Exponentialrechnung ist die Entwickelung solcher Relationen, die von Exponentialgrößen abhangen. Sie hat es entweder bloß mit diesen und andern endlichen Größen zu thun, oder sie führt zugleich ihre Differentiale ein. Zu jener Rechnung mit endlichen Größen ist in den vorhergehenden Artikeln Anleitung gegeben. Sie erfordert nur, daß man mit der Potenzenrechnung und der Theorie der Logarithmen bekannt sey. Von der zweyten ist in dem Artikel, Differentialformeln, IV. gehandelt.

Leibnitz und Joh. Bernoulli haben diese Rechnung jeder für sich erfunden. s. Differentialrechnung, Th. I. S. 858.

Exterminatio ist eben das was eliminatio, s. Artikel, Elimination.

Extrema et media ratio bey der Eintheilung einer geraden Linie ist, wenn die ganze sich zu dem größern Abschnitte, wie dieser sich zu dem kleinern verhält. Es ist also so viel als eine Linie nach einer stetigen Proportion theilen. S. Euklides Elemente. B. VI. Erkl. 3. und VI. 30. auch II. 11. Die Aufgabe kommt bey ihm zweymahl vor. Sie ist in dem ersten Theile dieses Wörterbuchs auch zweymahl aufgelöset, einmahl nach einer geometrischen Analysis, S. 91. zum zweytenmahl durch algebraische Rechnung, S. 110.

Die Aufgabe wird zu der Verzeichnung eines gleichseitigen Fünfecks gebraucht. Man hat ehedem auch diese Eintheilung die sectio divina genannt.

Eylinie, Eyrundung. s. Ovale.

F.

Facit ist die Antwort auf eine numerische Rechnungsfrage, als die gesuchte Summe vorgegebener Größen, das Product zweyer Zahlen, das vierte Glied einer Proportion, von welcher drey Glieder gegeben sind. Die Auflösung einer

allgemeinen Frage zeigt, wie das gesuchte aus den gegebenen Größen zusammengesetzt wird.

Factor heißt jede der beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, wodurch eine Zahl entsteht, welche das Product, Factum, genannt wird, s. Multiplication. Ein Factor kann wiederum ein Product von zwey Factoren seyn, und so kann eine Zahl aus vielen Factoren bestehen. Von der Zerlegung einer Zahl in ihre einfachsten Factoren, s. Theilbare Zahl.

Ein Aggregat von Größen, die ihrer Quantität nach unbestimmt gelassen werden, eine algebraische oder analytische Formel, in Factoren zu zerlegen, ordnet man es nach den Potenzen einer der darin vorhandenen Größen, und setzt das Aggregat $= o$, um die Formel wie eine Gleichung behandeln zu können. Eine Gleichung

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots + k = o,$$

habe die Wurzeln p, q, r, s, etc. so ist sie ein Product aus den Factoren $x-p$, $x-q$, $x-r$, $x-s$, etc. Sind die Wurzeln alle mögliche Größen, so ist das Aggregat von ihren Terminis ein Product von m einfachen Factoren, wie $x-p$ ist. Um die Gleichung zu erfüllen, muß einer dieser Factoren Null gesetzt werden; soll das Aggregat irgend einen Werth haben können, so bleibt der Werth von x unbestimmt. Hat die Gleichung unmögliche Wurzeln, zwey, oder vier, oder überhaupt eine gerade Anzahl derselben, so giebt jedes Paar zusammengehöriger unmöglicher Wurzeln einen möglichen trinomischen Factor, $xx - \alpha x + \beta\beta$ wo $\beta\beta > \frac{1}{4}\alpha\alpha$ ist. Die Zerlegung eines allgemeinen Ausdrucks einer zusammengesetzten Größe in Factoren hängt also von der Auflösung der Gleichungen ab.

