosecante die Linie Ck, und als negativ zu betrachten. Für einen negativen stumpfen Winkel ACf (positiven zwischen zwey und drey Rechten) ist die Cosecante die Linie CK, und als negativ zu nehmen.

12. Die Größe der goniometrischen Linien hängt, bey demselben Winkel, von der Größe des Halbmessers ab. Allein das Verhältniß dieser Linien zu dem Halbmesser ist bey demselben Winkel dasselbe, wie groß oder klein auch der Halbmesser seyn mag, und so auch der Quotient, den die Division dieser Linien durch den Halbmesser giebt. Zu analytisch-geometrischen Rechnungen wird dieser Quotient wegen seiner Bestimmtheit gebraucht, und bekommt denselben Namen, wie die geometrische Linie, woraus er entsteht. In ältern Schriften, selbst in den meisten aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, werden die Sinus, Tangenten u. s. w. als Linien betrachtet.

13. Dem neuern Gebrauche zufolge ist in einem rechtwinklichten Dreyeck A B C, (Fig. 57.), worin B der rechte Winkel ist,

$$\frac{BC}{AC} = \sin A; \qquad \frac{AB}{AC} = \cos A;$$

$$\frac{BC}{AB} = \tang A; \qquad \frac{AB}{BC} = \cot A;$$

$$\frac{AC}{AB} = \sec A; \qquad \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A.$$

14. Hieraus ergiebt sich

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1.$$

$$\tang A \,.\, \cos A = \sin A.$$

$$\tang A = \frac{\sin A}{\sqrt{(1 - \sin A^2)}}$$

$$\cot A \,.\, \sin A = \cos A.$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sqrt{(1 - \cos A^2)}}$$

$$\frac{\tang A}{\sqrt{(1 + \tang A^2)}} = \sin A.$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \tang A^2)}} = \cos A.$$

$$\tang A \,.\, \cot A = 1;$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \sqrt{(1 + \tang A^2)}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \sqrt{(1 + \cot A^2)}$$

$$\sin. \text{vers.}\ A = 1 - \cos A.$$

Die irrationalen Ausdrücke lassen sich in Reihen auflösen, so daß eine goniometrische Function aus Potenzen einer andern zusammengesetzt wird.

14*. Die Potenz einer goniometrischen Function mag man durch den Exponenten oben an dem Symbol des Winkels bezeichnen, wenn man nur dieses nicht als eine Potenzirung des Winkels ansieht. Denn sin A, cos A, tang A, etc. sind wie einfache Bezeichnungen anzusehen, so daß der Exponent nicht einen Theil derselben angeht. Manche schließen das Symbol der Function in Klammern ein, wie $(\sin A)^2$. Einige bezeichnen sie durch $\sin^2 A$; $\sin^3 A$, u. s. f.

15. Die goniometrischen Functionen als Quotienten genommen nenne man die numerischen Sinus, Tangenten u. s. f. im Gegensatze gegen die linearischen. Die letztern stellen die numerischen dar, wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird.

16. Wenn eine gerade Linie durch die Drehung um einen festen Punct einen Winkel von vier Rechten beschrieben hat, und in ihre erste Lage wieder gekommen ist, so beschreibt sie weiter hin dieselben Winkel, wie vorher, und dieses ohne Ende fort mit unendlich vielen Umläufen. In der Natur ist dieses der Fall bey den Umläufen der Planeten und ihrer Trabanten. Es bezeichne π die Summe zweyer Rechten, φ einen spitzen Winkel, so ist

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sin(2\pi+\varphi) = \sin(\pi-\varphi)\\ &= \sin(4\pi+\varphi) = \sin(3\pi-\varphi)\\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\ &= \sin(2n\pi+\varphi) = \sin((2n+1)\pi-\varphi)\end{aligned}$$

Da ferner $\sin\varphi = -\sin(\pi+\varphi)$ ist, so ist $\sin\varphi = -\sin((2n+1)\pi+\varphi)$. Da auch $\sin\varphi = -\sin(2\pi-\varphi)$ ist, so ist $\sin\varphi = -\sin(2n\pi-\varphi)$.

Die Sinus aller Winkel, deren Unterschied ein gerades Vielfaches von π, oder deren Summe ein ungerades Vielfaches von π ist, sind sich gleich und gleichnamig. In dem entgegengesetzten Falle sind sie gleich aber ungleichnamig.

17. Eben so ist $\cos\varphi = \cos(2\pi + \varphi) = \cos(4\pi + \varphi) \ldots\ldots = \cos(2n\pi + \varphi)$. Da auch $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = \cos(2n\pi - \varphi)$. Da ferner $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi - \varphi)$, und weil $\cos\varphi = -\cos(\pi + \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi + \varphi)$.

Die Cosinus aller Winkel, deren Unterschied oder Summe ein gerades Vielfaches von π ist, sind gleich und gleichnamig. Ist der Unterschied ein ungerades Vielfaches von π, so sind die Cosinus gleich aber ungleichnamig.

18. Auf ähnliche Art ist $\tang\varphi = \tang(2n\pi + \varphi)$, und $\tang\varphi = \tang((2n+1)\pi + \varphi)$, aber $\tang\varphi = -\tang((2n+1)\pi - \varphi)$, und $\tang\varphi = -\tang(2n\pi - \varphi)$.

19. Wenn also ein Winkel durch eine goniometrische Function gegeben wird, so gehören dazu unendlich viele Bogen. Ist ein Winkel oder Bogen, der durch eine solche Function gegeben wird, in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, so müssen alle Winkel, die zu der Function gehören, in so viele Theile getheilt werden. Davon unten.

20. Bey der Anwendung auf eine geometrische Rechnung werden für einen bestimmten Fall der Verbindung der Größen alle Winkel spitz und positiv genommen, ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige Beziehung, so wie auch alle Linien, nach welcher Gegend sie auch genommen werden, positiv zu setzen sind. Aus der Rechnung für diesen Normalfall werden nachher alle andern Fälle der Verbindung der Größen durch gehörige Veränderung der Vorzeichen hergeleitet. Wird ein Winkel negativ, so wird dessen Sinus negativ, und alle davon abhangende Linien werden daher negativ, so wie umgekehrt eine negative Linie den damit verbundenen Sinus eines Winkels und den Winkel zu demselben negativ macht. Ein nega-

tiger spitzer Winkel verändert die Beschaffenheit seines Cosinus, und der davon abhangenden Linien, nicht; aber ein stumpfer Winkel, er sey positiv oder negativ, verursacht, daß der Cosinus und die dadurch zu bestimmenden Linien negativ werden. Bey einem positiven stumpfen, und negativen spitzen Winkel ändert die Tangente ihr Vorzeichen, und macht die dazu gehörigen Linien negativ, dagegen für einen negativen stumpfen Winkel die Tangente und das dazu gehörige positiv bleibt.

21. Solchergestalt kann die Rechnung alle verschiedene Fälle, welche die Geometrie unterscheidet, und besonders betrachten muß, in eine einzige Formel fassen, die aus der Betrachtung eines einzelnen Falles hergeleitet wird. In der sphärischen Trigonometrie ist dieses ein wichtiges Mittel, um sehr viele Fälle in wenigen Formeln zu begreifen. Ihre Formeln enthalten nichts als Functionen von mehrern Winkeln, deren Abänderungen in Rücksicht auf die positive und negative Lage, und die Beschaffenheit, ob sie spitz oder stumpf sind, eine große Mannigfaltigkeit der Fälle geben. Hier kommen häufig überstumpfe Winkel (größer als zwey Rechte) vor, für welche ihre Complemente zu vier Rechten als negative Winkel gesetzt werden können. In der Geometrie der krummen Linien, wo gewisse gerade Linien mit Winkeln verbunden werden, stellt ein einziger Normalfall alle abgeänderte Fälle dar, wenn man die goniometrischen Functionen auf jede mögliche Art ihre Vorzeichen ändern läßt.

22. Wenn in einer Formel statt der numerischen Functionen der Winkel die linearischen eingeführt werden sollen, so hat man für jene die Quotienten der linearischen dividirt durch ihren Halbmesser zu setzen. Der Halbmesser sey $= r$, der Winkel $= \varphi$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$; $\cos \varphi = \frac{x}{r}$; $\tang \varphi = \frac{t}{r}$; $\sec \varphi = \frac{s}{r}$, so setzt man diese Ausdrücke der Functionen in die Gleichung,

deren Form man ändern will, und multiplicirt sie mit einer solchen Potenz von r, daß die Nenner in den Gliedern der Gleichung wegfallen. Oder man schreibt r sin φ für sin φ; r cos φ für cos φ, u. s. f. so daß nun sin φ, etc. die linearischen Functionen bedeuten, wobey man aber in jedem Gliede die fehlenden Dimensionen durch eine Potenz von r ergänzen muß, damit alle Glieder gleich hohe Dimensionen erhalten, wenn sonst keine linearische Größe zur Einheit gemacht ist.

23. In den gewöhnlichen Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten ist der Halbmesser = 10000000 gesetzt. Die zu jedem Winkel als Sinus, Tangente und Secante geordneten Zahlen sind durch diesen Werth des Halbmessers zu dividiren, wenn sie in der Bedeutung, die ihnen in (13.) gegeben ist, zum analytischen Gebrauch angewandt werden sollen. Das giebt den Sinus totus = 1. Dann sind die Logarithmen aller Sinus, und der Tangenten von Winkeln unter 45° negativ; es sind ihnen aber allen in der Kennziffer 10 geliehen, um bey den Rechnungen nicht genöthigt zu seyn, die Addition der Logarithmen in eine Subtraction, oder diese in jene zu verwandeln. Die Logarithmen der Tangenten von Winkeln über 45°, und der Secanten sind zwar positiv, allein der Gleichförmigkeit wegen hat man ihnen auch 10 geliehen. Man hat also die Logarithmen aller dieser Zahlen vollständig so zu schreiben, wie in folgenden Beyspielen:

log sin 36° = 9,7692187 — 10

log tang 40° = 9,9238135 — 10

log tang 50° = 10,0761865 — 10

log sec 54° = 10,2307813 — 10.

Werden solche Logarithmen zu einander, oder zu den Logarithmen von irgend welchen Zahlen, addirt, so werden die subtractiven 10 auch zu einander addirt, worauf man aber von denselben gegen die Kennziffer in der Summe der Logarithmen so viel hebt, als möglich ist, damit entweder nicht mehr als 10 zu subtrahiren bleiben,

oder dieselbe ganz wegfalle, wenn nämlich der Logarithme zu einer Zahl über die Einheit gehört. Z. B. log tang 40° + log tang 50° = 0, und log sin 36° + log sec 54° oder log cos 54° + log sec 54° = 0, den Formeln in (14.) gemäß.

Da nach (35.) ist sin 2 A = 2 sin A . cos A, so ist, wenn A = 36° genommen wird,

$$\begin{aligned} \log \sin 36^\circ &= 9{,}7692187 - 10 \\ \log \cos 36^\circ &= 9{,}9079576 - 10 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline \log \sin 72^\circ &= 9{,}9782063 - 10. \end{aligned}$$

Nach (36.) ist $2 \cos A^2 = 1 + \cos 2 A$. Also

$$\begin{aligned} \log \cos 36^\circ &= 9{,}9079576 - 10 \\ & \quad\; 9{,}9079576 - 10 \\ \log \quad 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline \log 1{,}309017 &= 0{,}1169452 \end{aligned}$$

Es ist 0,309017 = cos 72°.

Sucht man zu einem numerischen Sinus oder einer solchen Tangente den Winkel, so nehme man dieselbe bis zu der siebenten Decimalstelle für eine ganze Zahl, und suche sie in den gewöhnlichen Tafeln unter ihrer Rubrik auf; man erhält daneben den gesuchten Winkel. Z. B. ist 0,309017 ein Cosinus, so suche man die Zahl 3090170 in den Tafeln unter der Rubrik Cosinus auf, und man findet den Winkel 72°. Oder: es sey 0,00436 ein Sinus. Man suche die Zahl 43600 unter den Sinus auf, so findet man nahe 15′. Es sey 15,0557 eine Tangente, man suche auf die Zahl 15 0557000, so findet sich der Winkel etwas kleiner als 86° 12′.

II. Zusammensetzung der Winkel vermittelst ihrer Functionen.

24. Es ist

$$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$$

von welchen Formeln die zweyte aus der ersten, und die vierte aus der dritten durch die Negation von B entsteht.

25. Man hat verschiedene Beweise dieser Formeln. Die leichteste Beweisart ist folgende. In einem Kreise (Fig. 58.) sey ein Viereck ABCD beschrieben, dessen eine Diagonale der Durchmesser AC ist, wodurch es in zwey rechtwinklichte Dreyecke zerfällt. Man ziehe noch den Durchmesser DE durch den Punct D, und die Chorde BE; so ist die Diagonale BD der Sinus des Winkels BED, wenn DE der Sinus totus ist, und der Winkel BED ist = BCD, der auf demselben Bogen steht, das ist, BED = BCA + DCA. Nun ist nach einer Eigenschaft des Kreises (s. Kreis)

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Dividirt man mit AC × AC oder AC × DE, so ist

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{AC} + \frac{BC}{AC} \times \frac{AD}{AC},$$

das ist

$$\sin BED = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD,$$

und daher

$$\sin(ACB + ACD) = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD.$$

Dies ist die erste der Formeln in 24.

Zweytens ist BD auch der Cosinus von BDE, das ist von ADE — ADB = CAD — ACB (weil die beiden Durchmesser sich im Mittelpuncte schneiden, und weil ADB, ACB auf demselben Bogen AB stehen). Demnach ist

$$\cos(CAD - ACB) = \sin ACB \times \sin CAD + \cos ACB \times \cos CAD.$$

Dieses ist die vierte der Formeln in (24.)

26. In einem Kreise (Fig. 59.) sey ein Viereck ABCD eingeschrieben, dessen Seite AD der Durchmesser ist. In demselben ziehe man die Diagonalen AC, DB, und durch C den Durchmesser CE, nebst der Chorde BE. Nun ist in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke CBE die Kathete BC der Sinus von BEC für CE als Sinus totus. Es ist BEC = BDC = ADC — ADB. Zufolge der in (25.) angeführten Eigenschaft des Kreises ist

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$$

oder

$$AD \times BC = AC \times BD - AB \times CD.$$

Dividirt man mit AD × AD oder AD × CE, so ist

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD} \times \frac{CD}{AD}.$$

Folglich ist

$$\sin(ADC - ADB) = \sin ADC \,.\, \cos ADB - \sin ADB \,.\, \cos ADC.$$

Dieses ist die zweyte Formel in (24.)

Zweytens, es ist BC auch der Cosinus von BCE für den Sinus totus CE, und BCE = BCA + ACE = ADB + CAD. Daher ist

$$\cos(ADB + CAD) = \cos CAD \,.\, \cos ADB - \sin ADB \,.\, \sin CAD$$

die dritte Formel in (24.). Diese und die zweyte folgen zwar aus den beiden andern durch den Gebrauch des Entgegengesetzten. Zur deutlichern Einsicht ihrer Entstehung ist es nützlich, sie unabhängig von jenen zu erweisen.

Die vier Formeln in (24.) sind eine reiche Quelle vieler andern.

27. Erstlich fließen daraus folgende sehr leicht

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\,.\cos B$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\,.\sin B$$
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\,.\cos B$$
$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\,.\sin B.$$

28. Man setze in diesen Formeln A statt A + B, und B statt A — B so verwandeln sie sich in folgende:

$$\sin A+\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos B-\cos A=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

29. Aus diesen Formeln werden durch die Division folgende hergeleitet:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\tang\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{\cos B-\cos A}{\cos A+\cos B}=\tang\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\tang\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Auf die erste dieser Formeln gründet sich eine Regel, welche gewöhnlich zur Berechnung zweyer unbekannten Winkel in einem Dreyecke aus einem Winkel nebst den beiden einschließenden Seiten gegeben wird. Ist nämlich das Verhältniß $\sin A : \sin B$ gegeben, welches $m : n$ sey, so ist $m+n : m-n = \tang\frac{1}{2}(A+B) : \tang\frac{1}{2}(A-B)$.

30. Aus denselben Formeln fließen noch folgende:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tang \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A + B),$$

worin sin B und B auch negativ genommen werden können.

31. Aus den beiden ersten Formeln in (24.) verbunden mit (14.) folgen

$$\frac{\sin(A + B)}{\cos A . \cos B} = \tang A + \tang B$$

$$\frac{\sin(A + B)}{\sin A . \sin B} = \cot A + \cot B$$

$$\frac{\sin(A - B)}{\cos A . \cos B} = \tang A - \tang B$$

$$\frac{\sin(A - B)}{\sin A . \sin B} = \cot B - \cot A.$$

32. Aus den beiden andern Formeln daselbst wird erhalten

$$\frac{\cos(A + B)}{\cos A . \cos B} = 1 - \tang A . \tang B$$

$$\frac{\cos(A + B)}{\sin A . \sin B} = \cot A . \cot B - 1$$

$$\frac{\cos(A - B)}{\cos A . \cos B} = 1 + \tang A . \tang B$$

$$\frac{\cos(A - B)}{\sin A . \sin B} = \cot A . \cot B + 1.$$

33. Aus den Formeln in (24.) oder in (31. 32.) werden mittelst einiger Divisionen hergeleitet:

$$\tang(A \pm B) = \frac{\tang A \pm \tang B}{1 \mp \tang A . \tang B}$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \mp \tang B}{1 \pm \cot A . \tang B}.$$

34. Aus den Formeln in (31. 32.) folgt noch

$$\frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} = \frac{\tang A + \tang B}{\tang A - \tang B}$$

$$\frac{\cos(A + B)}{\cos(A - B)} = \frac{\cot A - \tang B}{\cot A + \tang B}.$$

Bey den zu diesen und den vorhergehenden Formeln nöthigen Verwandlungen hat man nur sich zu erinnern, daß der Sinus eines Winkels durch den Cosinus desselben dividirt die Tangente, dieser durch jenen dividirt, die Cotangente, und daß Tangente mit Cotangente multiplicirt, die Einheit giebt.

35. Man setze $A = B$, so ist aus (24.)

$$\sin 2A = 2 \sin A . \cos A$$

$$\cos 2A = \cos A^2 - \sin A^2.$$

36. Mit diesen Formeln verbinde man die, $1 = \sin A^2 + \cos A^2$, so ist

$$1 + \sin 2A = (\sin A + \cos A)^2$$

$$1 - \sin 2A = (\sin A - \cos A)^2$$

$$1 + \cos 2A = 2 \cos A^2$$

$$1 - \cos 2A = 2 \sin A^2.$$

Die dritte und vierte Formel werden aus den beiden letztern in (28.) erhalten, wenn daselbst $B = 0$ gesetzt, und A mit $2A$ vertauscht wird.

37. Setzt man in den beiden erstern Formeln eben daselbst $A = 90°$, und $2A$ statt B, so ist

$$1 + \sin 2A = 2 \sin (45^\circ + A)^2$$
$$1 - \sin 2A = 2 \sin (45^\circ - A)^2.$$

Es ist nämlich $\cos (45^\circ \mp A) = \sin (45 \pm A)$.

38. Aus (35 und 36.) ist

$$\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tang A$$

$$\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$$

$$\frac{\cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(1 - \tang A^2)$$

$$\frac{\cos 2A}{1 - \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(\cot A^2 - 1).$$

39. In den ersten zwey Formeln vertausche man A mit $45^\circ - A$, so ist

$$\frac{\cos 2A}{1 + \sin 2A} = \tang (45^\circ - A) = \cot (45^\circ + A)$$

$$\frac{\cos 2A}{1 - \sin 2A} = \cot (45^\circ - A) = \tang (45^\circ + A).$$

40. Aus diesen entsteht

$$\frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \frac{\tang (45^\circ + A)}{\tang (45^\circ - A)}$$
$$= \tang (45^\circ + A)^2$$

oder $\dfrac{1 - \sin 2A}{1 + \sin 2A} = \tang 45^\circ - A)^2.$

Diese Formel folgt auch aus (37.), weil $\cos(45 \mp A) = \sin (45 \pm A)$, und Sinus durch Cosinus dividirt die Tangente ist.

41. Aus den beiden letzten Formeln in (36.) ist

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tang A^2.$$

Vertauscht man A mit $45^\circ - A$, so wird die zweyte Formel in (40.) erhalten.

42. Aus der Formel in (41.) folgt

$$\cos 2A = \frac{1 - \tang A^2}{1 + \tang A^2},$$

und aus dieser

$$1 + \cos 2A = \frac{2}{1 + \tang A^2}$$

$$1 - \cos 2A = \frac{2 \tang A^2}{1 + \tang A^2}.$$

Hieraus mit Zuziehung (38.)

$$\sin 2A = \frac{2 \tang A}{1 + \tang A^2}.$$

Oder auch aus den beiden Formeln unmittelbar durch Multiplication und Ausziehung der Quadratwurzel.

43. Aus (28 und 35.) wird erhalten

$$\sin A^2 - \sin B^2 = \sin (A + B) . \sin (A - B)$$
$$\cos B^2 - \cos A^2 = \sin (A + B) . \sin (A - B).$$

Setzt man hier $A + B$ statt A, so ist $\sin (A + B)^2 - \sin B^2 = \sin (A + 2B) . \sin A$.

44. In den Formeln (33.) setze man, das obere Vorzeichen genommen, $A = B$, so ist

$$\tang 2A = \frac{2 \tang A}{1 - \tang A^2}$$

$$\cot 2A = \tfrac{1}{2} (\cot A - \tang A).$$

45. In den beiden ersten daselbst setze man $B = 45^\circ$, so ist

$$\tang (45^\circ + A) = \frac{1 + \tang A}{1 - \tang A}$$

$$\tang (45^\circ - A) = \frac{1 - \tang A}{1 + \tang A},$$

und hieraus

$$\text{tang}(45^\circ + A) - \text{tang}(45^\circ - A) = 2\,\text{tang}\,2A.$$

Es ist nämlich der Unterschied $= \frac{4\,\text{tang}\,A}{1 - \text{tang}\,A^2}$ $= 2\,\text{tang}\,2A$. Die Formel folgt auch aus der zweyten in (44.).

46. Es sey $A + B = 90^\circ$, so ist $\text{tang}\,A - \text{tang}\,B = 2\,\text{tang}(A - B)$.

Aus (33.), da $\text{tang}\,B = \frac{1}{\text{tang}\,A}$ ist.

47. Aus den Formeln (31.) wird durch Multiplication erhalten,

$$\text{tang}\,A^2 - \text{tang}\,B^2 = \frac{\sin(A + B) \,.\, \sin(A - B)}{\cos A^2 \,.\, \cos B^2},$$

$$\cot B^2 - \cot A^2 = \frac{\sin(A + B) \,.\, \sin(A - B)}{\sin A^2 \,.\, \sin B^2}$$

48. Aus den Formeln in (39.) folgt

$$\sec 2A + \text{tang}\,2A = \text{tang}(45^\circ + A)$$

$$\sec 2A - \text{tang}\,2A = \text{tang}(45^\circ - A)$$

oder

$$\sec 2A = \text{tang}(45^\circ \pm A) \mp \text{tang}\,2A.$$

Daraus ist

$$2\sec 2A = \text{tang}(45^\circ + A) + \text{tang}(45^\circ - A).$$

Die beiden ersten Formeln werden durch Umkehrung der Brüche in (39.) erhalten. Die Cotangente ist auch ein Bruch, nämlich die Einheit dividirt durch die Tangente. Für $\frac{1}{\cos 2A}$ ist $\sec 2A$ gesetzt.

Die Secanten werden aus Tangenten durch bloße Addition oder Subtraction gefunden.

49. Aus den Formeln (38.) folgt auf ähnliche Art

$$\operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$$
$$\operatorname{cosec} 2A - \cot 2A = \operatorname{tang} A,$$

oder

$$\operatorname{cosec} 2A = \cot A - \cot 2A$$
$$= \operatorname{tang} A + \cot 2A.$$

Daraus ist

$$2 \operatorname{cosec} 2A = \operatorname{tang} A + \cot A.$$

Für $\frac{1}{\sin 2A}$ ist $\operatorname{cosec} 2A$ gesetzt.

50. Da $\cos 2A = \frac{1}{\sec 2A}$ ist, so ist aus (42.)

$$\sec 2A = \frac{1 + \operatorname{tang} A^2}{1 - \operatorname{tang} A^2}$$

und daraus vermittelst (44.)

$$\sec 2A - 1 = \operatorname{tang} A \,.\, \operatorname{tang} 2A.$$

51. Hieraus ist, wenn $2A$ mit $90^\circ - 2A$ vertauscht wird,

$$\operatorname{cosec} 2A - 1 = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ - A)}{\operatorname{tang} 2A}$$

Die Formel kann auch für sich aus der für $\sin 2A$, das ist $\frac{1}{\operatorname{cosec} 2A}$, und der für $\operatorname{tang} 2A$ hergeleitet werden.

52. In den Formeln (28.) setze man $A = 30^\circ + \alpha$; $B = 30^\circ - \alpha$, und bemerke, daß $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so wird erhalten:

I. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

II. $\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha) = \sin\alpha \,.\, \sqrt{3}$

III. $\cos(30^\circ + \alpha) + \cos(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha \,.\, \sqrt{3}$

IV. $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \sin\alpha.$

Die Formeln I. IV. dienen, aus den Sinus der Winkel von 0° bis 30°, und derer von 30° bis 90°, das

ist der Cosinus der Winkel von 0° bis 30°, die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction zu finden. Es ist nämlich

$$\sin(30^\circ + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30^\circ - \alpha),$$
$$\cos(30^\circ + \alpha) = \cos(30^\circ - \alpha) - \sin\alpha.$$

oder

$$\cos(60^\circ - \alpha) = \cos\alpha - \cos(60^\circ + \alpha)$$
$$\sin(60^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha) - \sin\alpha.$$

53. In den beiden ersten Formeln (28.) setze man $B = 90^\circ - A$, so ist

$$\sin A + \cos A = \cos(45^\circ - A).\sqrt{2}$$
$$\cos A - \sin A = \sin(45^\circ - A).\sqrt{2}.$$

Diese Formeln dienen aus den Sinus und Cosinus der Winkel unter $\frac{1}{4}.90^\circ$ oder $22^\circ\frac{1}{2}$ die Sinus und Cosinus der Winkel von $22^\circ\frac{1}{2}$ bis 45° zu berechnen. Dieses ist in der Centesimaltheilung zu gebrauchen, so wie das Verfahren nach (52.) in der Nonagesimaltheilung des Quadranten.

54. In (43.) setze man $A = 45^\circ$, dann $A = 30^\circ$, und noch $A = 60^\circ$, und vertausche B mit A, so ist

$$\tfrac{1}{2} - \sin A^2 = \sin(45^\circ + A).\sin(45^\circ - A)$$
$$\tfrac{1}{4} - \sin A^2 = \sin(30^\circ + A).\sin(30^\circ - A)$$
$$\tfrac{3}{4} - \sin A^2 = \sin(60^\circ + A).\sin(60^\circ - A).$$

55. In der zweyten Formel (44.) setze man $A = 30^\circ - \alpha$, so ist

$$2\,\mathrm{tang}(30^\circ + 2\alpha) = \mathrm{tang}(60^\circ + \alpha) - \mathrm{tang}(30^\circ - \alpha).$$

Es sind nämlich statt der Cotangenten die Tangenten der Complemente gesetzt.

Aus den Tangenten der Winkel von 0° bis 30° und von 60° bis 90° (den Cotangenten von 30° bis 0°) werden die Tangenten der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction gefunden. Nur sind die Unterschiede in der letztern Reihe der Winkel doppelt so groß als in der erstern, s. Cyklotechnie, Th. I. S. 680.

56. Es sey die Summe dreyer Winkel, $A + B + C = 90$, so ist

$$\tan A . \tan B + \tan A . \tan C + \tan B . \tan C = 1.$$

Denn $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin (A + B)}{\cos A . \cos B}$ (31.)

und $\operatorname{tg} A . \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B) . \cot (A + B) = \frac{\sin (A + B)}{\cos A . \cos B} . \frac{\cos (A + B)}{\sin (A + B)} = \frac{\cos (A + B)}{\cos A . \cos B} = 1 - \frac{\sin A . \sin B}{\cos A . \cos B} = 1 - \operatorname{tg} A \times \operatorname{tg} B$, folglich $\operatorname{tg} A . \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B = 1$.

57. Es sey $A + B + C = 90°$, so ist $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A . \cot B . \cot C$.

Denn $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} + \frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)} = \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} . \frac{\cos (A + B) + \sin A . \sin B}{\cos (A + B)}$

$$= \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} . \frac{\cos A . \cos B}{\cos (A + B)}$$

$$= \cot A . \cot B \times \operatorname{tang} (A + B)$$

$$= \cot A . \cot B . \cot C.$$

Der Satz ist in dem Artikel, Dreyeck (38.) durch ein bloßes geometrisches Verfahren gefunden.

III. Reihen der Sinus und Cosinus von Winkeln, die in arithmetischer Progression sind.

58. In der ersten Formel (27.), $\sin (A + B) = 2 \sin A . \cos B - \sin (A - B)$, setze man für A folgeweise die Glieder der arithmetischen Progression,

$a;\ a+b;\ a+2b;\ a+3b;\ \ldots\ldots\ a+nb;$ und $B = b$, so erhält man für die Sinus dieser Winkel folgende Fortschreitung.

$$\sin a = \sin a$$
$$\sin(a+b) = 2\cos b.\sin a - \sin(a-b)$$
$$\sin(a+2b) = 2\cos b.\sin(a+b) - \sin a$$
$$\sin(a+3b) = 2\cos b.\sin(a+2b) - \sin(a+b)$$
$$\sin(a+4b) = 2\cos b.\sin(a+3b) - \sin(a+2b)$$
$$\vdots$$
$$\sin(a+nb) = 2\cos b.\sin(a+(n-1)b) - \sin(a+(n-2)b).$$

59. In der zweyten Formel (27.), $\sin(A+B) = 2\cos A.\sin B + \sin(A-B$, setze man für A und B dieselben Größen, so ist das allgemeine Glied der Fortschreitung der Sinus,

$$\sin(a+nb) = 2\sin b.\cos(a+(n-1)b) + \sin(a+(n-2)b).$$

60. Eben so verfahre man mit der dritten Formel in (27.), $\cos(A+B) = 2\cos A.\cos B - \cos(A-B)$, und man erhält

$$\cos a = \cos a$$
$$\cos(a+b) = 2\cos b.\cos a - \cos(a-b)$$
$$\cos(a+2b) = 2\cos b.\cos(a+b) - \cos a$$
$$\cos(a+3b) = 2\cos b.\cos(a+2b) - \cos(a+b)$$
$$\cos(a+4b) = 2\cos b.\cos(a+3b) - \cos(a+2b)$$
$$\vdots$$
$$\cos(a+nb) = 2\cos b.\cos(a+(n-1)b) - \cos(a+(n-2)b).$$

61. Durch dieselben Substitutionen wird aus der vierten Formel, $\cos(A + B) = \cos(A - B) - 2 \sin A . \sin B$, das allgemeine Glied der Fortschreitung der Cosinus,

$$\cos(a + nb) = \cos(a + (n - 2)b) - 2 \sin b . \sin(a + (n - 1)b).$$

62. Von diesen Formeln ist in dem Artikel, Cyklotechnie, die Anwendung zum Einschalten der Sinus und Cosinus zwischen zwey gegebenen, bey einer arithmetischen Fortschreitung der Winkel, gemacht. Th. I. S. 677.

Die Reihe der Sinus und Cosinus ist nach (58 und 60.) eine rücklaufende, worin jedes Glied aus den zwey nächst vorhergehenden auf eine gleichförmige Art zusammengesetzt wird.

63. Die Summe einer Reihe Sinus von Winkeln, die in arithmetischer Progression sind, sey $= S$, so daß

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) \ldots\ldots \ldots + \sin(a + nb) = S.$$

Es ist

$$S = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos(a + (n + \frac{1}{2})b)}{2 \sin \frac{1}{2} b},$$

oder

$$S = \frac{\sin(a + \frac{1}{2}nb) . \sin \frac{1}{2}(n + 1)b}{\sin \frac{1}{2} b}.$$

In der Formel (61.),

$2 \sin b . \sin(a + (n - 1)b) = \cos(a + (n - 2)b) - \cos(a + nb)$, setze man für n successiv die Werthe, $1, 2, 3 \ldots n + 1$, so erhält man eine Reihe von Formeln oder Gleichungen, deren erste ist

$$2 \sin b . \sin a = \cos(a - b) - \cos(a + b).$$

Die letzte oder $(n + 1)$te ist

$$2 \sin b . \sin(a + nb) = \cos(a + (n - 1)b) - \cos(a + (n + 1)b).$$

Addirt man alle diese Gleichungen zu einander, so entsteht daraus diese,

$$2 \sin b . S = \cos(a - b) + \cos a - \cos(a + nb) - \cos(a + (n + 1) b),$$

das ist (28.)

$$\sin b . S = \cos(a - \tfrac{1}{2} b) \cos \tfrac{1}{2} b - \cos(a + (n + \tfrac{1}{2}) b) \cos \tfrac{1}{2} b.$$

Da $\sin b = 2 \sin \frac{1}{2} b . \cos \frac{1}{2} b$, so entsteht durch die Substitution des Werthes von $\sin b$ der erste angegebene Werth von S, und durch Verwandlung des Unterschiedes in ein Product nach (28.) der zweyte.

64. Die Summe einer Reihe Cosinus von Winkeln, die in arithmetischer Progression sind, sey $= s$, so daß $\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) \ldots \ldots + \cos(a + nb) = s$; es ist

$$s = \frac{\sin(a + (n + \frac{1}{2}) b) - \sin(a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b},$$

oder

$$s = \frac{\cos(a + \frac{1}{2} nb) . \sin \frac{1}{2} (n + 1) b}{\sin \frac{1}{2} b}.$$

In der Formel (59.)

$$2 \sin b . \cos(a + (n - 1) b) = \sin(a + nb) - \sin(a + (n - 2) b)$$

setze man für n nach der Reihe die Werthe, 1, 2, 3, .. n, n + 1, so erhält man eine Folge von Gleichungen, deren erste ist

$$2 \sin b . \cos a = \sin(a + b) - \sin(a - b).$$

Die letzte oder (n + 1)te ist

$$2 \sin b . \cos(a + nb) = \sin(a + (n + 1) b) - \sin(a + (n - 1) b).$$

Werden alle diese Gleichungen zusammen genommen, so entsteht die Gleichung,

$$2 \sin b . s = \sin (a + nb) + \sin (a + (n + 1) b) - \sin (a - b) - \sin a.$$

Diese verwandelt sich in

$$\sin b . s = \sin (a + (n + \tfrac{1}{2}) b) \cos \tfrac{1}{2} b - \sin (a - \tfrac{1}{2} b) . \cos \tfrac{1}{2} b,$$

woraus sich durch die Substitution von $2 \sin \frac{1}{2} b . \cos \frac{1}{2} b$ für $\sin b$ die angegebene Formel ergiebt.

65. Es ist $\sin a + \sin 2a + \sin 3a \ldots\ldots + \sin . na = \frac{1}{2} \sin . na + \frac{1}{2} (1 - \cos na) \cot \frac{1}{2} a$.

Denn in der ersten Formel (63.) setze man $n - 1$ statt n, und $b = a$, so ist $S = \frac{\cos \frac{1}{2} a - \cos (n + \frac{1}{2}) a}{2 \sin \frac{1}{2} a}$.

Da $\cos (n + \frac{1}{2}) a = \cos na . \cos \frac{1}{2} a - \sin . na \times \sin \frac{1}{2} a$, und $\frac{\cos .}{\sin .} = \cot .$ so ergiebt sich sogleich die aufgestellte Formel.

Oder es ist $2 S - \sin na = \frac{1 - \cos na}{\tang \frac{1}{2} a}$.

Diesen Satz erweiset Archimedes geometrisch auf eine sehr einfache Art in dem 1. B. von Kugel und Cylinder, 22. Satz. Man hat nur statt der Chorden bey ihm die doppelten Sinus zu setzen.

66. Aus der zweyten Formel in (63.) ist $\sin a + \sin 2a \ldots + \sin na = \frac{\sin \frac{1}{2} (n + 1) a . \sin \frac{1}{2} na}{\sin \frac{1}{2} a}$.

Dieser Satz ist in dem Artikel, Differenzenrechnung (80.), aus der Theorie summatorischer Functionen hergeleitet.

67. Es ist $\cos a + \cos 2a + \cos 3a \ldots + \cos na = \frac{1}{2} \sin . na . \cot \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} (1 - \cos na)$.

Der Beweis ist dem in (66.) geführten ähnlich.

68. Aus der zweyten Formel in (64.) ist $\cos a + \cos 2a \ldots + \cos na = \frac{\cos(\frac{1}{2}(n+1)a) . \sin \frac{1}{2} na}{\sin \frac{1}{2} a}$, wie in dem Artikel, Differenzenrechnung (81.).

69. Es sey der Winkel na zu dem letzten Sinus und Cosinus $= 90°$, so ist die Summe der Sinus $= \frac{1}{2}(1 + \cot \frac{1}{2} a)$, und die Summe der Cosinus $= \frac{1}{2}(\cot \frac{1}{2} a - 1)$. Addirt man zu der letztern noch den $\cos 0° = 1$, so wird die Summe, $\cos 0° + \cos a \ldots + \cos 90° = \frac{1}{2}(\cot \frac{1}{2} a + 1)$, gleich der Summe der Sinus, wie es nothwendig ist.

70. Es sey $na = 180°$, so ist die Summe der Sinus $= \cot \frac{1}{2} a$, da $\cos na = \cos 180° = -1$ ist.

Diesen Satz hat Archimedes a. a. O. 21. S. erwiesen. Kepler sagt in den Comment. de stella Martis, p. 211, daß die Secante und die Tangente von 89° zusammen genommen der Summe aller Sinus von Grad zu Grad durch den ganzen Halbkreis gleich sind, und beruft sich deshalb auf Cardanum de subtilitate (vermuthlich Kap. 16.), mit der Anzeige, daß Justus Byrgius den Beweis gefunden zu haben versichere. Es ist $\operatorname{cosec}. a + \cot a = \cot \frac{1}{2} a$ (49.). Setzt man $a = 1°$, so ist $\operatorname{cosec}. 1° = \sec. 89°$, und $\cot. 1° = \operatorname{tang}. 89°$.

71. Wenn a ein kleiner Winkel, also $\cot \frac{1}{2} a$ eine große Zahl ist, so ist die Summe, $\sin a + \sin 2a \ldots \sin. + na$ zu der Summe $\sin a + \sin 2a \ldots + \sin \frac{1}{2}\pi$, oder die Summe der Sinus in dem Bogen na zu der Summe der Sinus in dem Quadranten fast wie $1 - \cos na : 1$. Diesen Satz gebraucht Kepler in den Comm. de stella Martis, p. 274. und hat ihn vermuthlich durch Induction gefunden.

72. Wenn die Summe der Sinus oder Cosinus in einer ohne Ende fortgehenden Reihe verlangt wird, so entsteht eine Schwierigkeit, da die Reihe nicht convergirend ist. Die Sinus der Winkel von π bis 2π; von 3π bis 4π, und überhaupt von $(2m + 1)\pi$ bis

$(2m+2)\pi$ sind negativ. Die Summe der Sinus ist also wechselsweise zunehmend und abnehmend, und in einer beständigen Schwankung diesseits oder jenseits einer gewissen unveränderlichen Größe, die bloß durch die Winkel a und b bestimmt wird, und diese unveränderliche Größe vertritt bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern die Stelle der arithmetischen Summe, welche nur bey einer endlichen Anzahl von Gliedern angegeben werden kann. In dem Werthe der Summe der Sinus,

$$S = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos(a + (n + \frac{1}{2}b))}{2\sin\frac{1}{2}b},$$ hängt

der erste Theil von der Anzahl der Glieder nicht ab. Daher ist die Summe, $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b)$ $+ \text{etc. in infin.} = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}b}$.

73. Aus demselben Grunde ist die Summe, $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \text{etc. in infin.} = -\frac{\sin(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}}$.

74. Da $2\cos(a - \frac{1}{2}b) \cdot \sin\frac{1}{2}b = \sin a - \sin(a-b)$, (27.) so ist

$$\sin a + \sin(a+b) + \text{etc. in inf} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{4\sin\frac{1}{2}b^2}.$$

Da ferner $2\sin(a - \frac{1}{2}b) \cdot \sin\frac{1}{2}b = \cos(a-b) - \cos a$, so ist

$$\cos a + \cos(a+b) + \text{etc. in inf.} = -\frac{\cos(a-b) - \cos a}{4\sin\frac{1}{2}b^2}.$$

75. Diese Werthe der Summe einer unendlichen Reihe von Sinus oder Cosinus stimmen mit denjenigen überein, die man erhält, wenn man mit Euler allgemein Summe einer unendlichen Reihe die analytische Formel nennt, aus deren Entwickelung jene Reihe entsteht. Da die Sinus und Cosinus von Winkeln, die in arithmeti-

scher Fortschreitung sind, eine rücklaufende Reihe ausmachen, so läßt sich eine solche Formel finden, die entwickelt die Reihe der Sinus und Cosinus giebt. Nämlich, wenn

$$\frac{p + qz}{1 - \alpha z + z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

ist, so sind A, B, C, D, etc. Glieder einer rücklaufenden Reihe, deren Verhältniß-Scale ist, $+\alpha$; -1, und $p = A$; $q = B - \alpha A$. s. rücklaufende Reihe. In unserm Falle ist, aus (58. und 60.), $\alpha = 2 \cos b$, und für die Reihe der Sinus, $A = \sin a$; $B = \sin(a + b)$, also $p = \sin a$; $q = \sin(a + b) - 2 \sin a . \cos b$.

Setzt man $z = 1$, so wird $\frac{p + q}{1 - \alpha + 1}$ die Reihe der Sinus ohne Ende fortgesetzt. Ist diese $= S$, so ist

$$S = \frac{\sin a + \sin(a + b) - 2 \sin a . \cos b}{2 - 2 \cos b}$$

$$= \frac{\sin a - \sin(a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = \frac{\cos(a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

Für die Reihe der Cosinus ist $A = \cos a$; $B = \cos(a + b)$; und $p = \cos a$; $q = \cos(a + b) - 2 \cos a . \cos b$. Demnach ist

$$s = \frac{\cos a + \cos(a + b) - 2 \cos a . \cos b}{2(1 - \cos b)}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = - \frac{\sin(a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

76. Die in dem vorhergehenden Paragraphen vorgetragene Auflösung ist aus Eulers Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 258. ff. genommen. Sie scheint der Natur dieser Reihen völlig angemessen zu seyn. Inzwischen hat Daniel Bernoulli doch noch Schwierigkeiten dabey gefunden. Er hat über diese Reihen zwey Abhandlungen in den neuen Pe-

tersburger Commentarien, T. XVII. 1772, und T. XVIII. 1774. geliefert. In der zweyten äußert er die Meynung, daß in dem Falle, wenn die Anzahl der Glieder unendlich ist, etwas verborgen liege, quod omnem solutionem pure geometricam eludat, rursusque ad principia ejus metaphysica, sed alio modo, recurrendum esse. Eine Abhandlung des Abbé Bossut in den Mem. de l'Acad. des sc. 1769. hatte ihn zu diesen Untersuchungen veranlaßt. Zugleich hat auch Lexell in den Comm. Acad. Petrop. T. XVIII. über denselben Gegenstand seine Gedanken vorgetragen. Sein Verfahren ist im Grunde das Bernoullische, hat aber den Anschein von Willkührlichkeit. Das Resultat ist das obige. Euler selbst hat die Sache noch einmal vorgenommen, in den novis Actis Petrop. T. VII. 1789.