Bey der Differentiation einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen kann ein veränderlicher Factor in der Differentialgleichung entstehen. Eine gegebene Differentialgleichung kann daher von der Beschaffenheit seyn, daß der Factor fehlt, den sie haben muß, um die endliche Gleichung aus ihr zu erhalten, so daß sie ohne denselben

nicht integrirbar ist. Dieser Factor muß also wieder hergestellt werden. Es ist oft nicht leicht ihn zu finden. S. Integration der Differentialgleichungen.

Facultät, numerische, ist ein Product aus Factoren, die in arithmetischer Progression auf einander folgen. Diese sey, a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$ .... $a+mr-r$, so ist das Product dieser m Glieder eine numerische Facultät. Unter dieser Benennung begreife man auch die Quotienten von zwey solchen Producten mit gleich vielen Factoren.

1. Euler hat zu allererst in seiner Differentialrechnung, P. II. cap. 16. 17. diese Form einer Größe nebst andern verwandten betrachtet, die er zusammen functiones inexplicabiles nennt. Vandermonde hat darüber eine Abhandlung in den Schriften der Pariser Akademie vom J. 1772. geliefert, und eine eigne Bezeichnungsart dazu gebraucht. Kramp hat kürzlich die Natur der von ihm so benannten numerischen Facultäten ausführlich untersucht, ihre Entwickelung in andere Formen gelehrt, und ihre Anwendung in der höhern Analysis gezeigt. Diese mit vielem Scharfsinn ausgeführte Theorie nimmt einen beträchtlichen Theil seines Werkes über die Strahlenbrechung ein: Analyse des refractions astronomiques et terrestres, à Leipsic, 1799. 210 pag. in 4. Die Benennung, Facultät, ist, wie man sieht, dem Kunstwort, Potenz oder Dignität, analog. Lacroix nennt das Product aus Factoren mit gleichen Unterschieden, von dem Factor x an, eine puissance de x du second ordre, in dem Traité des différences et des Series, à Paris. 1800, worin von dieser analytischen Form mehreremale Gebrauch gemacht wird.

2. Man nehme folgeweise einen, zwey, drey, und so fort mehrere Factoren, so erhält man eine Reihe von Größen, die nur in einer Absicht ein gemeinschaftliches Gesetz der Zusammensetzung haben, in anderer aber, nämlich in der Anzahl der Factoren, unterschieden sind, nämlich:

$$\overset{1}{a}, \quad \overset{2}{a(a+r)}, \quad \overset{3}{a(a+r)(a+2r)}$$

$$\overset{4}{a(a+r)(a+2r)(a+3r)} \ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{m}{a(a+r)\ldots(a+mr-r)}.$$

Die Form dieser Glieder läßt sich durch die Stelle m nicht auf eine übereinstimmende Art angeben, wie es bey algebraischen und transscendenten Functionen angeht, in welchen die veränderliche Größe, die als Stellenzahl dient, zwischen zwey endlichen Werthen alle mögliche dazwischen liegende haben kann, daher die Function sich auf eine stetige Art verändert. Die numerischen Facultäten ändern sich sprungweise. Man kann in einer Reihe von Größen dieser Form keine einschalten, ohne die Art der Formation wesentlich zu ändern. Darum nannte Euler sie functiones inexplicabiles.

3. Den ersten Factor einer numerischen Facultät nenne man die Basis; die Anzahl der Factoren den Exponenten. Kramp bezeichnet eine Facultät, deren Basis a, Exponent m, und in deren zugehörigen Progression der Unterschied der Glieder r ist, durch $a^{m|r}$. Ist der Exponent eine zusammengesetzte Zahl, wie $m+n$, so ist die Bezeichnung, $a^{(m+n)|r}$, oder auch $a^{m+n|r}$, wo das Exponentenzeichen sich auf alle vorhergehende Theile bezieht. Es ist, wenigstens im Schreiben, bequemer statt des Buchstaben I ein Komma zu gebrauchen, wie in $a^{m,r}$ oder $a^{m+n,r}$. Diese Bezeichnung wird in dem gegenwärtigen Artikel gebraucht werden.