Entweder muß man die Summe einer unendlichen Reihe gar nicht bestimmen wollen, oder eine bestimmte Gränze suchen. Diese ist in unserm Falle diejenige Größe, von welcher die wirklichen successiven Summen wechselsweise in Plus und Minus unterschieden sind.

77. Die beiden Formeln in (74.) sind schon in einer andern Absicht als Summen unendlicher Reihen betrachtet worden, in Differenzenrechnung (64. 65.). Man setze irgend einen der Winkel in der arithmetischen Progression $= \varphi$; den Unterschied der Glieder $= \Delta\varphi$, so ist

$$\frac{\sin\varphi - \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2}$$ die Function, deren Differenz

$= -\sin\varphi$. Denn man setze diese Function $= z$, so ist

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = z + \Delta z,$$

also

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - 2\sin\varphi + \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = \Delta z,$$

oder

$$\Delta z = \frac{2 \sin \varphi . \cos \Delta \varphi - 2 \sin \varphi}{4 \sin \frac{1}{2} \Delta \varphi^2} = - \sin \varphi,$$

und daher ist die durch z bezeichnete Function die integrirende Function von $- \sin \varphi$, oder $- z$ ist es von $\sin \varphi$. Diese läßt sich auch, wenn die Reihe der Unterschieds-Functionen unendlich gesetzt, und dadurch kein letztes Glied angegeben werden kann, als eine Summe betrachten.

Ist nämlich eine Reihe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \psi, \omega$ gegeben, so ist $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\delta - \gamma) \ldots + (\omega - \psi) = \omega - \alpha$, oder die Summe der Differenzen negativ genommen gleich $\alpha - \omega$, also gleich α zu schätzen, wenn ω als ein unendlich entferntes Glied betrachtet wird. Was hier α ist, ist die vorher durch z bezeichnete Function von φ, und $\beta - \alpha$ ist $= - \sin \varphi$.

Eben solche Beschaffenheit hat es mit der Reihe der Cosinus.

78. Die Reihe der Winkel sey A; $A + 2\alpha$; $A + 4\alpha$; $A + 6\alpha$; etc. Die Anfangsglieder der Differenzreihen ihrer Sinus seyn bezeichnet durch $\Delta \sin \alpha$; $\Delta^2 \sin A$; $\Delta^3 \sin A$; u. s. f. Die zweyten Glieder derselben durch $\Delta \sin (A + 2\alpha)$; $\Delta^2 \sin (A + 2\alpha)$; $\Delta^3 \sin (A + 2\alpha)$; etc. Die dritten Glieder durch $\Delta \sin (A + 4\alpha)$; etc. u. s. f. für die folgenden Glieder. Es ist

$$\Delta \sin A = + 2 \cos (A + \alpha) . \sin \alpha$$
$$\Delta^2 \sin A = - 4 \sin (A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$$
$$\Delta^3 \sin A = - 8 \cos (A + 3\alpha) . \sin \alpha^3$$
$$\Delta^4 \sin A = + 16 \sin (A + 4\alpha) . \sin \alpha^4$$
etc. etc.

Auf gleiche Art ist

$$\Delta \cos A = -\ 2 \sin (A + \alpha) . \sin \alpha$$
$$\Delta^2 \cos A = -\ 4 \cos (A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$$
$$\Delta^3 \cos A = +\ 8 \sin (A + 3\alpha) . \sin \alpha^3$$
$$\Delta^4 \cos A = +\ 16 \cos (A + 4\alpha) . \sin \alpha^4$$
etc. etc.

Denn es ist $\Delta \sin A = \sin (A + 2\alpha) - \sin A = 2 \cos (A + \alpha) . \sin \alpha$. Auch $\Delta \sin (A + 2\alpha) = \sin (A + 4\alpha) - \sin (A + 2\alpha) = 2 \cos (A + 3\alpha) . \sin \alpha$, also $\Delta^2 \sin A = \Delta \sin (A + 2\alpha) - \Delta \sin A = -4 \sin (A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$. Auf gleiche Art werden die beiden ersten Glieder jeder folgenden Differenzreihe, und daraus das Anfangsglied der nächst folgenden gefunden. Man kann auch die Glieder der Differenzreihen als Glieder einer Hauptreihe betrachten. Die Glieder derselben Differenzreihe werden aus dem Anfangsgliede ganz leicht durch Vertauschung von A mit den folgenden Winkeln gefunden.

79. Bey derselben Progression der Winkel, A, $A + 2\alpha$, $A + 4\alpha$, etc. ist

$$\Delta \sec A = \frac{2 \sin (A + \alpha) . \sin \alpha}{\cos A . \cos (A + 2\alpha)}$$

$$\Delta^2 \sec A = \frac{(2 \cos \alpha^2 - \cos (A + 2\alpha)^2) . 4 \sin \alpha^2}{\cos A . \cos (A + 2\alpha) . \cos (A + 4\alpha)}.$$

Denn es ist $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\sec (A + 2\alpha) = \frac{1}{\cos (A + 2\alpha)}$, also

$$\Delta \sec A = \frac{\cos A - \cos (A + 2\alpha)}{\cos A . \cos (A + 2\alpha)},$$

worin der Zähler $= 2 \sin (A + \alpha) . \sin \alpha$ ist.

Das zweyte Glied der ersten Differenzreihe ist

$$\Delta \sec(A+2\alpha) = \frac{2\sin(A+3\alpha).\sin\alpha}{\cos(A+2\alpha).\cos(A+4\alpha)}.$$

Dadurch ist $\Delta^2 \sec A =$

$$\frac{\sin(A+3\alpha).\cos A - \sin(A+\alpha).\cos(A+4\alpha)}{\cos A.\cos(A+2\alpha).\cos(A+4\alpha)} \times 2\sin\alpha.$$

Den Zähler des Bruchs auf die Winkel der Progression und α zu reduciren, bemerke man, daß

$\sin(A+3\alpha)\cos A = \frac{1}{2}\sin(2A+3\alpha) + \frac{1}{2}\sin 3\alpha$;

$\sin(A+\alpha).\cos(A+4\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2A+5\alpha) - \frac{1}{2}\sin 3\alpha$;

daß der Unterschied dieser beiden Werthe $= \sin 3\alpha - \cos(2A+4\alpha).\sin\alpha$, und daß $\sin 3\alpha = (4\cos\alpha^2 - 1) \times \sin\alpha$, auch, daß $1 + \cos(2A+4\alpha) = 2\cos(A+2\alpha)^2$ ist.

80. Bey eben der Progression der Winkel ist

$$\Delta \operatorname{cosec} A = -\frac{2\cos.(A+\alpha).\sin\alpha}{\sin A.\sin(A+2\alpha)}$$

$$\Delta^2 \operatorname{cosec} A = \frac{(2\cos\alpha^2 - \sin(A+2\alpha)^2).4\sin\alpha^2}{\sin A.\sin(A+2\alpha).\sin(A+4\alpha)}.$$

Man hat nur nöthig, $90° - A$ statt A, und $-\alpha$ statt $+\alpha$ in den Formeln (79.) zu setzen.

81. Die Reihe der Winkel sey A, $A+\alpha$, $A+2\alpha$, $A+3\alpha$; etc. so ist

$$\Delta \operatorname{tang} A = \frac{\sin\alpha}{\cos A.\cos(A+\alpha)},$$

$$\Delta^2 \operatorname{tang} A = \frac{2\operatorname{tang}(A+\alpha).\sin\alpha^2}{\cos A.\cos(A+2\alpha)}.$$

Aus den Werthen von $\operatorname{tang}(A+\alpha) - \operatorname{tang} A$, und

tang $(A + 2\alpha)$ — tang $(A + \alpha)$ wird Δ tang A, und Δ tang $(A + \alpha)$ erhalten. Aus diesen beiden ersten Gliedern der ersten Differenzreihe folgt Δ^2 tang A, wobey noch tang $(A + \alpha)$ statt des Quotienten von Sinus dividirt durch Cosinus zu setzen ist.

82. Hieraus ist, wenn A mit 90 — A und $+\alpha$ mit $-\alpha$ vertauscht wird,

$$\Delta \cot A = -\frac{\sin \alpha}{\sin A . \sin(A + \alpha)}$$

$$\Delta^2 \cot A = + \frac{2 \cot(A + \alpha) . \sin \alpha^2}{\sin A . \sin(A + 2\alpha)}.$$

83. Die drey Winkel, A, B, C, seyn in arithmetischer Proportion, so ist

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2 \sin B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2 \cos B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C) - \sec A . \sec B . \sec C \times$$
$$(4 \cos \tfrac{1}{2}(B - A)^2 - 2 \cos B^2) . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

oder

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C) - \sec A . \sec B . \sec C \times$$
$$(1 + 2 \cos(B - A) - \cos 2B) . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2.$$

$$\tan B = \tfrac{1}{2}(\tan A + \tan C) - \frac{\tan B . \sin(B - A)^2}{\cos A . \cos C}.$$

Denn es seyn irgend drey Größen, α, β, γ, ihre ersten Unterschiede, $\Delta\alpha = \beta - \alpha$; $\Delta\beta = \gamma - \beta$, so ist der zweyte Unterschied $\Delta^2\alpha = \gamma - 2\beta + \alpha$; also $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \frac{1}{2}\Delta^2\alpha$. (Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. 2.). Von diesem allgemeinen Satze sind die aufgestellten Formeln unmittelbare Anwendungen. In der ersten Formel, für die Secante sind anstatt der Cosinus im Divisor die Secanten im Dividendus gesetzt; in der zweyten ist eine Substitution aus (36.) gebraucht.

IV. Formeln für die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels durch die Sinus und Cosinus des einfachen; auch der Tangenten auf gleiche Art.

84. Man setze in (58.) den Winkel $a = 0$, $b = \varphi$; $\sin \varphi = y$; $\cos \varphi = x$, so ist

$$\sin . n\varphi = 2 \cos \varphi . \sin (n - 1)\varphi - \sin (n - 2)\varphi.$$

Die Sinus der vielfachen Winkel machen also eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß = Scale ist $2 \cos \varphi$; -1. Daher ist

$$\sin \varphi = y$$
$$\sin 2\varphi = 2xy$$
$$\sin 3\varphi = 4x^2y - y$$
$$\sin 4\varphi = 8x^3y - 4xy$$
$$\sin 5\varphi = 16x^4y - 12x^2y + y$$
$$\sin 6\varphi = 32x^5y - 32x^3y + 6xy$$
$$\sin 7\varphi = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y$$
$$\sin 8\varphi = 128x^7y - 192x^5y + 80x^3y - 8xy$$
$$\sin 9\varphi = 256x^8y - 448x^6y + 240x^4y - 40x^2y + y$$

und allgemein

$$\sin . n\varphi = 2^{n-1} x^{n-1} y - (n - 2)\, 2^{n-3} x^{n-3} y$$
$$+ \frac{n-3 . n-4 .}{1 . 2} 2^{n-5} x^{n-5} y$$
$$- \frac{n-4 . n-5 . n-6 .}{1 . 2 . 3} 2^{n-7} x^{n-7} y$$
$$+ \frac{n-5 . n-6 . n-7 . n-8 .}{1 . 2 . 3 . 4} 2^{n-9} x^{n-9} y - \text{etc.}$$

85. Um die Formation der Coefficienten in einer verticalen Reihe, oder zu derselben Stelle gehörigen, zu entdecken, bezeichne man sie durch A, B, C, D . . . Q, R, S, T, etc. und die in der folgenden durch a, b,

c, d, . . . q, r, s, t, etc. so daß die gleichnamigen Coefficienten in denselben Stellen ihrer Reihen vom Anfange an stehen.

Es ist

$t = 2s + T; \qquad s = 2r + S;$

$r = 2q + R; \qquad q = 2p + Q;$ u. s. f.

also $t = 4r + 2S + T = 8q + 4R + 2S + T$
$= 16p + 8Q + 4R + 2S + T$, u. s. f.

Ist T das mte Glied der einen Reihe, und t das mte Glied der folgenden, so ist

$$t = 2^{m-1} A + 2^{m-2} B + 2^{m-3} C \ldots$$
$$\ldots + 8Q + 4R + 2S + T,$$

da von T bis A m Glieder der Reihe sind.

Die erste Reihe der Coefficienten ist offenbar die geometrische, 1, 2, 4, 8, ꝛc. In der zweyten Reihe ist demnach das allgemeine Glied $= m . 2^{m-1}$, und die Reihe ist

$$1.1;\ 2.2;\ 3.2^2;\ 4.2^3 \ldots m.2^{m-1};\ \text{etc.}$$

Daher ist das allgemeine Glied der dritten Reihe,

$$t = (1 + 2 + 3 \ldots + m)\, 2^{m-1} = \frac{m.m+1.}{1.2}\, 2^{m-1},$$

und die Reihe ist

$$1;\ 3.2;\ 6.2^2;\ 10.2^3 \ldots \frac{m.m+1.}{1.2}\, 2^{m-1};\ \text{etc.}$$

Nun ist das allgemeine Glied in der vierten Reihe,

$$t = \left(1 + 3 + 6 + 10 \ldots + \frac{m.m+1.}{1.2}\right) 2^{m-1}$$

$= \frac{m.m+1.m+2.}{1.2.3}\, 2^{m-1}$ (arithm. Reihen höh. Ordn. 12. 13. oder Binomialcoefficienten, 6.), und die Reihe ist

$$1; 4.2; 10.2^2; 20.2^3 \ldots; \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}.2^{m-1} \text{ etc.}$$

Daraus ist das allgemeine Glied der fünften Reihe

$$t = \left(1+4+10+20 \ldots \frac{m.m+1.m+2.}{1.2.3}\right)2^{m-1}$$

$$= \frac{m.m+1.m+2.m+3.}{1.2.3.4}.2^{m-1}.$$

In der ersten Reihe ist $m = n$; in der zweyten ist $m = n - 2$; in der dritten $m = n - 4$; in der vierten $m = n - 6$, u. s. f. Setzt man diese Werthe für m in den gefundenen allgemeinen Ausdrücken, so wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

86. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so läßt sich $\sin.n\varphi$ durch Potenzen von $\sin\varphi$ oder y allein ohne den $\cos\varphi$ oder x ausdrücken, weil die Potenzen von x alsdann gerade Exponenten haben, und also ganze Potenzen von $1 - y^2$ geben. Man setze in (58.) den Winkel $a = \varphi$; $b = 2\varphi$, so ist

$$\sin(2n+1)\varphi = 2\cos 2\varphi.\sin(2n-1)\varphi - \sin(2n-3)\varphi,$$

oder, weil $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin\varphi^2$ ist,

$$\sin(2n+1)\varphi = (2 - 4\sin\varphi^2).\sin(2n-1)\varphi - \sin(2n-3)\varphi.$$

Die Sinus ungerader Vielfachen von φ machen also eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale ist $+(2 - 4y^2)$; -1. Demnach ist

$$\sin\varphi = y$$

$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3$$

$$\sin 5\varphi = 5y - 20y^3 + 16y^5$$

$$\sin 7\varphi = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$$

$$\sin 9\varphi = 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9$$

$$\sin 11\varphi = 11y - 220y^3 + 1232y^5 - 2816y^7 + 2816y^9 - 1024y^{11}$$

und allgemein, für ein ungerades n,

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1} y - \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3 +$$

$$\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5 - \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7} y^7$$

$$\ldots \pm 2^{n-1} y^n.$$

87. Man bezeichne die Coefficienten in einer Verticalreihe, oder diejenigen, welche zu derselben Potenz von y gehören, durch A, B, C, D, . . . P, Q, R, S, T, etc. und die in der nächstfolgenden durch a, b, c, d . . . p, q, r, s, t, etc. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. Die gleichnamigen Coefficienten haben einerley Stellen in ihren Reihen. Es ist

$$t = 2s - r + 4T; \qquad s = 2r - q + 4S;$$

$$r = 2q - p + 4R; \quad \text{etc.}$$

also $t = 3r - 2q + 8S + 4T = 4q - 3p + 12R + 8S + 4T$. Auf diese Art wird zuletzt erhalten das mte Glied

$$t = 4\,(mA + (m-1)B + (m-2)C \ldots\ldots$$

$$\ldots + 3R + 2S + T).$$

In dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen (17.), ist die Summirung dieser Reihe gewiesen. Das erste Glied der ersten Unterschiede der Reihe A, B, C, D, etc. sey ΔA; das erste der zweyten Unterschiede $= \Delta^2 A$; der dritten $\Delta^3 A$, u. s. f. so ist

$$t = 4\left(\frac{m+1.m}{1.2} A + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3} \Delta A\right.$$

$$\left. + \frac{m+1.m.m-1.m-2.}{1.2.3.4} \Delta^2 A + \text{etc.}\right).$$

Die erste Reihe der Coefficienten ist offenbar die der ungeraden Zahlen. Also ist $A = 1$; $\Delta A = 2$; $\Delta^2 A = 0$, etc. und

$$t = 4\left(\frac{m+1.m}{1.2}.1 + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3}.2\right)$$

$$= 4.\frac{m.m+1.2m+1.}{1.2.3}.$$

Die zweyte Reihe der Coefficienten ist also

$$4(1;\ 5;\ 14;\ 30;\ 55\ldots\frac{m.m+1.2m+1.}{1.2.3};\ \text{etc.}).$$

Diese Reihe ist eine arithmetische der dritten Ordnung, in welcher nach Absonderung des Factors 4, ist $A = 1$; $\Delta A = 4$; $\Delta^2 A = 5$; $\Delta^3 A = 2$. Folglich ist für die nächstfolgende Reihe,

$$t = 16\left(\frac{m+1.m}{1.2}.1 + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3}.4\right.$$

$$\left. + \frac{m+1\ldots m-2.}{1\ldots 4}.5 + \frac{m+1\ldots m-3.}{1\ldots 5}.2\right).$$

Entwickelt man die Producte, so ist

$$t = 16.\frac{m.m+1}{1.2}.\frac{2m^3+13m^2+27m+18}{3.4.5}.$$

Setzt man in dem Zähler des zweyten Bruchs $m = -2$, so wird derselbe $= 0$; ebenfalls, wenn $m = -3$ gesetzt wird. Dieser Zähler enthält also die Factoren $m + 2$ und $m + 3$; daher auch, wegen der Glieder $2m^3$ und $+18$, den Factor $2m + 3$, so daß

$$t = 16.\frac{m.m+1.m+2.m+3.2m+3.}{1.2.3.4.5}.$$

Die dritte Reihe der Coefficienten ist also

$$16\left(1;\ 7;\ 27;\ 77;\ \ldots\frac{m\ldots m+3.2m+3.}{1\ldots 4.5}\right).$$

Dieses ist eine arithmetische Reihe der fünften Ordnung. Nach abgesondertem Factor, 16, ist $\Delta A = 6$; $\Delta^2 A = 14$; $\Delta^3 A = 16$; $\Delta^4 A = 9$; $\Delta^5 A = 2$. Mittelst dieser

Differenzglieder findet man auf dieselbe Art wie vorher das allgemeine Glied der vierten Verticalreihe. Man erkennt aber schon in den allgemeinen Gliedern der drey ersten Reihen das Gesetz der Glieder überhaupt. Es ist nach der Analogie jener das mte Glied der vierten Verticalreihe

$$= 64 . \frac{m . m+1 \ldots m+5 . 2m+5 .}{1 . 2 \ldots 6 . 7};$$

der fünften Verticalreihe

$$= 256 . \frac{m . m+1 \ldots m+7 . 2m+7 .}{1 . 2 \ldots 8 . 9};$$

u. s. f.

Da die Reihen alle auf eine gleichförmige Art jede aus der nächst vorhergehenden hergeleitet werden, so ist das aus einigen Gliedern erkannte Gesetz der Formation zuverlässig. Die berechneten Glieder der vierten und fünften Reihe bestätigen es.

88. Für die erste Reihe ist $m = \frac{n+1}{2}$, und $t = \frac{2m-1}{1} = n$. Für die zweyte Reihe ist $m = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$, also $t = \frac{n+1 . n-1 . n}{1 . 2 . 3} = \frac{n . nn-1 .}{1 . 2 . 3}$. Für die dritte ist $m = \frac{n+1}{2} - 2 = \frac{n-3}{2}$, also $t = \frac{n-3 . n-1 . n+1 . n+3 . n}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = \frac{n . nn-1 . nn-9 .}{1 \ldots 5}$; u. s. w.

89. Man setze in (58.) den Winkel $a = 0$, und $b = 2\varphi$, so ist

$\sin 2n\varphi = 2\cos 2\varphi . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$,

oder $\sin 2n\varphi = (2 - 4\sin\varphi^2) . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$. Die Sinus der geraden Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe, deren Verhältniß-Scale ist $+ 2\cos 2\varphi$; -1, oder $(+2 - 4\sin\varphi^2)$; -1, das ist, $+ (2 - 4yy)$; -1. Demnach ist, wenn $\cos\varphi = x$ gesetzt wird,

$$\sin 2\varphi = 2yx$$
$$\sin 4\varphi = (4y - 8y^3)x$$
$$\sin 6\varphi = (6y - 32y^3 + 32y^5)x$$
$$\sin 8\varphi = (8y - 80y^3 + 192y^5 - 128y^7)x$$
$$\sin 10\varphi = (10y - 160y^3 + 672y^5 - 1024y^7 + 512y^9)x$$

etc. etc.

und allgemein, für ein gerades n,

$$\sin n\varphi = \left(\frac{n}{1}y - \frac{n \cdot nn - 4 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \frac{n.nn-4.nn-16.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}y^5 + \frac{n.nn-4.nn-16.nn-36.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}y^7 \ldots\ldots \pm 2^{n-1}y^{n-1}\right)\sqrt{(1-yy)}.$$

90. Die Herleitung der allgemeinen Formel ist wie in (87.). Das mte Glied der ersten Verticalreihe ist $= 2m$; das mte der zweyten ist $= 4 . \frac{m.m+1.2m+4.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; das mte der dritten ist

$$= 16 . \frac{m.m+1.m+2.m+3.2m+8.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}; \text{ u. s. f.}$$

In der ersten Reihe ist $m = \frac{n}{2}$; in der zweyten ist $m = \frac{n}{2} - 1$; in der dritten ist $m = \frac{n}{2} - 2$; u. s. f. Setzt man für m diese Werthe, so wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

91. Das letzte Glied in $\sin n\varphi$ ist das erste Glied einer Verticalreihe. Für dasselbe ist $m = 1$; und der Coefficient ist für ein ungerades n eine Potenz von 4, deren Exponent die Zahl der Glieder in $\sin n\varphi$ weniger Eins ist; für ein gerades n eben die Potenz mit 2 multiplicirt. Für ein ungerades n ist die Anzahl der Glieder $= \frac{n+1}{2}$, also ist jener Coefficient $= 4^{(n-1):2} = 2^{n-1}$. Für ein gerades n ist die Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}n$, und der Coefficient des letzten Gliedes $= 2 \times 4^{(n-2):2} = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

92. In der Formel (84.) setze man $2\cos\varphi = z$, so ist die Scale der Relation $+z; -1$; und es ist

$$\sin\varphi = y$$
$$\sin 2\varphi = zy$$
$$\sin 3\varphi = (z^2 - 1)y$$
$$\sin 4\varphi = (z^3 - 2z)y$$
$$\sin 5\varphi = (z^4 - 3z^2 + 1)y$$
$$\sin 6\varphi = (z^5 - 4z^3 + 3z)y$$
$$\sin 7\varphi = (z^6 - 5z^4 + 6z^2 - 1)y$$
$$\sin 8\varphi = (z^7 - 6z^5 + 10z^3 - 4z)y$$

u. s. f.

Die Zusammensetzung dieser Formeln zeigt sogleich, daß die Coefficienten die figurirten Zahlen sind, oder daß die zu einer Verticalreihe gehörigen die Binomial-Coeffi-

cienten in derjenigen Stelle sind, deren Ordnungszahl dieselbe wie für die Verticalreihe ist. Es ist $z = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}$.

93. Man setze in (60.) den Winkel $a = \varphi$, und $b = \varphi$, so ist $\cos(1 + n)\varphi = 2\cos\varphi . \cos n\varphi - \cos(n - 1)\varphi$. Die Cosinus der Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale ist $2\cos\varphi$; -1. Es ist also

$$\cos\varphi = x$$
$$\cos 2\varphi = 2x^2 - 1$$
$$\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x$$
$$\cos 4\varphi = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$\cos 5\varphi = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\cos 6\varphi = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$\cos 7\varphi = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$\cos 8\varphi = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

etc.

Allgemein

$$\cos n\varphi = 2^{n-1} x^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} x^{n-2}$$
$$+ \frac{n.n-3.}{1.2} 2^{n-5} x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} 2^{n-7} x^{n-6}$$
$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} 2^{n-9} x^{n-8}$$
$$- \text{etc.}$$

Das letzte Glied ist $\pm nx$ oder ± 1, nachdem n ungerade oder gerade ist.

Die allgemeine Formel für $\cos n\varphi$ wird aus der für $\sin n\varphi$ in (84.) hergeleitet, vermittelst der Formel $\sin(n + 1)\varphi = \sin n\varphi . \cos\varphi + \cos n\varphi . \sin\varphi$ in (24.). Diese giebt

$$\cos n\varphi = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi.$$

Aus der allgemeinen Formel für $\sin n\varphi$ in (84) wird der Quotient $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ durch eine nach Potenzen von $\cos\varphi$ geordnete Reihe gegeben, und eben so $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$, wenn daselbst $n+1$ statt n gesetzt wird. Dieser letztere Quotient ist =

$$2^n x^n - (n-1)\,2^{n-2}x^{n-2} + \frac{n-2.n-3.}{1.2}2^{n-4}x^{n-4}$$

$$-\frac{n-3.n-4.n-5.}{1.2.3}2^{n-6}x^{n-6} + \frac{n-4..n-7}{1..4}2^{n-8}x^{n-8}$$

— etc.

Der zweyte Theil von $\cos n\varphi$ ist

$$2^{n-1}x^n - (n-2)\,2^{n-3}x^{n-2} + \frac{n-3.n-4.}{1.2}2^{n-5}x^{n-4}$$

$$-\frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3}2^{n-7}x^{n-6} + \frac{n-5..n-8.}{1..4}2^{n-9}.x^{n-8}$$

— etc.

Durchs Abziehen dieses Theils von dem ersten wird ganz leicht die allgemeine Formel erhalten. Man dividire nur in dem ersten Theile jede Potenz von 2 durch 2, und setze dem ersten Factor der Coefficienten 2 als Factor zu.

94ª. Da $1 - \cos 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, also $2\sin n\varphi^2 = 1 - \cos 2n\varphi$ ist, so wird $\sin n\varphi^2$ durch eine nach geraden Potenzen von $\cos\varphi$ geordnete Reihe erhalten.

94^b. Für ein ungerades n ist

$$\pm \sin n\varphi = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2}$$

$$+ \frac{n.n-3.}{1.2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} 2^{n-7} y^{n-6}$$

$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} 2^{n-9} y^{n-8} - \text{etc.}$$

wo das obere Vorzeichen für ein ungerades n von der Form $4m + 1$ gilt.

Die Formel entsteht aus der in (93.), wenn darin $\cos(2n+1)\varphi$ mit $\pm \sin(2n+1)(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ vertauscht, und dann φ statt $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ gesetzt wird, wodurch auch x mit y zu vertauschen ist.

Denn es sey $(2n+1)\varphi = 2m\pi + \omega$, und ω so wie φ kleiner als ein Quadrant. Es ist

$$\cos(2m\pi + \omega) = \cos\omega = + \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)$$
$$= \pm \sin((n - 2m)\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \omega)$$
$$= \pm \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$ wo das obere Vorzeichen für ein gerades n gilt.

Ist der Überschuß von $(2n+1)\varphi$ über ein Vielfaches von vier Rechten ein stumpfer Winkel, so setze man $(2n+1)\varphi = (2m+1)\pi - \omega$, wo ω ein spitzer Winkel ist. Es ist

$$\cos((2m+1)\pi - \omega) = \cos(\pi - \omega)$$
$$= -\cos\omega = -\sin(\tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \mp \sin((n - 2m)\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \pm \sin((n - 2m - 1)\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \pm \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Auf ähnliche Art wird die Vertauschung erwiesen, wenn $(2n+1)\varphi = (2m+1)\pi + \omega$, oder $= 2m\pi - \omega$ ist, und ω hier ebenfalls einen spitzen Winkel bedeutet.

Die Formel des Satzes ist die in (86.) rückwärts gelesen.

Zweyte Formel für den Sinus und den Cosinus des Vielfachen eines Winkels.

95. Den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Winkels kann man noch auf eine andere Art aus den Sinus und Cosinus des einfachen zusammen setzen, nämlich durch die Zusetzung des einfachen Winkels, vermittelst der ersten und dritten Formel in (24.).

Es sey der einfache Winkel $= \varphi$, dessen Sinus $= y$; Cosinus $= x$, so ist

I. $\sin 2\varphi = 2yx$; $\cos 2\varphi = x^2 - y^2$.

II. $\sin 3\varphi = \sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 3yx^2 - y^3$.
$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^3 - 3xy^2$.

III. $\sin 4\varphi = \sin 3\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 4yx^3 - 4y^3x$.
$\cos 4\varphi = \cos 3\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

u. s. w.

96. Man bemerkt leicht, daß sich die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels in die Binomial-Coefficienten aus der Potenz, deren Exponent das Vielfache des Winkels ist, theilen. Es sey

$$(x + y)^n = x^n + \mathfrak{A}x^{n-1}y + \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{C}x^{n-3}y^3 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 + \mathfrak{E}x^{n-5}y^5 + \text{etc.}$$

Man setze, zufolge des an den entwickelten Sinus und Cosinus bemerkten Gesetzes, daß allgemein sey

$$\sin n\varphi = \mathfrak{A}yx^{n-1} - \mathfrak{C}y^3x^{n-3} + \mathfrak{E}y^5x^{n-5} - \mathfrak{G}y^7x^{n-7} + \text{etc.}$$

$$\cos n\varphi = x^n - \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 - \mathfrak{F}x^{n-6}y^6 + \mathfrak{H}x^{n-8}y^8 - \text{etc.}$$

so ist

$$\sin(n+1)\varphi = (1+\mathfrak{A})yx^n - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})y^3x^{n-2} + (\mathfrak{D}+\mathfrak{E})y^5x^{n-4} - (\mathfrak{F}+\mathfrak{G})y^7x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$\cos(n+1)\varphi = x^{n+1} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})x^{n-2}y^2 + (\mathfrak{C}+\mathfrak{D})x^{n-3}y^4 - (\mathfrak{E}+\mathfrak{F})x^{n-5}y^6 + \text{etc.}$$

Nun ist die Summe zweyer auf einander folgenden Binomial-Coefficienten, des mten und (m + 1)ten, in der nten Potenz, der (m + 1)te Coefficient in der (n + 1)ten Potenz (Binom. Coeff. 5.). Die Coefficienten in den Formeln für $\sin(n+1)\varphi$ und $\cos(n+1)\varphi$ sind daher eben so die Binomialcoefficienten aus der (n + 1)ten Potenz von (x + y), wie in den Formeln für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ aus der nten Potenz des Binomium. Die Vorzeichen wechseln in jenen Formeln eben so ab, wie in diesen, und die Folge der Exponenten von y und x wird dort wie hier nach demselben Gesetze bestimmt. Die Formeln sind also für $(n+1)\varphi$ richtig, wenn sie für $n\varphi$ gelten. Nun gelten sie für $n=2$; $n=3$; $n=4$, also auch für $n=5$; folglich für $n=6$, und so ferner für alle ganze Zahlen-Werthe von n.

97. Es ist also allgemein für ganze Zahlenwerthe von n,

$$\sin n\varphi = n\sin\varphi\,.\cos\varphi^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\sin\varphi^3.\cos\varphi^{n-3} + \frac{n.n-1..n-4.}{1.2..5}\sin\varphi^3.\cos\varphi^{n-5} - \frac{n.n-1....n-6.}{1.2....7}\sin\varphi^7.\cos\varphi^{n-7} + \text{etc.}$$

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2}.\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}.\sin\varphi^4$$

$$- \frac{n.n-1...n-5.}{1.2...6}\cos\varphi^{n-6}.\sin\varphi^6 + \text{etc.}$$

Diese Formeln gelten aber auch für gebrochne Werthe von n, wie nun gezeigt werden wird.

98. Es sey $\sin\varphi = y$, $\cos\varphi = x$, und die Binomialcoefficienten in der nten Potenz, von dem Coefficienten n an, seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, ꝛc. so ist

I. $\frac{1}{2}(x+y)^n - \frac{1}{2}(x-y)^n = \mathfrak{A}x^{n-1}y + \mathfrak{C}x^{n-3}y^3 + \mathfrak{E}x^{n-5}y^5 + \mathfrak{G}x^{n-7}y^7 + \text{etc.}$

II. $\frac{1}{2}(x+y)^n + \frac{1}{2}(x-y)^n = x^n + \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 + \mathfrak{F}x^{n-6}y^6 + \mathfrak{H}x^{n-8}y^8 + \text{etc.}$

Diese Formeln unterscheiden sich von denen für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ in (97.) nur in den Vorzeichen der Glieder mit geraden Stellenzahlen.

99. Es ist

I. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n - \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \sin n\varphi.\sqrt{-1}.$

II. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi.$

Denn man setze in den Formeln (98.) statt y die unmögliche $y\sqrt{-1}$, so ist

für y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, etc.

zu setzen $-y^2$, $-y^3\sqrt{-1}$; $+y^4$, $+y^5\sqrt{-1}$, $-y^6$, etc.

so daß je zwey — — und + + abwechseln. Dadurch wird der zweyte Theil in (98. I.) der Werth von $\sin n\varphi$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, der zweyte Theil in II. aber $\cos n\varphi$.

100. Es ist

III. $(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}$.

IV. $(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1}$.

Diese Formeln folgen aus (99.) unmittelbar durch Addition und Subtraction.

101. Es ist

V. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$

$$= \sin\frac{m}{n}\varphi . \sqrt{-1}.$$

VI. $\frac{1}{2}\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$

$$= \cos\frac{m}{n}\varphi.$$

Denn $\cos m\varphi \pm \sin m\varphi . \sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^m$ $= (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$. Aus den beiden Formeln in dieser Doppelformel wird durch Subtraction und Division erhalten,

$$2\sin m\varphi . \sqrt{-1} = (\cos n\varphi + \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$$
$$- (\cos n\varphi - \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

$$2\cos m\varphi = (\cos n\varphi + \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$$
$$+ (\cos n\varphi - \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{\omega}{n}$, und vertauscht darauf das Symbol ω mit φ, so werden die Formeln V. VI. erhalten.

102. Es seyn A, B, C, D, ꝛc. die Binomial-Coefficienten für den Exponenten $\frac{m}{n}$, so ist

VII. $\sin \frac{m}{n} \varphi = \mathfrak{A} \sin \varphi . \cos \varphi^{m:n-1}$

$- \mathfrak{C} \sin \varphi^3 . \cos \varphi^{m:n-3} + \mathfrak{E} \sin \varphi^5 . \cos \varphi^{m:n-5}$

$- \mathfrak{G} \sin \varphi^7 . \cos \varphi^{m:n-7} + \text{etc.}$

VIII. $\cos \frac{m}{n} = \cos \varphi^{m:n} - \mathfrak{B} \cos \varphi^{m:n-2} . \sin \varphi^2$

$+ \mathfrak{D} \cos \varphi^{m:n-4} . \sin \varphi^4 - \mathfrak{F} \cos \varphi^{m:n-6} . \sin \varphi^6$

$+ \text{etc.}$

Diese Formeln entstehen vermittelst Evolution der Wurzelgrößen in V. VI. und Addition der beiden in Reihen aufgelöseten Wurzeln, in den erstern Formeln noch durch Division beider Theile durch $\sqrt{-1}$.

103. Es ist $(\sqrt{(1+y^2)} + y)^n =$

$$1 + ny + \frac{nn}{1.2} y^2 + \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3$$

$$+ \frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4} y^4 + \frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5$$

$$+ \frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7} y^7$$

$+ \text{etc.}$

und, wenn y negativ genommen wird,

$$(\sqrt{(1+y^2)^2} - y)^n = 1 - ny + \frac{nn}{1.2} y^2$$

$$- \frac{n.nn-1.}{1.2.3} y^3 + \frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4} y^4$$

$$- \frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5} y^5 + \text{etc.}$$

Diese Formeln zu finden, setze man $\sqrt{(1+y^2)} = z$, und entwickele nach dem binomischen Lehrsatze, sowohl

$(z+y)$, als die Potenzen von $(1+yy)^{\frac{1}{2}}$, worauf man die Glieder, welche dieselbe Potenz von y enthalten, zusammen nimmt. Das Gesetz der Reihe ist offenbar, und wegen der bestimmten Formation, sowohl von $(z+y)^n$ als der Potenzen von $(1+yy)$ allgemein. Euler hat die Formel leichter, aber durch die Differentio-Differentialrechnung erwiesen, in den Institt. Calculi integr. T. I. §. 179.

104. Es ist

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n+\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$

$$=1+\frac{nn}{1.2}y^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}y^4$$

$$+\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}y^6+\text{etc.}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n-\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$

$$=\frac{n}{1}y+\frac{n.nn-1.}{1.2.3}y^3+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}y^5$$

$$+\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}y^7+\text{etc.}$$

105. Setzt man $y=\sin\varphi.\sqrt{-1}$, so ist $\sqrt{(1+y^2)}=\cos\varphi$, und zufolge (99.),

$$\sin n\varphi=n\sin\varphi-\frac{n.nn-1.}{1.2.3}\sin\varphi^3$$

$$+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}\sin\varphi^5-\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}\sin\varphi^7$$

$$+\text{etc.}$$

$$\cos n\varphi=1-\frac{nn}{1.2}\sin\varphi^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}\sin\varphi^4$$

$$-\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}\sin\varphi^6+\frac{nn...nn-36.}{1.2...7.8}\sin\varphi^8$$

$$-\text{etc.}$$

Diese Formeln sind allgemein für jeden Werth von n, da die Formeln in (99.) allgemein gültig sind. Die erstere bricht nur für ein ungerades n ab, die zweyte für ein gerades n.

106. Es sey der Sinusversus (Quersinus) von $\varphi = z$, so ist

$$\sin \text{vers.}\, n\varphi = \frac{2nn}{1.2} z - \frac{4nn.nn-1.}{1.2.3.4} z^2$$

$$+ \frac{8nn.nn-1.nn-4.}{1.2.3.4.5.6} z^3 - \frac{16nn\,nn-1.nn-4.nn-9.}{1.2.3.4.5.6.7.8} z^4$$

— etc.

Diese, wie es scheint, noch nicht bekannte Formel wird erhalten, wenn man den Sinusversus von φ, oder $1 - \cos\varphi$ in die Formel (97; 102.) für $\cos n\varphi$ einführt. Es ist $\cos\varphi = 1 - z$; $\sin\varphi^2 = 2z - zz$, und $\cos n\varphi = 1 - \sin \text{vers.}\, n\varphi$. Die Rechnung, diese Formel zu finden ist etwas weitläufig; sie beruht inzwischen auf bloßen Multiplicationen und Aggregationen. Die Formel kann zur Berechnung der Sinus über 45° gut angewandt werden.

107. Es sey $2\cos\varphi = u + \frac{1}{u}$, so ist

$$2\cos n\varphi = u^n + \frac{1}{u^n}.$$

Denn man setze in der Formel III. 100.

$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, die Wurzel, $\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1} = u$, so ist

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1},$$

also $2\cos\varphi = u + \frac{1}{u}$. Da $u^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, so ist

$$\frac{1}{u^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}} = \cos n\varphi$$

$- \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, also ist $u^n + \frac{1}{u^n} = 2\cos n\varphi$.

108[a]. Diese beiden Gleichungen sind einerley mit den beiden,

I. $u^2 - 2\cos\varphi . u + 1 = 0$,

II. $u^{2n} - 2\cos n\varphi . u^n + 1 = 0$.

In dem folgenden Abschnitte wird gezeigt, daß aus einem gegebenen Werthe von $\cos n\varphi$ erhalten werden n verschiedene Werthe von $\cos\varphi$. Jeder derselben kann in der erstern Gleichung für $\cos\varphi$ gesetzt werden, daher aus der gegebenen Gleichung II. n verschiedene Gleichungen wie I. folgen. Das Product dieser n Gleichungen enthält alle Arten, wie aus einem mittelst seines Cosinus gegebenen Winkel $n\varphi$ der Werth von u bestimmt werden kann. Die Gleichung II. enthält ebenfalls alle diese Arten; also ist diese Gleichung identisch mit jenem Producte, oder die Gleichung I. ist ein Factor von der Gleichung II. — Die Werthe von u sind alle unmögliche Größen, s. unten Abschnitt VIII.

Zu vergleichen ist in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, der VII. Abschnitt, und der Artikel, Cotesischer Lehrsatz.

108[b]. Wenn man aus der Gleichung, $2x = u + \frac{1}{u}$ successiv die Werthe von $u^2 + \frac{1}{u^2}$; von $u^3 + \frac{1}{u^3}$; von $u^4 + \frac{1}{u^4}$, u. s. f. herleitet, so erhält man nach der Reihe die Werthe von $2\cos 2\varphi$; $2\cos 3\varphi$; $2\cos 4\varphi$, u. s. f. in (93.).

Nämlich, da

I. $2x = u + \frac{1}{u}$, so ist

$4x^2 = u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}$, also

II. $4x^2 - 2 = u^2 + \frac{1}{u^2} = 2 \cos 2\varphi$.

Hieraus ist

$8x^3 - 4x = u^3 + u + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}$, oder

III. $8x^3 - 6x = u^3 + \frac{1}{u^3} = 2 \cos 3\varphi$.

Hieraus ferner

$16x^4 - 12x^2 = u^4 + u^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}$, oder

IV. $16x^4 - 16x^2 + 2 = u^4 + \frac{1}{u^4} = 2 \cos 4\varphi$.

u. s. f.

Es ist allgemein $\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)$ $= u^{n+1} + u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} + \frac{1}{u^{n+1}}$, so wie $2 \cos n\varphi \times 2 \cos\varphi = 2 \cos(n+1)\varphi + 2 \cos(n-1)\varphi$ ist.

108c. Gleichfalls ist $u - \frac{1}{u} = 2 \sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $u^n - \frac{1}{u^n} = 2 \sin n\varphi \sqrt{-1}$. Aus der erstern Gleichung werden vermittelst der Formel, $2x = u + \frac{1}{u}$ successiv die Werthe von $u^2 - \frac{1}{u^2}$, von $u^3 - \frac{1}{u^3}$, von $u^4 - \frac{1}{u^4}$, u. s. f. hergeleitet, woraus dieselben Werthe von $2 \sin 2\varphi$, $2 \sin 3\varphi$, $2 \sin 4\varphi$, u. s. f. folgen, wie in (92.).

Nämlich da

I. $2y\sqrt{-1} = u - u^{-1}$, und

$2x = u + u^{-1}$, so ist

II. $4xy\sqrt{-1} = u^2 - u^{-2}$, das ist

$4xy\sqrt{-1} = 2 \sin 2\varphi . \sqrt{-1}$.

oder $2xy = \sin 2\varphi$.