4. Den letzten Factor einer Facultät kann man zum ersten nehmen. Die Facultät sey

$$a(a+r)(a+2r)\ldots(a+mr-r),$$

so ist, wenn $a+mr-r=b$ gesetzt wird,

$$a^{m,+r} = b^{m,-r}.$$

Hieraus sieht man, wie Facultäten mit entgegengesetzten Differenzen eine in die andere verwandelt werden, wobey aber eine Umänderung der Basis geschieht.

5. Der Exponent bestehe aus zwey Theilen, $m+n$, so ist die Facultät, $a(a+r)\ldots(a+mr-r)(a+mr)\ldots(a+(m+n-1)r)$, also ist

$$a^{m+n,r} = a^{m,r}(a+mr)^{n,r},$$

und auch

$$a^{m+n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r},$$

wo zu dem ersten Factor n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, genommen sind, und zu dem andern Factor die übrigen von $a+nr$ an.

6. Daraus folgt $a^{m,r}(a+mr)^{n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r}$.

7. Exempel. Es ist das Product $1.2.3\ldots 2n$ gleich dem Producte der beiden Producte oder Facultäten, $1.3.5\ldots 2n-1$. und $2.4.6\ldots 2n$, oder $(1.2.3\ldots n)2^n$. Nach der angenommenen Bezeichnung ist nun $1^{2n,1} = 1^{n,2} \times 1^{n,1}\, 2^n$. Aus (5.) ist $1^{2n,1} = 1^{n,1}(1+n)^{n,1}$. Folglich ist $(1+n)^{n,1} = 1^{n,2}.2^n$, das ist, $1+n.2+n\ldots 2n = 1.3.5\ldots(2n-1).2^n$. Dieser Satz ist in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, 12. gebraucht, und daselbst auf eine andere Art erwiesen worden.

8. Es sey n kleiner als m, so ist $\frac{a^{m,r}}{a^{n,r}} = (a+nr)^{m-n,r}$. Denn von den m Factoren des Zählers werden n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, durch die Division mit dem Nenner abgeschnitten, und es bleiben $m-n$ Factoren von $a+nr$ bis $a+(m-1)r$.

9. Der Exponent in dem Nenner sey größer als in dem Zähler, so ist $\frac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = \frac{1}{(a+mr)^{n,r}}$.

Wenn dieser Fall dem nächstvorhergehenden gleich behandelt wird, so ist

$$\frac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = (a+(m+n)r)^{-n,r},$$

und es ist

$$(a+(m+n)r)^{-n,r} = \frac{1}{(a+mr)^{n,r}},$$

Es sey $a+(m+n)r = b$, so ist

$$b^{-n,r} = \frac{1}{(b-nr)^{n,r}},$$

$$\text{oder } b^{-n,r} = \frac{1}{(b-r)^{n,-r}}.$$

Diese Ausdrücke sind dem für Potenzen, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, analog.

10. Man multiplicire auf beiden Seiten der vorletzten Formel in (9.) mit $(b-nr)^{m,r}$, wo m größer als n sey, so ist $(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = \frac{(b-nr)^{m,r}}{(b-nr)^{n,r}}$.

Der Zähler des Bruches ist das Product

$$b-nr.b-nr+r\ldots b-r.b..b+(m-n)r-r.$$

Der Nenner ist das Product $b-nr\ldots b-r$. Also ist

$$(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = b^{m-n,r}.$$

Diese Formel folgt aus der zweyten in (5.) wenn daselbst n negativ genommen wird.

11. Die Differenz sey negativ, so ist, $n<m$ gesetzt, $\frac{a^{m,-r}}{a^{n,-r}} = (a-nr)^{m-n,-r}$, und $\frac{a^{m,-r}}{a^{m+n,-r}} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$.

Wenn der letztere Fall dem erstern gleich behandelt wird, so ist der Quotient $= (a-(m+n)r)^{-n,-r} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$. Setzt man $a-(m+n)r = b$, so ist

$$b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+nr)^{n,-r}},$$

oder auch $b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+r)^{n,r}}$.

12. Es ist $b^{0,+r} = 1$, und $b^{0,-r} = 1$, so daß 1 das gemeinschaftliche Glied der beiden Reihen

$1;\ b;\ b(b+r);\ b(b+r)(b+2r);$ etc. und

$1;\ \frac{1}{b-r};\ \frac{1}{(b-r)(b-2r)};$ etc. ist, so wie der Reihen $1;\ b;\ b(b-r);\ b(b-r)(b-2r);$ etc. und

$1;\ \frac{1}{b+r};\ \frac{1}{(b+r)(b+2r)};$ etc.

Auch ist, wenn in der letzten Formel (11.) die Basis $b = 0$ gesetzt wird

$$0^{-n,-r} = \frac{1}{r^{n,r}} = \frac{1}{r.2r\ldots nr}.$$

13. Die numerischen Facultäten sind ganz leicht zu behandeln, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, diese mag positiv oder negativ seyn. Allein wenn der Exponent ein Bruch ist, so entsteht eine Schwierigkeit, da eine Facultät mit gebrochnem Exponenten eine andere Form erhalten muß als eine, deren Exponent eine ganze Zahl ist. Die Formel $a^{\frac{m}{n},r}$ kann nichts anders bedeuten als ein in der Reihe der Facultäten mit ganzen Exponenten eingeschaltetes Glied zwischen den beiden Gliedern, deren Stellenzahlen die dem Bruche $\frac{m}{n}$ nächsten ganzen Zahlen sind.

In dem Artikel, Einschalten, §. 40. ff. ist gezeigt, wie eine Reihe von Facultäten interpolirt wird. Es ist, wenn daselbst in (44.) für $m+\omega$ gesetzt wird $\frac{m}{n}$, und r für b,

$$a^{\frac{m}{n},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\,etc.}{a+\frac{mr}{n}.a+\frac{mr}{n}+r.a+\frac{mr}{n}+2r.\,etc.},$$

oder, wenn $a+\frac{mr}{n}=b$ gesetzt wird, welches b aber mit dem in jenem Artikel gebrauchten b (hier r) nicht zu verwechseln ist,

$$a^{\frac{b-a}{r},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\,etc.}{b.b+r.b+2r.\,etc.}.$$

14. Eben so ist $b^{\frac{a-b}{r},r} = \frac{b.b+r.\,etc.}{a.a+r.\,etc.}$, also ist $b^{\frac{a-b}{r},r} = 1:a^{\frac{b-a}{r},r}$, oder

$b^{-\frac{m}{n},r} = 1:a^{\frac{m}{n},r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n},r} = 1:\left(b-\frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n},r},$$

wie für ganze Exponenten in (9.).

15. Für eine negative Differenz ist auf ähnliche Art, wie für eine positive,

$$a^{\frac{m}{n},-r} = \frac{a.a-r.a-2r.\,etc.}{a-\frac{mr}{n}.a-\frac{mr}{n}-r.\,etc.}.$$

Nun sey $a-\frac{mr}{n}=b$, so ist auf gleiche Art wie in (14.), $b^{-\frac{m}{n},-r} = 1:a^{\frac{m}{n},-r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n},-r} = 1 : \left(b + \frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n},-r},$$

wie für ganze Exponenten in (11.). Aber die zweyte Form daselbst ist hier nicht anwendbar. Die in (4.) gezeigte Verwandlung einer Facultät in Rücksicht der Differenz hat bey gebrochnen Exponenten nicht statt.

16. Das Product zweyer Facultäten mit gebrochnen Exponenten, $a^{\frac{b-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r}$, ist

$$= \frac{a.\alpha.a+r.\alpha+r.a+2r.\alpha+2r.\text{ etc.}}{b.\beta.b+r.\beta+r.b+2r.\beta+2r.\text{ etc.}}$$

Eben diesen Bruch giebt das Product der beiden Facultäten, $a^{\frac{\beta-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r},r}$. Also ist

$$a^{\frac{b-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r} = a^{\frac{\beta-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r},r}.$$

17. Es sey $\alpha = b$, so ist $a^{\frac{b-a}{r},r} \times b^{\frac{\beta-b}{r},r}$

$= \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{\beta.\beta+r.\beta+2r.\text{ etc.}}$. Dieser Bruch ist

$= a^{\frac{\beta-a}{r},r}$, also ist $a^{\frac{b-a}{r},r} \times b^{\frac{\beta-b}{r},r} = a^{\frac{\beta-a}{r},r}$.