Aus II. ist durch die Multiplication mit $2x = u + u^{-1}$,

$8x^2y\sqrt{-1} = u^3 + u - u^{-1} - u^{-3}$, das ist

III. $8x^2y\sqrt{-1} - 2y\sqrt{-1} = 2 \sin 3\varphi . \sqrt{-1}$,

oder $4x^2y - y = \sin 3\varphi$.

u. s. f.

Es ist allgemein $(u^n - u^{-n})(u + u^{-1}) = u^{n+1} + u^{n-1} - u^{-n+1} - u^{-n-1} = 2 \sin (n+1)\varphi . \sqrt{-1} + 2 \sin (n-1)\varphi . \sqrt{-1}$, eben so wie $2 \sin n\varphi . 2 \cos \varphi = 2 \sin (n+1)\varphi + 2 \sin (n-1)\varphi$.

Formeln für die Tangenten der Vielfachen eines Winkels, und der aus ungleichen Winkeln zusammen gesetzten Winkel.

109. Aus den beiden Formeln (97. 102.) für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ folgt, mit Anwendung der Zeichen für die Binomial-Coefficienten in der nten Potenz, durch die Division,

$$\tan n\varphi = \frac{A\,tg\varphi - C\,tg\varphi^3 + E\,tg\varphi^5 - G\,tg\varphi^7 + etc.}{1 - B\,tg\varphi^2 + D\,tg\varphi^4 - F\,tg\varphi^6 + etc.}$$

Es sind Zähler und Nenner durch $\cos\varphi^n$ dividirt, und für $\frac{\sin}{\cos}$ ist tang gesetzt.

110. Man setze tang $\varphi = t$, so ist

$$\text{tang } \varphi = t$$

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\text{tang } 3\varphi = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\text{tang } 4\varphi = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\text{tang } 5\varphi = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}$$

etc.

111. Es sey irgend eine Anzahl Winkel, α, β, γ, δ, ε, etc. gegeben; ihre Tangenten seyn a, b, c, d, e, etc. Die Summe dieser Tangenten, als Unionen, sey A; die Summe ihrer Binionen B; ihrer Ternionen C; ihrer Quaternionen D; ihrer Quinionen E, u. s. f; sämtlich ohne Wiederholungen. Es ist

$$\text{tang } (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.}) = \frac{A - C + E - G + \text{etc.}}{1 - B + D - F + H - \text{etc.}}.$$

Denn tang $(\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}$, (33.). Diese nenne man p, so ist

$$\text{tang}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{p + c}{1 - pc} = \frac{(1 - ab)p + (1 - ab)c}{1 - ab - (1 - ab)pc}$$

$= \frac{a + b + c - abc}{1 - ab - ac - bc}$. Gebraucht man für die drey Größen a, b, c, die angegebenen Bezeichnungen ihrer Combinationen, so ist tang $(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{A - C}{1 - B}$.

Es sey $\frac{A - C}{1 - B} = q$, so ist $\tang(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$$= \frac{q + d}{1 - qd} = \frac{(1 - B)\,q + (1 - B)\,d}{1 - B - (1 - B)\,qd}$$

$$= \frac{A - C + d - Bd}{1 - B - Ad - Cd}.$$

Hier ist $A + d$ die Summe der Unionen, a, b, c, d; $B + Ad$ die Summe der Binionen, nämlich B derer ohne d, und Ad derer mit d. Gleichfalls ist $C + Bd$ die Summe der Ternionen, nämlich C derer ohne d, und Bd derer mit d. Endlich ist Cd die einzige Quaternion. Erstreckt man nun die Bezeichnungen, A, B, C, D, auf alle vier Größen, a . . d, so ist

$$\tang(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{A - C}{1 - B + D}.$$

Es sey

$\frac{A - C}{1 - B + D} = r$, so ist $\tang(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$,

$$= \frac{r + e}{1 - re} = \frac{A - C + (1 - B + D)e}{1 - B + D - (A - C)e}.$$

Hier ist $A + e$ die Summe der Unionen a . . . e; $B + Ae$ der Binionen; $C + Be$ der Ternionen; $D + Ce$ der Quaternionen; De die Quinion. Bezeichnet man diese Combinationen aus allen fünf Größen durch A, B, C, D, E, so ist

$$\tang(\alpha \ldots + \varepsilon) = \frac{A - C + E}{1 - B + D}.$$

Hieraus erhellt das Gesetz der Fortschreitung hinlänglich.

112. Sind alle die einzelnen Winkel sich gleich, jeder $= \varphi$, so sind die einzelnen Unionen $= t$, Binionen $= t^2$, Ternionen $= t^3$, u. s. f. Die Mengen derselben nach ihrer Folge sind die Binomial-Coefficienten für den Exponenten n, wenn $n\varphi$ der vielfache Winkel ist.

Joh. Bernoulli hat diese Sätze gefunden. Operum T. II nr. CXXVII.

113. Aus (99.) ist, wenn tang $\varphi = t$ gesetzt wird,

$$\text{tang}\, n\varphi . \sqrt{-1} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n}.$$

Von einer solchen, etwas verschiedenen Formel kam Bernoulli zuerst auf den Satz in (109.) Opp. T. I. nr. LXXXIX. Er hat ihn aber noch etwas unbequem ausgedruckt. Für gerade Vielfache ist eine Unrichtigkeit, da nach seiner Regel die Tangente negativ wird.

Wie sich die gebrochene Function für tang $n\varphi$ auf eine rationale ganze bringen, und von dieser das allgemeine mte Glied in einer brauchbaren combinatorisch-analytischen, nach Potenzen von n geordneten Formel, mit Beyhülfe der Bernoullischen Zahlen darstellen lasse, hat Professor Hindenburg (Leipz. Mag. der Math. S. 270; vergl. Arch. der Math. H. VII. S. 343. 344.) gezeigt.

V. Wie viele verschiedene Werthe der Sinus und Cosinus des aliquoten Theils eines Winkels erhalten, wenn der Winkel durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird.

114. Ein Winkel der durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird, hat unendlich viele Werthe, (16.17.). Soll derselbe in n gleiche Theile getheilt werden, so ist jeder seiner Werthe in n gleiche Theile zu theilen. Daraus entstehen inzwischen nicht unendlich viele Sinus und Cosinus der aliquoten Theile, weil wiederum derselbe Sinus und Cosinus eines solchen Theils zu unendlich vielen Winkeln gehört.

115. Es seyn alle verschiedene Sinus des nten Theils der zu dem Sinus a gehörigen Winkel anzugeben: der kleinste dieser Winkel sey $= \omega$. Die Anzahl der Theile sey ungerade, so sind alle folgende Winkel in n Theile zu theilen.

I. $\omega, \pi - \omega, 2\pi + \omega, 3\pi - \omega \ldots (n-1)\pi + \omega; n\pi - \omega.$

II. $(n+1)\pi + \omega \ldots (2n-2)\pi + \omega, (2n-1)\pi - \omega.$

III. $2n\pi + \omega \ldots\ldots 3n\pi - \omega.$

IV. $(3n+1)\pi + \omega \ldots\ldots (4n-1)\pi - \omega.$

u. s. f.

Die Sinus des nten Theils jedes Winkels in der dritten und jeder folgenden Classe kommen unter den Sinus des nten Theils der beiden ersten Classen vor. In der ersten Classe sind die Sinus des nten Theils derer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, einander gleich und gleichnamig, da die Summe eines solchen Paars in I. $= n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer solchen Winkel $= \pi$ ist. In der zweyten Classe ist die Summe je zweyer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, $= 3n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer solcher Winkel $= 3\pi$. Die Sinus dieser Theile sind daher auch einander gleich und gleichnamig. Nämlich zwey Winkel wie $\pi + \alpha$ und $2\pi - \alpha$, haben einerley Sinus. Der nte Theil der Winkel in I. ist kleiner als zwey Rechte, in II. aber größer als zwey und kleiner als vier Rechte. Daher sind die Sinus des nten Theils von Ang sin ω in I. positiv, in II. negativ.

Die erste Classe liefert $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Sinus, die zweyte $\frac{n-1}{2}$ Sinus.

116. Folglich sind die Werthe von

$\sin \frac{1}{n}$ Ang. sin a, für ein ungerades n, folgende:

I. $\sin \frac{\omega}{n}$; $\sin \frac{2\pi + \omega}{n}$; $\sin \frac{4\pi + \omega}{n} \ldots$

$\ldots \sin \frac{(n-1)\pi + \omega}{n}$;

II. $\sin \frac{(n+1)\pi+\omega}{n} \ldots \sin \frac{(2n-2)\pi+\omega}{n}$.

Nimmt man von den stumpfen Winkeln ihre Nebenwinkel, von den letzten zuerst, und statt der Winkel über zwey Rechte ihre Überschüsse über zwey Rechte, wogegen aber der Sinus negativ genommen wird, so sind jene Werthe,

$$+\sin\frac{\omega}{n};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{n};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{3\pi-\omega}{n};\ldots+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\mp\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\pm\omega}{n};\qquad -\sin\frac{\pi+\omega}{n};$$

$$-\sin\frac{2\pi-\omega}{n};\ -\sin\frac{3\pi+\omega}{n}\ldots\ldots$$

$$-\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\pi\pm\omega}{n};\ -\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi\mp\omega}{n}.$$

Das obere Vorzeichen von ω gilt für einen geraden Werth von $\frac{1}{2}(n-1)$; das untere für einen ungeraden.

117. Exempel. Es sey $A = \text{Ang.}\sin a$, und ω der kleinste Werth von A, so sind die verschiedenen Werthe von

$$\sin\frac{A}{3}\ldots+\sin\frac{\omega}{3};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{3};\ -\sin\frac{\pi+\omega}{3}$$

$$\sin\frac{A}{5}\ldots+\sin\frac{\omega}{5};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{5};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{5}$$

$$-\sin\frac{\pi+\omega}{5};\ -\sin\frac{2\pi-\omega}{5}$$

$$\sin\frac{A}{7}\ldots+\sin\frac{\omega}{7};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{7};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{7}$$

$$+\sin\frac{3\pi-\omega}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi+\omega}{7};\ -\sin\frac{2\pi-\omega}{7};\ -\sin\frac{3\pi+\omega}{7}$$

118. Der Winkel zu dem Sinus a sey in eine gerade Anzahl gleicher Theile, n, zu theilen, und ω sey der kleinste unter den zu dem Sinus a gehörigen Winkeln. Die beiden ersten Classen der zu theilenden Winkel sind nun folgende.

I. $\omega, \pi-\omega, 2\pi+\omega; 3\pi-\omega\ldots(n-1)\pi-\omega;$

II. $n\pi+\omega, (n+1)\pi-\omega\ldots\ldots(2n-1)\pi-\omega.$

Die übrigen Classen liefern keine Winkel, deren nter Theil einen Sinus hätte, welcher nicht schon dem nten Theile eines der Winkel in I. und II. angehörte. Die Sinus des nten Theils derer Winkel, welche in beiden Classen gleich weit vom Anfange abstehen, sind sich gleich aber entgegengesetzt, weil ihre Winkel um π oder zwey Rechte unterschieden sind. Die Sinus des nten Theils jedes der Winkel in jeder der beiden Classen sind alle von einander verschieden. Die Theilung des Winkels zum sin a in eine gerade Anzahl Theile, n, giebt also n Paare gleicher und entgegengesetzter Sinus des nten Theils:

$$\pm\sin\frac{\omega}{n};\ \pm\sin\frac{\pi-\omega}{n};\ \pm\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\ldots$$

$$\ldots\pm\sin\frac{(\frac{1}{2}n-1)\pi\mp\omega}{n},\ \pm\sin\frac{\frac{1}{2}n\pi\pm\omega}{n};\ldots$$

$$\ldots\pm\sin\frac{(n-2)\pi+\omega}{n};\ \pm\sin\frac{(n-1)\pi-\omega}{n}$$

119. Oder es sind für ein gerades n die Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. $\sin \omega$ folgende.

$$\pm \sin \frac{\omega}{n};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{n};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{n};\ \pm \sin \frac{2\pi - \omega}{n}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi + \omega}{n};\ \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{n};\ \pm \sin \frac{3\pi + \omega}{n} \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \sin \frac{\frac{1}{2} n \pi - \omega}{n},$$

indem anstatt der Winkel in der zweyten Hälfte, weil es stumpfe sind, ihre Nebenwinkel genommen sind, die an der gehörigen Stelle zwischen die Winkel der erstern Hälfte gesetzt worden.

120. Exempel. Es sey $A =$ Ang. $\sin a$ und ω der kleinste Werth von A, so sind die verschiedenen Werthe von

$$\sin \frac{A}{2} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{2};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{2}.$$

$$\sin \frac{A}{4} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{4};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{4};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{4}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{4}.$$

$$\sin \frac{A}{6} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{6};\ \pm \sin \frac{\pi - \omega}{6};\ \pm \sin \frac{\pi + \omega}{6}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{6};\ \pm \sin \frac{2\pi + \omega}{6};\ \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{6}.$$

121. Die hier gefundenen Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. $\sin a$ sind die Wurzeln der Gleichungen in (86. und 89.), wo y der Sinus des einfachen, und

$\sin n\varphi$ der Sinus des vielfachen ist. Es ist daselbst $n\varphi$ was hier ω ist, also φ was hier $\frac{1}{n}\omega$ ist. Die Gleichung in (86.) für ein ungerades Vielfaches von φ steigt auf den nten Grad, daher der Sinus des nten Theils eines durch seinen Sinus gegebenen Winkels n Werthe hat, wie hier gefunden ist. Werden alle Glieder auf eine Seite gebracht, so daß y^n das Vorzeichen + hat, und werden die fehlenden Glieder durch ± 0 ersetzt, so hat die Gleichung $\frac{1}{2}(n+1)$ Abwechslungen und $\frac{1}{2}(n-1)$ gleichnamige Folgen der Vorzeichen, daher $\frac{1}{2}(n+1)$ positive Wurzeln, und $\frac{1}{2}(n-1)$ negative, indem hier alle Wurzeln möglich sind, (Gleichung 146.)

Weil das Glied mit der Potenz y^{n-1} fehlt, so ist die Summe der Wurzeln $= 0$, oder die Summe der Sinus in (114.) ist $= 0$.

Wenn die allgemeine Gleichung (86.) durch 2^{n-1} dividirt wird, so ist in der Gleichung, $y^n \ldots \pm \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}} = 0$, das gegebene Glied das Product aus allen, den Wurzeln entgegengesetzten Größen, oder von den entgegengesetzten der Sinus in (116.), wenn $n\varphi = \omega$ ist. Das obere Vorzeichen gilt für $n = 4m - 1$, das untere für $n = 4m + 1$. In jenem Falle ist die Anzahl der positiven Wurzeln $= 2m$, der negativen $= 2m - 1$; in dem zweyten ist jene Anzahl $= 2m + 1$, die andere $= 2m$. Daher ist in dem erstern Falle das Product der Sinus $= -\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, in dem andern $= +\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$.

Bringt man die Gleichung (86.) auf die Form, $\sin n\varphi - ny \ldots \pm 2^{n-1} y^n = 0$, und dividirt darauf alle Glieder durch $\sin n\varphi$, so ist der Coefficient von y, die Summe von den entgegengesetzten der reciproken Wurzeln, oder $\frac{n}{\sin n\varphi}$ ist die Summe der reciproken Wur-

zeln (zufolge Gleichung, 212.). Oder, nach dem y^n den Coefficienten $+1$ durch die Division der ganzen Gleichung mit 2^{n-1} erhalten hat, ist der Coefficient von y das Aggregat aller Combinationen der den Wurzeln entgegengesetzten Größen nach $(n-1)$, und das gegebene Glied, auf derselben Seite der Gleichung, das Product aller dieser Größen. Jener durch dieses dividirt ist das Aggregat von den reciproken dieser Größen. Folglich ist

$$\frac{n}{\sin n\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)}$$

$$+ \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+\varphi\right)} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \frac{1}{\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right)}.$$

Da die Cosecante das reciproke des Sinus ist (14), so ist

$$n \operatorname{cosec} n\varphi = \operatorname{cosec}\varphi + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right) \cdots + \operatorname{cosec}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right).$$

Die Winkel über einen Rechten werden wie in (116.) in spitze verwandelt, mit gehöriger Veränderung des Vorzeichens, wo es nöthig ist.

122. Exempel. Es sey $A = \text{Ang.}\sin\frac{1}{2}$, und A soll in 5 gleiche Theile getheilt werden, so sind die Sinus dieses fünften Theils folgende:

$+\sin 6^\circ$; $+\sin 30^\circ$; $+\sin 78^\circ$; $-\sin 42^\circ$; $-\sin 66^\circ$, nämlich

+ 0,1045285	— 0,6691306
+ 0,5000000	— 0,9135454
+ 0,9781476	— 1,5825760
+ 1,5826761	

Die Sinus sind die Wurzeln der Gleichung

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - 0,5 = 0.$$

Ihre Summe ist wegen des fehlenden zweyten Gliedes $= 0$, wie eben gefunden ist. Ihr Product ist $= \frac{0,5}{16} = \frac{1}{32}$. Es ist

$$\begin{aligned} l \sin 6^\circ &= 9,0192346 - 10 \\ l \sin 36^\circ &= 9,6989700 - 10 \\ l \sin 78^\circ &= 9,9904044 - 10 \\ l \sin 42^\circ &= 9,8255109 - 10 \\ l \sin 66^\circ &= 9,9607302 - 10 \\ \hline & 8,4948501 - 10 \\ \text{Complement} & 1,5051499 = \log 32. \end{aligned}$$

Die Cosecanten dieser Winkel sind

+ 9,5667722	— 1,4944765
+ 2,0000000	— 1,0946363
+ 1,0223406	— 2,5891128
+ 12,5891128	

Das Aggregat ist $= + 10 = \frac{5}{0,5}$, als dem Werthe von $\frac{n}{\sin n\varphi}$ für $n = 5$, und $n\varphi = 30^\circ$.

123. Die $2n$ verschiedenen Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang $\sin a$ für ein gerades n in (119.) sind die n Paare der gleichen und entgegengesetzten Wurzeln y

in der Gleichung (89.), wenn sie auf beiden Seiten quadrirt ist, um die Irrationalität wegen des Factors $\sqrt{(1-yy)}$ zu heben. Alsdann sind in derselben bloß die geraden Potenzen von y vorhanden, und die höchste Potenz ist y^{2n}. Sie hat also 2n Wurzeln, welche n Paare gleicher entgegengesetzter geben, wodurch die Summe aller $= 0$ ist, wie das zweyte Glied der Gleichung. Das Product aller Wurzeln ist $= \frac{\sin n\varphi^2}{2^{2n-2}}$, also das Product der positiven oder der negativen für sich allein genommen $= \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, wie für ein gerades n in (121.), was die absolute Größe betrifft.

124. Wenn ein Winkel, der durch seinen Cosinus gegeben ist, in gleiche Theile getheilt werden soll, und der kleinste zu demselben gehörige Winkel durch ω bezeichnet wird, so sind alle Winkel, die mit diesem ein gerades Vielfaches von π (zwey Rechten) ausmachen, oder von ihm um ein solches unterschieden sind, in n gleiche Theile zu theilen, zufolge 17; also die Winkel,

I. ω; $2\pi - \omega$; $2\pi + \omega$; $4\pi - \omega$; $4\pi + \omega$;
$\ldots (2n-2)\pi + \omega$; $2n\pi - \omega$;
II. $2n\pi + \omega$; $(2n\pi + 2)\pi - \omega$; $\ldots 4n\pi - \omega$;
III. $4n\pi + \omega \ldots\ldots$; $6n\pi - \omega$;
u. s. f.

Die zweyte Classe nebst allen folgenden giebt bey der Theilung keine Cosinus, die nicht schon aus der ersten Classe entstehen. In dieser Classe, welche 2n Winkel enthält, sind die Cosinus des nten Theils derer Winkel, welche vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, einander gleich und gleichnamig. Nimmt man die Winkel wechselsweise einen um den andern, so sind die verschiede-

nen Werthe von $\cos \frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$ folgende, wenn ω der kleinste zu $\cos a$ gehörige Winkel ist.

$$\cos \frac{\omega}{n};\ \cos \frac{2\pi + \omega}{n};\ \cos \frac{4\pi + \omega}{n};\ \cos \frac{6\pi + \omega}{n};$$

$$\ldots \cos \frac{(2n-4)\pi + \omega}{n};\ \cos \frac{(2n-2)\pi + \omega}{n},$$

deren Anzahl n ist.

125. Nimmt man aus der ersten Classe die ersten n Winkel, so sind die verschiedenen Werthe von $\cos \frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$, für ein ungerades n folgende,

$$\cos \frac{\omega}{n};\ \cos \frac{2\pi - \omega}{n};\ \cos \frac{2\pi + \omega}{n};\ \cos \frac{4\pi - \omega}{n};$$

$$\cos \frac{4\pi + \omega}{n} \ldots \cos \frac{(n-1)\pi - \omega}{n};\ \cos \frac{(n-1)\pi + \omega}{n}.$$

In dieser Reihe sind die Winkel von

$\frac{(n+1) \cdot \frac{1}{2}\pi - \omega}{n}$ oder von $\frac{(n+3) \cdot \frac{1}{2}\pi - \omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$ oder als ein Rechter, also sind ihre Cosinus negativ. Nimmt man ihre Nebenwinkel, von dem letzten zuerst, und setzt den Cosinus das Zeichen — vor, so sind die verschiedenen Werthe der Cosinus,

$$+\cos \frac{\omega}{n};\ -\cos \frac{\pi - \omega}{n};\ -\cos \frac{\pi + \omega}{n};\ +\cos \frac{2\pi - \omega}{n};$$

$$+\cos \frac{2\pi - \omega}{n};\ -\cos \frac{3\pi - \omega}{n};\ -\cos \frac{3\pi + \omega}{n};$$

$$\ldots \pm \cos \frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi - \omega}{n};\ \pm \cos \frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi + \omega}{n},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, oder $n-1$ durch 4 theilbar ist.

126. Für ein gerades n ist die Reihe der verschiedenen Cosinus,

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi-\omega}{n},\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi-\omega}{n};$$

$$\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\ldots\ \cos\frac{(n-2)\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{n\pi-\omega}{n}.$$

In dieser sind die Winkel von $\frac{n.\frac{1}{2}\pi+\omega}{n}$, oder von $\frac{(n+2).\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$, also ihre Cosinus negativ. Die Winkel der Cosinus, welche vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, machen die Summe π oder von zwey Rechten; daher sind ihre Cosinus gleich und entgegengesetzt. Die Folge der Cosinus ist

$$\pm\cos\frac{\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$\pm\cos\frac{4\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{4\pi+\omega}{n};\ \text{etc.}$$

bis $\frac{1}{2}n$ Paare Cosinus genommen sind.

127. Exempel. Es sey $A = \text{Ang.}\cos a$, und ω der kleinste Werth von $\frac{1}{n}A$, so sind die Werthe von

$$\cos\tfrac{1}{2}A\ldots\ \pm\cos\frac{\omega}{2}.$$

$$\cos\tfrac{1}{3}A\ldots\ +\cos\frac{\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi-\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi+\omega}{3}.$$

$$\cos\tfrac{1}{4}A\ldots\ \pm\cos\frac{\omega}{4};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{4}.$$

$$\cos \tfrac{1}{5} A \ldots + \cos \frac{\omega}{5}; - \cos \frac{\pi - \omega}{5}; - \cos \frac{\pi + \omega}{5};$$
$$+ \cos \frac{2\pi - \omega}{5}; + \cos \frac{2\pi + \omega}{5}.$$

$$\cos \tfrac{1}{6} A \ldots \pm \cos \frac{\omega}{6}; \pm \cos \frac{2\pi - \omega}{6}; \pm \cos \frac{2\pi + \omega}{6}.$$

$$\cos \tfrac{1}{7} A \ldots + \cos \frac{\omega}{7}; - \cos \frac{\pi - \omega}{7}; - \cos \frac{\pi + \omega}{7};$$
$$+ \cos \frac{2\pi - \omega}{7}; + \cos \frac{2\pi + \omega}{7}; - \cos \frac{3\pi - \omega}{7};$$
$$- \cos \frac{3\pi + \omega}{7}.$$

u. s. f.

128. Die Cosinus von $\frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$ sind die Wurzeln der Gleichung in (93.), wenn $\cos a = \cos n\varphi$ daselbst ist, oder $\omega = n\varphi$. Für ein ungerades n von der Form $4m - 1$ haben die Vorzeichen (nachdem der $\cos n\varphi$ auf dieselbe Seite mit den andern Gliedern gebracht ist, und die fehlenden Glieder durch ± 0 ersetzt worden) eine gleichnamige Folge mehr als Abwechslungen, also eine negative Wurzel mehr als positive; hingegen für ein n von der Form $4m + 1$ ist eine Abwechslung mehr als gleichnamige Folgen, daher eine positive Wurzel mehr als negative. Eben das ergiebt sich aus den Werthen der Cosinus mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen in (127.) Die Gleichungen für ein gerades n haben $\frac{1}{2}n$ Paare gleicher und entgegengesetzter Wurzeln, übereinstimmig mit dem, was für die Cosinus bey der Theilung durch ein gerades n gefunden ist.

Die Summe der Cosinus von $\frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$ ist $= 0$, entweder weil sie sich paarweise oder im ganzen auf-

heben. Das letzte erhellt daher, weil das zweyte Glied in den Gleichungen (93.) fehlt.

Für ein ungerades n ist in (93.) das gegebene Glied der allgemeinen Gleichung $= -\cos n\varphi$, nachdem es zu den übrigen auf dieselbe Seite gebracht ist. Dividirt man alle Glieder durch 2^{n-1}, so ist $-\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$ das Product aller den Wurzeln der Gleichung entgegengesetzten Größen. Da die Anzahl der negativen Wurzeln gerade ist, so ist, für ein ungerades n, das Product der Cosinus des nten Theils von $\text{Ang}.\cos n\varphi = +\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$.

Für $n = 4m$ ist das Product der Cosinus von $\frac{1}{n}\text{Ang}.\cos n\varphi = \frac{1-\cos n\varphi}{2^{n-1}} = \frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$; für $n = 4m+2$ ist das Product $= -\frac{1+\cos n\varphi}{2^{n-1}}$ $= -\frac{\cos \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$.

Für ein ungerades n werde die Gleichung in (93.) auf die Form, $\cos n\varphi \mp nx \ldots - 2^{n-1}x^n = 0$, gebracht, und darauf durch $\cos n\varphi$ dividirt, so ist $\mp\frac{n}{\cos n\varphi}$ die Summe von den entgegengesetzten der reciproken Wurzeln, oder $\pm\frac{n}{\cos n\varphi}$ ist die Summe von den reciproken Cosinus des nten Theils von $\text{Ang}.\cos n\varphi$. Das obere Vorzeichen gilt für $n = 4m-1$. So ist

$$\pm\frac{n}{\cos n\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)} + \text{etc.}$$

oder, wenn man für die reciproken Cosinus die Secanten setzt, da $\frac{1}{\cos A} = \sec A$ ist,

$$\pm n \sec n\varphi = \sec \varphi + \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right)$$
$$+ \sec\left(\frac{4\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{6\pi}{n} + \varphi\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

oder

$$\pm n \sec n\varphi = \sec \varphi - \sec\left(\frac{\pi}{n} - \varphi\right)$$
$$- \sec\left(\frac{\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right)$$
$$+ \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right) - \text{etc.}$$

bis n Secanten genommen sind.

Exempel. Für $n\varphi$ oder ω = Ang. sin $\frac{1}{2}$ und $n = 5$, ist

sec 6°	= 1,0055083	sec. 30°	= 1,1547005
sec. 66°	= 2,4585938	sec. 42°	= 1,3456327
sec. 78°	= 4,8097343		— 2,5003332
	+ 8,2738359		
	— 2,5003332		
	+ 5,7735027		

Dieser Unterschied ist = 5 sec. 30°, bis auf 2 in der letzten Stelle.

VI. Chorden der Vielfachen eines Kreisbögens durch die Chorde des einfachen.

129. In dem Halbkreise ADB (Fig. 60.), dessen Mittelpunct C ist, ist $\frac{AD}{AB} = \sin ABD = \sin \frac{1}{2} ACD$. Man setze $ACD = \omega$, $AB = 2r$, $AD = u$, so ist $\frac{u}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{ch.\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$. Eben so ist $\frac{ch.n\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2} n\omega$.

Die Chorde des Complements des Bögens AD zum Halbkreise, oder die Chorde BD sey $= v$, so ist $\frac{v}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{chc.\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, und eben so $\frac{chc.n\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2} n\omega$.

129*. In den Formeln (84, 86, 89.) setze man $\varphi = \frac{1}{2}\omega$, so erhält man mittelst der Vertauschungen der Chorden mit den Sinus, wenn alle Glieder mit $2r$ multiplicirt werden,

$$ch.n\omega = \frac{chc.\omega}{r} \times ch.(n-1)\omega - ch.(n-2)\omega,$$

und

$$ch.n\omega = \left(2 - \frac{ch.\omega^2}{rr}\right) ch.(n-2)\omega - ch.(n-4)\omega.$$

In der letzten Formel ist n sowohl statt $2n+1$ als $2n$ in (86, 89.) gesetzt.

130. Man setze $r = 1$, so verwandeln sich die allgemeinen Formeln daselbst, da $y = \frac{u}{2r}$, und $x = \frac{v}{2r}$ ist, in folgende:

Do

$$\text{I. } ch.n\omega = \left(v^{n-1} - \frac{n-2}{1} v^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1.2} v^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3} v^{n-7} + \text{etc.}\right) u.$$

$$\text{II. } ch.(2n+1)\omega = (2n+1)\left(u - \frac{n+1.n}{2.3} u^3 + \frac{n+2.n+1.n.n-1.}{2.3.4.5} u^5 - \frac{n+3.n+2...n-2.}{2.3...7} u^7 + \frac{n+4.....n-3.}{2.....9} u^9 - \text{etc.}\right).$$

$$\text{III. } ch.2n\omega = \left(nu - \frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3} u^3 + \frac{n+2...n-2.}{1...5} u^5 - \frac{n+3.....n-3.}{1.....7} u^7 + \frac{n+4....n-4.}{1....9} u^9 - \text{etc.}\right) \sqrt{(4-uu)}.$$

Die Formel in (93.) verwandelt sich durch die gebrauchten Substitutionen in folgende,

$$\text{IV. } chc.n\omega = v^n - \frac{n}{1} v^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2} v^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} v^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} v^{n-8} - \frac{n.n-6...n-9.}{1.2...5} v^{n-10} + \text{etc.}$$

Für ein ungerades n ist durch dieselben Substitutionen aus (94^b.),

$$\text{V. } \pm \text{ch}.n\omega = u^n - \frac{n}{1} u^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2} u^{n-4}$$

$$- \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} u^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} u^{n-8}$$

— etc.

Es ist dieselbe Formel mit II. rückwärts gelesen.

Man setze wiederum den Halbmesser $= r$, und $\text{ch}.2\omega = z$, so ist $2rz = 2vu$, oder $rz = vu$, nach (25.), wenn in Fig. 58. die Chorden AB, AD gleich groß genommen werden. In der Formel I. ist nun statt v wieder zu setzen $\frac{v}{r}$, das ist, $\frac{z}{u}$. Nimmt man die Chorde des einfachen Bogens u zur Einheit, so wird

$$\text{VI. ch}.n\omega = z^{n-1} - \frac{n-2.}{1} z^{n-3}$$

$$+ \frac{n-3.n-4.}{1.2} z^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3} z^{n-7}$$

+ etc.

131. Wenn das Vielfache von ω der ganze Umkreis oder ein Vielfaches desselben ist, so ist $\text{ch}.n\omega = 0$, oder, wenn die geraden und ungeraden Vielfachen in der Bezeichnung unterschieden werden, $\text{ch}.(2n+1)\omega = 0$, und $\text{ch}.2n\omega = 0$. Der kleinste Werth von u in den Gleichungen für u, (nachdem diese durch die allen Gliedern gemeinschaftlichen Factoren dividirt sind) ist die Seite eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, wenn n überhaupt das Vielfache anzeigt.

Die Gleichungen für u sind bis zu der für das Zwölfeck, den Halbmesser des Kreises $r = 1$ gesetzt, folgende:

$n = 3$	$u^2 - 3 = 0$
$n = 5$	$u^4 - 5u^2 + 5 = 0$
$n = 7$	$u^6 - 7u^4 + 14u^2 - 7 = 0$
$n = 9$	$u^8 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$
$n = 11$	$u^{10} - 11u^8 + 44u^6 - 77u^4 + 55u^2 - 11 = 0.$
	etc.
$n = 4$	$u^2 - 2 = 0$
$n = 6$	$u^4 - 4u^2 + 3 = 0$
$n = 8$	$u^6 - 6u^4 + 10u^2 - 4 = 0$
$n = 10$	$u^8 - 8u^6 + 21u^4 - 20u^2 + 5 = 0$
$n = 12$	$u^{10} - 10u^8 + 36u^6 - 56u^4 + 35u^2 - 6 = 0.$
	etc. etc.

132. Die Wurzeln dieser Gleichungen sind die Seiten und die Diagonalen des ordentlichen Vielecks, wozu sie gehören, doch mit Ausschluß des Durchmessers in Vielecken von einer geraden Anzahl Seiten. Diese Vieldeutigkeit der Wurzel u hat eben den Grund, welchen die Vieldeutigkeit des Sinus eines Theils von einem Winkel hat, der durch seinen Sinus gegeben wird. Die Chorde AB (Fig. 58.) gehört nicht bloß zu dem Bogen AB, sondern auch auch zu dem Bogen BECDA, dem Complement des AB zum ganzen Umfange, und auch zu der Summe eines dieser Bogen und eines Vielfachen des Umfanges. Man lasse den Punct B von A aus sich auf dem Umfange herum bewegen, und einen Umfang nach dem andern beschreiben. Die Chorde wächst von Null an bis zum Durchmesser, nimmt darauf ab, wird Null, und erneuert dann in Perioden ohne Ende dieselben Veränderungen des Wachsthums und Abnehmens. In dem zweyten Umlaufe ist sie negativ, weil der Sinus des halben beschriebenen Bogens negativ ist. In dem dritten Umlaufe und in jedem von einer ungeraden Ordnungszahl ist die Chorde positiv, so wie sie in jedem Umlaufe von einer geraden

Ordnungszahl negativ ist, alles zufolge der Formel, $\frac{\text{chord}.n\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2} n\omega$.

133. Soll nun ein Bogen oder Winkel, der durch seine Chorde gegeben wird, in n gleiche Theile getheilt werden, so müssen alle zu derselben gleichnamigen Chorde gehörige Bogen oder Winkel in n Theile getheilt werden. Dadurch werden n verschiedene Bogen oder Winkel erhalten, eben so wie für den Sinus des nten Theils eines Winkels, dessen Sinus gegeben wird.

134. Die gegebene Chorde sey $= o$, so sind wenn P den Umfang des Kreises oder die Summe von vier Rechten bedeutet, die zu dieser Chorde gehörigen Bogen,

I. $o, P, 2P, 3P \ldots\ldots (n-2)P, (n-1)P,$

II. $nP, (n+1)P \ldots\ldots (2n-2)P, (2n-1)P$

III. $2nP, (2n+1)P \ldots\ldots$

etc.

Alle diese Bogen sind in n Theile zu theilen. Die Chorden des nten Theils der zweyten Classe sind den Chorden des nten Theils in der ersten Classe gleich aber entgegengesetzt; die von der dritten Classe sind denen von der ersten gleich und gleichnamig; die von der vierten Classe denen von der zweyten und so ferner abwechselnd. Daher hat man die verschiedenen Chorden nur in den beiden ersten Classen auszusuchen. Die Chorden, deren Bogen zusammen P ausmachen, sind nicht verschieden. Daher sind für ein ungerades n die verschiedenen Werthe der Chorde von dem nten Theile des Bogens, dessen Chorde $= o$ ist, aus den beiden ersten Classen,

$$o, \pm \text{ch}.\frac{1}{n}P; \pm \text{ch}.\frac{2}{n}P; \pm \text{ch}.\frac{3}{n}P \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \text{ch}.\frac{n-3}{2n}P \pm \text{ch}.\frac{n-1}{2n}P.$$

Für ein gerades n sind die n verschiedenen Werthe der Chorden des nten Theils von dem Bogen, dessen Chorde = o ist,

$$o, \pm ch.\frac{1}{n}P; \pm ch.\frac{2}{n}P; \pm ch.\frac{3}{n}P \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm ch.\frac{n-2}{2n}P; \quad ch.\frac{n}{2n}P.$$

Diese Chorden sind die Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, wenn man nämlich unter Diagonale jede der Linien versteht, die aus einem Winkelpuncte an alle übrigen Winkelpuncte gezogen werden, also auch die beiden jenem Puncte anliegenden Seiten. Die Chorden in der einen Hälfte des Kreises sind die positiven Werthe, in der andern Hälfte die negativen; denn die letztern, da sie als positive Chorden nicht wiederholt werden können, sind als Chorden von der Summe ihrer einfachen Bogen und des ganzen Umfangs negativ.

135. Die beiden Gleichungen II. III. für die Chorde u des nten Theils des Bogens zur $ch.n\omega$ in (130.) enthalten den Factor u. Daher wird $ch.n\omega = o$, wenn $u = o$ ist. Dieser Factor ist in den Gleichungen (131.) weggelassen. Sie steigen daher für ein Vieleck von $2n+1$ Seiten nur auf den $2n$ten Grad. Für ein gerades n wird $ch.n\omega = o$, wenn der in dem Werthe von $ch.n\omega$ enthaltene Factor, $\sqrt{(4-uu)}$, Null, das ist, wenn $u = 2$, dem Durchmesser gleich ist. Dieser Factor ist in den Gleichungen für ein gerades n in (131.) weggelassen, welche daher nur auf den $(2n-2)$ten Grad steigen. Jener Factor mag positiv oder negativ seyn, nur nicht beides zugleich, da er nur einfach vorhanden ist, und so auch in der Reihe der Chorden für ein gerades n der Durchmesser.

136. Wird der Halbmesser eines Kreises = 1 gesetzt, so ist das Product aller $n-1$ Diagonalen in einem ordentlichen Vielecke von n Seiten gleich der Zahl n.

Denn für ein gerades n kommt zu dem gegebenen Gliede in den Gleichungen (131.) noch der Durchmesser der $= 2$ ist.

VII. Formeln für die Potenzen der Sinus und Cosinus eines Winkels ausgedruckt durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen jenes Winkels.

137. Man multiplicire in der Formel $2 \sin \varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$ aus (36.) beide Theile mit $2 \sin \varphi$, und löse das Product $2 \cos 2\varphi \,.\, \sin \varphi$ in die Theile, $\sin 3\varphi - \sin \varphi$ auf, nach (27.) so ist

$$4 \sin \varphi^3 = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi.$$

In dieser Formel multiplicire man beide Theile mit $2 \sin \varphi$, und löse die Producte $6 \sin \varphi^2$ und $2 \sin 3\varphi \,.\, \sin \varphi$ auf, jenes in $3 - 3 \cos 2\varphi$, dieses in $\cos 2\varphi - \cos 4\varphi$, so ist

$$8 \sin \varphi^4 = 3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi.$$

So erhält man folgende Formeln:

$$\sin \varphi = \sin \varphi$$
$$2 \sin \varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$$
$$4 \sin \varphi^3 = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi$$
$$8 \sin \varphi^4 = 3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$
$$16 \sin \varphi^5 = 10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi$$
$$32 \sin \varphi^6 = 10 - 15 \cos 2\varphi + 6 \cos 4\varphi - \cos 6\varphi$$
$$64 \sin \varphi^7 = 35 \sin \varphi - 21 \sin 3\varphi + 7 \sin 5\varphi - \sin 7\varphi$$
$$128 \sin \varphi^8 = 35 - 56 \cos 2\varphi + 28 \cos 4\varphi - 8 \cos 6\varphi + \cos 8\varphi$$

etc.

Man bemerkt leicht das Gesetz der Coefficienten, daß es die Binomial-Coefficienten aus derjenigen Potenz sind, deren Exponent derselbe ist mit dem des Sinus,

in den ungeraden Potenzen bis zu dem ersten der beiden mittelsten sich gleichen, und in den geraden bis zu dem einzelnen mittelsten halb genommen, mit abwechselnden Vorzeichen, von dem Sinus oder Cosinus des höchsten Vielfachen an. Die Allgemeinheit des Gesetzes wird auf folgende Art bewiesen.

Es sey

$$2^{2n-2} \sin \varphi^{2n-1} = A \sin \varphi - B \sin 3\varphi + C \sin 5\varphi - D \sin 7\varphi + \text{etc.}$$

so ist durch Multiplication mit $2 \sin \varphi$ und gehörige Reduction,

$$2^{2n-1} \sin \varphi^{2n} = A - (A+B) \cos 2\varphi + (B+C) \cos 4\varphi - (C+D) \cos 6\varphi + \text{etc.}$$

Ferner

$$2^{2n} \sin \varphi^{2n+1} = (3A+B) \sin \varphi - (A+2B+C) \sin 3\varphi + (B+2C+D) \sin 5\varphi - (C+2D+E) \sin 7\varphi + \text{etc.}$$

Es seyn nun in der $(2n-1)$ten Potenz eines Binomium die Coefficienten, von den beiden mittelsten sich gleichen nach beiden Seiten hin genommen,

$$\ldots \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$$

Hieraus werden die Coefficienten in der $2n$ten Potenz, von dem einzelnen mittelsten an, nach der einen oder andern Seite hin,

$$2\alpha;\ \alpha+\beta;\ \beta+\gamma;\ \gamma+\delta;\ \delta+\varepsilon;\ \ldots$$

Aus diesen entstehen die Coefficienten der $(2n+1)$ten Potenz, von dem einen der beiden gleichen mittelsten an,

$$3\alpha+\beta;\ \alpha+2\beta+\gamma;\ \beta+2\gamma+\delta;\ \gamma+2\delta+\varepsilon;\ \ldots$$

Hieraus erhellt, daß die Coefficienten in der Potenz, $\sin \varphi^{2n}$, eben so aus denen in der Potenz, $\sin \varphi^{2n-1}$, gebildet werden, wie die Binomialcoefficienten in der $2n$ten Potenz aus denen in der $(2n-1)$ten, von demjenigen an, der die eine Hälfte schließt, außer daß A nicht doppelt

genommen wird, wie der Coefficient α aus der $(2n-1)$ten Potenz. Die Coefficienten in der $(2n+1)$ten Potenz des $\sin\varphi$ entstehen aber ganz so aus denen in der $(2n-1)$ten Potenz, wie die Binomial-Coefficienten in denselben Potenzen auseinander entstehen. Das Gesetz, welches nun für die berechneten Coefficienten gefunden ist, bis zu der 7ten und 8ten Potenz des $\sin\varphi$, gilt daher auch für die 9te und 10te Potenz, dadurch auch für die 11te und 12te, u. s. f.

Zugleich erhellt, wie die geraden Potenzen durch Cosinus, die ungeraden durch Sinus der Vielfachen, jene der geraden, diese der ungeraden, entwickelt werden, und wie die Potenzen der 2 mit denen der Sinus fortschreiten.

139. In der Formel,

$$2^{2n-2}\sin\varphi^{2n-1} = A\sin\varphi - B\sin 3\varphi + C\sin 5\varphi - D\sin 7\varphi + E\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

ist $A = \frac{2n-1 \,.\, 2n-2 \,.\,.\,.\, n+1.}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, n-1.}$, da A der $(n-1)$te Binomial-Coefficient in der $(2n-1)$ten Potenz ist, den Coefficienten $2n-1$ des zweyten Gliedes für den ersten genommenen. Diese Potenz hat $2n$ Glieder, von welchen das nte und $(n+1)$te einerley Coefficienten haben. Ferner $B = \frac{n-1}{n+1}A$; $C = \frac{n-2}{n+2}B$; $D = \frac{n-3}{n+3}C$, $E = \frac{n-4}{n+4}D$, u. s. f. (Binomial-Coefficienten, 8.). Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{n-2}, und setze

$$\sin\varphi^{2n-1} = P\sin\varphi - Q\sin 3\varphi + R\sin 5\varphi - S\sin 7\varphi + T\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

so bleibt $Q = \frac{n-1}{n+1}P$; $R = \frac{n-2}{n+2}Q$; $S = \frac{n-3}{n+3}R$; $T = \frac{n-4}{n+4}S$, u. s. f.

Nun ist $2n \,.\, 2n - 1 \ldots\ldots n + 2 \,.\, n + 1 \,. =$ $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots 2n - 1 \,.\, 2^n$ (Facultät, numerische, 7. oder Binomial-Coeff. 12.), also ist

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n - 1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, 2 - 1 \,.\, 2n} \cdot \frac{2^n}{} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots 4n - 2 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, n}$$

$$\text{und } P = \frac{1}{2^{n2-1}} \cdot \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots 4n - 2 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\, n}$$

140. In der Formel,

$$2^{2n-1} \sin \varphi^{2n} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \cos 2\varphi + \mathfrak{C} \cos 4\varphi - \mathfrak{D} \cos 6\varphi + \mathfrak{E} \cos 8\varphi - \text{etc.}$$

ist $\mathfrak{A} = \dfrac{2n \,.\, 2n - 1 \ldots n + 1 \,.}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n}$, da $\mathfrak{A}$ der nte Binomial-Coefficient in der 2nten Potenz ist. Ferner

$$\mathfrak{B} = \frac{n}{n+1} \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{C} = \frac{n-1}{n+2} \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{D} = \frac{n-2}{n+3} \mathfrak{C};$$

$$\mathfrak{E} = \frac{n-3}{n+4} \mathfrak{D}, \text{ u. s. f.}$$

Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{2n-1}, und setze

$$\sin \varphi^{2n} = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} \cos 2\varphi + \mathfrak{R} \cos 4\varphi - \mathfrak{S} \cos 6\varphi + \mathfrak{T} \cos 8\varphi - \text{etc.}$$

so ist $\mathfrak{P} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\mathfrak{A}}{2^{2n-1}}$; $\mathfrak{Q} = \dfrac{\mathfrak{B}}{2^{2n-1}}$ u. s. f.

$$\text{also } \mathfrak{Q} = \frac{2n}{n+1} \mathfrak{P}; \; \mathfrak{R} = \frac{n-1}{n+2} \mathfrak{Q}; \; \mathfrak{S} = \frac{n-2}{n+3} \mathfrak{R};$$

$$\mathfrak{T} = \frac{n-3}{n+4} \mathfrak{S}; \text{ u. s. f.}$$

Durch die in (139.) gebrauchte Substitution ist

$$A = \frac{1.3.5..2n-1.}{1.2.3...n} . 2^n = \frac{2.6.10..4n-2.}{1.2.3..n}.$$

also $P = \frac{1}{2^{2n}} . \frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}.$

141. Auf gleiche Art werden die Werthe der Potenzen des Cosinus eines Winkels durch die Cosinus der Vielfachen ausgedruckt, und zwar die geraden sowohl als die ungeraden bloß durch diese Cosinus.

$$\cos\varphi = \cos\varphi$$
$$2\cos\varphi^2 = 1 + \cos 2\varphi$$
$$4\cos\varphi^3 = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$$
$$8\cos\varphi^4 = 3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$
$$16\cos\varphi^5 = 10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi$$
$$32\cos\varphi^6 = 10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi$$
$$64\cos\varphi^7 = 35 + 21\cos 3\varphi + 7\cos 5\varphi + \cos 7\varphi$$
$$128\cos\varphi^8 = 35 + 56\cos 2\varphi + 28\,\mathrm{c}\!\int 4\varphi + \mathrm{c}\!\int 8\,\mathrm{c}\!\int 6\varphi + \cos 8\varphi.$$

etc.

Das Gesetz der Coefficienten ist ganz dasselbe, wie für die Potenzen des Sinus, und wird auf gleiche Art erwiesen. Es kommen hier bloß Cosinus der Vielfachen vor, weil das Product zweyer Cosinus in zwey Cosinus zerlegt wird, nach (27.). Das Product $2\cos n\varphi . \cos\varphi$ ist $= \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi$. Auch sind die Vorzeichen der Glieder durchgängig $+$.

142. Die Formeln für die Potenzen der Sinus und Cosinus sind erforderlich zur Integration solcher Differentiale, die diese Potenzen enthalten. Auch für praktische Rechnungen ist es bequem, Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen ihrer Winkel auszudrucken. In der Astronomie kommt dies häufig vor.

143. Ähnliche Formeln werden für Potenzen der Sinus und Cosinus mit negativen Exponenten gefunden. Es ist

$$\frac{1}{\sin\varphi} = 2(\sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \sin 7\varphi + \text{etc})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^2} = -4(\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi + 4\cos 8\varphi + 5\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^3} = -8(\sin 3\varphi + 3\sin 5\varphi + 6\sin 7\varphi + 10\sin 9\varphi + 15\sin 11\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^4} = +16(\cos 4\varphi + 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi + 20\cos 10\varphi + 35\cos 12\varphi + \text{etc.})$$

etc.

144. Die erste Formel fließt aus der in (72.) gefundenen Summe einer unendlichen Reihe Sinus, wenn daselbst $a = \varphi$; $b = 2\varphi$ gesetzt wird. Die Reihe für $\frac{1}{\sin\varphi^2}$ muß so beschaffen seyn, daß sie mit $\sin\varphi$ multiplicirt die erste Reihe gebe. Darum muß sie bloß die Cosinus der geraden Vielfachen von φ enthalten, da $\cos 2m\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2m+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(2m-1)\varphi$ ist. Sie muß mit $\cos 2\varphi$ anfangen, da $\cos 2\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin 3\varphi - \sin\varphi)$ ist, also dadurch das Glied $\sin\varphi$ in der ersten Reihe hervorgebracht wird, ohne daß es nöthig ist, noch $\cos 0\varphi$ oder 1 zu Hülfe zu nehmen. Die dritte Reihe muß die Sinus der ungeraden Vielfachen von $\sin 3\varphi$ an enthalten, damit daraus, durch die Multiplication mit $\sin\varphi$ die zweyte Reihe erhalten werde, indem $\sin(2n+1)\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2n\varphi - \cos(2n+2)\varphi)$ ist. Da $\sin 3\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)$ ist, so braucht die Reihe erst mit $\sin 3\varphi$ anzufangen. So ist es auch mit den Formen der folgenden Reihen beschaffen.

145. Man setze für ein ungerades n

$$\sin\varphi^{-n} = \pm 2^n (\sin n\varphi + A \sin(n+2)\varphi + B \sin(n+4)\varphi + C \sin(n+6)\varphi + D \sin(n+8)\varphi + \text{etc.})$$

Der Factor 2^n ist beygefügt, weil bey der Multiplication der Reihe durch $\sin\varphi$, und Zerlegung der Producte in zwey Cosinus, die Reihe zugleich den Factor $\frac{1}{2}$ erhält. Multiplicirt man nun die hierdurch entstandene Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$ wieder mit $\sin\varphi$, und zerlegt die Producte der Sinus und Cosinus in zwey Sinus, so entsteht wieder der Factor $\frac{1}{2}$, und so ferner bey jeder Multiplication. Da die erste Reihe, die für $\sin\varphi$, den Factor 2 hat, so muß die nte Reihe, die für $\sin n\varphi^{-1}$, den Factor 2^n haben.

Man multiplicire die angenommene Reihe mit $\sin\varphi$, so wird durch die Zerlegung der Producte,

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + (A-1)\cos(n+1)\varphi + (B-A)\cos(n+3)\varphi + (C-B)\cos(n+5)\varphi + (D-C)\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}).$$

Die Coefficienten dieser Reihe, den Factor 2^{n-1} abgesondert, sind die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n}$. Man setze

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + \mathfrak{A}\cos(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\cos(n+3)\varphi + \mathfrak{C}\cos(n+5)\varphi + \mathfrak{D}\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}),$$

so ist

$$\sin\varphi^{-n+2} = \mp 2^{n-2} (\sin(n-2)\varphi + (\mathfrak{A}-1)\sin n\varphi + (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\sin(n+2)\varphi + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\sin(n+4)\varphi + \text{etc.}$$

Diese Reihe, nach Absonderung des Factors 2^{n-2}, hat zu Coefficienten die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$. So erhellt, daß die Coefficienten in jeder

vorhergehenden Reihe die Differenzen derer in der nächst höhern oder folgenden sind. Da der erste Coefficient derselbe, nämlich 1 ist, so ist der mte in einer Reihe die Summe von m Coefficienten der nächst niedrigern, vom Anfange an. Dadurch wird jede folgende Reihe aus der vorhergehenden leicht berechnet. Es ist in irgend einer Reihe, 1, a, b, c, d . . . p, q, r, das Glied r die Summe aller Glieder der Differenzreihe,
1; a — 1; b — a; c — b; d — c, . . . q — p; r — q,
deren Anzahl der Stellenzahl von r gleich ist.

146. Die Coefficienten in den Reihen, ohne die Potenz von 2, sind die Binomial-Coefficienten in $(1-z)^{-n}$. In dieser Potenz ist der Unterschied des mten und (m + 1)ten Coefficienten gleich dem (m + 1)ten Coefficienten in $(1-z)^{-n+1}$, der absoluten Quantität nach. Denn es ist, wenn n als der erste gezählt wird,

$$\text{der mte Coefficient} = \frac{n.n+1\ldots n+m-1.}{1.\ 2\ldots\ m};$$

$$\text{der } (m+1)\text{te} = \frac{n.n+1\ldots n+m.}{1.\ 2\ldots\ m+1.};$$

$$\text{der Unterschied} = \frac{n-1.n\ldots n+m-1.}{1.\ 2\ldots\ m+1.},$$

welches der (m + 1)te Coefficient in $(1-z)^{-n+1}$ ist (S. Binom. Coeffic. 5. wo nur der zweyte Theil des Binomium additiv gesetzt ist). Der Unterschied des ersten Coefficienten n und des Anfangsgliedes, 1, ist der erste Coefficient, n — 1, in $(1-z)^{-n+1}$. Solchergestalt ist die Reihe der Coefficienten in jeder vorhergehenden Potenz die Differenzreihe der folgenden; und die letzte Differenzreihe ist die in der Potenz $(1-z)^{-1}$, das ist,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten in dieser Reihe sind dieselben mit denen in der Reihe für $\frac{1}{\sin\varphi}$, den Factor 2 abgesondert.

Dadurch kommen die Coefficienten in allen folgenden Reihen für die reciproken Potenzen von $\sin\varphi$, ohne die Potenz von 2, mit jenen Binomialcoefficienten überein.

147. Auf gleiche Weise ist

$$\frac{1}{\cos\varphi} = 2(\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^2} = 4(\cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi - 4\cos 8\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^3} = 8(\cos 3\varphi - 3\cos 5\varphi + 6\cos 7\varphi - 10\cos 9\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^4} = 16(\cos 4\varphi - 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi - 20\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

etc.

Der Beweis ist derselbe wie für die Potenzen der Sinus. Die Coefficienten sind, ohne die Potenzen der 2, die Coefficienten in $(1+z)^{-n}$.

148. Wenn $\varphi = 90°$, so ist $\sin\varphi = 1$, und $\sin(4n-1).90° = -1$; $\sin(4n+1).90° = +1$; $\cos(4n-2).90° = -1$; $\cos 4n.90° = +1$; und der Werth von $\frac{1}{\sin\varphi^n}$ ist $= 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

Ist $\varphi = 0$, so ist $\cos\varphi = +1$, und es ist $\frac{1}{\cos\varphi^n} = 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

VIII. Analogie der Theilung eines Kreissectors und eines hyperbolischen Sectors.

149. Die gleichseitige Hyperbel hat eine besondere Ähnlichkeit mit dem Kreise durch ihre Gleichung. Wenn a die halbe Axe dieser Hyperbel ist, und die Abscisse von dem Mittelpuncte aus genommen $= x$, die Ordinate $= y$, so ist ihre Gleichung, $aa = xx - yy$, da für den Kreis die Gleichung ist $aa = xx + yy$, wenn der Halbmesser $= a$ ist, und die Abscissen von dem Mittelpuncte aus genommen werden. Die Ordinaten der Hyperbel sind unmöglich, wenn die Abscisse kleiner als a ist, und die Ordinaten des Kreises sind unmöglich, wenn die Abscisse größer als a ist. Dennoch kann man die Gleichung zwischen einer der Coordinaten an der Hyperbel und dem zugehörigen Sector auch auf den Kreis übertragen, nur daß unmögliche Formen hineinkommen. Die Formeln für die Vervielfachung der Sectoren mittelst der Coordinaten an einem einfachen sind für beide Linien entweder ganz dieselben, oder nur in den Vorzeichen verschieden.

150. Wenn ein Winkel durch seinen Kreisbogen φ, für den Halbmesser als Einheit, ausgedruckt wird, so ist der zugehörige Kreissector $= \frac{1}{2}\varphi$. Alle die obigen Formeln für die Vervielfachung und Theilung eines Winkels gelten auch für die Kreissectoren, wenn man unter φ den doppelten Sector versteht.

151. Es sey (Fig. 61.) CX die Axe einer gleichseitigen Hyperbel, wovon AMN ein Zweig ist; C ist der Mittelpunct, A der Scheitel, $CP = x$ eine Abscisse, $PM = y$ eine Ordinate, und $CA = a$. Es ist der Sector $ACM = \frac{1}{2} aa \log nat \frac{x+y}{a}$; s. Quadratur.

152. Nun sey $a = 1$, und Sector $ACM = \frac{1}{2}\omega$ (zur Beobachtung der Ähnlichkeit mit dem Kreise), so ist

$\omega = \log \text{nat}\,(x+y)$, und auch $\omega = \log \text{nat}\,\frac{1}{x-y}$:

Denn es ist für die Hyperbel, $xx - yy = 1$, oder $(x+y)(x-y) = 1$, also $x + y = \frac{1}{x-y}$. Es sey die Basis der natürlichen Logarithmen $= e$, so ist (s. Logarithmen)

$$e^{\omega} = x + y, \text{ und } \quad e^{\omega} = \frac{1}{x-y};$$

$$\text{oder } e^{-\omega} = x - y.$$

Folglich ist

$$e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x,$$

$$e^{\omega} - e^{-\omega} = 2y.$$

153. Hieraus ergiebt sich eine leichte Art die hyperbolische Form auf einen Kreissector überzutragen. Es ist $\partial . e^{\omega} = e^{\omega}\partial\omega$, und $\partial . e^{-\omega} = -e^{-\omega}\partial\omega$ (Differentialformeln, 14.), also ist

$$(e^{\omega} - e^{-\omega})\,\partial\omega = 2\partial x,$$

$$(e^{\omega} + e^{-\omega})\,\partial\omega = 2\partial y,$$

und durch Verbindung mit jenen beiden Formeln,

$$\partial\omega = \frac{\partial x}{y}; \qquad \partial\omega = \frac{\partial y}{x}.$$

Setzt man $y\sqrt{-1}$ statt y, und $\varphi\sqrt{-1}$ statt ω, so verwandeln sich diese beiden Differentialformeln in die zwischen einem Kreisbogen und den Coordinaten (Differentialformeln, 29, 30.), oder zwischen dem doppelten Kreissector und den Coordinaten. Es ist also, wenn x und y die Coordinaten am Kreise, und $\frac{1}{2}\varphi$ den zugehörigen Sector bedeuten,

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2x,$$

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1}.$$

Zwischen der Coordinate x oder y und dem Sector $\frac{1}{2}\varphi$ oder Bogen φ (für den Halbmesser als Einheit) findet keine endliche Gleichung anders als mit unmöglichen Formen Statt. Werden die Exponentialgrößen zu einer Reihe entwickelt, so geht das Unmögliche heraus. (S. Differenzenrechnung, 25, wo für a, c, u, zu setzen sind e, 1, $\pm \varphi\sqrt{-1}$.)

Hingegen sind die Gleichungen zwischen ω und x oder y an der Hyperbel zweyerley Formen fähig, durch Potentialausdrücke, und durch Reihen.

154. Es sey ACN (Fig. 61.) ein Vielfaches des Sectors ACM in dem Verhältnisse n : 1; und CQ die dazu gehörige Abscisse, QN die Ordinate, so ist

$$\tfrac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = CQ,$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega}) = NQ.$$

Man setze S statt $\frac{1}{2}\omega$, und $CQ = \cos hyp.\, nS$; $NQ = \sin hyp.\, nS$, oder kürzer $CQ = \cos h.\, nS$; $NQ = \sin h.\, nS$.

I. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega}) = x$, mit den beiden Theilen von $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so entsteht $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + 1 + 1 + e^{-2\omega}) = 2x^2$, das ist, $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + e^{-2\omega} = 2x^2 - 1$, oder

$$\cos h.\, 2S = 2x^2 - 1.$$

II. Die beiden Theile der gefundenen Gleichung multiplicire man wieder mit $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 2x,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 3x$,

das ist, $\cos h.\, 3S = 4x^3 - 3x$.

III. Auf gleiche Art wird erhalten

$$\tfrac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{2\omega} + e^{-2\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 6x^2,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 8x^2 + 1$,

das ist, $\cos h.\, 4S = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

IV. Ferner ist

$$\cos h.\ 5S = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\cos h.\ 6S = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$
$$\cos h.\ 7S = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

u. s. f.

Diese Formeln für die Cosinus der Vielfachen eines hyperbolischen Sectors stimmen völlig mit den Formeln für die Cosinus der Vielfachen eines Winkels (oder circularen Sectors) in (93.) überein. Die Herleitung der Cosinus eines Vielfachen aus denen der beiden nächst vorhergehenden ist beiderseits dieselbe.

155. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega}) = y$, mit den beiden Theilen von $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so ist

$$\tfrac{1}{2}(e^{2\omega} - e^{-2\omega}) = 2xy,$$

oder $\sin h.\ 2S = 2xy.$

II. Die gefundene Gleichung behandle man auf dieselbe Art, so ist

$$\tfrac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega} - e^{-3\omega}) = 4x^2y,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3\omega} - e^{-3\omega}) = 4x^2y - y,$

das ist, $\sin h.\ 3S = 4x^2y - y.$

III. Durch dasselbe Verfahren wird erhalten

$$\sin h.\ 4S = 8x^3y - 4xy.$$
$$\sin h.\ 5S = 16x^4y - 12x^2y + y.$$
$$\sin h.\ 6S = 32x^5y - 32x^3y + 6xy.$$
$$\sin h.\ 7S = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y.$$

u. s. f.

Auch diese Formeln stimmen mit den Formeln für die Sinus der Vielfachen eines Winkels (oder Kreissectors) in (84.) vollkommen überein. Da in den Formeln bloß die erste Potenz des Sinus des einfachen Sectors vor-

kommt, so hebt sich der unmögliche Factor bey der Vertauschung der circularen und hyperbolischen Sectoren.

Zu vergleichen die Rechnung in 108^b, f.

156. Um die Sinus der ungeraden Vielfachen eines hyperbolischen Sectors durch den Sinus des einfachen auszudrucken, multiplicire man die beiden Werthe des Sinus eines Vielfachen durch die beiden Theile der Gleichung, $e^{2\omega} + e^{-2\omega} = 4yy + 2$, $(= 4xx - 2)$, den ersten durch den ersten, den zweyten durch den zweyten, und addire oder subtrahire dasjenige, was nöthig ist, um den Werth des Sinus eines vielfachen Sectors, $\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega})$, zu erhalten. Solchergestalt ist

$$\sin h.\ S = y.$$
$$\sin h.\ 3S = 4y^3 + 3y.$$
$$\sin h.\ 5S = 16y^5 + 20y^3 + 5y.$$
$$\sin h.\ 7S = 64y^7 + 112y^5 + 56y^3 + 7y.$$

u. s. f.

Diese Formeln sind bloß in den Vorzeichen von denen in (86.) verschieden. Setzt man hier $y\sqrt{-1}$ für y, und also für den Sinus des vielfachen Sectors ebenfalls eine unmögliche Größe, so geht der unmögliche Factor zwar durch die Division wieder heraus, aber die ungeraden Potenzen von y^2 werden negativ. Auf gleiche Art werden die Formeln für Sinus am Kreise in hyperbolische verwandelt.

157. Durch dasselbe Verfahren findet man die hyperbolischen Sinus gerader Vielfachen eines Sectors, nämlich

$$\sin h.\ 2S = 2yx.$$
$$\sin h.\ 4S = (8y^3 + 4y)x.$$
$$\sin h.\ 6S = (32y^5 + 32y^3 + 6y)x.$$
$$\sin h.\ 8S = (128y^7 + 192y^5 + 80y^3 + 8y)x.$$

u. s. w.

Die Formeln sind dieselben wie die für Winkel oder Kreissectoren in (89.) außer daß alle Glieder einerley Vorzeichen haben, aus demselben Grunde wie in (156).

158. Ein hyperbolischer Sinus und Cosinus gehört nur zu einem einzigen Sector. Daher haben die Gleichungen für x und y, wenn der vielfache Sector gegeben wird, nur einen einzigen Werth, oder die Gleichungen für x und y haben alle nur eine einzige mögliche Wurzel. Die Formeln für den Sinus eines geraden Vielfachen des einfachen Sectors geben zwar, quadrirt, Gleichungen mit geraden Potenzen von y, daher die Wurzeln paarweise von entgegengesetzten Werthen, allein die negativen Wurzeln beziehen sich nur auf den negativen Werth des Sinus des vielfachen Sectors, der durch das Quadriren mit in die Gleichung gezogen wird.

159. Es sey sin h. 3 S = f, so ist $f = 4y^3 + 3y$ (156.). Man führe wieder die halbe Axe, a, ein, so hat man für f zu setzen $\frac{f}{a}$, und $\frac{y}{a}$ für y. Dadurch ist

$$4y^3 + 3a^2y - a^2f = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel (Gleichung, 69.). Ihre Gesellschafterinn am Kreise, $4y^3 - 3a^2y + a^2f = 0$, hat drey mögliche Wurzeln. Denn die Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$ ist (Gleichung 70.). Da am Kreise ist $a > f$, so wird die Bedingung wegen der drey möglichen Wurzeln erfüllt.

160. Es sey cos h. 3 S = g, so ist $g = 4x^3 - 3x$ (154. II.). Wird die halbe Axe, a, eingeführt, so ist $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$. Eine cubische Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4b^3 < 27c^2$ ist. Das ist hier der Fall, da $a < g$ ist.

161. Es sey sin h. n S = f, so ist $\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega}) = f$, und $\frac{1}{4}(e^{2n\omega} - 2 + e^{-2n\omega}) = f^2$. Daraus ist $\frac{1}{4}(e^{2n\omega} + 2 + e^{-2n\omega}) = f^2 + 1$, woraus ist

$\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = \sqrt{(f^2 + 1)}$. Diese Gleichung auf gedoppelte Art mit der ersten für f verbunden, giebt

$$e^{n\omega} = \sqrt{(f^2 + 1)} + f,$$
$$e^{-n\omega} = \sqrt{(f^2 + 1)} - f.$$

Daraus ist

$$e^{\omega} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)},$$
$$e^{-\omega} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

Da $e^{\omega} - e^{-\omega} = 2y = 2 \sin h. S$, so ist

$$2y = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)} - \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

162. Es sey $\cos h. nS = g$, so ist $\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = g$, und daraus auf ähnliche Art wie in (161.)

$$e^{\omega} = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})},$$
$$e^{-\omega} = \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Da $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x = 2 \cos h. S$, so ist

$$2x = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})} + \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Aus den Gleichungen für y und x lassen sich rückwärts f und g durch y und x darstellen.

163. Der hyperbolische Sinus und Cosinus des Theils eines Sectors läßt sich also durch den Sinus und Cosinus des vielfachen Sectors mittelst einer endlichen, zweymahl zweytheiligen, nur irrationalen, Formel darstellen. Der Sinus und Cosinus eines Kreissectors behält zwar dieselbe Form, die beiden Wurzelgrößen aber sind unmögliche Größen, weil f in $f\sqrt{-1}$ verwandelt wird, und g^2 kleiner als 1 ist. Die mehreren Werthe des Sinus und Cosinus des Theils lassen sich in einem endlichen algebraischen Ausdrucke mit möglichen Größen nicht begreifen. Bey der Entwickelung der irrationalen Größen zu Reihen verschwindet das Unmögliche in dem Aggregat.

Die nte Wurzel aus einer möglichen Größe hat nur einen einzigen möglichen Werth; aber die nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat n unmögliche Werthe. In dem gegenwärtigen Falle läßt sich eine unmögliche Wurzel aus dem einen Theile der Formel für y oder x mit einer unmöglichen Wurzel aus dem andern Theile derselben verbinden, so daß das Aggregat möglich wird. Dieses muß auf n Arten thunlich seyn, damit y oder x dadurch n verschiedene Werthe erhalte, und bey einer Section in eine gerade Anzahl Theile für die Sinus auf 2n Arten, die aber nur in den Vorzeichen einen Unterschied geben.

164. Wenn $n = 3$ ist, so sind die Formeln für 2y und 2x die Ausdrücke der Wurzeln einer cubischen Gleichung, wie sie die Cardanische Regel für eine cubische Gleichung mit einer einzigen möglichen Wurzel giebt. Die Formel für 2y gilt für die Gleichung $z^3 + bz - c = 0$, die für 2x gilt für die Gleichung $z^3 - bz - c = 0$. Hat c das Vorzeichen +, so sind die Wurzeln jenen Werthen entgegengesetzt. Man hat nur in jenen Formeln für y, x, f, g zu setzen $\frac{y}{a}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{g}{a}$, um die Formeln denen in dem Artikel, Gleichung (62. 73.) analog zu machen. Alsdann ist 2y oder 2x das dortige x.

165. Lambert hat in einer Abhandlung, Observations trigonometriques, Mem. de l'Acad. de Berlin, 1768, eine Tafel von 90 hyperbolischen Sectoren mit ihren Sinus und Cosinus nebst deren Logarithmen berechnet, welche Tafel auch in seinen Zusätzen zu den ... Tabellen, Berlin 1770, Tab. XXXII. enthalten ist. Wenn diese weiter ausgedehnt würde, könnte sie nicht allein zur Auflösung mancher Gleichungen, sondern auch zur Abkürzung trigonometrischer Rechnungen dienen.

166. Exempel. Es sey die Gleichung, $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0$, aufzulösen. Sie

ist nach Cardans Regel, im Artikel Gleichung, 75, aufgelöset. Es ist an der Hyperbel die Gleichung, $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$ aus (160.). Folglich ist

$\frac{3}{4}a^2 = 13,3592$ $\quad$ $la = 0,62536$

$\frac{1}{4}a^2g = 24,6377$ $\quad$ $lg = 0,74294$

$a = 4,2204$ $\quad$ $l\cos h.3S = 0,11758$

$\cos h.3S = \frac{g}{a}$ $\quad$ $3S = 0,3314+$ (aus der Tafel.)

$x = a \cos h.S$

$= 4,368$ $\quad$ $S = 0,1105+$

$\cos h.S = 1,035 -$

Am a. O. ist gefunden $x = 4,36004$. Die Rechnung ist hier ohne sorgfältige Interpolation gemacht.

167. Die Formeln für die Zusammensetzungen der Winkel mittelst der Functionen der ihnen zugeordneten Linien gelten auch für die hyperbolischen Sectoren. Nur muß $\sin\alpha$ mit $\sin\alpha\sqrt{-1}$, und $\tang\alpha$ mit $\tang\alpha.\sqrt{-1}$ vertauscht werden. So ist $\cos hyp(A+B) = \cos h.A.\cos h.B + \sin h.A.\sin h.B$, welcher Werth von dem $\cos(A+B)$ am Kreise in dem Vorzeichen des zweyten Gliedes verschieden ist, weil $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ ist. S. Lambert a. a. O. in den Tafeln. Tab. XVIII.

IX. Analytische Werthe der Sinus von 3 zu 3 Graden.

168. Die analytischen Werthe der Sinus sind vollständige, wenn gleich bis auf zwey derselben, den $\sin 90°$ und $\sin 30°$, irrationale, und daher bey analytischen Rechnungen brauchbar; auch können sie, wo die Irrationalität nicht zu verwickelt wird, zur Berechnung der numerischen Werthe als Fundamentalwerthe dienen.

Hier folgen diese Werthe in einer gewissen systematischen Abtheilung.

I.

$\sin 90^\circ = 1.$

$\sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$

$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}.$

$\sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$

$\sin 15^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$

$\sin 75^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$

II.

$\sin 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 54^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(6+2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}.$

$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}.$

$\sin 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$

III.

$\sin 81^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\sin 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\sin 63^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$

$\sin 27^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$

IV.

$\sin 66^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$

$\sin 24^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$

$\sin 84^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$

$\sin 48^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$

$\sin 42^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$

$\sin 12^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$

$\sin 78^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$

V.

$$\sin 51^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$
$$\sin 39^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$
$$\sin 21^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$
$$\sin 69^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$
$$\sin 33^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$
$$\sin 57^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$
$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$
$$\sin 87^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Die Wurzelgrößen, in welchen die Größe unter dem Wurzelzeichen den Factor $3 \pm \sqrt{5}$ hat, lassen sich in zwey Wurzeln zerlegen, da $\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

169. Die Herleitung dieser Formeln beruht auf den Werthen von $\sin 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 36^\circ$, und den Formeln von der Zusammensetzung der Sinus. Daß $\sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und $\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}$ ist, ist offenbar. Der $\sin 15^\circ$ und $\sin 75^\circ$ ($= \cos 15^\circ$) werden entweder durch die Formeln in (36.) aus $\cos 30^\circ$ oder $\sin 60^\circ$ gefunden, oder durch die in (24.), da $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, und $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Aus dem Binomium $2 \pm \sqrt{3}$ läßt sich die Quadratwurzel in der angegebenen Form ausziehen, s. Wurzel.

170. Der Sinus von 36° ist die halbe Seite des ordentlichen Fünfecks, und kann aus einer geometrischen Construction hergeleitet werden. (S. Vieleck). Oder man setze in (65.) den Winkel $\varphi = \frac{180}{5}^{\circ}$, so ist $\sin 5\varphi = 0$, also $0 = 5y - 20y^3 + 16y^5$, wo y die Werthe der Sinus von $\frac{180}{5}$ Gr. sind. Es müssen hier alle Winkel, deren Sinus 0 ist, in 5 Theile getheilt werden. Die Werthe von $\sin\varphi$ oder y sind demnach, 0, sin 36°, sin 72°, sin 108° (= sin 72°), sin 144° (= sin 72°); sin 180°; sin 216° (= − sin 36°); sin 252° (= − sin 72°). So sind die Wurzeln jener Gleichung, $0 : \pm \sin 36^{\circ}; \pm \sin 72^{\circ}$. Nun ist, nachdem sie mit y dividirt ist, $16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$, also (Gleichung, 33.) $y^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}$, und $y = \frac{1}{4}\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})}$. Das obere Vorzeichen giebt den sin 72°, das untere den sin 36°. Diese Werthe sind auch negativ zu nehmen, da die Wurzel aus y^2 beide Vorzeichen erhalten muß. Zu gegenwärtiger Absicht werden sie nicht gebraucht.

Der sin 54° ist der cos 36°, und sin 18° = cos 72. Sie werden durch die Formel $\cos A = \sqrt{(1 - \sin A^2)}$ gefunden. Aus dem Binomium $6 \pm 2\sqrt{5}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{5} \pm 1$, da 5 das Product zweyer Zahlen 1 und 5 ist, deren Summe = 6. Oder aus cos 36° = sin 54° werden sin 18° und cos 18° = sin 72° durch die Formeln in (36.) hergeleitet.

171. Die Formeln in dem Abschnitte III. werden mittelst der Verbindung der Winkel 36° und 18° mit 45° gefunden; die Formeln in IV. mittelst der Verbindung der Winkel in II. mit 30°, und 18° mit 60°; die Formeln in V. mittelst der Zusammensetzung der Winkel in III. mit 30° oder 60°. Es ist nämlich $81 - 30 = 51$; $30 + 9 = 39$; $30 - 9 = 21$; $63 - 30 = 33$; $30 + 27 = 57$; $30 - 27 = 3$; $60 + 27 = 87$; $60 + 9 = 69$.

172. Die analytischen Werthe der Sinus der Winkel von der Form $\frac{3(2m+1)}{2}$ in Graden werden zum

Theil sehr zusammengesetzt. Die einfachern mögen hier noch Platz finden.

$$\sin 22^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

$$\sin 67^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$

$$\sin 7^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}.$$

$$\sin 82^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

$$\sin 37^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

$$\sin 52^\circ\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}.$$

Die Sinus von $22^\circ\frac{1}{2}$ und $67^\circ\frac{1}{2}$ werden aus dem cos 45° durch die Formeln (36.) gefunden. Die zuerst gesetzten Werthe der übrigen vier Sinus werden mittelst derselben Formeln aus dem cos 15° und cos 75° erhalten, die beygefügten Werthe aber aus der Verbindung des Winkels $\pm\ 22^\circ\frac{1}{2}$ mit 30° und 60°.

173. Wallis hat in seinem tractatus de sectionibus angularibus Opp. Th II. die analytischen Werthe der Chorden von $1\frac{1}{2}$ zu $1\frac{1}{2}$ Grad berechnet. Das Verzeichniß derselben steht daselbst pag. 586 — 589. Die Chorden sind alle als Quadratwurzeln dargestellt. Es ist nämlich $4 \sin A^2 = 2 - 2 \cos A = 2 - 2 \sin(90^\circ - A)$, das ist, $(\text{chord } A)^2 = 2 - \text{chord compl. } A$.

X. Formeln für die Sinus und Cosinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$.

174. Es sey der Sinus eines Bogens $= a$, der Sinus der Hälfte $= b$; des Viertheils $= c$; des Acht-

theils $= d$, u. s. w. Ferner seyn die Cosinus dieser Bogen $= \alpha; \beta; \gamma; \delta;$ etc. Nun ist $2b^2 = 1 - \sqrt{(1 - a^2)}$ aus (36), oder $4b^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4a^2)}$; und $4c^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4b^2)}$; $4d^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4c^2)}$; u. s. f. Daher ist

$$2b = \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - 4a^2)})}.$$

$$2c = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})}.$$

$$2d = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})})}.$$

$$2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})})})}.$$

etc.

175. Ferner ist $4\beta^2 = 2 + 2\alpha$; $4\gamma^2 = 2 + 2\beta$; $4\delta^2 = 2 + 2\gamma$; u. s. f. also

$$2\beta = \sqrt{(2 + 2\alpha)}.$$

$$2\gamma = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})}.$$

$$2\delta = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})})}.$$

$$2\varepsilon = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})})})}.$$

u. s. f.

176. Die doppelten Sinus, 2a, 2b, 2c, etc. sind die Chorden des doppelten von den Winkeln, wozu die Sinus a, b, c, etc. gehören. Vermittelst dieser sehr beschwerlichen Formeln hat Ludolph von Ceulen den Umfang des Kreises berechnet. Es sey $a = \sin 45°$, also $2a = \text{chord } 90°$, so ist die Seite des eingeschriebenen 64 Ecks, $2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})})}$. Ludolph berechnete nach einer solchen Formel die Seite des eingeschriebenen Vielecks von 1073741824 Seiten, wozu 28 Halbirungen erforderlich sind.

177. Es sey $a = \frac{1}{2}$, nämlich die halbe Seite des Sechsecks, so ist die Seite des eingeschriebenen 96 Ecks $2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})}$. Das ist die von Archimedes berechnete Seite. Ludolph hat durch fortgesetzte Halbirung des Bogens von 60 Gr. die Seite des eingeschriebenen Vielecks von 644245094 4 Seiten

durch 30 Halbirungen mittelst einer solchen Formel berechnet. Endlich berechnete er durch die fortgesetzte Halbirung des Bogens von 6 Gr. die Seite des eingeschriebenen Vielecks von 32212254720 Seiten durch 29 Theilungen. Hier ist $a = \sin 3^\circ$; und $4(1 - a^2) = (4 \cos 3^\circ)^2 = 2 + 2 \cos 6^\circ = 2 + \sqrt{(2 + 2 \cos 12^\circ)}$. Es ist $2 \cos 12^\circ = 2 \sin 78^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; also $2 + 2 \cos 12^\circ = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})}$; so daß $\sqrt{(4 - 4a^2)} = \sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})})})}$. Diesen Ausdruck hat Rudolph in seinen Formeln für die Chorden bey dieser Rechnung.

178. Vieta hat aus den Formeln für die Cosinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$ einen Ausdruck des Inhalts des Kreises hergeleitet. Opp. p. 400. Es sey der Centriwinkel eines regulären eingeschriebenen Vielecks $= A$; die Anzahl der Seiten $= n$, der Halbmesser $= r$, so ist der Inhalt $= n \cdot r \sin \frac{1}{2} A \cdot r \cos \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} n r^2 \sin A$. Der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks von $2n$ Seiten ist demnach $= n r^2 \sin \frac{1}{2} A$. Es verhält sich also der Inhalt des Vielecks von n Seiten zu dem von $2n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{2} A : 1$; das von $2n$ Seiten zu dem von $4n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{4} A : 1$; das von $4n$ Seiten zu dem von $8n$ Seiten wie $\cos \frac{1}{8} A : 1$; u. s. f. Daher verhält sich das Vieleck von n Seiten zu dem von $2^p n$ Seiten wie das Product $\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{4} A \cdot \cos \frac{1}{8} A \ldots \cos \frac{A}{2^p} : 1$.

Da der Kreis die Gränze der Vielecke ist, so verhält sich das Vieleck von n Seiten zu der Kreisfläche wie das Product $\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{4} A \cdot \cos \frac{1}{8} A$, etc. in infin. : 1.

Es sey $n = 4$, so ist $A = 90^\circ$ und $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}}$. In den Formeln für die Cosinus der successiv halbirten Winkel ist nun

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\beta = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$;

$\gamma = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})})}$;

$\delta = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})})})}$;

$\varepsilon = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})})})})}$.

etc.

und das eingeschriebene Viereck ($= 2$) verhält sich zu der Kreisfläche wie $\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon$. etc. : 1.

Bey Vieta fehlt durchgehends der Factor $\frac{1}{2}$ vor den Wurzelzeichen. Für den Durchmesser $= 2$ findet er die Chorde des Complements von $45^\circ = \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$; von $22^\circ\frac{1}{2} = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})}$; von $11^\circ\frac{1}{4} = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})})}$, u. s. f. Für den Durchmesser $= 1$ sind diese Chorden durch 2 zu dividiren, das ist, unter jedem Wurzelzeichen durch 4. So ist $\frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$, und so mit den übrigen allen. Diese Chorden sind alsdann Cosinus in einem Kreise, der den Durchmesser ihres Kreises zum Halbmesser hat. Montucla hat (Hist. des Mathem. T. I. p. 611.) die Formel so abgeschrieben wie sie bey Vieta steht.

X. Zugabe einiger geometrischen Constructionen.

179. Zur Versinnlichung geometrisch-analytischer Formeln ist es dienlich sie, wo es bequem angeht, bloß durch die Geometrie zu finden. Zu diesem Zwecke, und auch zur Übung in der Geometrie sind hier die Constructionen von einigen der obigen Formeln beygefügt.

180. Es ist (Fig. 62.) AB der Durchmesser eines Kreises, CD, EF sind zwey parallele Chorden, und DE die Chorde von dem Bogen DAE, als der Summe von DAC und CE. Der Durchmesser AB sey auf diese beiden parallelen Chorden senkrecht, daher er sie in G und H halbirt. Man nehme den Bogen AK = CE oder DF, welche sich gleich sind, und ziehe BK und AK. Die Chorde DE schneide GH in L, so sind die Dreyecke

DGL, EHL dem BKA ähnlich, wegen der rechten Winkel bey G, H, K, und der gleichen spitzen bey D, E, B, die auf gleich großen Bogen stehen. Es ist also

$$BK : AB = GD : DL = EH : EL,$$

und daher

$$BK \times DL = AB \times GD,$$
$$BK \times EL = AB \times EH.$$

Daraus ist durch Addition, und Multiplication mit 2,

$$2BK \times ED = AB(CD + EF).$$

Diese Formel ist dieselbe mit der ersten in (129*). Daselbst ist ω, was hier der Bogen AK oder EC ist.

Nimmt man die Hälften der Chorden CD und EF, so ist

$$BK \times ED = AB(CG + EH).$$

Dieses ist die Formel in (58.). Denn CG, $\frac{1}{2}$ED, EH, sind die Sinus der Bogen, AC, $\frac{1}{2}$DAE, AE, für den Halbmesser AO oder $\frac{1}{2}$AB. Der Unterschied des ersten und zweyten dieser Bogen, so wie des zweyten und dritten, ist $= \frac{1}{2}$CE oder $\frac{1}{2}$AK, das Maaß des Winkels B, dessen Cosinus BK für den Halbmesser AB ist. Es ist hier der zu AE gehörige Winkel am Mittelpuncte was in (58.) der Winkel $a + nb$ ist, und B, was daselbst b heißt; auch ist $\cos B = \frac{BK}{AB}$.

181. Man ziehe den Durchmesser DOP, und die Chorden PE, PC, von welchen jene auf DE, diese auf DC senkrecht steht. Die Chorde PC schneide EF in M. Da EF parallel mit CD ist, so ist PM senkrecht auf EF, da auch Winkel EPC auf dem Bogen EC steht, so ist Winkel EPC = ABK, und es ist

$$AB : AK = EP : EM.$$

Noch ziehe man DN senkrecht auf EF, so ist MH = NH,

also $EM = FN$. Nun ist $EM + FN = EF - CD$, folglich ist

$$AB : AK = 2EP : EF - CD,$$

oder

$$2AK \,.\, EP = AB\,(EF - CD).$$

Diese Formel giebt den Unterschied der Chorden mittelst der Chorde des Complements von dem arithmetisch mittlern Winkel, so wie jene erstere die Summe durch die Chorde dieses Winkels selbst.

Nimmt man die Hälften von den beiden Chorden, EF, CD, und von EP, so entsteht die Formel in (59.) Es ist $\frac{AK}{AB} = \sin B =$ Sinus des halben Unterschiedes der zu CG, EH gehörigen Winkel.

182. Wenn CD, DE, EF als Chorden der Complemente ihrer Bogen zum Halbkreise betrachtet werden, so werden aus den hier gefundenen Formeln die in (60, 61.) erhalten.

183. Die Secante CF des Bogens AD (Fig. 63.) ist gleich der Summe von der Tangente AF desselben Bogens und der Tangente AG des halben Complements DE oder BE zum Quadranten AB.