Man setze die Exponenten $\frac{b-a}{r} = m$; $\frac{\beta-b}{r} = n$, so ist $a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{m+n,r}$, für gebrochne positive Exponenten wie für ganze in (5.).

18. Es ist nämlich $a^{m,r} = \frac{a.a+r.\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$

und $(a+mr)^{n,r} = \frac{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\text{ etc.}}$;

also $a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} =$

$\frac{a.a+r.\text{ etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\text{ etc.}}$, das ist

$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{m+n,r}$, wie für ganze Exponenten in (5.).

Die Differenz r darf auch negativ genommen werden, so daß $a^{m,-r} \times (a-mr)^{n,-r} = a^{m+n,-r}$ ist.

19. Offenbar kann man m und n vertauschen, und es ist $a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r} = a^{m+n,r}$, also

$$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r},$$

wie für ganze Exponenten in (6.).

20. Auch ist $(a-nr)^{m,r}.a^{-n,r} = a^{m-n,r}$, wie für ganze Exponenten in (10.).

Denn $a^{-n,r} = \frac{1}{(a-nr)^{n,r}}$

$= \frac{a.a+r \text{ etc.}}{a-nr.a-nr+r. \text{ etc.}}$, und $(a-nr)^{m,r}$

$= \frac{a-nr.a-nr+r. \text{ etc.}}{a+(m-n)r.a+(m-n)r+r. \text{ etc.}}$ woraus der Satz unmittelbar folgt.

21. Die Division giebt $a^{\frac{b-a}{r},r} : \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r}$

$= \frac{a.\beta.a+r.\beta+r.a+2r.\beta+2r. \text{ etc.}}{b.\alpha.b+r.\alpha+r.b+2r.\alpha+2r. \text{ etc.}}$.

Eben diesen Bruch giebt auch der Quotient

$a^{\frac{\alpha-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r}.r}$, welcher also jenem Quotienten gleich ist.

22. Es sey $\alpha = b$; $\beta = a$, so ist

$$a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{a-b}{r},r} =$$

$$\frac{a.a.a+r.a+r.a+2r.a+2r. \text{ etc.}}{b.b.b+r.b+r.b+2r.b+2r. \text{ etc.}}.$$

23. Ist $\alpha = b$, so ist $a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r},r}$

$$= \frac{a.\beta.a+r.\beta+r.\text{ etc.}}{b.b.b+r\ b+r.\text{ etc.}}.$$

Ein Bruch wie dieser kann auch als das Product zweyer Facultäten betrachtet werden.

24. Es sey m eine gebrochne, und p eine ganze Zahl, so ist $a^{m,r} : a^{p,r} = (a+pr)^{m-p,r}$.

Denn $a^m = \frac{a.a+r..\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$,

und $a^{p,r} = a.a+r...a+pr-r$. Also ist

$$a^{m,r} : a^{p,r} = \frac{a+pr.a+pr+r\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$$

$= (a+pr)^{m-p,r}$.

Der Satz folgt auch aus (18.).

25. Es ist $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = \frac{mr}{a-r+mr} a^{m,r}$, auch für gebrochne Werthe von m. Man hat nur die Werthe der beiden Facultäten für diesen Fall zu entwickeln.

Da $a^{m-1,r}(a+mr-r) = a^{m,r}$ ist (18.), so ist $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = mr.a^{m-1,r}$.

Auch ist $(a+r)^{m,-r} - a^{m,-r}$

$= \frac{mr}{a+r-mr} a^{m,-r} = mr.a^{m-1,-r}$. Diese Formeln dienen zu der Differenzenrechnung für numerische Facultäten.