Es sey AB der Quadrant eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist, und $DE = EB$. Man mache den Winkel $ACG = BCE$, und ziehe CG an die berührende AG, der Verlängerung von AF in G. Nun ist $GCD + DCE = R$, und $AGC + GCA = R$. Da $DCE = GCA$, so ist $GCD = AGC$ oder FGC, also sind in dem Dreyeck CFG die Seiten CF, GF gleich groß.

184. Die Summe der Secante und Tangente eines Bogens ist gleich der Tangente von der Summe des Bogens und des halben Complements.

Es sey AB (Fig. 64.) der Quadrant eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist. In diesem nehme man irgend einen Bogen AD, und halbire dessen Complement DB in E. Die Tangente des Bogens AD ist AF, des Bo-

gens AD ist AF, des Bogens AE ist AG. Da Winkel AGC = GCB = DCE, so ist CF = FG, also AG = AF + FC.

XI. Notizen zur Geschichte der Goniometrie.

Die Goniometrie ist ein so wichtiges System von Sätzen aus der analytischen Geometrie, daß es der Mühe werth ist, auch die ältern Formen derselben und der Methoden aufzusuchen. Die ganz geometrische Entwickelung in den frühern Schriften ist zwar oft etwas umständlich und mühsam, man lernt aber doch dabey den wirklichen Gang der Erfindung kennen, und ersieht den unmittelbaren Zusammenhang der Sätze mit den Elementen der Geometrie. Nach der in diesem Artikel gebrauchten Methode ist aus dem einzigen zum Grunde gelegten geometrischen Satze alles folgende bloß durch Rechnung hergeleitet.

In dem Artikel, Cyklotechnie, ist schon dasjenige, was zur Geschichte der Berechnung der goniometrischen Linien gehört, angeführt worden. Hier wird nur ein gleichsam chronologisches Verzeichniß der wichtigsten goniometrischen Sätze gegeben werden können. Die Methoden selbst zu studiren, bleibt den Liebhabern der mathematischen Archäologie überlassen.

Daß Archimedes schon die Summe der Chorden in dem ganzen Kreise oder einem Abschnitte desselben, wenn die Bogen gleichförmig zunehmen, bestimmt hat, ist in (65, 70.) bemerkt.

Ptolemäus hat in dem 1. B. seines Almagests zwey Sätze über die Zusammensetzung der Bogen mittelst ihrer Chorden auf eine Art erwiesen, die leichter ist als die in neuern Lehrbüchern, z. B. dem Segnerischen und Kästnerischen, angewandte. Es ist im wesentlichen dieselbe mit der in diesem Artikel (26.) gebrauchten. Für die Chorde der Summe zweyer Bogen hat Ptolemäus keine besondre Formel, sondern läßt sie aus der Chorde des Complements der Summe berechnen. Auch für die Chorde des Com-

plements eines Unterschiedes zweyer Bogen hat er keine besondere Formel gesucht. Zur Halbirung der Bogen gebraucht er den Satz, daß die Chorde eines Bogens A die mittlere proportionale ist zwischen dem Durchmesser und dem halben Unterschiede des Durchmessers von der Chorde des Complements des Bogens 2A zum Halbkreise *). Ptolemäus mag die Sätze von andern genommen haben, da ein älterer Astronom, Menelaus, sechs Bücher von den Chorden im Kreise geschrieben hat.

Regiomontanus giebt in seinem Werke über die Dreyecke (de triangulis omnimodis libri quinque) vielerley Auflösungen (auch einige algebraische in bestimmten Zahlen) die ebenen und sphärischen Dreyecke betreffend. Doch kommt von goniometrischen Sätzen nur folgendes darin vor: aus dem Sinus eines Bogens und dem Verhältnisse der Sinus der Bogen, wovon jener Bogen die Summe oder der Unterschied ist, die Bogen, das ist ihre Verhältnisse zu jenem zu finden. Er zeigt, wie die Rechnung zufolge der geometrischen Construction angestellt wird. (Vergl. 29.)

Rhäticus zeigt in der Fabrica canonis doctrinae triangulorum durch eine geometrische Construction, wie die Sinus einer arithmetischen Reihe von Winkeln nach einander gefunden werden, wenn sie von den ersten beiden Winkeln bekannt sind, auf zweyerley Art. Das erstere Verfahren giebt die Formeln:

$$\sin n\varphi = 2\cos\varphi . \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi;$$
$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2\sin\varphi . \sin(n-1)\varphi.$$

Er nimmt den ersten Winkel gleich dem Unterschiede in der Reihe der Winkel. Nach derselben Art können aber

*) Dieser Satz wird aus der in (25) angeführten Eigenschaft des Kreises leicht bewiesen. Man nehme in (Fig. 59) die Bogen AB CD gleich groß, so ist $AB^2 + AD \times BC = BD^2$, und $2AB^2 + AD \times BC = AD^2$, also $AB^2 = AD \times \frac{1}{2}(AD - BC)$, wo BC die Chorde des Complements von 2AB zum halben Umfange ist.

auch die Sinus und Cosinus gefunden werden, wenn der erste Winkel irgend einer ist.

Das zweyte Verfahren giebt die Formeln:

$$\sin(A + n\varphi) = \sin(A + (n-2)\varphi) + 2\sin\varphi \,.\, \cos(A + (n-1)\varphi);$$

$$\cos(A + n\varphi) = \cos(A + (n-2)\varphi) - 2\sin\varphi \,.\, \sin(A + (n-1)\varphi).$$

Die zweyte dieser Formeln ist von der für $\cos n\varphi$ nicht weiter verschieden, als daß der erste Winkel der Reihe nicht mit dem Unterschiede gleich groß genommen wird. Auf demselben Wege findet sich auch die Formel,

$$\cos(A + n\varphi) = 2\cos\varphi \,.\, \cos(A + (n-1)\varphi) - \cos(A + (n-2)\varphi).$$

Die in (180, 181.) gegebenen Beweise sind im wesentlichen mit denen von Rhäticus geführten einerley; aber kürzer gefaßt und deutlicher.

Pitiscus führt in dem 5. Buche seiner Trigonometrie (1600.) einige Sätze an, die zur Abkürzung bey der Berechnung und bey dem Gebrauch des trigonometrischen Canons dienen.

I. $\sin(60° - A) - \sin(60° + A) = \sin A.$

II. $\tang A - \tang B = 2\tang(A - B),$
wenn $A + B = 90°$ sind.

III. $\sec A = \tang A + \tang(45° - \frac{1}{2}A).$

IV. $\sec A + \tang A = \tang(\frac{1}{2}A + 45°).$

Bey dem ersten und dritten Satze citirt er Fink und Landsberg, bey dem zweyten Adrianus Romanus. Die geometrischen Beweise sind in (183. 184.) mitgetheilt.

Die Sätze (27.) wurden vor der Einführung der Logarithmen gebraucht, um in trigonometrischen Rechnungen Producte in Summen oder Unterschiede zu verwandeln. Man nannte dieses, prostaphäretisch rechnen, welches sowohl das Addiren als Subtrahiren begriff. Dieses war zu jener Zeit ein wichtiges Erleichterungsmittel.

Vieta fand die Formeln für die Chorden der Vielfachen eines Bogens und die Chorden der Comple-

mente zum Halbkreise durch die Chorde des einfachen oder diejenige des Complements. (Theoremata ad angulares sectiones in der Ausgabe seiner Schriften durch van Schooten, pag. 295. ff.). Er nennt die Chorde perpendiculum, die Chorde des Complements basis. Beide stehen auf einander senkrecht. Die Basis eines vielfachen Bogens anzugeben setzt er den Halbmesser $= 1$, die Basis des einfachen $= N$ (das bedeutet Numerus), und eine Reihe von stetigen proportionalen, $1 : N : Q : C : QQ : QC : CC : QQC : QCC : CCC$; etc. wo $Q = N^2$; $C = N^3$ ist. Dann setzt er aus diesen Gliedern die Basis des vielfachen Bogens zusammen. Z. B. Basis anguli noncupli ist (vergl. 130. V.)

$$1CCC - 9QQC + 27QC - 30C + 9N.$$

Ferner setzt er die Chorde des einfachen Bogens $= 1$, des zweyfachen $= N$, und formirt die geometrische Reihe, $1 : N : Q : C : QQ : QC : CC$: etc. Aus den Gliedern dieser Reihe setzt er die Chorden (perpendicula) der vielfachen Bogen zusammen, z. B. die Chorde des zehnfachen Bogens,

$$1CCC - 8QQC + 21QC - 20C + 5N,$$

übereinstimmig mit VI. in (130.).

Noch setzt Vieta den Durchmesser $= 2$, die Chorde des einfachen Bogens $= N$, und setzt aus den Gliedern der geometrischen Reihe, $1 : N : Q : C$; etc. theils die Basis, theils die Perpendikel oder Chorden der vielfachen Bogen zusammen, jene bey geraden Vielfachen, diese bey ungeraden. Diese Formeln beruhen auf den beiden in (58, 61.), nämlich

$$\sin n\varphi = 2 \sin\varphi . \cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi;$$
$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2 \sin\varphi . \sin(n-1)\varphi,$$

woraus erhalten wird,

$$ch.n\omega = ch.\omega.chc.(n-1)\omega + ch.(n-2)\omega;$$
$$chc.n\omega = chc.(n-2)\omega - ch.\omega.ch.(n-1)\omega.$$

Setzt man in der Formel für die Chorde successiv die ungeraden Zahlen, und in der Formel für die Chorde des Complements die geraden Zahlen, so ergeben sich die

Formeln bey Vieta. Montucla führt in seiner Geschichte der Mathematik, Th. I. S. 608. 2te Ausg. diese Formeln an, als wenn sie alle für die Chorde des vielfachen Winkels gehörten, und macht wegen der, zum Theil unrichtig gedruckten Vorzeichen, eine nicht zutreffende Bemerkung.

Die Formel für $\sin n\varphi$ führt auf die Werthe in (86 und 89.), wenn für n alle ganze Zahlen gesetzt werden. Die Formel für $\cos n\varphi$ giebt, wenn n gerade genommen wird, Werthe, die in der allgemeinen Formel für $\cos n\varphi$ in (105.) enthalten sind.

Vieta fand auch die Formeln (97.) für die Zusammensetzung des Sinus und Cosinus eines vielfachen Winkels aus den Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen. Wie sehr er diese schätzte, zeigt die Überschrift des dritten Theorems in dem Responso ad Adriani Romani problema, Opp. p. 315. Sie lautet so: Cujus inventi laetitia adfectus, o Diva Melusinis, tibi oves centum pro una Pythagoraea immolavi. Er giebt den Sätzen zweyerley Formen, die eine wie die in (97.), nur in Worten mit den ihm eigenen Kunstausdrücken, die andere durch Verhältnisse der Sinus und Cosinus des vielfachen Winkels.

Vieta hat zwar eingesehen, daß die positiven Wurzeln der Gleichung für die Chorde des einfachen Bogens, wenn die Chorde des vielfachen gegeben wird, Chorden von Winkeln sind, die durch Theilung des mittelbar durch die Chorde gegebenen Winkels entstehen, allein die negativen Wurzeln, die auf gleiche Art sich finden, hat er aus der Acht gelassen. So giebt er (Opp. p. 320.) den Gleichungen für die Chorde des dritten, fünften und siebenten Theils eines durch die Chorde gegebenen Winkels nur zwey drey, vier Wurzeln. S. Algebra, Th. I. S. 46.

Jacob Bernoulli war von seinem Bruder, bey Veranlassung einer Untersuchung über quadrirbare Räume in der Cykloide, aufgefordert worden, eine Formel für den Sinus eines Bogens zu finden, der zu einem andern, durch seinen Sinus gegebenen, Bogen das Ver-

hältniß n : 1 hat, wobey n irgend eine Gattung von Zahl bedeutet. Dieser fand (Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. II nr. 97.) auf eine künstliche Art, allein nur für ganze Vielfache, wenn x die Chorde des einfachen Bogens, a die Chorde des nfachen, b die Chorde des Complements des vielfachen ist, für den Durchmesser = 2, daß

$$aa = nnxx - \frac{nn.nn-1.}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{nn.nn-1.nn-4.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6$$

$$- \frac{nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 + \text{etc.}$$

$$bb = 4 - nnx^2 + \frac{nn.nn-1.}{3 \cdot 4} x^4 - \frac{nn.nn-1.nn-4.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6$$

$$+ \frac{nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 - \text{etc.}$$

und hieraus, durch die Methode der unbestimmten,

$$a = nx - \frac{n.nn-1.}{4 \cdot 6} x^3 + \frac{n.nn-1.nn-9.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5$$

$$- \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} x^7 + \text{etc.}$$

$$b = 2 - \frac{nn}{4} x^2 + \frac{nn.nn-4}{4.6.8} x^4 - \frac{nn.nn-4.nn-16.}{4.6.8.10.12} x^6$$

$$+ \frac{nn.nn-4.nn-16.nn-36.}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} x^8 - \text{etc.}$$

Bernoulli verwandelt diese beiden Formeln in folgende

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6}$$

$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \ldots$$

$$\ldots \left\{ \begin{matrix} \pm nx\,a \mp \\ \pm nnxx \mp 2 \pm b \end{matrix} \right\} = 0.$$

Die obere Zeile zwischen den Klammern gilt für ein ungerades n, die untere für ein gerades.

Die beiden Formeln sind einerley mit denen in (105.) gefundenen, wenn die Sinus und Cosinus in Chorden verwandelt werden.

Joh. Bernoulli trägt die Formel (130. I.) für die Relation zwischen den Chorden des einfachen und vielfachen Winkels, und die beiden in (97.), worin der Sinus und Cosinus des vielfachen durch Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen ausgedruckt werden, als von ihm erfundene vor, in den Act. Er. 1701. Opp. T. I. nr. 69. Die beiden letztern Formeln hatte aber ja schon Vieta gefunden, nur daß dieser den Exponenten des vielfachen bloß für eine ganze Zahl nahm, dagegen Bernoulli sagt, daß sie auch für gebrochne, ja irrationale Vielfache des Winkels gelten, da die erstere nur für ganze Vielfache anwendbar sey. Sonst hatte ja auch Vieta mehrerley Formeln für die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gefunden. In einem Aufsatze, Act. Er. 1722. Opp. T. II. nr. 127. behauptet Bernoulli, daß vor ihm niemand eine allgemeine Formel für die unbestimmte Theilung oder Vervielfachung der Winkel nach jedem Exponenten des Verhältnisses gegeben hätte. Den Beweis habe er aus besondern Ursachen zurückgehalten. Der Beweis ist in seinen Werken nicht zu finden. In einem nachgelassenen Aufsatze, Opp. T. IV. pag. 144. sagt er, daß er die beiden gedachten Formeln ohne Differentialrechnung, aus der Beschaffenheit der Bogen (ex ipsis visceribus et intima natura arcuum) hergeleitet habe.

In den Act. Erud. 1712. Opp. T. I. n. 89. gab Joh. Bernoulli die allgemeine Formel für tang $n\varphi$ durch tang φ, hergeleitet aus der Verwandlung der Kreisbogen in unmögliche Logarithmen. Die Bemerkung dieser für manche Fälle zur Abkürzung der Beweise dienenden Verwandtschaft beiderley Größen ist man Joh. Bernoulli schuldig. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. I. nr. 70. Aus der Formel für tang $n\varphi$ läßt sich

die Allgemeinheit der Formeln für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ herleiten.

Bis noch in das 18te Jahrhundert hinein hatte man die goniometrischen Lehrsätze nur in Beziehung auf geometrische Constructionen entweder in Worten vorgetragen, oder symbolische Bezeichnungen nur zur Abkürzung des Ausdrucks gebraucht. Friedrich Mayer, Akademiker in Petersburg, zeigte zuerst, wie die Buchstabenrechnung auf jene Sätze angewandt werden könnte, um sie dadurch als analytische Formeln zur Auflösung trigonometrischer Aufgaben zu gebrauchen. (Comm. vet. Ac. Petrop. T. II. a. a. 1727.). Er fand die Coefficienten in den Formeln für die Chorde des vielfachen Winkels durch die Chorde des einfachen mittelst der Summirung arithmetischer Reihen höherer Ordnungen, aus den berechneten Gliedern in den erstern Stellen, und schloß daraus auf die Allgemeinheit, sogar für gebrochne Exponenten. Comm. Petr. T. III.

Euler hat in der Folge die Form dieser analytisch-goniometrischen Rechnung sehr verbessert und geschmeidig gemacht. Zur vollkommenen Anschaulichkeit dienen die von ihm eingeführten Bezeichnungen, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\tang\varphi$, $\sec\varphi$ u. dergl. wodurch man mit dem Symbol zugleich das Bezeichnete unterscheidend erkennt. Daß man die Verhältnisse der Winkel dabey zugleich angeben kann, wie in $\sin n\varphi$, $\cos m\varphi$, u. dergl. erleichtert die Übersicht der Rechnung gar sehr. Albert Girard im Anfang des XVII. Jahrhunderts hat schon zu Formeln der sphärischen Trigonometrie dergleichen Bezeichnungen gebraucht, als $\tan H$, $\sec A$, $\tan a$, wo H die Hypotenuse eines sphärischen Dreyecks, A einen Winkel, a dessen Ergänzung zum Rechten bedeuten (Kästners Gesch. d. Math. III. S. 109.). Allein Girards Schrift ist entweder zu wenig bekannt geworden, oder man hat seine Bezeichnungen bloß als Abkürzungen angesehen, dergleichen jeder Geometer nach seiner Art macht, was sie auch in der That nur sind. Euler aber betrachtete die goniometrischen Größen als Functionen der Winkel, die wie

andere analytische Functionen durch Rechnung mit einander verbunden werden können, die eine Bezeichnung erfordern, wodurch ihre Relation zu den Winkeln deutlich ins Auge fällt, so daß man auch die neuen Relationen zwischen den Winkeln und ihren zugehörigen Größen, die aus den angenommenen hervorgehen, daraus auf eine gleichmäßige Art herleiten könne. Als Functionen der Winkel müssen die goniometrischen Größen durch die Winkel bestimmte Werthe erhalten Das geschieht dadurch, daß der Halbmesser zur Einheit genommen wird, oder daß man nur auf die Verhältnisse zum Halbmesser sieht, nicht auf die absolute Quantität der linearischen Größen Auch dieses ist man Eulern schuldig. Nach der alten Ansicht der goniometrischen Functionen waren es bloße Linien, die man unter sich und mit dem Halbmesser zu Gleichungen verknüpfte, auch mit andern Linien in Verbindung brachte, und hier den Halbmesser zur Einheit nehmen, war nur Ersparung im Schreiben welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerstörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, sind sie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, die mit Beybehaltung ihrer ursprünglichen Form sehr mannichfaltige Verwandlungen zulassen, und durch sich selbst darbieten. Euler selbst, so anspruchlos er bey allen seinen Entdeckungen und Verbesserungen in der Mathematik ist, scheint doch auf die von ihm in die Analysis eingeführte Rechnung mit den Functionen der Winkel einen besondern Werth zu legen. In der Abhandlung, subsidium calculi sinuum, Comm Petr. novi. T. V. sagt er, so wie Joh. Bernoulli die Logarithmen durch die Exponentialrechnung zu analytischen Größen gemacht habe, so habe auch er die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst als Rechnungsgrößen behandelt, dergestalt daß man mit ihnen wie mit andern Größen ohne Schwierigkeit verfahren könne. Wenn gleich diese Sache nicht von großer Wichtigkeit scheinen möchte, da sie größtentheils auf den Bezeichnungen beruhe, deren er sich für diese Größen bediene, und die Regeln sie sowohl durch Differentiation als Integration zu

entwickeln, längst gefunden seyn, so habe doch eben diese Bezeichnungsart hernach der ganzen Analysis sehr beträchtliche Hülfsmittel verschafft, und ein fast neues Feld eröffnet, welches mit großem Vortheil von den Geometern bearbeitet worden sey. Da die Analysis insbesondere durch ihre Bezeichnungsart so viel Großes leiste, so begreife man, wie eine geschickte Einführung der Sinus in den Algorithmus so nützlich geworden sey. Er führt hierauf noch an, daß durch dieses Hülfsmittel schwere Untersuchungen sehr erleichtert werden, besonders bey Aufgaben aus der Mechanik, und vorzüglich in der theoretischen Astronomie, wo man ohne die Hülfe der Rechnung mit den Winkel-Functionen gar nicht fertig werden könne.

Eulers Behandlung dieses Algorithmus lernt man am besten aus seiner Introductio in Analysin infin. und seinen Institt. Calculi differentialis kennen. Der erste Theil des erstern Werkes enthält größtentheils Cyklometrie und Goniometrie mit fruchtbaren neuen Anwendungen auf die Analysis, als Zerlegung einer Function in Factoren, Summirungen von Reihen, Entwickelung gebrochner Functionen. In dem zweyten Theile der Differentialrechnung sind ebenfalls mancherley Verknüpfungen der höhern Analysis, und insbesondere der Lehre von den Reihen mit den circularen Functionen anzutreffen. Die Differenzenrechnung wird auf die Entwickelung dieser Functionen angewandt. Die Tangente und Cotangente eines Winkels werden durch Reihen mittelst der Bernoullischen Zahlen ausgedruckt.

In den Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften sind noch manche hierher gehörige Abhandlungen von Euler anzutreffen. Zur Berechnung des Kreisumfanges in den ältern Comment. T. IX. und in den Novis Actis, T. XI. Zur Berechnung der Sinus und Tangenten, in den ältern Comment. T. XI. den neuern T. V. Über Reihen von Sinus und Cosinus vielfacher Winkel, in den neuern Comment. T. XVIII. in den Novis Actis, T. VII. XI. Über die Werthe von Sinus und Cosinus vielfacher Winkel, in den N. A. T. V. IX.

über Reihen von Winkeln, deren Tangenten nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, in den N. Comm. T. IX. Noch zur Auflösung der Gleichung, $m : n = \sin m^2 : \sin n^2$, in den N. C. T. XVI.

Die Untersuchung in der vorletzten Abhandlung von einer Fortschreitung der Tangenten hat Pfaff weiter verfolgt und sehr allgemein behandelt in seinen Disquisitionibus analyticis, Vol. I. p. 1 — 132.

In der Abhandlung, dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, N. A. T. IX. zeigt Euler, daß der vollständige Werth von $2 \cos n\varphi$, wenn $2 \cos \varphi = x$ gesetzt ist

$$2 \cos n\varphi =$$

$$x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2} x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$+ x^{-n} + \frac{n}{1} x^{-n-2} + \frac{n.n+3.}{1.2} x^{-n-4} + \frac{n.n+4.n+5.}{1.2.3} x^{-n-6} + \text{etc.}$$

wo die erstere Reihe die für ganze n in (93.) gefundene ist, außer daß $2x$ statt x gesetzt worden. Die Doppelreihe gilt für jede Beschaffenheit der Zahl n. Sie darf auch für ganze n in beiden Theilen ohne Ende fortgesetzt werden, indem die Glieder von x^{-1} oder x^{-2}, etc. theils Null sind, theils gegen die Glieder des zweyten Theils der Doppelreihe sich heben.

Gleichfalls ist, wenn $y = 2 \sin \varphi$, und wie vorher, $x = 2 \cos \varphi$, die vollständige allgemeine Reihe für $2 \sin . n\varphi$ diese,

$$2 \sin . n\varphi =$$

$$y \left[x^{n-1} - \frac{n-2}{1} x^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1.2} x^{n-5} - \text{etc.} \right]$$

$$- y \left[x^{-n-1} + \frac{n+2}{1} x^{-n-3} + \frac{n+3.n+4.}{1.2} x^{-n-5} + \text{etc.} \right]$$

Euler hat die Beweise dieser Formeln aus einer sehr entfernten Quelle geschöpft, aus der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Fuß hat einen unmittelbaren Weg dazu gezeigt, in einer Abhandlung desselben Jahrgangs der Actorum novorum.

In den Novis Actis Acad. Petrop. T. VII ist eine Abhandlung von Euler über die Summen folgender Reihen enthalten:

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc. und}$$

$$B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

die summirbar sind, wenn die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

es ist. Es seyn A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten zu der Potenz $(1 + z)^n$ von 1 an, so ist die Summe der erstern Reihe $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \cos\frac{1}{2}n\varphi$, und die Summe der zweyten $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \sin\frac{1}{2}n\varphi$. Die Formeln sind für jede Beschaffenheit von n gültig.

Eschenbach gab im J. 1785. zu Leipzig eine kleine Gelegenheitsschrift heraus, worin er die Reihe für tang $n\varphi$ durch tang φ bis zum 13ten Gliede entwickelte. Einen Auszug aus dieser mit großem Fleiße abgefaßten Schrift hat Hindenburg in dem Leipziger Mag. für Mathematik, 2tem St 1786. geliefert, und daselbst noch eine andere (bereits oben Seite 563. erwähnte) Methode als die beiden von Eschenbach gebrauchten sind, gezeigt. Nämlich die Tangente von $n\varphi$ wird durch $n\varphi$ nach der Formel (Cyklometrie, 17.) ausgedruckt, und in dieser der Bogen φ wieder durch seine Tangente (a. a. O. 10.). Hier wird es sogar möglich, ein allgemeines Glied der Reihe anzugeben. Eine kleine Verbesserung in der Form des Gliedes ist in dem Archiv der Mathematik, Heft VII. S. 343. nachgeholt.

Noch eine vierte Methode wäre folgende. In der allgemeinen Gleichung für $\sin n\varphi$ durch $\sin\varphi$ (105.) entwickele man die Potenzen von $\sin\varphi$ in Reihen durch tang φ, vermittelst der Formel, $\sin\varphi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 + \text{tg}\,\varphi^2)}}$,

(14.). Ferner entwickele man den Werth von tang $n\varphi$ durch $\sin n\varphi$, vermittelst der Formel,

$$\text{tang}\, n\varphi = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{(1 - \sin n\varphi^2)}}.$$

Aus den beiden Reihen, der für $\sin n\varphi$ durch $\text{tg}\,\varphi$, und der für tang $n\varphi$ durch $\sin n\varphi$ wird nach dem in combinatorischer Analysis (9.) gewiesenen Verfahren eine Reihe für $\text{tg}\, n\varphi$ durch tang φ hergeleitet.

Pfaff zeigt gelegentlich in einer Abhandlung über höhere Differentiale (Hindenburgische Sammlung ꝛc. II. S. 173.), wie aus der Formel für $\sin n\varphi$ (84.), und der für $\cos n\varphi$ (93.) vier andere Formeln ganz leicht hergeleitet werden können, durch Vertauschung von φ mit $\frac{1}{2}\pi - \zeta$. Dadurch erhält man aus der für $\cos n\varphi$ die Formeln in (105.), von welchen die zweyte mit der in (86.) dieselbe ist. Aus der für $\sin n\varphi$ entsteht solchergestalt die in (89.), und noch folgende,

$$\cos n\zeta = \cos\zeta\left(1 - \frac{nn-1}{1.2}\sin\zeta^2 + \frac{nn-1.nn-9.}{1.2.3.4}, \sin\zeta^2 - \text{etc.}\right)$$

Der Verfasser beschränkt sich auf ganze Zahlwerthe von n. Da die Formeln (105.) allgemein für jede Beschaffenheit von n gelten, so sind auch jene erstern (84. und 93.) allgemein. Das schließt aber nicht die von Euler und Fuß gefundene Ergänzung aus. Die Form der Reihen in (105.) ist von der Form der Reihen (84. 93.) verschieden. Jene geben den Quotienten $\sin n\varphi : \sin\varphi$, und $\cos n\varphi : \sin\varphi$ für ein verschwindendes φ vollständig durch das erste Glied an; diese aber jenen Quotienten, und den, $\cos n\varphi : \cos\varphi$, durch eine unendliche Reihe, die divergirend seyn, und dadurch einer ebenfalls divergirenden Ergänzung bedürfen mag.

Goniometrisches Instrument, Goniometer, ist überhaupt ein Werkzeug Winkel zu messen, insbesondere die Neigung zweyer Ebenen gegen einander zu erfahren, als zu mineralogischen Untersuchungen die Winkel der Flächen an Krystallen.

Goldne Regel (regula aurea) heißt bey den Rechenmeistern die Vorschrift, wie aus drey Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte gefunden wird, s. Proportion.

Grad ist für Kreisbogen und Winkel der 360ste Theil des Kreisumfanges an jenen, von vier Rechten an diesen. Die Eintheilung des Kreisumfanges in 360 Theile ist uralt, vermuthlich daher entstanden, daß man die Sonnenbahn in 360 Theile eintheilte, so wie man das Jahr in den ältesten Zeiten zu 360 Tagen rechnete. Ptolemäus nennt den 360sten Theil des Kreises einen Theil (μοιρα); der ältere Plinius gebraucht auch allenthalben das Wort partes, wo wir gradus setzen würden. Die neulateinische Bedeutung des Wortes gradus (eigentlich Schritt und Stuffe) ist aus der arabischen Sprache entstanden. In dieser heißt Dergeh eine Stuffe von einer Treppe oder Leiter, und dann auch ein astronomischer Grad. Als in dem mittlern Zeitalter die spanischen Mauren ihre Kenntnisse dem östlichern Europa mittheilten, ward das lateinische Wort gradus wegen der Ähnlichkeit mit dem arabischen gebraucht, um astronomische Grade zu bezeichnen. Das französische degré und das englische degree, sind das arabische Wort noch deutlicher. Die Spanier haben das Wort grado in ihrer Sprache eingeführt, vermuthlich als ein arabisch-lateinisches Kunstwort, noch früher als andere Völker. S. Kästners geometrische Abhandlungen. I. Samml. S. 458. Die hier angeführte Etymologie ist demselben von Tychsen zu Göttingen mitgetheilt.

Grad bey Potenzen ist ihr Exponent.

Grad bey algebraischen Gleichungen ist der Exponent der höchsten Potenz, ihrer unbekannten Größe.

La Grange's Lehrsatz ist eine Formel, aus irgend einer Function einer veränderlichen Größe x jede Function von x durch jene Function, vermittelst einer Reihe, auszudrucken, das ist, aus der Function,

$$y = x - z\varphi x,$$

irgend eine Function ψx durch Functionen von y darzustellen. Die Symbole, φx, ψx, bedeuten irgend welche Functionen von x, oder Zusammensetzungen aus x und gegebenen Größen. Die Größe z ist von x und y ganz unabhängig, eine beliebig zu bestimmende Größe, die hier nur durch ein Zeichen für veränderliche Größen angedeutet wird, um sie von den gegebenen Größen in der Function φx zu unterscheiden. Sie ist auch die Progressionalgröße, nach welcher die Reihe für ψx geordnet wird, weswegen sie auch durch ein Symbol für veränderliche Größen bezeichnet werden mag.

Die Formel ist die allgemeinste Umkehrungsformel, oder vielmehr Umwandlungsformel. Zugleich ist sie die allgemeinste Differenzenformel, da der erste Theil von ψx die Function ψy ist, und alle folgende Theile die Function φy, und davon abgeleitete Functionen enthalten.

1. Zuerst wird man eine Formel für ψx durch ψy, und eine aus Functionen von x und y zusammengesetzte Reihe, zu suchen haben, um aus dieser die Functionen von x wegzuschaffen, also die Auflösung auf einen Eliminationsprozeß zu bringen.

Es sey

$$\psi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc},$$
$$\psi y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc}.$$

Beide Reihen bedeuten einerley Functionen der veränderlichen Größe, und sind nur in der Quantität der veränderlichen Größe verschieden, wie z. B. die Reihen für $\sin \varphi$ und $\sin \omega$, oder für $\log z$ und $\log u$.

Jede einförmige Function von x kann durch eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende Reihe ausgedruckt werden, weil die Werthe der Functionen als Glieder einer arithmetischen Reihe von irgend einem Grade, auch einem unendlich hohen, betrachtet werden können, wozu die Stellenzahlen die Werthe von x sind. Die Reihe kann wenig convergent seyn, oder divergiren. Von der praktischen Anwendung ist aber hier nicht die Frage.

Dazu muß sie eine Form erhalten, daß die Coefficienten sehr abnehmen, und die Werthe von x kleiner als die dazu gehörige Einheit seyn. S. Differenzenrechnung, 16 — 18.

2. Man nehme das Differential, ∂y, unveränderlich, so ist

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = 2C + 6Dy + 12Ey^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = 6D + 24Ey + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = 24E + \text{etc.}$$

Setzt man in den Werthen dieser Differentialquotienten, $y = 0$, so ist

$$B = \frac{\partial \psi y}{\partial y}; \qquad C = \frac{\partial^2 \psi y}{1.2\,\partial y^2}$$

$$D = \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3}; \qquad E = \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4};$$

u. s. f.

Bey dieser Annahme ist $A = \psi y$. Setzt man nun $x = y + z\varphi x$, so ist, bey derselben Annahme, $x = z\varphi x$. Folglich ist

$$\psi x = \psi y + z\varphi x . \frac{\partial \psi y}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 \psi y}{1.2.\partial y^2}$$

$$+ z^3(\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3} + z^4(\varphi x)^4 . \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4}$$

$$+ \text{etc.}$$

In der Encyclopédie méthodique (art. Series) wird dieser Satz d'Alembert zugeschrieben.

3. Nun sind aus dieser Formel die Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc. heraus zu schaffen. Diese haben eine ähnliche Form, wie die Functionen ψx, da die Beschaffenheit dieser Function ganz unbestimmt gelassen ist, so daß statt der Function ψy und deren Differentialen nun φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. nach der Reihe zu setzen sind. Zur Abkürzung setze man $\varphi y = u$, so ist

$$\varphi x = u + z\varphi x . \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 u}{2\partial y^2}$$

$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 u}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^2 = u^2 + z\varphi x . \frac{\partial . u^2}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 . u^2}{2\partial y^2}$$

$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 . u^2}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^3 = u^3 + z\varphi x . \frac{\partial . u^3}{\partial y} + z^2 (\varphi x)^2 . \frac{\partial^2 . u^3}{2\partial y^2}$$

$$+ z^3 (\varphi x)^3 . \frac{\partial^3 . u^3}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

u. s. f.

4. Die Factoren zu den Potenzen von z in der Reihe für ψx, nach Herausschaffung von x, seyn P^α, P^β, P^γ, P^δ, u. s. f. wo α, β, γ, δ, etc. nicht Exponenten von Potenzen bedeuten, sondern die Stellenzahlen von verschiedenen Functionen der Größe y, übereinstimmig mit den Exponenten der Potenzen von z, so daß

$$\psi x = \psi y + P^\alpha z + P^\beta z^2 + P^\gamma z^3 + P^\delta z^4 + \text{etc.}$$

Auf dieselbe Art bezeichne man auch die Factoren der Potenzen von z in den entwickelten Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc.

nämlich

$$\varphi x = \varphi y + Q\alpha z + Q\beta z^2 + Q\gamma z^3 + Q\delta z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^2 = (\varphi y)^2 + R\alpha z + R\beta y^2 + R\gamma z^3 + R\delta z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^3 = (\varphi y)^3 + S\alpha z + S\beta z^2 + S\gamma z^3 + S\delta z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^4 = (\varphi y)^4 + T\alpha z + T\beta z^2 + T\gamma z^3 + T\delta z^4 + \text{etc.}$$

u. s. w.

5. Man setze nun in der obigen Reihe (2.), die den Werth von ψx giebt, für φx und die Potenzen dieser Function ihre Werthe aus (4.), so ist

$$\begin{aligned}\psi x = {} & \psi y \\ & + [\varphi y + Q\alpha z + Q\beta z^2 + Q\gamma z^3 + Q\delta z^4 \\ & \qquad + \text{etc.}]\, z \frac{\partial \psi y}{\partial y} \\ & + [(\varphi y)^2 + R\alpha z + R\beta z^2 + R\gamma z^3 + \text{etc.}] \times \\ & \qquad z^2 \frac{\partial^2 \psi y}{2 \partial y^2} \\ & + [(\varphi y)^3 + S\alpha z + S\beta z^2 + \text{etc.}]\, z^3 \frac{\partial^3 \psi y}{6 \partial y^3} \\ & + [(\varphi y)^4 + T\alpha z + \text{etc.}]\, z^4 \frac{\partial^4 \psi y}{24 \partial y^4} \\ & + [(\psi y)^5 + \text{etc.}]\, z^5 \frac{\partial^5 \psi y}{120 \partial y^5} \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

6. Die begleitenden Factoren von z in den Partialreihen vergleiche man mit den gleichstelligen der Reihe

$$\psi x = \psi y + P\alpha z + P\beta z^2 + P\gamma z^3 + P\delta z^4 + \text{etc.}$$

und setze zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = p; \qquad \frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = q \left(= \frac{\partial p}{\partial y}\right);$$
$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = r \left(= \frac{\partial q}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = s \left(= \frac{\partial r}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^5 \psi y}{\partial y^5} = t \left(= \frac{\partial s}{\partial y}\right); \text{ u. s. f.}$$

Dadurch ist, indem $\varphi y = u$ gesetzt worden,

$$P^\alpha = p.u$$
$$P^\beta = p.Q^\alpha + \tfrac{1}{2}q.u^2$$
$$P^\gamma = p.Q^\beta + \tfrac{1}{2}q.R^\alpha + \tfrac{1}{6}r.u^3$$
$$P^\delta = p.Q^\gamma + \tfrac{1}{2}q.R^\beta + \tfrac{1}{6}r.S^\alpha + \tfrac{1}{24}s.u^4$$
$$P^\varepsilon = p.Q^\delta + \tfrac{1}{2}q.R^\gamma + \tfrac{1}{6}r.S^\beta + \tfrac{1}{24}s.T^\alpha + \tfrac{1}{120}t.u^5$$

u. s. f.

7. Da für die Function ψx ist $P^\alpha = \varphi y. \frac{\partial \psi y}{\partial y}$ so ist die analoge Function in der Reihe für φx, nämlich $Q^\alpha = \varphi y. \frac{\partial \varphi y}{\partial y} = \frac{u \partial u}{\partial y} = \frac{\partial . u^2}{2 \partial y}$ (Differentialformeln, 1.). Dadurch ist

$$P^\beta = \frac{p \partial . u^2}{2 \partial y} + \frac{q u^2}{2} = \frac{p \partial . u^2 + u^2 \partial p}{2 \partial y}$$
$$= \frac{\partial . p u^2}{2 \partial y} \text{ (a. a. O. 3.)}$$

8. Setzt man in dieser Function statt ψy die Function φy, also $\frac{\partial u}{\partial y}$ statt p, so entsteht daraus die Function Q^β, nämlich $Q^\beta = \frac{\partial . u^2 \partial u}{2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 . u^3}{6 \partial y^2}$. Denn es ist $\partial . u^3 = 3 u^2 \partial u$; also $\partial^2 . u^3 = \partial . 3 u^2 \partial u$.

Vertauscht man ferner ψx mit $(\varphi x)^2$, also ψy mit $(\varphi y)^2$, so ist $R^\alpha = u. \frac{\partial u^2}{\partial y} = \frac{2 u^2 \partial u}{\partial y} = \frac{2 \partial . u^3}{3 \partial y}$.

Aus diesen Werthen von Q^β und R^α wird erhalten

$$P\gamma = \frac{p\partial^2 . u^3}{6\partial y^2} + \frac{2q\partial . u^3}{6\partial y} + \frac{ru^3}{6},$$

das ist $P\gamma = \frac{\partial^2 . pu^3}{6\partial y^2}$.

(Differentio-Differentialformeln, 22.).

9. Durch die Vertauschung von ψy mit φy, oder von p mit $\frac{\partial \varphi y}{\partial y} \left(= \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ist die mit $P\gamma$ analoge Function

$$Q\gamma = \frac{\partial^2 . u^3 \partial u}{6\partial y^3} = \frac{\partial^3 . u^4}{24\partial y^3}.$$

Ferner durch die Vertauschung von ψy mit $(\varphi y)^2$, also von p mit $\frac{\partial . u^2}{\partial y}$, oder $\frac{2u\partial u}{\partial y}$, ist

$$R\beta = \frac{2\partial . u^3 \partial u}{2\partial y^2} = \frac{\partial^2 . u^4}{4\partial y^2}.$$

Auch ist durch die Vertauschung von ψx mit $(\varphi x)^3$, und von ψy mit $(\varphi y)^3$, wodurch p mit $\frac{\partial . u^3}{\partial y}$ vertauscht wird,

$$S\alpha = \frac{u\partial . u^3}{\partial y} = \frac{3u^3\partial u}{\partial y} = \frac{3\partial . u^4}{4\partial y}.$$

Dadurch ist

$$P\delta = \frac{p\partial^3 . u^4}{24\partial y^3} + \frac{3q\partial^2 . u^4}{24\partial y^2}$$
$$+ \frac{3r\partial . u^4}{24\partial y} + \frac{su^4}{24},$$

oder $P\delta = \frac{\partial^3 . pu^4}{24\partial y^3}$.

(a. a. O. 23.)

Das Gesetz der Formation für die Functionen, welche die Potenzen von z in der Reihe für ψx begleiten, erhellt hieraus schon hinlänglich. Sie werden aus Functionen zusammengesetzt, die alle auf gleiche Art wie jene gebildet sind.

10. Der allgemeine Beweis beruht darauf, daß zu zeigen ist, wenn das Gesetz für alle Functionen, P^{α}, P^{β} . . . P^{ν} gilt, es auch für $P^{\nu+1}$ gelte. Jenes angenommen, gilt es auch für die Functionen Q^{ν}, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, $T^{\nu-3}$, etc. die zu Potenzen von z, niedrigern als $z^{\nu+1}$, gehören, wobey anstatt der Differential-Quotienten p. q, r, etc. die sich auf ψy beziehen, die Differential-Quotienten in Beziehung auf φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. oder u, u^2, u^3, etc. gesetzt werden.

Aus (4.) ist

$$P^{\nu+1} = pQ^{\nu} + \tfrac{1}{2}qR^{\nu-1} + \tfrac{1}{6}rS^{\nu-2}$$
$$+ \tfrac{1}{24}sT^{\nu-3} \ldots\ldots + \frac{u^{\nu+1}\partial^{\nu}p}{1.2\ldots(\nu+1)\partial y^{\nu}},$$

wo die Buchstaben an der Spitze von P, Q, R, etc. bloße Ordnungs- oder Stellenzahlen sind, in dem letzten Gliede aber u^{ν} und ∂y^{ν} Potenzen mit dem Exponenten ν sind, und $\partial^{\nu}p$ das νte Differential von p ist, so wie $q\partial y$ das erste, $r\partial y^2$ das zweyte, u. s. w. sind.

Zufolge der Voraussetzung ist

$$Q^{\nu} = \frac{\partial^{\nu-1}.u^{\nu}\partial u}{1.2..\nu\partial y^{\nu}} = \frac{1}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots\nu\partial y^{\nu}},$$

$$R^{\nu-1} = \frac{\partial^{\nu-2}.u^{\nu-1}\partial.u^2}{1.2\ldots(\nu-1)\partial y^{\nu-1}} = \frac{2}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-1}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-1)\partial y^{\nu-1}},$$

$$S^{\nu-2} = \frac{\partial^{\nu-3}.u^{\nu-2}\partial.u^3}{1.2\ldots(\nu-2)\partial y^{\nu-2}} = \frac{3}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-2}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-2)\partial y^{\nu-2}},$$

$$T^{\nu-3} = \frac{\partial^{\nu-4}.u^{\nu-3}\partial.u^4}{1.2\ldots(\nu-3)\partial y^{\nu-3}} = \frac{4}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-3}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-3)\partial y^{\nu-3}},$$

u. s. w.

Die zweyte Form dieser Functionen beruht darauf, daß $u^m \partial . u^n = n u^{m+n-1} \partial u = \frac{n}{m+n} \partial . u^{m+n}$ ist.

Daher ist $\partial . u^m \partial . u^n = \frac{n}{m+n} \partial \partial . u^{m+n}$

$= \frac{n}{m+n} \partial^2 . u^{m+n}$, und eben so $\partial^\mu . u^m \partial . u^n$

$= \frac{n}{m+n} \partial^{\mu+1} . u^{m+n}$.

Aus diesen Werthen von Q^ν, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, etc. folgt

$$P^{\nu+1} = \Big[\frac{p \partial^\nu . u^{\nu+1}}{\partial y^\nu} + \frac{\nu}{1} . \frac{q \partial^{\nu-1} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-1}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 .}{1 . 2} . \frac{r \partial^{\nu-2} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-2}} + \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 .}{1 . 2 . 3} . \frac{s \partial^{\nu-3} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-3}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3 .}{1 . 2 . 3 . 4} . \frac{t \partial^{\nu-4} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-4}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\nu \ldots 1}{1 \ldots \nu} . \frac{\partial^\nu p}{\partial y^\nu} . u^{\nu+1} \Big] \frac{1}{1 . 2 \ldots (\nu+1)} .$$

Es ist in dem Artikel, Differentio-Differentialrechnung (23.) gezeigt, daß

$$\partial^n . xy = x . \partial^n y + \frac{n}{1} \partial x . \partial^{n-1} y$$

$$+ \frac{n . n-1 .}{1 . 2} \partial^2 x . \partial^{n-2} y + \frac{n . n-1 . n-2 .}{1 . 2 . 3} \partial^3 x . \partial^{n-3} y + \ldots$$

$$+ \ldots + n \partial^{n-1} x . \partial y + \partial^n x . \partial y.$$

In unserer Formel steht nun $u^{\nu+1}$ für y; p für x; ferner $q \partial y$ oder ∂p für ∂x; ferner $r \partial y^2$ oder $\partial q \partial y$ für $\partial^2 x$; ferner $s \partial y^3$ $(= \partial r \partial y^2 = \partial^2 q \partial y = \partial^3 p)$ für $\partial^3 x$, u. s. f.

Also ist

$$P^{\nu+1} = \frac{\partial^{\nu} . p u^{\nu+1}}{1.2 \ldots (\nu+1) \partial y^{\nu}},$$

welches dieselbe Form mit der für die Functionen P^{α} bis P^{ν} angenommenen ist.

11. Es ist also, wenn $y = x - z\varphi x$ gesetzt, und $\frac{\partial \psi y}{\partial y}$ durch p zur Abkürzung und Deutlichkeit bezeichnet wird,

$$\psi x = \psi y + z . p\varphi y + z^2 . \frac{\partial . p(\varphi y)^2}{1.2\partial y}$$

$$+ z^3 . \frac{\partial^2 . p(\varphi y)^3}{1.2.3\partial y^2} + z^4 . \frac{\partial^3 . p(\varphi y)^4}{1.2.3.4\partial y^3}$$

$$+ z^5 . \frac{\partial^4 . p(\varphi y)^5}{1..5\partial y^4} + \text{etc.}$$

12. Man sieht, daß dieser Lehrsatz der erweiterte Taylorsche ist. Nach diesem wird eine Function von $y + z$, oder $\psi(y + z)$, durch die Reihe,

$$\psi y + pz + \tfrac{1}{2} qz^2 + \tfrac{1}{6} rz^3 + \tfrac{1}{24} sz^4 + \text{etc.}$$

ausgedruckt, wo $p = \frac{\partial \psi y}{\partial y}; q = \frac{\partial p}{\partial y}; r = \frac{\partial q}{\partial y}$, u. s. f. ist. (Differenzenrechnung, 17.). Die Größe z ist eine willkührliche von y unabhängige Veränderung dieser Functionalgröße. In dem von la Grange gegebenen Lehrsatze kommt statt z eine Function einer veränderlichen Größe x, mit einer willkührlichen Größe multiplicirt, so daß $y + z\varphi x = x$ ist, und die Function $\psi(y + z\varphi x)$ wird hier ebenfalls durch Functionen von y entwickelt. Die Differentialquotienten p, q, r, s, etc. erhalten nun gewisse Modificationen durch die Function φy.

13. La Grange ist durch eine Untersuchung von Lambert veranlaßt worden, Reihen für die Wurzeln algebraischer Gleichungen und ihrer Potenzen zu suchen,

welches ihn auf seine allgemeine Umkehrungs- oder Umwandlungsformel führte. Lambert erzählt in einer Abhandlung, Observations analytiques, Mem. de l'Ac. de Berlin, 1770, daß er in den Actis Helvet. 1757. einfache Reihen für die Wurzeln der Gleichungen vom zweyten und dritten Grade gegeben habe, insbesondere eine Reihe für die Wurzel der Gleichung $x^m + px = q$. Im J. 1764 erweiterte er seine Untersuchungen, und theilte sie Eulern und la Grange mit. Der letztere nahm sie in großer Allgemeinheit vor, in der Abhandlung, nouvelle méthode pour resoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mem. de l'Ac. de Berlin, 1768; übersetzt in Michelsens Sammlung, S. 190 — 270. Er findet aber durch eine mühsame Rechnung, nach einem künstlichen Verfahren eine Reihe für die mte Potenz einer der Wurzeln der Gleichung, $o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.}$ Dieser Gleichung giebt er die Form,

$$a - bx + bx\xi = o.$$

Eine der Wurzeln sey p, so ist

$$p^m = x^m + m\left(\xi x^m + \frac{\partial . \xi^2 x^{m+1}}{2\partial x} + \frac{\partial^2 . \xi^3 x^{m+2}}{2 . 3\,\partial x^2} + \text{etc.}\right)$$

wo nach der Differentiation für x zu setzen ist $\frac{a}{b}$.

Hieraus schließt la Grange, doch ohne einen Beweis davon zu geben, erstlich, daß man für die Function $x\xi$, welche zuerst die endliche oder unendliche Reihe $\frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}}{b}$ war, jede andere Function von x setzen könne; darauf ferner, daß man anstatt einer Potenz der Wurzel p zu der Gleichung,

$$\alpha - x + \varphi x = o,$$

jede Function derselben, ψp, setzen könne. Er druckt

seinen Lehrsatz folgendergestalt aus. Es sey p eine der Wurzeln dieser Gleichung, ψp irgend eine Function derselben, und zur Abkürzung $\frac{\partial . \psi x}{\partial x} = \psi^1 x$, so ist

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi^1 x + \frac{d . (\varphi x)^2 \psi^1 x}{2 \partial x}$$

$$+ \frac{d^2 . (\varphi x)^3 \psi^1 x}{2 . 3 \partial x^2} + \frac{\partial^3 . (\varphi x)^4 \psi^1 x}{2 . 3 . 4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

wo nach der Differentiation α statt x zu setzen ist.

13. Der Lehrsatz ist hier eine algebraische Auflösungsformel. Bald hernach hat la Grange den Satz zu einer analytischen Formel für zwey veränderliche Größen gemacht, da er statt der bestimmten Größe α eine veränderliche setzte, so daß die Gleichung ist

$$t = x + \varphi x,$$

aus welcher jede Function, von x, ψx, durch Functionen von t darzustellen ist. Dieses leistete er in einer lehrreichen Abhandlung über das Keplersche Problem. Mém. de l' Ac. de Berlin, 1769.

Lambert bringt in der angeführten Abhandlung vom J. 1770. die la Grangische Formel auch heraus, aber auf einem ganz andern Wege, und beschäftigt sich daselbst noch weiter mit dieser Untersuchung.

14. La Place hat durch die Methode der partiellen Differentiale, nach einem besondern Verfahren, den Lehrsatz bewiesen. Zu diesem Beweise war es nöthig noch eine veränderliche Größe einzuführen, welche der zu der Function φx gesetzte Factor ist, der aber in der Formel selbst wieder zu einer gegebenen unveränderlichen Größe wird. Der Beweis wird in dem Artikel, partielle Differentiale, mit Erläuterungen vorgetragen werden. Die Entwickelung der Formel giebt la Place in der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planétes, à Paris 1784. pag. 14. sq. Man sehe auch die Mem. de l'Acad. des Sc. a. 1777; ferner Cousin

Introd. à l'étude de l'astronomie physique, à Paris 1787, pag. 15 sq. und Lacroix traité du calcul diff. et intégral, T. I. §. III. sq.

La Grange selbst hat in der Théorie des fonctions analytiques nr. 97. ff. nach einem etwas andern Verfahren, aber doch auch durch partielle Differentiale, seinen Lehrsatz erwiesen. Diesen Beweis hat J. W. Pfaff ferner entwickelt, und mit Zusätzen erweitert, in der von Hindenburg herausgegebenen Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, Th. II. Abh. VII.

Lexell hat in den Novis Comm. Petr. T. XVI. den Beweis der Formel so geführt, daß er sie als richtig annimmt, und zeigt, daß, wenn die Glieder der Reihe für ψx alle durch x ausgedruckt werden, sich alles aufhebt, bis auf das erste Glied ψx. Dies wäre also, was die Alten einen theoretisch-analytischen Beweis nannten, wobey man aber nicht sieht, wie man zu dem Satze selbst gekommen seyn möchte, der also mehr zur Erläuterung dient, als zur Begründung. S. Beweis, und Analysis als Methode.

J. F. Pfaff hat zuerst in dem Hindenburgischen Archiv den Mathematik, 1. Heft, Abh. VI. und hernach in den Disquisit. analyticis, in tractatu de reversione serierum, §. IV – VIII. einen Beweis gegeben, mit welchem der in diesem Artikel von mir geführte im wesentlichen übereinkommt. In der Form habe ich einiges geändert. Den Taylorschen Lehrsatz habe ich nicht unmittelbar, wie es dort geschehen ist, gebraucht, und habe durch die Reihen in (4.) die analogen Functionen für φx und die Potenzen von φx, daraus ferner die gesuchten Functionen, die begleitenden zu den Potenzen von z, ganz einleuchtend bestimmt.

In eben dieser Abhandlung (S. 238.) ist von noch zwey Beweisen des Lehrsatzes Anzeige geschehen. Einer ist von dem P. Canovrai in den Abhandlungen der Akademie von Siena, T. VII.; ein zweyter von Condorcet in den Sammlungen der Turiner Gesellschaft, T. V. Der letztere ist dem Pfaffischen ähnlich; die Fun-

ction φx hat darin aber nicht den Factor z. In dem Artikel, Series, der französischen Encyklopädie, welcher Condorcet zum Verfasser hat, ist dieser Beweis, aber nur ganz kurz in wenigen Zeilen, vorgetragen.

Es wird nöthig seyn, den Lehrsatz durch einige Beispiele zu erläutern.

15. Aus der Gleichung, $\omega = \psi + e \sin \psi$, den Winkel ψ durch ω darzustellen. Es ist hier ω der Winkel, welcher in der Astronomie die mittlere Anomalie heißt, und ψ die Anomalie des Excentri (circuli), wo die Winkel von der Sonnenferne an genommen werden. Die Excentricität der Bahn ist $= e$.

Man setze statt,

$$y, \quad x, \quad z, \quad \varphi x, \quad \psi x, \quad \psi y, \quad \varphi y,$$

in (11.) hier

$$\omega, \quad \psi, \quad -e, \quad \sin \psi, \quad \psi, \quad \omega, \quad \sin \omega,$$

so ist $p = \frac{\partial \omega}{\partial \omega} = 1$, und

$$\psi = \omega - e \sin \omega + \frac{e^2}{1.2} \cdot \frac{\partial . \sin \omega^2}{\partial \omega} - \frac{e^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^2 . \sin \omega^3}{\partial \omega^2}$$

$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 . \sin \omega^4}{\partial \omega^3} - \frac{e^5}{1..5} \cdot \frac{\partial^4 . \sin \omega^5}{\partial \omega^4}$$

$$+ \text{etc.}$$

Nun ist (Goniometrie, 137.)

$$2 \sin \omega^2 = \tfrac{2}{2} - \cos 2\omega.$$

$$4 \sin \omega^3 = 3 \sin \omega - \sin 3\omega.$$

$$8 \sin \omega^4 = \frac{4.3}{2.2} - 4 \cos 2\omega + \cos 4\omega.$$

$$16 \sin \omega^5 = \frac{5.4}{1.2} \sin \omega - 5 \sin 3\omega + \sin 5\omega.$$

$$32 \sin \omega^6 = \frac{6.5.4}{2.2.3} - \frac{6.5}{1.2} \cos 2\omega + 6 \cos 4\omega - \cos 6\omega.$$

etc.

Daher ist (Differentio = Differentialrechnung 9).

$$\frac{\partial . \sin \omega^2}{\partial \omega} = + \tfrac{1}{2} . 2 \sin 2\omega.$$

$$\frac{\partial^2 . \sin \omega^3}{\partial \omega^2} = - \tfrac{1}{4} (3 \sin \omega - 3^2 . \sin 3\omega).$$

$$\frac{\partial^3 . \sin \omega^4}{\partial \omega^3} = - \tfrac{1}{8} (4 . 2^2 \sin 2\omega - 4^3 \sin 4\omega).$$

$$\partial^4 . \sin \omega^5 = + \tfrac{1}{16} \Big(\frac{5 . 4}{1 . 2} \sin \omega - 5 . 3^4 \sin 3\omega + 5^4 \sin 5\omega \Big).$$

etc.

Dadurch wird

$$\psi = \omega - e \sin \omega + \frac{e^2}{2 . 2} 2 . \sin 2\omega$$
$$+ \frac{e^3}{4 . 2 . 3} (3 \sin \omega - 3^2 \sin 3\omega)$$
$$+ \frac{e^4}{8 . 2 . 3 . 4} (4 . 2^3 \sin 2\omega - 4^3 \sin 4\omega)$$
$$- \frac{e^5}{16 . 2 . 3 . 4 . 5} \Big(\frac{5 . 4}{1 . 2} \sin \omega - 5 . 3^4 \sin 3\omega + 5^4 \sin 5\omega \Big)$$
$$+ \frac{e^6}{32 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} \Big(\frac{6 . 5}{1 . 2} 2^5 \sin 2\omega - 6 . 4^5 \sin 4\omega + 6^5 \sin 6\omega \Big)$$
$$+ \text{etc.}$$

16. II. Exempel. Der Radius Vector, r, in der Ellipse ist, $r = 1 + e \cos \psi$, wenn die halbe große Axe $= 1$ gesetzt wird, s. unten 22. Hier ist $\cos \psi$ diejenige Function von ψ, welche aus der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$ durch ω auszudrucken ist.

Man setze nun in (11.) statt

$$y, \quad x, \quad z, \quad \varphi x, \quad \psi x, \quad \psi y, \quad \varphi y$$

hier

$$\omega, \psi, -e, \sin\psi, \cos\psi, \cos\omega, \sin\omega,$$

so ist daselbst $p = \frac{\partial \cos\omega}{\partial\omega} = -\sin\omega$, also

$$\cos\psi = \cos\omega + e\sin\omega^2 + \frac{e^2}{1.2}.\frac{\partial.-\sin\omega^3}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3} + \frac{\partial^2.-\sin\omega^4}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3.-\sin\omega^5}{\partial\omega^3} - \text{etc.}$$

Setzt man hier statt der negativen Potenzen von $\sin\omega$ die positiven, so werden die Differentiale ihrer Werthe entgegengesetzt, weswegen die Vorzeichen der Glieder in die entgegengesetzten zu verwandeln sind. Verfährt man hier wie in (15.), so ist

$$\begin{aligned} r = 1 &+ e\cos\omega - \frac{e^2}{2}(-1 + \cos 2\omega) \\ &- \frac{e^3}{4.2}(3\cos\omega - 3\cos 3\omega) \\ &+ \frac{e^4}{8.2.3}(4.2^2\cos 2\omega - 4^2\cos 4\omega) \\ &+ \frac{e^5}{16.2.3.4}\left(\frac{5.4}{1.2}\cos\omega - 5.3^3\cos 3\omega + 5^3\cos 5\omega\right) \\ &- \frac{e^6}{32.2.3.4.5}\left(\frac{6.5}{1.2}.2^4\cos 2\omega - 6.4^4\cos 4\omega + 6^4\cos 6\omega\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

17. III. Exempel. Die wahre Anomalie sey $= \varphi$, die halbe kleine Axe $= m = \sqrt{(1 - e^2)}$, so ist $\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{m}{1+e}\tang\frac{1}{2}\psi$, (s. unten 23.). Hier ist $\tang\frac{1}{2}\psi$ die Function, welche durch ω auszudrucken ist.

Man setze statt

$$y,\ x,\ z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \varphi y$$

in (11.) hier

$$\omega,\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \tang\tfrac{1}{2}\psi,\ \tang\tfrac{1}{2}\omega,\ \sin\omega,$$

so ist daselbst (Different. Formeln, 38.)

$$p = \frac{\partial . \tang\frac{1}{2}\omega}{\partial\omega} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\omega^2},$$

Ferner $p \sin\omega = \tang\frac{1}{2}\omega$.

$$p\sin\omega^2 = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = 1 - \cos\omega.$$

$$p\sin\omega^3 = \sin\omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega.$$

$$p\sin\omega^4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{1}{4}\cos 3\omega.$$

$$p\sin\omega^5 = \tfrac{3}{4}\sin\omega - \tfrac{1}{4}\sin 2\omega - \tfrac{1}{4}\sin 3\omega + \tfrac{1}{8}\sin 4\omega.$$

$$p\sin\omega^6 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8}\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega + \tfrac{3}{10}\cos 3\omega + \tfrac{1}{8}\cos 4\omega - \tfrac{1}{10}\cos 5\omega.$$

etc.

Nun ist

$$\tang\tfrac{1}{2}\psi = \tang\tfrac{1}{2}\omega - ep\sin\omega + \frac{e^2}{1.2}.\frac{\partial . p\sin\omega^2}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}.\frac{\partial^2 . p\sin\omega^3}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 . p\sin\omega^4}{\partial\omega^3} - \text{etc.}$$

Nimmt man die hier angesetzten Differentiale von den gleich vorher angegebenen Werthen, so ist

$$\tang\tfrac{1}{2}\psi = (1-e)\tang\tfrac{1}{2}\omega + \frac{e^2}{1.2}.\sin\omega$$
$$+ \frac{e^3}{2.2.3}(2\sin\omega - 2^2\sin 2\omega)$$
$$- \frac{e^4}{4.2.3.4}(\sin\omega + 2.2^3\sin 2\omega - 3^3\sin 3\omega$$
$$- \frac{e^5}{8.2.3.4.5}(6\sin\omega - 2.2^4\sin 2\omega - 2.3^4\sin 3\omega + 4^4\sin 4\omega)$$

$$+\frac{e^6}{16\,.\,1\,.\,.\,6}(2\sin\omega+8\,.\,2^6\sin 2\omega$$

$$-3.3^6\sin 3\omega-2.4^6\sin 4\omega+5^6\sin 5\omega)$$

— etc.

Diese Reihe mit $\frac{m}{1+e}$, oder $\frac{\sqrt{(1-ee)}}{1+e}$, oder $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ multiplicirt giebt tang $\frac{1}{2}\varphi$.

18. IV. Exempel. Man sucht die wahre Anomalie φ selbst unmittelbar durch die mittlere ω. Es ist φ keine durch einen vollständigen Ausdruck von ψ angebbare Function dieses Winkels. Es ist aber $\partial\varphi=\frac{m\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, (unten 24.), also $\varphi=m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, welches Integral nicht anders als durch eine unendliche Reihe zu erhalten ist. Demnach ist statt der Function ψx, in (11.) hier zu setzen $m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$. Eine solche Function wie φ von ψ ist, ist die Function ψy in (11.) von y, so daß statt ψy daselbst hier kommt $m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}$. Dadurch ist nun $p=\frac{m}{1+e\cos\omega}$. Es ist also

$$\varphi=m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}-\frac{me\sin\omega}{1+e\cos\omega}$$

$$+\frac{me^2}{1.2}\left(\partial^3.\frac{\sin\omega^2}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega-\frac{me^5}{1.2.3}\left(\partial^2.\frac{\sin\omega^3}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^2$$

$$+\frac{me^4}{1.2.3.4}\left(\partial^3.\frac{\sin\omega^4}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^3-\text{etc.}$$

Die Glieder dieser Reihe geben jedes wieder eine Reihe. Man entwickele sowohl den Quotienten $\frac{1}{1 + e \cos \omega}$ in eine Reihe, als die Wurzelgröße $m = \sqrt{(1 - e^2)}$, wiewohl auch letztere unentwickelt bleiben mag, da sie unmittelbar durch den numerischen Werth von e gegeben wird.

In dem Quotienten $\frac{1}{1 + e \cos \omega}$, der nach den Potenzen von e und $\cos \omega$ fortgeht, müssen die Potenzen von $\cos \omega$ in Cosinus der Vielfachen von ω verwandelt werden, theils wegen der Integration bey dem ersten Gliede, theils wegen der Differentiation bey den folgenden.

Es ist

$$\frac{1}{1 + e \cos \omega} = 1 - e \cos \omega + e^2 \cos \omega^2 - e^3 \cos \omega^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 - e \cos \omega + \tfrac{1}{2} e^2 (1 + \cos 2\omega)$$

$$- \tfrac{1}{4} e^3 (3 \cos \omega + \cos 3\omega) + \tfrac{1}{8} e^4 (3 + 4 \cos 2\omega + \cos 4\omega)$$

$$- \tfrac{1}{16} e^5 (10 \cos \omega + 5 \cos 3\omega + \cos 5\omega)$$

$$+ \tfrac{1}{32} e^6 (10 + 15 \cos 2\omega + 6 \cos 4\omega + \cos 6\omega)$$

$+$ etc. (Goniometrie 141.)

Zu den Gliedern dieser Reihe setze man den Differentialfactor $\partial \omega$, und nehme die Integrale, nach der Formel, $\cos \varphi . \partial \varphi = \partial \sin \varphi$, oder $n \cos n\varphi . \partial \varphi = \partial \sin n\varphi$, woraus folgt $\int \cos n\varphi . d\varphi = \frac{\sin n\varphi}{n}$. So wird das erste Glied von φ erhalten.

Man multiplicire hierauf die Reihe für den Quotienten $\frac{1}{1 + e \cos \omega}$ mit $e \sin \omega$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega . \sin \omega$, in das Aggregat,

$$\tfrac{1}{2} \sin (n + 1)\omega - \tfrac{1}{2} \sin (n - 1)\omega,$$

(Goniometrie, 27.). Diese Rechnung giebt das zweyte Glied der Reihe für φ.

Es

Dieses Glied multiplicire man mit $\frac{1}{2} e \sin \omega$, und verwandle die Producte je zweyer Sinus, wie $\sin n\omega . \sin \omega$ in das Aggregat $\frac{1}{2} \cos (n-1)\omega - \frac{1}{2} \cos (n+1)\omega$. Das Aggregat aller Theile bezeichne man durch (A).

Dieses multiplicire man mit $\frac{1}{3} e \sin \omega$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega . \sin \omega$, in die Differenz zweyer Sinus. Das Aggregat sey (B).

Dieses multiplicire man mit $\frac{1}{4} e \sin \omega$, und verwandle das Product je zweyer Sinus in die Differenz zweyer Cosinus. Das Aggregat sey (C).

Auf diese Weise fahre man fort, bis man zu derjenigen Potenz von e gelangt, bey welcher man stehen bleiben will, so wie man in jedem der Aggregate die Rechnung nicht weiter als bis zu dieser Potenz von e treibt.

Die Reihe (A) wird einmahl differentiirt; der Differentialfactor, der die Sinus von Vielfachen des W. ω enthält, ist das dritte Glied von $\frac{1}{m}\varphi$.

Die Reihe (B) wird zweymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^2 . \sin \omega = - \sin \omega . \partial \omega^2$, oder $\partial^2 . \sin n\omega = - n^2 \sin n\omega . \partial \omega^2$. Der Differentialfactor giebt das vierte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Die Reihe (C) wird dreymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^3 . \cos n\omega = + n^3 \sin n\omega . \partial \omega^3$. Der Differentialfactor giebt das fünfte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Auf diese Weise fährt man nach den Formeln in dem Artikel, Differentio-Differentialgleichung (9.) fort. Es ist

$$\partial^4 . \sin n\omega = + n^4 . \sin n\omega . \partial \omega^4,$$

$$\partial^5 . \cos n\omega = - n^5 . \sin n\omega . \partial \omega^5,$$

$$\partial^6 . \sin n\omega = - n^6 . \sin n\omega . \partial \omega^6,$$

$$\partial^7 . \cos n\omega = + n^7 . \sin n\omega . \partial \omega^7.$$

etc.

Nimmt man alle Reihen zusammen, mit sorgfältiger Beobachtung der Vorzeichen, und ordnet die Glieder

entweder nach den Potenzen von e, oder nach den Vielfachen von ω durch ihre Sinus, so erhält man den Werth von $\frac{1}{m}\varphi$ bis zu der angenommenen Gränze. Multiplicirt man diesen durch m, oder mit dem Werthe von m, nämlich $1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 -$ etc. so ist der Werth der wahren Anomalie φ durch die mittlere ω, und Sinus der Vielfachen von ω ausgedrückt.

19. Wird die Multiplication mit dem Werthe von m vorgenommen, so ist

$$\varphi = \omega - 2e\sin\omega + \frac{5}{4}e^2\sin 2\omega$$
$$+ \frac{1}{12}e^3(3\sin\omega - 13\sin 3\omega)$$
$$- \frac{1}{96}e^4(44\sin 2\omega - 103\sin 4\omega)$$
$$- \frac{1}{960}e^5(50\sin\omega - 645\sin 3\omega + 1097\sin 5\omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieser von mir berechnete Werth trifft mit dem von Cagnoli in seiner Trigonometrie, nr. 771 überein. Die Annäherung in der von ihm daselbst mitgetheilten Formel für φ ist bis zur neunten Potenz von e getrieben.

La Grange hat der Formel für φ eine andere Gestalt gegeben. Es kommen in derselben Potenzen von m oder $\sqrt{(1-ee)}$ als Divisoren der Glieder vor. Dieses beruhet auf dem von ihm gewählten Verfahren zur Entwickelung der Reihe für φ. Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1769. p. 230.

Die hier als Exempel beygebrachten Formeln sind das Hauptstück in der Theorie der Planeten, so fern ihre gegenseitigen Störungen nicht in Betracht kommen.

20. Zur deutlichern Einsicht in alle diese Formeln wird es für einen Theil der Leser nöthig seyn, die geometri-

schen Sätze, welche hier angewandt sind, durch eine Construction zu erweisen.

Es ist ABD (Fig. 65.) die Hälfte einer Ellipse, deren Mittelpunct C, große Axe AD, halbe kleine CB, einer Brennpunct F ist. Mit dem Halbmesser AC wird der Halbkreis AED beschrieben, welcher in der ältern Astronomie der excentrische heißt. Nach einem Puncte L auf der Ellipse ziehe man FL, so ist FL der Radius Vector, und der W. DFL die wahre Anomalie. Durch L sey ML parallel mit BC, und treffe den Kreis in N, so ist der W. DCN die Anomalie des excentrischen (Kreises). Die mittlere Anomalie ist ein der Zeit von D bis L proportionaler Winkel.

21. Man setze $AC = a$; $CB = b$; $CF = c$, $DFL = \varphi$; $DCN = \psi$. Die Area der ganzen Ellipse ist $= \pi ab$ (s. Quadratur), und nach dem einen von Kepler entdeckten Gesetze ist $2\pi : \omega = \pi ab :$ area DFL. Ferner sind an der Ellipse die Flächenräume $DML : DMN = ML : MN$, und die Dreyecke $MFL : MFN = ML : MN$, daher die Flächenräume $DFL : DFN = ML : MN$. Es ist $ML : MN = CB : CE = b : a$ (Ellipse, 1.), also $DFL : DFN = b : a$ Verbindet man diese Proportion mit der, $2\pi : \omega = \pi ab : DFL$, so ist $\pi b : a\omega = \frac{1}{2}\pi ab : DFN$, und $DFN = \frac{1}{2}aa\omega$, wo ω ein Kreisbogen für den Halbmesser $= 1$ ist. Es ist $DFN =$ Sect. $DCN + \Delta FCN = \frac{1}{2}aa\psi + \frac{1}{2}ac \sin\psi$.

Daher ist $\omega = \psi + \frac{c}{a} \sin\psi$, oder, wenn $\frac{c}{a} = e$, einer absoluten Zahl, gesetzt wird, $\omega = \psi + e \sin\psi$.

22. Es ist $a : b = MN : ML$ (Ellipse, 5.), und $MN = a \sin\psi$, also $ML = b \sin\psi$. Ferner $CM = a \cos\psi$; $FM = c + a \cos\psi$, also $FL^2 = r^2 = (c + a \cos\psi)^2 + b^2 \sin\psi^2$.
Da $aa = bb + cc$ (Ellipse, 9.), und $\sin\psi^2 = 1 - \cos\psi^2$

ist, so ist $r^2 = a^2 + 2ac\cos\psi + c^2\cos\psi^2$, also

$r = a + c\cos\psi$, oder $\frac{r}{a} = 1 + e\cos\psi$.

23. Es ist $\sin\varphi = \frac{ML}{FL} = \frac{b\sin\psi}{a + c\cos\psi}$;

und $\cos\varphi = \frac{FM}{FL} = \frac{c + a\cos\psi}{a + c\cos\psi}$. Ferner

$1 + \cos\varphi = \frac{(a+c)(1+\cos\psi)}{a + c\cos\psi}$. Hieraus ist

$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b\sin\psi}{(a+c)(1+\cos\psi)}$; das ist
(Goniometrie, §8.)

$\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{b}{a+c} \cdot \tang\frac{1}{2}\psi = \frac{b:a}{1+e}\tang\frac{1}{2}\psi$;

oder auch $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$,

oder $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$.

24. Hieraus ist $\frac{\partial\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{b}{a+c} \cdot \frac{\partial\psi}{2\cos\frac{1}{2}\psi^2}$,

oder $\frac{\partial\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b}{a+c} \cdot \frac{\partial\psi}{1+\cos\psi}$. Mittelst des in (22.) gebrauchten Werthes von $1 + \cos\varphi$ entsteht hier

$$\partial\varphi = \frac{b\,\partial\psi}{a + c\cos\psi}, \text{ oder } \partial\varphi = \frac{(b:a)\,\partial\psi}{1 + e\cos\psi}.$$

Diese Zusammenstellung der Sätze mit den einfachsten Beweisen ist aus der oben angeführten Abhandlung von la Grange, Mem. de l'Acad. de Berlin, a. 1769. p. 205. genommen. Bey den astronomischen Schriftstellern findet man sie nicht so gut bey einander.

Gränze einer Größe ist diejenige Größe, welcher sich diese, als eine veränderliche betrachtet, immer mehr nähern kann, so daß der Unterschied kleiner werden mag, als jede noch so klein angenommene Größe.

So ist der Kreis die Gränze der eingeschriebenen oder der umgeschriebenen ordentlichen Vielecke; der Cylinder die Gränze von Prismen, deren Grundflächen die in und um die Grundfläche des Cylinders beschriebenen ordentlichen Vielecke sind, bey derselben Höhe mit dem Cylinder; ein Kegel auf ähnliche Art die Gränze von Pyramiden.

Die Summe einer unendlichen (nicht abbrechenden) Reihe ist die Gränze, welcher sich die arithmetische Summe der Glieder (oder das Aggregat, bey verschiedenen Vorzeichen der Glieder) immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, in dem Falle, daß die Glieder immer kleiner werden.

Die Gränze einer Größe kann Null oder ein unendlich großes seyn. So ist in einer geometrischen abnehmenden Reihe Null die Gränze der Glieder, gleichsam das letzte Glied in einer Reihe, worin es kein letztes giebt. In der zunehmenden geometrischen Reihe, worin der Exponent größer als die Einheit ist, ist das unendlich große die Gränze.

Die Gränze hat man von der sich annähernden Größe zu unterscheiden. Die eingeschriebenen Vielecke in einem Kreise bleiben immer von dem Kreise selbst verschieden; die Glieder einer geometrischen Reihe werden nie Null noch unendlich groß.

Die Gränze eines Verhältnisses zweyer veränderlichen Größen ist dasjenige, welchem sich ihr veränderliches Verhältniß immer mehr nähert, je größer sie genommen werden, oder in einem andern Falle, je kleiner sie sind.

Es sey $ay - bx = c$, so ist

$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$, und das Gränzverhältniß von $y : x$ ist $= b : a$.

Es sey

$$yy + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

so ist durch die Division mit xx,

$$\frac{yy}{xx} + \frac{ay}{x} + b + \frac{cy}{xx} + \frac{d}{x} + \frac{e}{xx} = 0.$$

Die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$ für unendlich große x und y, wenn es solche giebt, sey $= p$, so ist

$$pp + ap + b = 0;$$

also $p = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$,

und die Gränze von $y:x$ ist $= p:1$. Ist hier $\frac{1}{4}aa < b$, so giebt es keine unendliche große Werthe von x und y, wie es der Fall für die Coordinaten an einer Ellipse ist. Ist $\frac{1}{4}aa > b$, so sind zwey Gränzverhältnisse vorhanden, wie nämlich an einer Hyperbel; und ist $\frac{1}{4}aa = b$, so ist nur ein einfaches Gränzverhältniß $x:y$ da, wie an der Parabel.

Bey höhern Gleichungen sind auch mehrere Gränzverhältnisse für unendliche x und y möglich, wie in dem Artikel, krumme Linien, gezeigt wird.

Fehlt in der Gleichung zwischen x und y das unveränderliche Glied, so läßt sich auch ein Gränzverhältniß für abnehmende x und y angeben. Z. B. in der Gleichung,

$$yy + axy + bxx + cy + dx = 0,$$

ist das Gränzverhältniß der ohne Ende abnehmenden y und x, das Verhältniß $d:-c$. Denn man dividire alle Glieder der Gleichung durch x, so ist

$$\frac{yy}{x} + ay + bx + \frac{cy}{x} + d = 0.$$

Die drey ersten Glieder werden ohne eine Gränze des Abnehmens kleiner, je kleiner x und y genommen werden, und nur die beiden letzten behalten eine endliche Größe, so

daß die Gränze der Gleichung ist $\frac{cy}{x} + d = 0$, woraus $y : x = d : -c$ folgt.

Für $x = 0$ hat y außer dem Werthe 0 noch den Werth $-c$, weil das Aggregat der beyden Glieder $yy + cy = 0$ ist, entweder, wenn $y = 0$, wie $x = 0$, gesetzt wird, oder wenn $y = -c$ genommen wird. Es sind hier zwey Fortschreitungen der zu den x gehörigen y. Eben so ist für $y = 0$ entweder $x = 0$, oder $= -\frac{d}{b}$.

Aus der Gleichung, $y^3 + x^3 = axy$, werde das Gränzverhältniß von x und y für abnehmende x und y gesucht. Es ist

$$\frac{y^3}{x^2} + x = \frac{ay}{x},$$

also ist Null die Gränze von $\frac{y}{x}$, und eben so von $\frac{x}{y}$. Man dividire die Gleichung durch x^3, so ist

$$\frac{y^3}{x^3} + 1 = \frac{ay}{x^2},$$

und die Gränze von $\frac{y}{x^2}$ ist $= \frac{1}{a}$. Eben diese ist auch die Gränze von $\frac{x}{y^2}$. Die Gleichung giebt drey Fortschreitungen der y, die zu x geordnet sind, und umgekehrt; in jeder derselben ist das Gränzverhältniß der verschwindenden x und y ein anderes.

Gränze einer Reihe, deren Glieder theils positiv, theils negativ sind, ist diejenige, von der Anzahl der Glieder unabhängige Größe, von welcher das endliche Aggregat der Glieder wechselsweise in Plus oder Minus verschieden ist. Eine solche giebt es für die Summe der Sinus und Cosinus der Winkel, die in arithmetischer Pro-

gression sind (Goniometrie, 72, 73.). Bey den Werthen der Wurzeln algebraischer Gleichungen, wenn sie durch eine Reihe dargestellt werden, kann eine solche Gränze auch Statt finden.

Das Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ist nichts anders als ihr Differentialverhältniß. Es ist dasjenige, was dem Verhältnisse der endlichen Veränderungen zum Grunde liegt, und in diesen durch die Quantität der Veränderungen modificirt wird. S. Differentiale.

Gromatica ist eine lateinische Benennung der Feldmeßkunst, von Groma oder Gruma, ein Werkzeug zum Feldmessen. S. Fabri thesaurus erud. scholast. edit. Gesneri sub voce Gruma.

Größe (Quantitas, Quantum) ist, was aus gleichartigen Theilen zusammengesetzt ist. Alles, was entweder in der Wirklichkeit oder in der Vorstellung diese Beschaffenheit hat, macht den Gegenstand der Mathematik aus, dieses der reinen, jenes der angewandten. Diese Wissenschaft heißt daher ganz schicklich die Größenlehre.

Die gewöhnliche Erklärung der Größe ist, sie sey dasjenige, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist. Man kann dadurch aber verleitet werden, Beschaffenheiten, die nur uneigentlich als Größen angesehen werden können, für wahre Größen zu halten, als Kraft, Wärme, Licht. Diese kann man nur einer mittelbaren Messung und Vergleichung unterwerfen, nämlich vermittelst wahrer Größen, mit welchen sie verbunden werden. Man macht freylich einen Unterschied zwischen extensiver und intensiver Größe (Quantitas extensiva et intensiva), allein es ist, um die Begriffe gleich Anfangs vollkommen deutlich zu erhalten, besser, die intensiven Größen gar nicht als Größen anzusehen, und zu wissen, daß sie nur durch andere, als Repräsentanten, einer mathematischen Vergleichung fähig sind.

Man unterscheidet zusammenhangende, und nicht zusammenhangende Größen (Quantitas continua et discreta). Unter jenen versteht man die geometrischen Größen, Linien, Flächen und Körper; unter diesen alles, was aus unverbundenen Theilen besteht, als alle zählbaren Dinge, Zahlen im Allgemeinen, und jede Größe, die als Zahl für eine Einheit betrachtet wird, wenn gleich die Einheit und die Menge der Einheiten unbestimmt gelassen wird. Bey den Linien, Flächen und Körpern kommt es nicht bloß auf die Menge der Theile an, sondern auch auf ihre Zusammenstellung. Zwey Linien oder Figuren können in Absicht auf die Größe der Ausdehnung einander gleich, und dabey von sehr verschiedener Beschaffenheit seyn.

Die geometrischen Größen werden oft als discrete Größen behandelt, wenn man bloß eine Vergleichung der Ausdehnung macht Z. B. bey der Ausmessung eines Feldes sieht man nur auf die darin enthaltene Anzahl von Quadratruthen oder was sonst zum Maaß genommen wird.

Zwey Arten von Größen, Winkel und Zeit, haben noch ihre Besonderheit, wovon an ihrem Orte.

Das deutsche Wort Größe bedeutet sowohl das Zusammengesetzte, als die Menge seiner Theile in Vergleichung mit der Menge eines andern gleichnamigen Zusammengesetzten. Z. B. die vier Glieder einer Proportion sind Größen in dem ersten Verstande, wenn bloß von ihrer Verknüpfungsart die Rede ist. In bestimmten Fällen kommt es aber darauf an, wie groß sie sind, oder wie viel gleiche Theile von einer gewissen Größe sie enthalten. Im Lateinischen kann man Größe in dem ersten Verstande durch Quantum; in dem zweyten durch Quantitas bezeichnen, wiewohl das letzte häufig für Quantum gesetzt wird.

Vielheit des Gleichartigen ist mit Größe gleichbedeutend. Doch bleibt der Unterschied, daß der Begriff, Größe, geometrischen, und Vielheit arithmetischen Ursprungs ist.

Der Begriff, Größe, ist ein ursprünglicher Begriff, den unser Verstand aus sich selbst hervorbringt, nicht der sinnlichen Erfahrung schuldig ist. Diese giebt uns nur die Bilder, wodurch wir uns Größen auf eine bestimmte Art vorstellen. Die Sinne des Gesichts und des Gefühls der Betastung geben uns eine mit manchen Nebenvorstellungen gemischte Vorstellung der Größe. Wollte man sagen, daß wir durch die Absonderung der Nebenvorstellungen zu dem reinen Begriff von Größe gelangen, so setzt dieses das Vermögen des Verstandes voraus, sich einen solchen Begriff zu bilden. Wenn wir gleich der Zeit nach zu dem reinen Begriffe von Größe durch die sinnliche gemischte Vorstellung derselben kommen, so ist doch in philosophischer Rücksicht die Quelle aller unserer mathematischen Vergleichungen und Anwendungen auf sinnliche Größen der reine und ursprüngliche Begriff von Größe. (S. Mathematik, Vielheit, Ausdehnung).

Größter oder **kleinster Werth** einer veränderlichen Größe von einer bestimmten Form, es sey geometrischer oder analytischer, ist derjenige, welcher entweder größer oder kleiner ist, als ein in der Reihe der Werthe dieser Größe vorangehender und nachfolgender, so nahe auch beide an dem größten oder kleinsten Werthe genommen werden. Dieser relativ größte oder kleinste Werth kann mehrfach seyn, wenn die Größen, die in eine stetige Folge geordnet sind, nachdem sie bis zu einer gewissen Gränze zugenommen haben, wieder bis zu einer gewissen Gränze abnehmen, dann wieder eben so zunehmen und abnehmen, welches mehrmals wiederholt werden mag. Ein größter oder kleinster Werth ist nicht absolut, sondern relativ, in Beziehung auf die zu beiden Seiten benachbarten zu verstehen. Der Werth der veränderlichen Größe kann weit über den relativen größten Werth anwachsen, oder über den kleinsten hinaus abnehmen.

Eine mit dieser Untersuchung verwandte ist, wenn die Form derjenigen Größe gesucht wird, welcher unter mehrern oder unendlich vielen, die eine gewisse Bestim-

mung mit ihr gemeinschaftlich haben, eine gewisse Eigenschaft in der größten oder kleinsten Quantität zukommt. Z. B. es werde die krumme Linie gesucht, welche unter allen von gleichem Umfange mit ihr, auch solchen, die aus geraden Linien zusammengesetzt sind, den größten Raum einschließt. Oder es werde der Körper gesucht, der unter allen von gleicher Oberfläche den größten räumlichen Inhalt hat. Es werde zwischen zwey Puncten, die nicht in derselben lothrechten Linie liegen, die krumme Linie gesucht, auf welcher ein Körper, oder eigentlich ein schwerer Punct, in der kürzesten Zeit von dem obersten bis zu dem untersten Puncte herabfällt. Aufgaben dieser Art werden unter der zwar speciellen Benennung, isoperimetrisches Problem, begriffen, gegenwärtig am gewöhnlichsten unter der Benennung, Variations-Rechnung. Unter dem letztern Namen wird diese feine und wichtige Untersuchung ihre Stelle erhalten.

Die Untersuchung, von welcher in dem gegenwärtigen Artikel gehandelt wird, gehört zum Theil zu den elementarischen. Manche merkwürdige hieher gehörige Aufgaben aus der Geometrie lassen sich durch die gemeinen Lehren derselben auflösen. Was man aus diesen nähern Quellen schöpfen kann, braucht man nicht durch höhere Rechnung zu suchen, welche man übrigens zur Vergleichung der Methoden nützlich anwenden kann.