26. Exempel zu (22.). Es ist (Cyklometrie, 29.)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.\text{ etc.}}{1.1.3.3.5.5.\text{ etc.}}.$$

Also ist

$$\frac{1}{2}\pi = 2^{-\frac{1}{2},2} : 1^{\frac{1}{2},2}.$$

Da $2^{-\frac{1}{2},2} = 1 : 1^{\frac{1}{2},2}$, so ist

$$\frac{2}{\pi} = (1^{\frac{1}{2},2})^2.$$

27. Exempel zu (23.). Es ist (Cyklometrie, 28.)

$$\sin\tfrac{1}{2}m\pi = \frac{m.2 - m.2 + m.4 - m.\text{etc.}}{1 \;.\; 1 \;.\; 3 \;.\; 3 \;.\; \text{etc.}}.$$

Also ist $\sin\frac{1}{2}m\pi = m^{\frac{1-m}{2},2} : 1^{\frac{1-m}{2},2}$.

Setzt man $m = \frac{1}{2}$, so ist $\sin\frac{1}{2}m\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $\sqrt{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{4},2} : 1^{\frac{1}{4},2} = 1^{\frac{1}{4},4} : 2^{\frac{1}{4},4}$.

Wenn man in der Formel für $\sin\frac{1}{2}m\pi$ alle Factoren des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl multiplicirt, so werden die beiden Bases und die Differenz dadurch multiplicirt, der Exponent der Facultäten, oder die Stelle des eingeschalteten Gliedes, welches sie bedeuten, bleibt unverändert. Hier wird die Basis $\frac{1}{2}$ in 1, die Basis 1 in 2, und die Differenz 2 in 4 verwandelt.

Setzt man $m = \frac{1}{3}$, so ist $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, und $\frac{1}{2} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3},2} : 1^{\frac{1}{3},2} = 1^{\frac{1}{3},6} : 3^{\frac{1}{3},6}$.

28. Es ist

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m.1 - m.1 \mp m.2 - m.2 + m.\text{etc.}}{n.1 - n.1 + n.2 - n.2 + n.\text{etc.}}.$$

Folglich

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{n-m,1} : (1-n)^{n-m,1},$$

oder

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{1-m-n,1} : n^{1-m-n,1}.$$

Für m, n, und die Differenz 1 können auch Zahlen, die ihnen proportional sind, gesetzt werden.

29. Aus der Vergleichung der Formeln für $\sin \frac{m\pi}{2n}$ und $\cos \frac{m\pi}{2n}$, a. a. O. folgt

$$\tang \frac{m\pi}{2n} = \frac{m.2n - m.2n + m.4n - m.\ etc.}{n - m.n + m.3n - m.3n + m.\ etc.}.$$

Dieses giebt

$$\tang \frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{n-2m}{2n}, 2n} : (n+m)^{\frac{n-2m}{2n}, 2n},$$

und auch

$$\tang \frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{1}{2}, 2n} : (n-m)^{\frac{1}{2}, 2n}.$$

30. Die Form eines eingeschalteten Gliedes in der Reihe der Brüche, deren Zähler und Nenner numerische Facultäten sind, ist dieselbe mit der Form des Products oder des Quotienten zweyer numerischen Facultäten mit gebrochnem Exponenten. Jene Reihe sey

$$\frac{a}{b};\ \frac{a.a+r.}{b.b+r.};\ \frac{a.a+r.a+2r.}{b.b+r.b+2r.};\ etc.$$

Die Stelle eines eingeschalteten Gliedes Z sey z, die des ersten Gliedes als Eins genommen. Es ist (Einschalten, 46. wo für $m + \omega$ hier zu setzen ist z).

$$Z = \frac{a.a+r.a+2r.\ etc.}{b.b+r.b+2r.\ etc.} \times \frac{b+rz.b+r+rz.\ etc.}{a+rz.a+r+rz.\ etc.}.$$

oder

$$Z = \frac{a.b+rz.a+r.b+r+rz.a+2r.\ etc.}{b.a+rz.b+r.a+r+rz.b+2r.\ etc.}.$$

Folglich ist nach der angenommenen Bezeichnung

$$Z = a^{\frac{b-a}{r}, r} : (a+rz)^{\frac{b-a}{r}, r}.$$

Oder, wenn die Exponenten entgegengesetzt genommen werden, aus (14.),

$$Z = (b+rz)^{\frac{a-b}{r}, r} : b^{\frac{a-b}{r}, r}.$$

31. Es ist oft möglich, diesen Quotienten, wenn er nicht unmittelbar mit dem Quotienten zweyer Sinus, oder dem Werthe einer Tangente übereinkommt, durch Hinzufügung einer Anzahl Factoren im Dividendus und Divisor auf eine solche Form zu bringen.

32. Exempel. In der Reihe, $\frac{19}{15}, \frac{19.26}{15.22}, \frac{19.26.33}{15.22.29}$, etc. wird das Glied gesucht, dessen Stelle $\frac{43}{7}$ ist, oder das erste von 6 eingeschalteten Gliedern zwischen dem sechsten und siebenten Gliede. Hier ist $a = 19$, $b = 15$, $r = 7$, $z = \frac{43}{7}$, also

$$Z = \frac{19.26.23.40.\text{etc.}}{15.22.29.36.\text{etc.}} \times \frac{58.65.72.79.\text{etc.}}{62.69.76.83.\text{etc.}}.$$

Der Quotient $\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi}$ in (28.) läßt sich in zwey solche Brüche, wie Z enthält, zerlegen. Um Z mit jenem zu vergleichen, da m und n Brüche sind, multiplicire man alle Factoren in demselben mit 7, und setze $7m = \alpha$, $7n = \beta$, so ist

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{\alpha.\alpha+7.\alpha+14.}{\beta.\beta+7.\beta+14.} \times \frac{7-\alpha.14-\alpha.\text{etc.}}{7-\beta.14-\beta.\text{etc.}}.$$

Da α und β kleiner sind als 7, so setze man die Reihen der Factoren in Z rückwärts fort, bis man auf Factoren unter 7 kommt. Dadurch wird

$$Z \times \frac{5.12}{1.8} \times \frac{2.9..51}{6.13..55} = \frac{5.12.19.\text{etc.}}{1.8.15.\text{etc.}} \times \frac{2.9..51.58.\text{etc.}}{6.13..55.62.\text{etc.}}.$$

Vergleicht man das Product rechter Hand mit dem für den Quotienten der beiden Sinus, so ist es damit übereinstimmig, wenn $\alpha = 5$, und $\beta = 1$ gesetzt wird. Es ist also $= \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi}$, und daher

$$Z = \frac{1.8}{5.12} \times \frac{6.13..55}{2.9...51} \times \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi}.$$

33. Man sieht bald, worauf es bey dieser Reduction ankommt. Es müssen sich zwey Vielfache von r, pr und qr finden lassen, so daß $a - pr = \alpha$, und $b + rz - qr = r - \alpha$ sey, wo α kleiner als r ist. Auf gleiche Weise verhält es sich bey der Reduction auf die Formel für die Tangente eines Winkels.

34. Das bisherige ist zwar aus Kramps angeführter Schrift genommen, aber nicht ohne beträchtliche Verbesserungen und Ergänzungen. Kramp wendet ohne Bedenken die Formeln, welche für ganze und positive Exponenten erwiesen sind, auf gebrochne und negative an. Daß dieses verstattet sey, ist hier dargethan. Allein man darf nicht bey gebrochnen Exponenten die positive Differenz in eine negative verwandeln, wie es bey ganzen Exponenten angeht. Kramp aber thut dieses, und geräth dadurch auf Folgerungen, die ihn selbst befremden, denen er aber doch zu Gefallen andere, als ausgemacht anerkannte, Lehren aufopfern will.