Die Lehre vom Größten und Kleinsten ist wegen ihrer mannichfaltigen Anwendungen sowohl in der reinen als angewandten Mathematik sehr wichtig. Aus der erstern kommen in diesem Artikel Beyspiele vor. Auch für die Philosophie ist diese Lehre wichtig geworden, da sie mit der Frage von den Endursachen zusammenhängt, so fern man dabey annimmt, daß es bey den Naturwirkungen Zweck sey, alles mit dem geringsten Aufwande von Kraft oder Mitteln überhaupt zu bewirken. Leibnitz leitete daher das Gesetz der Zurückstrahlung und Strahlenbrechung her, indem er annahm, das Licht gehe von einem Puncte zu einem andern auf dem leichtesten Wege, so wie vor ihm Fermat gesagt hatte, daß das Licht die kürzeste Zeit ge-

brauche. Das Gesetz von der kleinsten Wirkung, welches Maupertuis aufstellte, erregte einen heftigen gelehrten Streit (Kästners Mechanik. S. 577. ff.). Man muß sich hüten, nothwendige mathematische Folgen als Zwecke zu betrachten, oder die Frage, wie? mit der Antwort auf die Frage, wozu? auflösen zu wollen.

I. Geometrische Verfahrungsarten.

1. Unter allen Dreyecken über einer gemeinschaftlichen Grundlinie, deren Scheitelpuncte in eine der Lage nach gegebene gerade Linie fallen, hat dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Schenkel mit jener Linie gleich große Winkel machen.

Es ist AB (Fig. 66.) die gegebene Grundlinie der Dreyecke, DE die der Lage nach gegebene gerade Linie; APB irgend ein Dreyeck über AB, mit dem Scheitel P auf DE; ACB dasjenige, dessen Schenkel AC, BC mit DE die gleichen Winkel ACD, BCE machen. Man ziehe BF senkrecht auf DE, und verlängere den Schenkel AC bis an die gleichfalls verlängerte BFG in G, so ist FG = BF. Nun ziehe man PG, so ist PG = BP, und AP + BP = AP + PG. Nun ist AP + PG > AG, das ist, AP + PG > AC + BC. Daher ist die Summe der drey Seiten in dem Dreyeck APB größer als die der drey Seiten in dem Dreyeck ACB.

2. Wenn DE parallel mit AB ist, so ist Δ ACB gleichschenklicht und gleichen Inhalts mit Δ APB. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts, über derselben Grundlinie, hat das gleichschenklichte den kleinsten Umfang.

3. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Denn es habe, wenn es möglich ist, ein ungleichseitiges Dreyeck den kleinsten Umfang unter allen Dreyecken von einem gegebenen Inhalt. Die eine Seite desselben sey a, so müssen die beiden andern gleich groß seyn, weil sonst der Umfang noch verkleinert werden kann, ohne

den Inhalt zu verändern. Nimmt man eine dieser Seiten, b, b, zur Grundlinie, so müssen aus demselben Grunde die beiden andern Seiten gleich groß seyn, oder es ist a = b. Dieses widerspricht der Voraussetzung. Also ist sie unmöglich.

4. Unter allen Dreyecken mit gleichem Umfange, und über derselben Grundlinie, hat das gleichschenklichte den größten Inhalt.

Es sey (Fig. 67.) APB irgend ein Dreyeck, und PQ eine parallele durch P mit AB. Man zeichne das gleichschenklichte Dreyeck ACB, dessen Scheitel C in PQ falle, so ist der Umfang von ACB kleiner als der von APB. Das gleichschenklichte Dreyeck ADB, dessen Umfang dem von APB gleich ist, muß also größer seyn als das Δ ACB oder als Δ APB.

5. Unter allen Dreyecken von gleichem Umfange ist das gleichseitige das größte.

Auf ähnliche Art wie in (3.) wird erwiesen, daß ein ungleichseitiges Dreyeck von dem gegebenen Umfange nicht den größten Inhalt haben könne.

6. Diejenige geradlinichte Figur, welche den kleinsten Umfang unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Inhalte hat, ist eine gleichseitige.

Gleichnamige Figuren sind die, in welchen die Anzahl der Seiten gleich groß ist. Man setze, daß eine geradlinichte Figur, die nicht gleichseitig ist, bey dem gegebenen Inhalte den kleinsten Umfang habe. In dieser ziehe man neben zwey ungleichen Seiten eine Diagonale, und zeichne über dieser als Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreyeck von demselben Inhalte wie das ungleichschenklichte. Setzt man jenes Dreyeck statt dieses, so erhält die neue Figur, bey unverändertem Inhalte und derselben Anzahl ihrer Seiten, eine kleinere Summe ihrer Seiten (2.), wider die Voraussetzung, daß in der angenommenen Figur die Summe der Seiten ein Kleinstes seyn sollte.

7. Diejenige geradlinichte Figur, welche den größten Inhalt unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Umfange hat, ist eine gleichseitige.

Der Beweis ist wie in (6.).

8. Es lassen sich unzählig viele gleichseitige Figuren, deren Inhalt oder Umfang gegeben ist, zeichnen. Denn wenn man irgend eine gleichseitige Figur gezeichnet hat, so verhält sich ihr Inhalt zu dem gegebenen, wie das Quadrat einer ihrer Seiten zu dem Quadrat der gleichnamigen Seite in der ähnlichen Figur von dem gegebenen Inhalte. Ihr Umfang verhält sich zu dem gegebenen, wie eine ihrer Seiten zu der gleichnamigen in der ähnlichen Figur. In dem Artikel, Kreis, wird gezeigt, daß die gleichseitige Figur mit dem kleinsten Umfange oder dem größten Inhalte eine reguläre ist.

Man hat hier ein Beyspiel von einem Minimum minimorum und Maximum maximorum.

9. Ein Kreis, dessen Mittelpunct C ist (Fig. 68.), ist nebst zwey Puncten A, B, ausserhalb desselben, gegeben. Die Summe der geraden Linien AD, BD, welche von A und B nach einem Puncte des Umfanges des Kreises gezogen werden, ist am kleinsten in dem Puncte D, wo die Winkel ADC, BDC, stumpf und gleich groß sind. Umgekehrt, die Winkel ADC, BDC sind gleich, wenn die Summe AD + BD ein Kleinstes ist

Denn man ziehe durch D die berührende EF, und an irgend einen Punct des Umfanges P die Linien AP, BP. Die letztere schneide EF in Q. Nun ist AD + BD kleiner als AQ + BQ, also noch vie mehr kleiner als AP + BP. — Der umgekehrte Satz wird daher leicht erwiesen.

10 Die Summe der geraden Linien, welche von den Puncten A und B an einen Punct auf dem Umfange des um den Mittelpunct C beschriebenen Kreises gezogen werden, ist am größten, wenn, wie in (Fig. 69.), die spitzen Winkel ADC, BDC der Linien AD, BD mit dem Halbmesser CD gleich groß sind.

Man ziehe nach irgend einem Puncte P des Umfanges die geraden AP, BP, welche den Umfang in Q, R schneiden. Die Linien AD, BD schneiden denselben in F, G, und der Durchmesser durch D treffe ihn in E. Ferner sey durch die Puncte D, P die gerade MN gezogen. Zuerst ist zu zeigen, daß der Unterschied der Winkel ADM und BDN größer ist als der Unterschied von APM und BPN.

Der Winkel ADM hat zum Maaße die halbe Summe der Bogen DF + DP, weil der Nebenwinkel zum Maaße hat $\frac{1}{2}$ (EF + EP). Das Maaß von BDN ist $\frac{1}{2}$ GP; und von dem Unterschiede ADM — BDN die halbe Summe von DF + DP — GP. Da EF = EG ist, so ist DF = DP + PG, also ist von ADM — BDN das Maaß der Bogen DP.

Ferner ist von dem Winkel APM das Maaß die Hälfte von DF + FQ, oder die Hälfte von DP + PR + RG + FQ, so wie vom Winkel BPN die Hälfte von DP + PR; also von dem Unterschiede, APM — BPN die Hälfte von FQ + GR. Es ist aber FQ < DP, und GR < DP. Denn in dem Dreyeck APF ist Winkel APF < äussere DFP, also Bogen FQ < Bogen DP. Eben so ist in dem Dreyeck BPG der Winkel BPG < äussere DGP, und Bogen GR < Bogen DP.

Folglich ist ADM — BDN > APM — BPN. Daraus folgt, daß AD + BD > AP + BP ist, welches sich aus dem Beweise des S. 1. leicht herleiten läßt. Je weiter in Fig. 66. der Punct P von dem Puncte C (dem Puncte der kleinsten Summe der Linien AC, BC, und der gleichen Winkel ACD, BCE) abrückt, desto größer wird die Summe der Linien AP, BP, und die Ungleichheit der Winkel APD, BPE.

11. Innerhalb eines Dreyecks ABC, worin kein Winkel größer als $\frac{4}{3}$ R oder 120° ist (Fig. 70.), seyn nach einem Puncte D von den Winkelpuncten die geraden, AD, BD, CD gezogen: wenn ihre Summe ein Kleinstes ist, so sind die Winkel ADB, BDC, CDA gleich groß.

Es sey CD eine der drey Linien, welche die kleinste Summe geben. Mit dem Halbmesser CD beschreibe man den Kreisbogen MN, so liegt auf diesem der Punct D so, daß die Summe AD + BD ein Kleinstes ist. Folglich sind die Winkel, ADC, BDC, gleich groß. Ist BD eine der drey Linien, welche die kleinste Summe ausmachen, so ist BDC = BDA, also sind alle drey Winkel um D gleich groß.

12. Unter allen Dreyecken, die in einen Kreis eingeschrieben werden können, ist das gleichseitige das größte.

Denn man zeichne über irgend einer Chorde des Kreises ein gleichschenklichtes Dreyeck, so ist dieses größer als jedes andere über derselben Chorde in dem Kreise beschriebene, weil es die größte Höhe hat. Soll dieses Dreyeck zugleich das größte unter allen in dem Kreise beschriebenen Dreyecken seyn, so muß die vorher als Grundlinie angenommene Seite jedem der beiden gleichen Schenkel gleich seyn, weil sonst über einem dieser Schenkel noch ein größeres gleichschenklichtes Statt hätte.

Eine andere Beweisart ist zu finden in einer Abhandlung von John Stedman: Of triangles described in circles and about them. Phil. Transf. 1775. p. 296.

In dem Dialog, Meno, von Plato, Kap. 22. kommt ein Beyspiel aus der Geometrie vor, welches mit dem jetzt eben bewiesenen Satze zusammenhängt. Sokrates führt an, daß die Geometer oft zufolge einer Voraussetzung ihre Untersuchungen anstellten. Wenn z. B. gefragt würde, ob in einen gewissen Kreis ein gewisser dreyseitiger Raum (χωριον τριγωνον) eingetragen werden könne, so würde der Geometer etwa antworten, ich weiß es noch nicht, ob der gegebene Raum dazu geeignet sey, aber ich glaube dazu eine vorbereitende Voraussetzung machen zu können. Was nun folgt, ist ganz unverständlich, und hat den Philologen viele Mühe ohne Erfolg gemacht. Wenn die Einzeichnung des Raums in Form eines Dreyecks gemeynt ist, so bedarf es hiezu

keiner hypothetischen Untersuchung, sondern die bestimmte Antwort ist: Ein Dreyeck von dem gegebenen Inhalte läßt sich in den gegebenen Kreis einzeichnen, wenn es nicht größer ist als das gleichseitige in dem Kreise beschriebene Dreyeck. Man sieht, daß Plato unsern Satz noch nicht gekannt hat, es müßte denn in dem gegenwärtigen Texte etwas ausgelassen seyn.

13. Unter allen Vielecken mit gleich vielen Seiten, die in einem Kreise beschrieben sind, ist dasjenige, welches den größten Flächenraum hat, ein gleichseitiges.

Denn man schneide in dem größten dieser Vielecke zwey neben einander liegende Seiten durch eine Diagonale ab, so müssen jene beiden Seiten gleich groß seyn, weil sonst statt des abgeschnittenen Dreyecks ein größeres in dem Kreisabschnitte gesetzt werden könnte. Darum müssen alle Seiten sich gleich seyn.

14. In dem Dreyeck ABC (Fig. 71.) ist aus einem Winkelpuncte C nach der Mitte D der gegenüber liegenden Seite AB die CD gezogen. Diese werde in E so getheilt, daß $EC = 2ED$ ist. Aus E beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser EF einen Kreis, und nehme auf dessen Umfange einen Punct F, nach welchem von A, B, C die geraden, AF, BF, CF, gezogen werden. Es ist $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB \times AD + CD \times CE + 3EF^2$.

Denn erstlich ist $AF^2 + BF^2 = 2AD^2 + 2DF^2$ (Dreyeck, 24.), und daher

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + 2DF^2 + CF^2.$$

Nun ziehe man FG senkrecht auf CD, so ist, in dem Falle der Figur, (Dreyeck, 20, 19.),

$$CF^2 = CE^2 + EF^2 + 2CE \times EG,$$
$$DF^2 + 2ED \times EG = DE^2 + EF^2.$$

Da $CE = 2ED$ genommen ist, so ist $2CE \times EG = 4ED \times EG$, und es entsteht aus den beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction diese,

$$CF^2 + 2DF^2 = CE^2 + 2DE^2 + 3EF^2.$$

Nun ist, zufolge der Voraussetzung, daß $CE = 2DE$ ist, $CE^2 = 4DE^2$, und $6DE^2 = 3DE \times 2DE = CD \times CE$, also ist

$$CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2.$$

Dadurch ist

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + CD \times CE + 3EF^2.$$

Setzt man noch AB statt 2AD, so ist $2AD^2 = AB \times AD$, und es wird nun die in dem Satze aufgestellte Gleichung erhalten.

Für jede Lage des Punctes G wird dieselbe Gleichung gefunden. Bleibt G auf der Seite von E wie in der Figur, so bleibt alles in dem Beweise ungeändert. Liegt G auf der andern Seite von E, so verändern $2CE \times EG$ und $2ED \times EG$ nur ihre Beziehungen, heben sich aber ebenfalls einander auf.

Die Gleichung, $CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2$, die in dem Beweise gefunden ward, läßt sich auch aus einer der arithmetischen Gleichungen (Dreyeck, 26.) herleiten, wobey man zu dem Beweise des gegenwärtigen Satzes die senkrechte FG zu ziehen nicht nöthig hat.

15. Zieht man von A, B, C, nach dem Puncte E die geraden AE, BE, CE, so ist die Summe ihrer Quadrate, $AE^2 + BE^2 + CE^2$, ein Kleinstes, und $= AB \times AD + CD \times CE$.

Denn für jeden andern Punct F ist die Summe der Quadrate noch um $3EF^2$ größer als die Summe der Rechtecke $AB \times AD + CD \times CE$.

Der Punct E ist der gemeinschaftliche Schwerpunct der drey Puncte A, B, C als schwer betrachtet.

Bey mehr als drey Puncten findet eine ähnliche Relation für die Quadrate der von ihnen nach ihrem Schwerpuncte gezogenen Linien statt. S. Kreis.

16. Unter allen Prismen von gleicher Höhe über gleich großen und ähnlichen Grundflächen hat das senkrechte die kleinste Oberfläche.

Und, unter allen Prismen, über gleich großen und ähnlichen Grundflächen, und mit gleicher Summe der

Seitenflächen, hat das senkrechte die größte Höhe oder den größten Inhalt.

17. Unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe, über einer der Größe nach; gegebenen Grundfläche, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche eine reguläre Figur ist.

18. Unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe, deren ganze Oberfläche dieselbe ist, ist dasjenige das größte, welches zur Grundfläche eine reguläre Figur hat.

19. Unter allen senkrechten Parallelepipeden von gegebenem Inhalte hat der Würfel die kleinste Oberfläche, und umgekehrt, unter allen solchen Körpern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Inhalt.

20 Der senkrechte Cylinder, dessen Durchmesser seiner Höhe gleich ist, hat eine kleinere Oberfläche (krumme mit den Grundflächen) als jeder andere, ihm gleicher senkrechte; auch ist jener größer als jeder andere senkrechte, der gleiche Oberfläche mit ihm hat.

21. I. Unter allen gleichnamigen Pyramiden von gleicher Höhe, über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange, hat diejenige, in welcher alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind, die kleinste Oberfläche zwischen den Seitenlinien.

II. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, die über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange stehen, und an welchen die Summe der Oberflächen zwischen den Seitenlinien gleich groß ist, hat diejenige, in welcher die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind, den größten Inhalt.

III. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, von gleicher Höhe über Grundflächen gleichen Inhalts, mit gleichen Neigungswinkeln der Seitenflächen gegen die Grundfläche, hat diejenige, deren Grundfläche eine reguläre Figur ist, die kleinste Oberfläche zwischen den Seitenlinien.

Man bemerke, daß in einer Pyramide, deren Grundfigur um einen Kreis beschrieben werden kann, die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben, wenn der Grundpunct der Höhe in den Mittelpunct des Kreises fällt.

22. Das reguläre Tetraedron hat unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche, und unter allen dreyseitigen Pyramiden mit gleicher Oberfläche (aller vier Flächen) den größten Inhalt.

23. Die Beweise dieser Sätze, welche hier sich nicht wohl geben ließen, finden sich in einem den Liebhabern der feinern Geometrie sehr zu empfehlenden Werke: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata, auct. Sim. L'Huilier. Varsaviae 1782. 285 pagg. in-4. Einen Auszug der vornehmsten Sätze mit den Beweisen hat der Verfasser seiner Polygonometrie, ou de la mesure des figures rectilignes, a Genève et Paris 1789. beygefügt.

II. Analytische Methoden für Functionen von einer veränderlichen Größe.

24. Die einfachste Function, für welche ein Größtes oder Kleinstes Statt findet, ist diese, $ax^2 - bx + c$, deren veränderlicher Werth durch u bezeichnet werde, so daß $ax^2 - bx + c = u$ ist. Oder es ist

$$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{u-c}{a}, \text{ also (Gleichung, 33.)}$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c-u}{a}\right)}.$$

Damit x möglich sey, muß $bb - 4a(c-u)$ positiv seyn, das ist, es muß seyn $u >$ oder $= \frac{4ac - bb}{4a}$. Der kleinste Werth, den ein positives u haben kann, ist also

$\frac{4ac-bb}{4a}$. Für diesen Werth von u ist $x = \frac{b}{2a}$, da die Größe unter dem Wurzelzeichen $= 0$ ist. Ist a positiv, und ist $4ac - bb$ es auch, wie es aus einem positiven u folgt, so hat die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, keine mögliche Wurzeln (Gleichung, 36.).

Soll u negativ seyn, so ist $x =$

$\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c+u}{a}\right)}$, und der größte Werth, den u, absolut genommen, haben kann, ist $= \frac{bb-4ac}{4a}$.

Für diesen Werth von u ist $x = \frac{b}{2a}$, und die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, hat zwey mögliche Wurzeln.

25. Wenn die Gleichung, $ax^2 - bx + c = 0$, keine mögliche Wurzeln hat, so ist ihr Werth immer positiv, was man auch für x setzen mag (Gleichung, 46.). Für sehr große positive oder negative x in Vergleichung mit $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ ist der Werth der Gleichung groß, und nimmt bey der Verminderung von x ab, bis zu einer gewissen Gränze, dem kleinsten Werthe der Gleichung.

Hat die Gleichung zwey mögliche Wurzeln, so wird ihr Werth, wenn x zwischen diesen Wurzeln genommen wird, negativ (Gleichung 45.), und nimmt von 0 an zu bis zu einer gewissen Gränze, dem größten negativen Werthe, um von da an wieder bis zu 0 abzunehmen.

26. Exempel. Eine gegebene Zahl (oder Linie) in zwey Theile zu theilen, so daß das Product der beiden Theile ein Größtes sey. — Die Zahl sey a, der eine Theil x, so ist der andere $a - x$, ihr Product $= ax - xx$. In der Auflösung (24.) ist für a, b, c zu setzen, -1; $-a$; 0, und so ist hier der zweyte Fall, da die Gleichung, $ax - xx = 0$, oder $xx - ax = 0$ zwey

mögliche Wurzeln, $x = o$ und $x = a$, hat. Der größte Werth von $xx - ax$ ist $= -\frac{1}{4}aa$, von $ax - xx$ also $+\frac{1}{4}aa$, und der zugehörige Werth von $x = \frac{1}{2}a$.

27. Exempel. Eine gegebene Zahl a in drey Theile so zu theilen, daß zwey derselben das Verhältniß $m : n$ haben, und die Summe der Producte aus je zweyen ein Größtes sey.

Die beiden ersten Theile seyn mx; nx, so ist der dritte $= a - (m+n)x$, und die Summe der Producte $= (m+n)ax - (m^2 + mn + n^2)x^2$. Der größte Werth dieser Summe ist $=$

$$\frac{(m+n)^2 aa}{4(mm+mn+nn)}, \text{ für } x = \frac{(m+n)a}{2(mm+mn+nn)}.$$

28. Die allgemeine Methode, für jede Function einer veränderlichen x den größten oder kleinsten Werth der Function nebst dem zugehörigen von x zu finden, beruht auf folgenden Betrachtungen.

Es sey u eine Function von x. Der positive Werth von u nehme um Δu zu, wenn der positive Werth von x um $+\Delta x$ sich verändert. In diesem Falle ist der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ positiv. Für einen andern Werth von x nehme u um Δu ab, wenn x um Δx zunimmt, so ist in diesem Falle der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ negativ. Der erstere Werth von x sey kleiner, als der zweyte, so zeigt die entgegengesetzte Beschaffenheit jener Quotienten an, daß zwischen beiden x ein Werth von x liegt, für welchen die Function u ein Größtes ist. Ist der zweyte Werth von x kleiner als der erste, so liegt zwischen den beiden zugehörigen Werthen der Function u ein kleinster Werth derselben. Es könnten mehr als ein Größtes oder Kleinstes zwischen jenen Werthen von u liegen; hier ist es aber nicht nöthig, darauf zu achten.

Zu demjenigen x, für welches der Übergang zum Entgegengesetzten geschieht, gehört der größte oder kleinste

Werth der Function u. Um dieses x zu bestimmen, muß der Werth des Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, der sich aus der Beschaffenheit der Function u ergiebt, Null gesetzt werden. Wenn $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$ ist, so ist dieser Quotient weder positiv noch negativ, und macht den Übergang zum Entgegengesetzten. Da aber derselbe für endliche Veränderungen von x und u entweder positiv oder negativ ist, so kann man nur den ersten Theil dieses Quotienten, den von den Veränderungen unabhängigen Theil Null setzen, das ist, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nehmen. Die Gleichung für x, welche hieraus entsteht, giebt denjenigen Werth von x, zu welchem der größte oder kleinste Werth von u gehört, vorausgesetzt, daß ein solcher Werth Statt hat. Denn es kommt allerdings noch zugleich auf die Beschaffenheit des ganzen zweyten Theils von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ an, ob dieser Quotient für die auf beiden Seiten jenes x liegenden Werthe, $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$, entgegengesetzte Beschaffenheit habe.

29. Es ist nach dem Taylorschen Lehrsatze, (Differenzenrechnung, 38.)

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wenn a. a O. für fx, u, $f(x+u)$ gesetzt werden u, Δx, $u + \Delta u$.

Setzt man für die Differential-Quotienten nach ihrer Ordnung, p, q, r, s, etc. so ist

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = p + \tfrac{1}{2} q \Delta x + \tfrac{1}{6} r \Delta x^2 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Man setze nun $p = 0$, und es sey für einen dadurch erhaltenen Werth von x, der durch x' ausgezeichnet werde,

nicht $q = 0$, so ist für diesen Werth von x die Function $+ u$ ein Größtes, wenn q negativ ist, ein Kleinstes, wenn q positiv ist.

Denn erstlich sind für entgegengesetzte Veränderungen von x' die Werthe des Quotienten $\Delta u : \Delta x$ entgegengesetzt, da Δx so klein genommen werden mag, daß die Glieder $\frac{1}{6} r \Delta x^2$ und alle folgende zusammen nicht mit $\frac{1}{2} q \Delta x$ verglichen werden können, und daher die Beschaffenheit jenes Quotienten zu ändern nicht vermögen. Zweytens gehört bey einem positiven Werthe von q der positive Werth von $\Delta u : \Delta x$ zu einem x, das größer ist als x', der negative Werth dieses Quotienten zu einem x, das kleiner als x' ist; umgekehrt bey einem negativen Werth von q, wenn beidemahl u positiv ist. Daher ist zufolge der Bemerkung in (28.) der zu x' gehörige Werth von u in dem erstern Falle ein Kleinstes, in dem andern ein Größtes.

30. Oder noch deutlicher: Es ist, wenn $p = 0$ genommen wird,

$$\Delta u = \tfrac{1}{2} q \Delta x^2 + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Ist q positiv, so ist $+ u + \Delta u$ größer als $+ u$, man mag $x' + \Delta x$ oder $x' - \Delta x$ statt des x', wozu u gehört, setzen, wenn x unbestimmt klein genommen wird. Ist aber q negativ, so ist Δu negativ, man mag Δx additiv oder subtractiv nehmen. In dem ersten Falle ist daher $+ u$ ein Kleinstes, in dem andern ein Größtes.

Wäre der zu x' gehörige Werth von u negativ, so ist der absolute Werth dieser Function für ein positives q ein Größtes, für ein negatives q ein Kleinstes.

31. Um beide Fälle unter einer Regel zu begreifen, lasse man auch hier den in dem Artikel, entgegengesetzte Größen, erklärten analytischen Sprachgebrauch gelten, nach welchem $- a - b$ für kleiner als $- a$ gehalten wird, wenn a und b bloß die Quantität bedeuten. Dann ist $- u + \Delta u$ größer als $- u$, und $- u - \Delta u$ kleiner als $- u$, und die Regel bleibt, daß ein positives q ein Kleinstes, ein negatives q ein Größtes anzeigt. Ist u negativ, so ist es, absolut genommen,

oder der Quantität nach, für $+q$ ein Größtes, für $-q$ ein Kleinstes.

32. Es sey nebst $p=0$ auch $q=0$, aber nicht $r=0$, so ist der zu x' gehörige Werth von u weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Denn da nun ist

$$\Delta u = + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4 + \text{etc.}$$

so ist, für unbestimmt kleine Δx, die Veränderung Δu von entgegesetzter Beschaffenheit, so daß für $x' - \Delta x$, x', $x' + \Delta x$, die Werthe der Function sind $u \pm \Delta u$, u, $u \mp \Delta u$, daher die Werthe der Function entweder zunehmende oder abnehmende sind. Die beiden durch Δu bezeichneten Veränderungen können ungleich seyn.

33. Ist nebst $p=0$, und $q=0$, auch $r=0$, aber nicht $s=0$, so ist die zu x' gehörige Function u ein Größtes, wenn s negativ ist, ein Kleinstes, wenn s positiv ist.

Auf diese Art ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, wenn in der Reihe der Differential-Quotienten, der erste, welcher nicht $=0$ ist, von einer geraden Ordnung ist; kein Größtes oder Kleinstes in dem entgegengesetzten Falle.

34. Es sey nun

$$u = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + gx^2 + hx + k,$$

wo die Coefficienten auch entgegengesetzte Werthe haben mögen, und m eine ganze Zahl ist, so ist (Differentialformeln, 1.)

$$\partial u = (mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} + (m-3)cx^{m-4} \ldots 2gx + h)\partial x,$$

und die Werthe derjenigen x, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist, sind die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} + (m-3)cx^{m-4} \ldots + 2gx + h. \quad (N).$$

35. Wenn die Gleichung,

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + hx + k \quad (M)$$

alle Wurzeln möglich und ungleich sind, so hat die derivirte Gleichung (N) $m - 1$ mögliche ungleiche Wurzeln, für deren jede ein absolutes Größtes der Function u Statt hat. Denn es seyn α, β zwey nächste Wurzeln der Gleichung (M), so nehmen die Werthe desselben, wenn für x eine Reihe Werthe von α bis β so gesetzt werden, von o bis zu einer gewissen Gränze zu, und darauf ab bis zu Null. Die größten Werthe der Gleichung sind abwechselnd positiv und negativ. Die negativen werden nach (31.) als Kleinste betrachtet.

36. Hat die Gleichung (N) eine oder mehrere Wurzeln, zu welchen in der Gleichung (M) absolute Kleinste, positive oder negative, gehören so hat die Gleichung (M) eben so viele Paare unmöglicher Wurzeln. Denn in einer Gleichung mit lauter möglichen ungleichen Wurzeln finden keine absolut Kleinste statt (35.). Das kleinste Größte ist $= o$, in dem Falle, da die Gleichung (N) eine Wurzel mit (M) gemein hat. Alsdann sind zwey Wurzeln in (M) gleich groß. Man mag sich dieses durch eine Zeichnung erläutern. Wenn in Fig. 28. Tab. II. Th. I. die Abscissenlinie für die Curve, welche eine Gleichung vom vierten Grade abbildet, überhalb des Puncts b, parallel mit XY läge, so würde der Werth der Gleichung in dem Puncte b absolut ein Kleinstes seyn, die Abscissenlinie schnitte die Curve nur zweymahl, und die Gleichung hätte nur zwey mögliche Wurzeln. Läge die Abscissenlinie, parallel mit XY, unter d und c zugleich, so entständen zwey absolute Kleinste, und die Gleichung hätte gar keine mögliche Wurzeln. Berührte sie die Curve in b, so hätte die Gleichung zwey gleiche und zwey ungleiche Wurzeln.

37. Die Gleichung (N) habe zwey gleiche Wurzeln, α, α, und das Aggregat ihrer Glieder sey $= (x - \alpha)^2 P$, wo P das Product der übrigen Wurzelfactoren ist. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = (x - \alpha)^2 P$ gesetzt ist, so ist q oder $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$2(x - \alpha) P + (x - \alpha)^2 . \frac{\partial P}{\partial x}$, und beide Quotienten sind

$= 0$ für den Werth α von x. Aber der dritte Differential-Quotient $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ oder r ist nicht $= 0$. In diesem Falle ist also kein Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$, wodurch $p = 0$ ist, vorhanden. Es schließen sich nun ein Größtes und ein Kleinstes in Fig 28. Th. I an einander, oder zwey Biegungen der Curve fallen zusammen. Der Punct, wo sie zusammen kommen, ist ein Wendungspunct. Hat die Gleichung (M) nicht den Factor $(x-\alpha)^3$, oder drey gleiche Wurzeln; so hat sie wegen des hier angenommenen Ereignisses zwey unmögliche Wurzeln.

38. Die Gleichung (N) habe drey gleiche Wurzeln α, oder es sey p, das ist, $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha)^3 P$, so ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3(x-\alpha)^2 P + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial P}{\partial x}$;

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6(x-\alpha)P + 6(x-\alpha)^2 . \frac{\partial P}{\partial x} + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Es ist also mit $p = 0$, für $x = \alpha$, zugleich $q = 0$, und $r = 0$, aber nicht $s = 0$, also ist nun ein Größtes oder Kleinstes vorhanden. In Fig. 28. schließen sich zwey Größte (Kleinste) und ein Kleinstes (Größtes) an einander, oder drey Biegungen der Curve fallen zusammen. Der Punct, wo sie zusammen kommen, heißt ein Schlangenpunct. Hat die Gleichung (M) nicht vier gleiche Wurzeln α, so hat sie, wegen des hier angenommenen Ereignisses zwey unmögliche Wurzeln.

Überhaupt, wenn die Gleichung (N) eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln, α, hat, so entsteht kein Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$ aus der Gleichung (M); bey einer ungeraden Anzahl aber ist ein einziges Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$ vorhanden.

39. Exempel. I. Es sey $u = x^2 - ax + b$, so ist $p = 2x - a$, und $q = +2$. Für $p = 0$ ist $x = \frac{1}{2}a$, und $u = -\frac{1}{4}aa + b$.

Ist dieser Werth positiv, so ist er (wegen $q = +2$) ein Kleinstes, auch der absoluten Größe nach; ist er negativ, so ist er ein relatives Kleinstes, das ist, absolut ein Größtes. In jenem Falle hat die Gleichung, $u = 0$, keine mögliche Wurzeln. (Vergl. 24.)

40. Exempel II. Es sey $u = x^3 - ax^2 + bx - c$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2ax + c;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 2a.$$

Die Gleichung, $0 = 3xx - 2ax + b$, giebt die Werthe von x, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist. Es ist $x = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{(aa - 3b)}$, und dadurch $q = \pm 2\sqrt{(aa - 3b)}$. Sind beide Werthe von u für diese Werthe von x gleichnamig, so hat die Gleichung, $u = 0$, zwey unmögliche Wurzeln. Sind sie ungleichnamig, so hat sie drey mögliche Wurzeln. Ist $aa = 3a$, so ist $q = 0$, und es ist gar kein Größtes oder Kleinstes vorhanden. Die Gleichung, $u = 0$, hat in diesem Falle auch zwey unmögliche Wurzeln, wenn nicht $c = \frac{1}{27}a^3$ ist, wodurch $u = (x - \frac{1}{3}a)^3$ wird. Ist $a^2 < 3b$, so hat selbst die Gleichung, $p = 0$, keine möglichen Wurzeln, und dadurch hat die Gleichung, $u = 0$, auch zwey unmögliche. (Vergl. Gleichung, 68, 69.)

Der größte und kleinste Werth von u sind,

$$u = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

wo das obere Vorzeichen den kleinsten Werth, das untere den größten Werth giebt.

41. Exempel III. Es sey $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 44.$$

Die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$

oder $$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

sind die Werthe von x, zu welchen größte oder kleinste Werthe von u gehören. Diese Wurzeln sind, $+1$; $+2$; $+3$. Die dazu gehörigen Werthe von u sind $+3$; $+4$; -97; die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q sind $+8$; -4; $+8$. Also ist $+3$ ein Kleinstes; $+4$ ein Größtes, und -97 ein relatives Kleinstes, das ist ein absolutes Größtes. Die Gleichung, $u = 0$, hat zwey unmögliche Wurzeln.

42. Aufg. Zu finden, welches unter allen in einem Kreise eingeschrieben n Rechtecken das größte ist.

Der Halbmesser sey $= a$, die eine Seite $= 2x$, so ist die andere $= 2\sqrt{(aa - xx)}$, und der Inhalt des Rechtecks $= 4x\sqrt{(aa - xx)}$. Man setze $u = x\sqrt{(aa - xx)}$, oder $uu = aaxx - x^4$. Aus der letztern Gleichung ist $p = 2aax - 4x^3$, und $q = 2aa - 12x^2$. Die Gleichung, $p = 0$, giebt $2aa = 4x^2$, und daher ist $q = -4aa$. Also ist das Quadrat das größte unter allen in einem Kreise eingeschriebenen Rechtecken.

42. Aufg. Wenn $xx + yy = aa$, zu finden, für welche Werthe von x und y das Product xyy ein Größtes ist.

Es sey $u = xyy = x(aa - xx)$, so ist $\frac{\partial u}{\partial x} = aa - 3x^2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x$. Es ist also u ein Größtes, wenn $xx = \frac{1}{3}aa$ ist. Dadurch ist $yy = \frac{2}{3}aa$, folglich $xx : yy = 1 : 2$, und $x : y$ wie $5 : 7$ in den kleinsten Zahlen.

Verhalt sich die Stärke zweyer Balken von gleicher Länge wie das Product aus der Dicke in das Quadrat der Höhe, so ist der stärkste Balken, der aus einem gegebe-

nen runden Stamme geschnitten werden kann, derjenige, an welchem die Dicke und Höhe das jetzt gefundene Verhältniß haben. Der Durchmesser des Stammes ist a. Theilt man denselben in drey gleiche Theile, errichtet über dem einen Theilungspunete eine senkrechte bis an den Kreis, und zieht nach dem Endpunete derselben von den Endpuncten des Durchmessers zwey Chorden in dem Halbkreise, so haben diese das Verhältniß $1 : \sqrt{2}$. S. Belidor Science des Ingénieurs. L. IV. ch 2.

43. Aufg. Das Verhältniß des Halbmessers von der Grundfläche eines senkrechten Kegels zu seiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die krumme Oberfläche ein Kleinstes ist.

Der Halbmesser der Grundfläche sey $= x$; die Höhe des Kegels $= y$, so ist der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die krumme Oberfläche $= \pi x \sqrt{(xx + yy)}$. Es ist also $x^2 y$ eine gegebene Größe, und $x\sqrt{(xx+yy)}$ soll ein Kleinstes seyn.

Es sey $xxy = a$, und $u = x\sqrt{(xx + yy)}$, so ist $u = \sqrt{\left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)}$, und $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(4x^3 - \frac{2a^2}{x^3}\right) \times \left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Dieser Quotient ist $= 0$, wenn $4x^3 = \frac{2a^2}{x^3}$, oder, wenn $2x^6 = a^2$. Da $x^4 y^2 = a^2$ ist, so ist $2x^2 = y^2$, wenn die krumme Oberfläche ein Kleinstes ist.

Daß die Oberfläche ein Kleinstes ist, erhellt folgendergestalt. Es soll $u = x\sqrt{(xx + yy)}$ ein Kleinstes seyn, also ist es auch $u^2 = x^4 + x^2 y^2 = x^4 + \frac{aa}{xx}$,

Nun ist $\frac{\partial . u^2}{\partial x} = 4x^3 - \frac{2aa}{x^3}$,

und $\frac{\partial^2 . u^2}{\partial x^2} = 12x^2 + \frac{6aa}{x^4}$. Da dieser zweyte Dif-

ferential-Quotient positiv ist, so ist die Oberfläche ein Kleinstes.

44. Aufg. Das Verhältniß des Halbmessers von der Grundfläche eines senkrechten Kegels zu seiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die ganze Oberfläche, (die krumme mit der ebenen Grundfläche) ein Kleinstes ist.

Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen ist der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die ganze Oberfläche $= \pi x \sqrt{(xx + yy)} + \pi x^2$. Man setze $xxy = a$, und $x\sqrt{(xx+yy)} + x^2 = u$, oder $\sqrt{(x^4 + ay)} + x^2 = u$, so soll u ein Kleinstes seyn. Nun ist

$$\partial u = \tfrac{1}{2}(4x^3\partial x + a\partial y)(x^4 + ay)^{-\frac{1}{2}} + 2x\partial x,$$

und $a\partial y = -\dfrac{2aa\partial x}{x^3} = -2xy^2\partial x.$

Dadurch ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x^5 - xy^2)(x^4 + ay)^{-\frac{1}{2}} + 2x.$$

Setzt man diesen Quotienten $= 0$, so ist nach ein paar leichten Reductionen

$$0 = 2x^2 - y^2 + 2(x^4 + ay)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y^2 - 2x^2 = 2\sqrt{(x^4 + ay)}.$$

Auf beiden Seiten quadrirt, wird

$$y^4 - 4x^2y^2 = 4ay = 4x^2y^2.$$

Also ist $y^2 = 8x^2$,

und die Seite des Kegels $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = 3x$.

Daß die Oberfläche ein Kleinstes ist, erhellt, ohne den Werth von $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zu suchen, daher, daß die Gränze von u für ein unendlich großes y, also unendlich kleines x, ist xy oder $\dfrac{a}{x}$, das ist, ein unendlich großes. Die Oberfläche nimmt folglich von einer gewissen Gränze an immer zu, wenn die Höhe zunimmt.

Die kleinste Oberfläche (krumme und ebene zusammen) ist $= 4\pi x^2 =$ dem vierfachen von der Grundfläche; die krumme also dreymal so groß als die Grundfläche, wobey der Inhalt $= \frac{2}{3}\pi x^3 \sqrt{2}$ ist.

45. Aufg. Eine Zahl a in zwey Theile zu theilen, so daß das Product aus der mten Potenz des einen Theils in die nte Potenz des andern Theils ein Größtes sey.

Der eine Theil sey x, also der andere $a - x$, und $x^m (a - x)^n = u$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m x^{m-1} (a - x)^n - n x^m (a - x)^{n-1}$$
$$= (ma - mx - nx)\, x^{m-1} (a - x)^{n-1}.$$

Dieser Quotient wird $= 0$, wenn $x = \frac{ma}{m+n}$; $x = 0$; $x = a$ ist. Zu dem ersten dieser Werthe gehört ein Größtes. Denn in der Reihe der u liegt derselbe zwischen zwey Werthen, die $= 0$ sind. Zur Übung suche man den Werth des Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Es ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$\Big[-(m+n)\, x\, (a - x)$$
$$+ (m-1)(ma - mx - nx)(a - x)$$
$$- (n-1)(ma - mx - nx)\, x \Big] x^{m-2} (a - x)^{n-2}.$$

Setzt man hier $x = \frac{ma}{m+n}$; also $a - x = \frac{na}{m+n}$, so wird der zweyte und dritte Theil $= 0$, und es bleibt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{m^{m-1} n^{n-1} a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$. Da dieser Werth negativ ist, so ist u ein Größtes.

46. Es seyn P und Q zwey Functionen von x, und $u = \frac{P}{Q}$. Es soll der größte oder kleinste Werth dieser gebrochenen Function gefunden werden. Man nehme das Differential, $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$, und

setze den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ\partial x} = 0$.

Es ist dadurch $Q\partial P - P\partial Q = 0$. Der Werth von x, den diese Gleichung giebt, ist derjenige, zu welchem ein größter oder kleinster Werth der gebrochnen Function gehört.

Um zu entscheiden, ob ein größter oder ein kleinster Werth vorhanden sey, suche man den Differential-Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Da $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$ ist, so ist

$$\partial^2 u = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ} - \frac{2(Q\partial P - P\partial Q)\partial Q}{Q^3}.$$

Weil $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ genommen wird, so ist der zweyte Theil $= 0$, und es ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ\partial x^2} = \frac{Q\partial^2 P - P\partial^2 Q}{QQ\partial x^2}$. Von der Beschaffenheit dieses Quotienten, nachdem er positiv oder negativ ist, hängt es ab, ob die Function ein Kleinstes oder ein Größtes ist. Da der Nenner ein Quadrat ist, so kommt es allein auf die Beschaffenheit des Zählers, $Q\partial^2 P - P\partial^2 Q$, an.

47. Exempel. Zu finden, in welchen Fällen die Formel, $\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$, ein Größtes oder Kleinstes wird.

Es ist hier $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6xx - 12}{(xx + 3x + 2)^2}$, und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{12x}{(xx + 3x + 2)^2} - \frac{2(6xx - 12)(2x + 3)}{(xx + 3x + x)^3}.$$

Ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; so ist $xx = 2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$\frac{12x}{(xx+3x+2)^2}$. Nimmt man $x = +\sqrt{2}$, so ist

$u = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}-17$; ein Kleinstes, weil

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q positiv ist. Nimmt man $x = -\sqrt{2}$, so

ist $u = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2}-17$, ein Größtes,

da q negativ ist, aber ein relatives, da es selbst negativ ist, also ein absolutes Kleinstes. Es ist z. B. für

$x = -\frac{4}{3}$; $u = -35$.
$x = -\sqrt{2}$; $u = -33,97$.
$x = -\frac{3}{2}$; $u = -35$.

48. Es sey u eine vielförmige Function von x (Function, 9), und die Differentialgleichung zwischen u und x sey $P\partial x + Q\partial u = 0$, wo P und Q Functionen von x und u sind, auch P von x allein, und Q von u allein Functionen seyn können.

Man setze auch hier den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{P}{Q} = 0$. Dadurch ist entweder $P = 0$, oder Q unendlich groß. Dieses letztere hat nicht Statt, wenn die Gleichung zwischen x und u eine rationale ganze ist, weil dazu x oder u unendlich groß seyn müßten. Die Gleichung $P = 0$ verbunden mit der Gleichung zwischen x und u, liefert durch Herausschaffung von u eine Gleichung für x, deren Wurzeln diejenigen Werthe von x sind, zu welchen ein Größtes oder ein Kleinstes gehört. Die größten oder kleinsten Werthe von u werden aus derjenigen Gleichung zwischen x und u gefunden, worin bey dem Eliminations-Proceß u nur noch in der ersten Potenz vorhanden ist, welches also für jedes der aus der Endgleichung bestimmten x durch einen einfachen Werth gefunden wird.

Es ist darauf zu bestimmen, ob die gefundenen Werthe Größte oder Kleinste sind. Dieses kommt wiederum auf die Beschaffenheit von $\frac{\partial^2 u}{dx^2}$ an. Die Gleichung, $P\partial x + Q\partial u = 0$ werde aufs neue differentiirt, so ist, wenn ∂x als unveränderlich genommen wird,

$$R\partial x^2 + S\partial x\partial u + T\partial x\partial u + V\partial u^2 + Q\partial^2 u = 0,$$

wo $R\partial x$ und $T\partial x$ die Differentiale von P und Q in Beziehung auf x allein sind, S und V die Differentiale derselben Functionen in Beziehung auf u allein. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ gesetzt ist, so ist

$$R\partial x + \frac{Q\partial^2 u}{\partial x} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{R}{Q}.$$

Man differentiire also die Function P aufs neue in Beziehung auf x allein, und dividire den Differentialfactor R durch Q. Ist der Quotient für einen der gefundenen Werthe von x und das zugehörige u positiv, so ist u ein Größtes; ist der Quotient negativ, so ist u ein Kleinstes.

49. Exempel. Die größten oder kleinsten Werthe von u und die zugehörigen x zu finden, wenn $x^3 - 3aux + u^5 = 0$.

Es ist hier $P = 3x^2 - 3au$; $Q = 3u^2 - 3ax$. Aus der Gleichung, $P = 0$, folgt $x^2 = au$. Der Werth von u in die ursprüngliche Gleichung gesetzt, giebt $x^6 - 2a^5x^5 = 0$. Also ist $x^5 = 0$, und auch $x^3 = 2a^5$. Der erstere Werth giebt $\frac{P}{Q} = \frac{0}{0}$, welches ein endlicher Werth seyn kann, in welchem Falle kein Größtes oder Kleinstes vorhanden ist.

Man setze für x eine so kleine Größe $\pm h$, daß ihre Potenzen weggelassen werden können, wenn die Frage

nur ist, ob die entgegengesetzte Beschaffenheit von h die Werthe von u entgegengesetzt mache. Aus den ersten beiden Gliedern der gegebenen Gleichung folgt $u = \frac{hh}{3a}$ + etc. aus dem zweyten und dritten folgt $u^2 = 3ah$ + etc., oder $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$. Da der erstere Werth von u positiv bleibt, es mag $+h$ oder $-h$ genommen werden, so ist der Werth, $u = 0$, ein Kleinstes. Auch ist bey dieser Form von u das verschwindende P gegen das gleichfalls verschwindende Q unendlich klein. Hingegen für $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$ findet kein möglicher Werth Statt, wenn h negativ genommen wird. Es sind hier drey Fortschreitungen der u (an der zugehörigen Curve drey Zweige); eine derselben hat die Form, $u = Ax^2 + Bx^5 + Cx^8 + \text{etc.}$ Die beiden andern haben die Form,

$u = \pm Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{4}{2}} + Cx^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}$ Jene erstreckt sich für positive und negative, die beyden andern begegnen sich für $x = 0$.

Nimmt man $x^3 = 2a^5$, oder $x = a\sqrt[3]{2}$, so ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{a}$, also u ein Größtes. Es ist dieses $u = a\sqrt[3]{4}$.

50. Wenn zwey Fortschreitungen der u für einen gewissen Werth von x, der a sey, einen gemeinschaftlichen Werth von u enthalten, so daß entweder für kleinere oder für größere Werthe von x als a ist, keine der Fortschreitungen möglich ist, so erhält $\frac{\partial u}{\partial x}$ einen unendlich großen Werth für $x = a$. Man kann dieses am deutlichsten einsehen, wenn man die Function u als Ordinaten einer Curve betrachtet. Die beiden Fortschreitungen, wovon hier die Rede ist, geben zwey Zweige, die für $x = a$ eine gemeinschaftliche berührende haben, in welche die

Ordinate fällt. Hier ist nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ unendlich groß (berührende Linie, 14.).

In der Gleichung (49.) ist für die beiden Fortschreitungen der u, von der Form, $u = \pm A x^{\frac{1}{2}} + B x^{\frac{4}{2}} + \text{etc}$ der Quotient der verschwindenden u, x, nämlich $\frac{u}{x} = \pm A x^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{A}{\sqrt{x}}$, das ist, unendlich groß. Da für $x = 0$, ganz verschiedene Werthe von $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ Statt haben, so wird er $= \frac{0}{0}$ gefunden, wie bey Doppelpuncten oder vielfachen Puncten (berührende Linie 24—26.). S. auch Function 50. ff.

Eine gemeinschaftliche berührende Ordinate an zwey Zweigen einer Curve ist zwar für den einen die größte, für den andern die kleinste in der Folge der Ordinaten; allein, weil auf der einen Seite keine Ordinaten weiter möglich sind, so kann sie weder als ein Kleinstes noch als ein Größtes angesehen werden. Auch ist für sie $\frac{P}{Q}$ unendlich groß, nicht Null.

Die Ordinate an einer Spitze ist daher auch nicht als ein Größtes oder Kleinstes zu betrachten, wenn beide Zweige, die in der Spitze zusammenstoßen, zu einer gemeinschaftlichen Abscisse gehören. Sie ist an beiden die letzte oder die erste. Liegen die Zweige von der Spitze nach entgegengesetzten Gegenden, so möchte man die Ordinate an der Spitze als ein Größtes oder Kleinstes ansehen können. Allein wegen der Aehnlichkeit mit jenem Falle, und da $\frac{\partial u}{\partial x}$ hier nicht Null, sondern unendlich groß ist, wird man eine solche Ordinate nicht als ein Größtes oder Kleinstes anzusehen haben.

III. Methode für Functionen von zwey oder mehr veränderlichen Größen.

51. Es sey u eine Function zweyer veränderlichen Größen, x, y, und es sollen diejenigen Werthe von u gefunden werden, die ein Größtes oder Kleinstes sind. Stellt man sich die u als Ordinaten an eine krumme Fläche vor, auf deren Basis die Ordinaten x, y genommen werden, so sieht man leicht ein, daß für denjenigen Werth von x und von y, der die verlangte Beschaffenheit hat, die Ordinate u, sowohl in der Richtung der x, ohne y zu ändern, als in der Richtung der y, ohne x zu ändern, ein Größtes oder Kleinstes seyn müsse. Ist nun $\partial u = P\partial x + Q\partial y$, so muß $\frac{\partial u}{\partial x}$ sowohl als $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ seyn, das ist, es muß $P = 0$, und $Q = 0$ seyn. Allein dieses wird noch allgemeiner zu erweisen seyn, und insbesondere ist eine sichere Methode nöthig, um zu entscheiden, ob jene Annahmen Größte oder Kleinste geben.

52. Man setze, daß a einer der Werthe von x sey, für welche u die verlangte Beschaffenheit hat, und b der zugehörige Werth von y. In der Function von x und y setze man $x = a + h$; $y = b + k$, wo h und k positiv oder negativ seyn können, entwickele die Theile der Function u, so erhält u die Form

$$u = A + Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 + Gh^3 + 3Hh^2k + 3Khk^2 + Lk^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten durch die Beschaffenheit der Function u bestimmt werden. Das erste Glied, A, ist das Größte oder Kleinste, welches bestimmt werden soll. Man setze h und k so klein, daß die Glieder von dem Gk^3 an die Beschaffenheit von $u - A$ nicht zu ändern vermögen, man mag die Vorzeichen von h und k ändern wie man will, $+h$ und $+k$; oder $+h$ und $-k$; oder $-h$ und $+k$; oder $-h$ und $-k$ nehmen.

Ist nun u ein Kleinstes, so ist

$$Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fh^2$$

positiv, für jede jener vier Annahmen von h und k; ist u ein Größtes, so ist jenes Aggregat in allen Fällen negativ. Damit dieses für jede Beschaffenheit von h und k Statt habe, muß erstlich $B = 0$, und $C = 0$ seyn. Zweytens muß $Dh^2 + 2Ehk + Fk^2$ nicht $= 0$ werden können, weil sonst dieses Aggregat entgegengesetzte Werthe erhalten könnte, bey veränderter Größe und Beschaffenheit der willkührlichen h und k. Es muß also die Gleichung,

$$Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 = 0,$$

unmögliche Wurzeln haben, als wodurch ihre Werthe immer gleichnamig bleiben (Gleichung, 46.). Die Gleichung,

$$h^2 + \frac{2E}{D}kh + \frac{Fkk}{D} = 0,$$

hat unmögliche Wurzeln, wenn F und D gleichnamig (beide positiv oder beide negativ) sind, und zugleich $\frac{Fkk}{D} > \frac{E^2kk}{D^2}$, das ist, wenn $DF > E^2$ ist (Gleichung 36.). Der Werth des Aggregats ihrer Glieder ist alsdann immer positiv; daher ist der Werth von $Dhh + 2Ekh + Fkk$ immer entweder positiv oder negativ, nachdem D dieses oder jenes ist. Betrachtet man k als Wurzel jener Gleichung, so ist in dem Falle, daß sie unmögliche Wurzeln hat, ebenfalls F mit D gleichnamig, und $DF > E^2$, und jenes Aggregat ist positiv oder negativ, nachdem F dieses oder jenes ist, übereinstimmig mit dem, was die Beschaffenheit von D giebt. Die Bedingung $DF > E^2$ schließt zugleich ein, daß D und F gleichnamig sind, da eine negative Größe immer als kleiner gegen eine positive angesehen wird. Es kann nämlich nicht $-\beta^2 > \alpha^2$ seyn, weil dadurch $\alpha^2 + \beta^2 < 0$ wäre.

Ist also $B = 0$, $C = 0$, und $DF > E^2$, so ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, ein Größtes, wenn D und F negativ sind, ein Kleinstes, wenn D und F positiv sind. Aus den beiden Gleichungen, $B = 0$, $C = 0$, ergeben sich die Bestimmungen von x und y, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist.

53. Es sey $f(x, y)$ eine Function von x und y, so ist, wenn $f(x, y) = u$ gesetzt wird,

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\frac{h}{1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\frac{k}{1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).\frac{hh}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right).\frac{2hk}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).\frac{kk}{1.2} + \text{etc.}$$

wo die weggelassenen Glieder Producte von drey oder mehr Factoren, h, k, enthalten. Die Klammern zeigen partielle Differential-Quotienten an (Differentialgleichung, 14.). Der Quotient $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ zeigt an, daß u zuerst nur in Beziehung auf x, und das Differential nur in Beziehung auf y zu differentiiren ist, oder in umgekehrter Ordnung, worauf das zweyte Resultat durch $\partial x \partial y$ dividirt wird.

Dieser Satz wird in dem Artikel, Taylorscher Lehrsatz, mit Erweiterung auf noch mehrere veränderliche Größen, erwiesen. Die gegenwärtige Formel wird man leicht aus Differentialrechnung, 38. herleiten können. Es ist daselbst statt u zu setzen theils h, theils k. Dadurch ist in (52.)

$$B = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ C = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ D = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right);\ F = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

wo in den unbestimmten Differentialquotienten für x und

y die gefundenen zusammen gehörigen a und b zu setzen sind.

54. Diese Methode läßt sich auch auf Functionen von mehr als zwey veränderlichen Größen ausdehnen, wobey mehrere Bedingungen im Falle eines Größten und Kleinsten zu erfüllen sind. Sie ist von la Grange, der zuerst die allgemeinste Auflösung für solche Functionen gegeben, und die Kennzeichen für Größte und Kleinste aus einander gesetzt hat. (Miscellanea Societ. Taurinensis. T. I.). Euler hat in seiner Differentialrechnung, P. II. Cap. XI. nur Functionen von zwey veränderlichen Größen betrachtet, und hier die Kennzeichen zur Unterscheidung des Größten und Kleinsten nicht vollständig angegeben. Er sagt daselbst, §. 290., wenn die beiden Differentialquotienten zweyten Grades, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, nachdem für x und y die aus den beiden Gleichungen, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ gefundenen Werthe gesetzt sind, beide ungleichnamig ausfallen, so sey kein Größtes oder Kleinstes vorhanden; wenn beide positiv sind, so sey u ein Kleinstes; wenn beide negativ sind, so sey u ein Größtes. Das erstere ist richtig. Aber es folgt noch kein Größtes oder Kleinstes, wenn beide Differentialquotienten gleichnamig sind, weil dazu auch noch seyn muß $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y}\right) > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$. Die von la Grange gegebene Auflösung findet man in Lacroix traité du calc. diff. et intégral. T. I. nr. 155.

55. Exempel. Es sey $u = xx + yy + xy - ax - by$, so ist $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x + y - a$; $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y + x - b$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = +2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$

$+2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = +1$. Setzt man die beiden ersten Differentialquotienten $= 0$, oder $2x + y - a = 0$ und $2y + x - b = 0$, so ergiebt sich $x = \frac{2a - b}{3}$; $y = \frac{2b - a}{3}$. Ferner ist das Product, $+4$, der beiden Differentialquotienten $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ größer als das Quadrat von $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$, also ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, und zwar ein Kleinstes, weil jene beiden Quotienten positiv sind. Man setze nun in der Function u für x und y die gefundenen Werthe, so ist $u = -\frac{1}{3}(aa + bb - ab)$, ein relatives Kleinstes, aber absolut ein Größtes, da bey einer hinlänglich kleinen Veränderung von x und y die Veränderung von u positiv ist, u also absolut kleiner wird *).

56. Exempel. Eine Zahl a in drey Theile so zu theilen, daß das Product ihrer Quadrate ein Größtes sey.

Es sey $u = x^2 y^2 (a - x - y)^2$, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2xy^2(a - x - y)(a - 2x - y),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x^2 y(a - x - y)(a - 2y - x).$$

*) Das Exempel ist aus Eulers Diff. Rechn. p. 619. genommen. Es ist daselbst der kleinste Werth von u gesetzt $= -\frac{aa + ab - bb}{3}$. Man muß dieses nicht für irrig halten, da nach Eulers Bezeichnungsart das Zeichen — vor einem Bruche sich bloß auf das erste Glied des Zählers bezieht.

Da keiner der Theile Null seyn soll, so kann man nur setzen, $a - 2x - y = 0$; und $a - 2y - x = 0$, welches giebt $x = \frac{1}{3}a$; $y = \frac{1}{3}a$. Den ersten Quotienten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf x, und setze in dem Differential für x und y die gefundenen Werthe, so ist $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -4 \cdot \frac{a^4}{81}$. Den zweyten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf y, so ist nach derselben Substitution, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -4 \cdot \frac{a^4}{81}$. Den ersten differentiire man in Beziehung auf y, oder den zweyten in Beziehung auf x, so ist $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = -2 \cdot \frac{a^4}{81}$. Das Product jener beiden Quotienten ist größer als das Quadrat des letztern, also ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, und zwar das erstere, da jene beiden Quotienten negativ sind.

Allgemeiner ist die Aufgabe von Lacroix vorgetragen, a. a. O. nr. 156., wo $u = x^m y^n (a - x - y)^p$ gesetzt ist.

Zur Geschichte der Lehre vom Größten und Kleinsten.

Unter den Alten hat Apollonius in seinem Werke von den Kegelschnitten der Untersuchung über die größten und kleinsten geraden Linien, die von einem Puncte auf der Axe (in der Ellipse auf der einen oder der andern) an die Curve gezogen sind, theils einzelnen, theils mehrern in einem Puncte außer der Axe zusammenstoßenden, oder die von einem gegebenen Puncte her genommen werden, eine besondere Abtheilung gewidmet. Sie enthält 77 Sätze, weil nach der Methode der Alten alles sehr zergliedert und stufenweise vorgetragen wird. So nimmt Apollonius zuerst den Punct auf der großen Axe in dem Abstande, so groß als der halbe Parameter, von dem Scheitel, dar-

auf in einem kleinern, und dann in einem größern Abstande, wobey die Linien alle an der einen Seite der Axe liegen. Ferner nimmt er in der Ellipse den Punct, von welchem Linien an die eine Hälfte ihres Umfanges gezogen werden, auf der kleinen Axe oder ihrer Verlängerung, zuerst in dem Abstande von dem einen Scheitel so groß als der halbe zu der kleinen Axe gehörige Parameter (die dritte Proportionale zu der kleinen und der großen Axe), wo es drey Fälle giebt, nachdem der halbe Parameter kleiner, oder so groß, oder größer als die kleine Axe ist. Dann wird der Abstand größer als der halbe Parameter, und endlich kleiner als derselbe, größer aber als die halbe Axe genommen. In dem letzten Falle geht die größte Linie nach einem Puncte des Umfanges zwischen den beyden Scheiteln. Die Sätze 27—30 enthalten, daß die berührende an dem Endpuncte einer kleinsten oder größten senkrecht auf sie steht, und S. 32, daß die Normale auf die berührende, von dem Berührungspuncte bis an die Axe genommen ein Kleinstes ist. In S. 44. 45. wird bewiesen, daß (auf derselben Seite der Axe und in der Ellipse in einem und demselben Quadranten) nicht mehr als zwey Kleinste, bis an die Axe genommen, sich in einem Puncte schneiden, wenn sie verlängert werden. In der Hälfte einer Ellipse können nach S. 47. nicht vier Kleinste vom Umfange bis an die Axe gezogen, sich in einem Puncte schneiden, nur drey. Die Beweise von 44. und 45. sind weitläuftig. Die Algebra giebt für die Ordinaten an der Parabel, die zu Linien durch einen gegebenen Punct gehören, worauf das Segment zwischen der Curve und der Axe ein Kleinstes ist, eine Gleichung vom dritten Grade mit zwey positiven Wurzeln, wenn sie alle möglich sind An der Ellipse hat die Gleichung für solche Ordinaten drey positive und eine negative; an der Hyperbel zwey positive und zwey negative Wurzeln. Sehr merkwürdig sind der 51ste und 52ste Satz. Es wird hierin gezeigt, in welchem Falle auf keiner der durch einen gegebenen Punct an die Curve gezogenen Linien von der Axe an der dem Puncte entgegengesetzten Seite ein Kleinstes abge-

schnitten wird, in welchem Falle nur auf einer aller dieser Linien ein Kleinstes Statt hat, und in welchem auf zwey Linien ein Kleinstes vorhanden ist. In der Ellipse ist nur ein Quadrant zu nehmen, und der gegebene Punct soll in einer auf die zu dem Quadranten gehörige halbe große Axe senkrechten liegen, so wie bey den andern beiden Kegelschnitten diese senkrechte auf die Axe selbst fallen muß. Die Gränzscheidungen dieser drey Falle sind, wenn der Abstand des gegebenen Punctes von der Axe größer, oder so groß, oder kleiner ist als eine gewisse, für die Hyperbel und Ellipse insbesonders, sehr künstlich bestimmte Linie. Diese Untersuchung möchte zu den feinsten in der alten Geometrie gehören. Apollonius leistet durch seine Geometrie, was der Algebraist leistet, wenn er die Gränzscheidung der möglichen positiven Wurzeln einer cubischen und vollständigen biquadratischen Gleichung angiebt. Für cubische ist das Verfahren bekannt. Bey vollständigen biquadratischen wird es schon Schwierigkeiten machen. Von dem 64sten Satze an bis zu Ende zeigt Apollonius, auf welche Art Größte oder Kleinste für die ganzen Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelschnitt gezogen werden Statt haben. Es sind dieses die Normalen auf die Curve, eben so wie bey den Segmenten zwischen der Curve und der Axe, wenn diese Kleinste sind Das ganze fünfte Buch des Apollonius müssen wir, nach dem Zustande unserer Theorie von Größten und Kleinsten, eine Abhandlung über die Normalen von gegebenen Puncten an einen Kegelschnitt nennen. S. den Artikel, Normale.

In dem Artikel, Geometrie, S. 322. ist angeführt, daß nur die vier ersten Bücher des Werks über die Kegelschnitte, im Original noch vorhanden sind. Das fünfte, dessen Inhalt hier erzählt worden, ist nebst dem sechsten und siebenten erst im Jahr 1661 aus einer arabischen Uebersetzung lateinisch von Joh. Alph. Borelli herausgegeben, mit Beyhülfe eines gelehrten Arabers, des Maroniten Abrahami Ecchellensis. Noch eher als das arabische Manuscript in der Großherzoglichen Bibliothek zu Florenz aufgefunden war, hatte sich Viviani

daselbst mit der Wiederherstellung des fünften Buchs der Kegelschnitte beschäftigt. Die Entdeckung desselben reizte ihn an, sein Werk zu vollenden, welches er auch noch vor der Erscheinung der Uebersetzung des Apollonischen Werks herausgab. Der Prinz Leopold von Medicis bezeugte mit Siegel und Unterschrift, daß er drey Convolute mit benannter Anzahl der Blätter von einem Manuscripte des Viviani über die Größten und Kleinsten an Kegelschnitten erhalten habe. Das Werk des Viviani hat den Titel: De maximis et minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum. Liber I. Florentiae 1659. Liber II. ib. eod. 154 Seiten in folio jedes. Das erste Buch hat mit dem Vortrage des Apollonius nichts gemein. Es wird darin gezeigt, wie durch einen Scheitel eines Kegelschnittes in anderer, der ein größter sey, eingeschrieben, oder der ein kleinster sey, umgeschrieben werde. Für die gesuchte Ellipse oder Hyperbel ist die Hauptaxe gegeben. Die eingeschriebene oder umgeschriebene Figur schneidet die gegebene nicht, berührt sie nur im Scheitel. Statt des Kegelschnittes wird auch ein gegebener geradlinichter Winkel genommen. Es ist leicht zu bemerken, daß beide Kegelschnitte in dem Scheitel einen gemeinschaftlichen Halbmesser der Krümmung haben. Der Krümmungskreis ist größer als alle berührende Kreise, die innerhalb der Curve fallen, und kleiner als alle, die über derselben hinaus liegen. Viviani hat den Halbmesser der Krümmung an dem Scheitel eines Kegelschnittes gebraucht, ohne ihn als solchen zu kennen.

In dem zweyten Buche handelt Viviani zuerst von den größten oder kleinsten Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelschnitt sich ziehen lassen. Doch hat seine Ausführung nicht die schöne systematische Einheit wie bey Apollonius; auch fehlen die feinsten Sätze, welche der griechische Geometer gefunden hat. Merkwürdig ist, daß hier (prop. 21.) zuerst eine Trajectoria vorkommt, die Semita minimarum linearum, wie Viviani sie nennt, für unendlich viele Parabeln über einer

gemeinschaftlichen Axe mit ihrem Scheitel, so daß die geraden Linien von einem Puncte der Axe jede eine der Parabeln in der Trajectoria senkrecht schneiden. Der gedachte Punct ist von dem Scheitel um den halben Parameter einer gegebenen Parabel entfernt; die Trajectoria ist eine Ellipse, welche die Parabel innerlich berührt.

Viviani hat noch einige ihm eigene Untersuchungen. Durch einen Punct innerhalb eines Kegelschnittes eine gerade Linie zu ziehen, die den kleinsten Abschnitt gebe. Vergleichung der Abschnitte über den Doppelordinaten verschiedener Durchmesser desselben Kegelschnittes mit gleichen Abschnitten des Durchmessers von dem Scheitel an genommen. Kleinste Linien an eine convexe oder concave Fläche. Kleinste Abschnitte in einem Konoid oder Sphäroid. Übrigens sind in dem Werke des Viviani manche Bemerkungen über die Kegelschnitte enthalten, die zu seiner Zeit neu seyn mochten, vielleicht auch noch jetzt benutzt werden könnten.

In dem achten Buche der Kegelschnitte von Apollonius kommen noch manche Sätze vom Größten und Kleinsten in Beziehung auf die conjugirten Durchmesser und Parameter derselben vor, als: Die Summe zweyer conjugirten Durchmesser in der Ellipse ist am größten, wenn sie gleich groß sind. In der Ellipse und Hyperbel ist die Summe der beiden Axen kleiner als die Summe je zweyer andern conjugirten Durchmesser. Das Rechteck von den beiden Axen ist kleiner als das Rechteck von irgend zwey conjugirten Durchmessern (Ellipse 26. 25. 23.). Der Parameter zu der Axe einer Parabel ist unter allen Parametern der Durchmesser der kleinste. Dergleichen Sätze findet Apollonius von dem Unterschiede eines Durchmessers und seines Parameters (laterum figurae super diametro), ihrer Summe, des Rechtecks von ihnen, der Summe und des Unterschiedes ihrer Quadrate.

Von der zweyten Gattung des Größten und Kleinsten, zwischen Größen von verschiedener Form mit einer gemeinschaftlichen Bestimmung hat uns Pappus aus der

Geometrie der Alten Beyspiele aufbehalten, in dem fünften Buche seiner mathematischen Sammlungen. Er zeigt, daß eine geradlinichte reguläre Figur größer ist als jede andere geradlinichte Figur von derselben Anzahl Seiten mit demselben Umfange, und umgekehrt, daß bey demselben Umfange der Inhalt mit der Anzahl der Seiten zunimmt; daß der Kreis größer ist als jede geradlinichte Figur von gleichem Umfange mit jenem, auch umgekehrt; und endlich, daß unter Kreisabschnitten von gleicher Länge der Bogen der Halbkreis der größte ist. Von der Kugel beweiset Pappus, daß sie größer ist, als jeder reguläre Körper von gleicher Oberfläche mit der Kugel. Der Beweis läßt sich auf alle um eine Kugel zu beschreibende Körper ausdehnen. Von den regulären Körpern beweiset er, daß bey einerley Oberfläche, die Ordnung nach der zunehmenden Größe des Inhalts ist, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum. Dodekaedrum, Ikosaedrum.

Als die neuere Analysis sich zu bilden anfieng, war nebst der Aufgabe über die berührenden, eine mit dieser verwandte wichtige Frage, die größten oder kleinsten Werthe zu finden, womit sich die Mathematiker beschäftigten. Fermats Methode ist in dem Artikel, Differentialrechnung, Th. I. S. 828. beschrieben. Sie erstreckte sich nicht weiter als auf rationale ganze Functionen, und entschied nicht, ob das gefundene ein Größtes oder Kleinstes sey, nahm auch nicht Rücksicht auf den Fall, da das Differential einer Function Null ist, ohne daß dieses ein Größtes oder Kleinstes ist.

Hudde gab für rationale Functionen, selbst für gebrochne, eine genau bestimmte Regel, ihren größten oder kleinsten Werth zu finden, welche er auf Functionen von mehrern veränderlichen (nach ihm unbekannten) ausdehnt, wenn so viele Gleichungen als veränderliche Größen, weniger eine, vorhanden sind. Er gründet seine Methode auf eine Eigenschaft derer Gleichungen, in welchen zwey oder mehr Wurzeln gleich groß sind. Wenn die Glieder derselben, die etwa fehlenden mit gerechnet,

durch die Glieder einer arithmetischen Progression multiplicirt werden, so entsteht eine Gleichung, welche eine von den zwey gleichen Wurzeln jener, oder zwey von den drey gleichen, drey von den vier gleichen u. s. f. enthält. Hudde's Verfahren kommt mit demjenigen, welches die Differentialrechnung lehrt, ganz überein. Sein Aufsatz hierüber ist in den Zusätzen der von van Schooten besorgten Ausgabe der Geometrie von Descartes enthalten, pag. 507. In dem am Ende beygefügten Abrisse einer Abhandlung über diese Materie bemerkt Hudde schon, daß es Fälle gebe, wo man nicht wisse, ob die nach seinem Verfahren gefundene Gleichung ein Größtes oder ein Kleinstes liefere, oder ob überhaupt das eine oder das andere Statt habe.

In Huygens Werken, 2. Bd. ist ein Beweis von Fermats Regel nebst der Erweiterung auf gebrochne rationale Functionen zu finden.

Tschirnhausen brachte die Frage vom Größten und Kleinsten auf diese, den Punct einer Curve zu finden, wo die berührende der Abscissenlinie parallel ist. Nova methodus determinandi maxima et minima, auct. D. T. Acta Erud. 1683.

Die Differentialrechnung gab die allgemeinste, kürzeste und einleuchtendste Methode zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe einer Function an die Hand. Newton trägt in seiner Schrift, Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Probl. III. diese Aufgabe vor, löset sie dadurch auf, daß er die Fluxion der Function Null setzt, und zeigt noch neun Aufgaben, das Größte oder Kleinste betreffend, an, ohne ihre Auflösung mitzutheilen. Einige derselben möchten nicht leicht seyn. Die Schrift ist schon im Jahr 1671 aufgesetzt, s. Th. I. S. 833.

Leibnitz machte seine Differentialrechnung zugleich mit ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Größten und Kleinsten bekannt, in den Actis Erud. 1684. s. Th. I. S. 842. Die Aufgabe von dem Tage der kürze-

sten Dämmerung scheint eine der ersten gewesen zu seyn, woran die beiden Bernoulli die neue Methode versuchten. Diese Aufgabe machte ihnen aber doch viel zu schaffen, da Johann Bernoulli gesteht, daß er und sein Bruder sich fünf Jahre lang damit beschäfftigt hätten. Io. Bernoulli Opp. T. I. nr. 10. Iac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 53. T. II. p. 1075. Doch hatte Nunnez (Nonius) in Portugall die Aufgabe geometrisch aufgelöset, in einer besondern Schrift über die Dämmerungen, Lissabon 1542, nur daß er nicht ein so einfaches Resultat wie die beiden Bernoulli fand.

Joh. Bernoulli legte den Geometern einige geometrische Aufgaben vor, worin ein Kleinstes zu bestimmen gefordert wird, daß sie ihre Methoden daran versuchen möchten. Iourn. des Sc. 1697. Opp. I. 39. Er bestimmte, auf welcher Cykloide ein Körper von einem gegebenen Puncte bis zu einer gegebenen lothrechten in der kürzesten Zeit fällt. Opp. T. I. p. 210. 254. Weniger schwer waren die Auflösungen der Frage, die vortheilhafteste Lage eines Segels zu finden, gegeben die Richtung des Windes und des Kiels; auch den vortheilhaftesten Winkel des Steuerruders mit dem Kiel zur Drehung des Schiffes zu bestimmen. Opp. T. II. p. 32. 41. Noch ein paar Fragen über Größte bey dem Stoße, Opp. T. III. p. 62. 64. Jacob Bernoulli zeigte, wie auf krummlinichten und geradlinichten Konoiden die kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Puncten gefunden werde, Opp. T. II. p. 1023. 1025.

Am bekanntesten ward die Methode, mittelst der Differentialrechnung die Größten und Kleinsten zu bestimmen, durch des Marquis de l'Hospital Analyse des infiniment petits, erste Ausg. 1696, worin (Sect. III.) an mehreren nicht schweren Beyspielen der Gebrauch der Rechnung gezeigt wird. In dem letzten Abschnitte wird noch ein besonderes Verfahren gelehrt, die Differentialrechnung auf algebraische Curven anzuwenden, um die größten oder kleinsten Ordinaten zu bestimmen, woraus

die von Hudde gefundene Methode hergeleitet wird, die nur für diese Gattung von Curven anwendbar ist.

Die Fälle, wo ein Größtes, oder ein Kleinstes, oder keines von beiden vorhanden ist, wenn gleich das Differential der Function in Vergleichung mit dem Differential der Functionalgröße Null ist, zu unterscheiden, gebrauchte man entweder geometrische Constructionen, oder, wie in diesem Artikel geschehen ist, den Taylorschen Lehrsatz. In Maclaurins Werke über die Fluxionen (1742) trifft man beide Methoden an, im I. B. 9 Kap. und II. B. 5. Kap. Die geometrische ist sehr künstlich und schwierig. Maclaurin nimmt neben der vorgegebenen Curve, an welcher die größten oder kleinsten Ordinaten bestimmt werden sollen, eine zweyte Curve an, deren Ordinaten dem Differentialquotienten $\partial y : \partial x$ proportional sind, wo x die Abscissen, y die Ordinaten an jener sind. Ob in frühern Schriften schon die bestimmte Regel für alle Fälle gegeben sey, muß ich der Nachforschung gelehrter Leser überlassen.

Cramer bestimmt in seiner Analyse des lignes courbes algébriques die Lage der berührenden an einer Curve bloß durch die Analysis des Endlichen, daher auch im 11ten Kap. die Puncte der größten und kleinsten Ordinaten durch die Annahme, daß die berührende der Abscissenlinie parallel sey, mit Rücksicht auf die hier möglichen Beschränkungen bestimmt werden.

Euler hat in dem zweyten Theile seiner Differentialrechnung, Cap. X. XI. die Lehre von den größten und kleinsten Werthen einer Function sehr lichtvoll vorgetragen, und sie auf den Taylorschen Lehrsatz gegründet. Der Mangel, den sein Vortrag noch bey Functionen von zwey veränderlichen Größen hat, ist von la Grange in den Miscellaneis Soc. Taurin. T. I. gehoben, s. oben 54.

Über die Vergleichungen der Figuren und Körper, die in der Elementar-Geometrie betrachtet werden, in Beziehung auf den Inhalt bey denselben Begränzungen durch Seitenlinien oder Seitenflächen ist ein Hauptwerk

die in (25.) angeführte Schrift von L'Huilier. Aus der historisch-kritischen Einleitung gebe ich hier das Verzeichniß der darin beurtheilten Schriften und Abhandlungen, die zum Theil auch sich auf die isoperimetrische Aufgabe erstrecken.

De Molieres traité synthétique des lignes du premier et du second genre, 1641.

Moula de maximis in figuris rectilineis, Comm. Ac. Petrop. a. a. 1737.

Elvius Beweis, daß jede in einem Kreise eingeschriebene geradlinichte Figur den größten Raum einschließet, der von diesen Seiten, in eben der Ordnung gestellt, eingeschlossen werden kann. Abhandlungen der Schwed. Ak. der Wiss. 3r Band. Der Zusatz, in eben der Ordnung gestellt, ist unnöthig.

Klingenstierna Bemerkungen über die Abhandlung von Elvius. Eb. das, 4r Bd.

Eine Abhandlung von Cramer über denselben Satz in den Mem. de l'Acad. de Berlin für J. 1752.

In Thomas Simpsons Anfangsgründen der Geometrie ist ein kurzer aber sehr feiner Aufsatz über die Größten und Kleinsten enthalten.

Les trois coups d'essai géométriques par *Marsson*, à Strasbourg 1770. Scharfsinnig, aber auch hin und wieder übereilt.

Tommasini de maximis et minimis ad institutiones geometricas accommodatis Specimen, Pisis 1774. In einigen Stellen fehlt die Schärfe der Beweise, und die Anordnung hätte zur Faßlichkeit besser gemacht werden können.

L'Huilier hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1781 einen lehrreichen Aufsatz über den Bau der Bienenzellen geliefert. Die Bienenzellen sind sechsseitig prismatisch mit einem pyramidalischen Boden, der von drey Rhomben zusammengesetzt wird, welche an jeder der sechs Seitenflächen ein Dreyeck abschneiden, wodurch

die sechs Seitenflächen in Trapezien verwandelt werden. Die drey Rhomben des Bodens machen mit den Seitenflächen und unter sich Winkel von 120 Grad, eben so wie die Seitenflächen mit einander, kleine Ungleichheiten nicht gerechnet. Nun findet sich, daß bey einer gegebenen Höhe der Zelle, durch diese Lage der rhomboidischen Bodenflächen, und die daraus entspringende Größe derselben, der Aufwand an Wachs zur Construction des Bodens am geringsten ist, und daß er sich zu dem Aufwande bey einem flachen Boden verhält wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$, oder nahe wie 141 : 173. Allein, wenn die möglichste Ersparung des Wachses bey diesem Bau die Hauptabsicht wäre, so würde, bey einem gegebenen räumlichen Inhalte, die Höhe der Zellen sich zu einer Seitenlinie der Grundfläche oder des Durchschnittes wie $1 : \sqrt{2}$ (wie 100 : 141. nahe), und zu dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhalten müssen. Die Ersparung könnte noch weiter getrieben werden, wenn anstatt des Bodens von drey Rhomben eine Pyramide von sechs Seitenflächen mit einer gewissen Höhe genommen würde. L'Huilier bemerkt sehr richtig, daß die Ersparung an Wachs nur ein Nebenzweck sey, oder vielmehr gar nicht in Betracht komme. Zellen, die eine so geringe Tiefe in Vergleichung mit ihrem Durchmesser (100 : 282) hätten, wären nicht tauglich, die junge Brut vor nachtheiligen Wirkungen und Gefahr von Insecten zu schützen. Die Festigkeit des ganzen Baues ist es, welche durch die sechsseitige Gestalt der Zellen mit einem Boden von drey Rhomben auf das vortheilhafteste erhalten wird.

Pappus macht in der Vorrede zu dem Buche von isoperimetrischen Figuren, dem Fünften seiner Sammlung, die Bemerkung, daß die sechsseitige Gestalt der Bienenzellen unter denjenigen, welche um einen Punct herum den Raum ausfüllen, von den Bienen deshalb gewählt sey, weil sie merkten, daß diese Gestalt mehr Raum gewähre als die dreyseitige und vierseitige.

Kepler erwähnt einmahl nebenher des dreyseitigen Bodens der Bienenzellen und der Eingreifung von beiden

Reihen derselben in der Harmonice mundi prop. 27. Maraldi bestimmte die Winkel der Rhomben, und zeigte, wie durch die Einschichtung der pyramidalichen Böden zwischen einander die Festigkeit der Zellen in den Wachsscheiben bewirkt wird, in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1712. Reaumur gab den Geometern die Untersuchung auf, ob durch die Gestalt des Bodens eine Ersparung an Wachs erhalten würde. König lieferte eine Abhandlung darüber, wovon ein Auszug in den gedachten Memoiren vom J. 1739 zu finden ist. Hernach hat Maclaurin in den Philos. Trans. für 1743 die Untersuchung vorgenommen, auch Boscowich in seiner Ausgabe des philosophisch-physikalischen Lehrgedichts von Bened. Stay, Rom 1760. L'Huilier hat die angeführte Abhandlung mit einigen Abänderungen in die Schrift de relatione mutua etc. eingerückt. Ich habe auch in dem Hannöverischen Magazin vom Jahr 1772. St. 23. Betrachtungen über den Bau der Bienenzellen angestellt. Ich fand die Gleichheit aller Flächenwinkel, und das Minimum in dem Aufwande von Wachs, bemerkte auch dabey, daß das letztere eine geometrische Folge von jener ist. Die Bienen wissen Wachsflächen bloß unter einem Winkel von etwa 120 Grad an einander zu fügen, und dabey den Zellen eine gehörige Länge und Weite nach Maaßgabe ihres eigenen Körpers zu geben. Nicht die Ersparung an Wachs, wozu keine nöthigende Ursache war, sondern die Zusammenfügung der Zellen aus zwey parallelen Reihen ist das kunstreiche. Je drey Zellen lassen zwischen ihren Böden eine Vertiefung, welche den Boden einer Zelle in der gegen über liegenden Reihe abgiebt, und die gemeinschaftliche Kante je dreyer Zellen dient zum Schlußstein für den Boden der entgegengesetzten Zelle. Die Vertiefung hat, nach Maraldi's Bemermerkung, den Nutzen, daß die Tropfen Honig, welche die Bienen der jungen Brut zur Nahrung bringen, dicht um sie herum zusammen fließen. Dazu setze ich nun noch, daß die Zellen eine hinlängliche Tiefe erhalten mußten, um zu Behältern des Honigs tauglich zu seyn.

Grundfläche (basis) ist die ebene Figur, über welcher ein Prisma, ein Kegel, ein Konoid errichtet ist. Den Durchschnitt eines Körpers mag man auch die Grundfläche des einen körperlichen Segments nennen, insbesondere bey runden Körpern, die durch die Umdrehung einer ebenen Figur um ihre Axe entstanden sind.

Grundlinie (basis) ist die gerade Linie, über welcher ein Dreyeck, Parallelogramm oder Trapezium errichtet ist. Auch die Durchschnittslinie einer ebenen Figur ist die Grundlinie des Segments, besonders, wenn sie und alle ihr parallelen durch eine gewisse gerade Linie halbirt werden.

Im Lateinischen ist nur ein Wort, basis, für zwey Begriffe, die man im Deutschen durch Grundfläche und Grundlinie unterscheidet.

An Kegeln und Konoiden sind Grundfläche und Scheitel das äusserste sich entgegengesetzte; in einem Dreyecke Grundlinie und Spitze.

Grundsatz ist ein Satz, der für sich so augenscheinlich ist, daß er keines Beweises bedarf. Man kann die Grundsätze eintheilen in logische oder formale, und in materiale. Die erstern enthalten eine Schlußform, die der Mathematik eigen ist. Dahin gehören die sieben ersten Grundsätze in dem 1. Buche der Euklidischen Elemente. Was einem und eben demselben gleich ist, ist selbst gleich. Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches u. s. f. S. Beweis. Th. I. S. 301. Die materiellen Grundsätze fließen unmittelbar aus dem Begriffe, den sie betreffen. Was einander deckt, ist gleich. Das Ganze ist größer als sein Theil. Alle rechte Winkel sind einander gleich. Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich groß.

Der 11te Grundsatz bey Euklides, die parallelen geraden Linien betreffend, ist nicht so wohl ein Grundsatz, als vielmehr der umgekehrte Satz eines streng erweisbaren Satzes.

Grundzahl ist dasselbe was Primzahl[1], und könnte recht gut zur Verdeutschung dieses halbfremden Wortes gebraucht werden. S. Primzahl.

Guldins Kegel, s. Centrobaryca methodus.

H.

Halbmesser (Semidiameter), die Hälfte eines Durchmessers einer Curve. Im Kreise sind alle Halbmesser sich gleich. Hier heißt der Halbmesser auch der Radius.

Hapsologarithmus, Logarithme der Tangente eines Winkels, ein nicht üblich gewordenes Kunstwort. S. Anthapsologarithmus.

Harmonische Proportion ist zwischen vier Größen, a, b, c, d, wenn $a-b : c-d = a : d$; eine stetige zwischen drey Größen, a, b, c, wenn $a-b : b-c = a : c$ ist. Z. B. 5, 3, 21, 15, oder 3, 5, 8, 24, und 2, 3, 6.

In dem ersten Falle ist $(a-b)d = (c-d)a$, woraus folget $(2a-b)d = ac$, und $d = \frac{ac}{2a-b}$, so wie $a = \frac{b.d}{2d-c}$. Das vierte Glied wird auf einerley Art gefunden, die Proportion mag zunehmend oder abnehmend seyn.

Für eine stetige Proportion ist $c = \frac{ab}{2a-b}$; und das mittlere Glied $b = \frac{2ac}{a+c}$.

Das arithmetische Mittel zwischen zwey Zahlen, verhält sich zu dem geometrischen, wie das geometrische zu dem harmonischen Mittel.