35. Er findet, daß der unendlich fortlaufende Bruch, $\frac{a.a + r.a + 2r.\text{etc.}}{b.b + r.b + 2r.\text{etc.}}$, gleich sey $a^{\frac{b-a}{r}}$, r dividirt

durch $(\text{infin.}\, r)^{\frac{b-a}{r}}$. In der Gleichung, $a^{m,r}\ (a+mr)^{n,r} = a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ setzt er den Exponenten n unendlich groß. Dadurch, sagt er, verwandle sich die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ in eine Potenz, $(\text{inf.}\, r)^{m,r}$. Setze man $a+mr=b$, so sey $m=\frac{b-a}{r}$, und $\frac{a^{n,r}}{b^{n,r}} = a^{\frac{b-a}{r}}$: $(\text{inf.}\, r)^{\frac{b-a}{r}}$. Der Theil linker Hand sey aber jener unendlich fortlaufende Bruch. Nun gründet jene zum Grunde gelegte Gleichung sich darauf, daß $a^{m+n,r}$ sowohl $a^{m,r}\ (a+mr)^{n,r}$ als $a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ ist, (18. 19.). Setzt man n unendlich, so ist $a^{m+n,r}$ gleichgültig mit $a^{n,r}$, und jenes ist zugleich $a^{n,r}\ (a+nr)^{m,r}$ welches beides sich nicht gut vereinigen läßt. Zweytens, wenn $\frac{b-a}{r}$ eine ganze Zahl ist, so wird der Bruch eine endliche Facultät mit einem ganzen Exponenten, da der von Kramp angegebene Werth unendlich klein oder unendlich groß bleibt. Drittens, die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ ist für ein unendlich großes n doch nicht als eine Potenz zu betrachten, da m ein Bruch ist, wenn der vorgegebene Bruch nicht abbricht. Alsdann hat jene Function eben die Form, welche der Bruch hat. Zu jedem unendlichen Factor im Zähler gehört ein unendlicher Factor im Nenner. In dem Artikel, Einschalten (52. 53.), ist gezeigt, daß der vorgegebene Bruch als eingeschaltetes Glied in einer Reihe von Facultäten eine endliche Größe hat.

36. Bey dem Verhältnisse zweyer Facultäten, mit einerley Differenz, $a^{\frac{c}{r},r} : A^{\frac{c}{r},r}$ geht der unendliche Divisor aus der Rechnung heraus; allein die Vergleichung der Facultäten mit gebrochnen Exponenten ist, bey dem

Krampschen Lehrsatze, auf den Fall gleich großer Exponenten eingeschränkt.

37. Eben so leidet, bey demselben Lehrsatze, die Formel für das Product zweyer solcher Facultäten eine Einschränkung. Damit es endlich seyn könne, muß eine gewisse Relation zwischen den Exponenten und Differenzen Statt haben. Man sehe Kramps Schrift §. 34. In §. 35. daselbst ist p gesetzt, wo nach der Rechnung in §. 34. der Exponent q stehen sollte.

38. Es ist an diesem Orte die Aufgabe, das ohne Ende fortgesetzte Product,

$$\frac{A^p B^q}{C^{p+q}} \cdot \frac{(A+r)^p (B+r)^q}{(C+r)^{p+q}} \cdot \frac{(A+2r)^p (B+2r)^q}{(C+2r)^{p+q}} \cdot \text{etc.}$$

in ein Product aus Potenzen zweyer Facultäten zu verwandeln. Kramp bringt eine unendliche Größe hinein, die durch eine andere Annahme wieder in eine endliche, und zwar die Einheit, verwandelt wird. Dasselbe Resultat aber wird erhalten, wenn $C = A + mr$, und auch $C = B + nr$ gesetzt wird. Alsdann ist, da $C^{p+q} = C^p \cdot C^q$ ist, und so auch bey den Nennern der folgenden Factoren, das vorgegebene Product $= (A^{m,r})^p \times (B^{n,r})^q$, nach (13. u. 16.). Nach Kramps Rechnung sind m und n von p und q abhängig, welches sie aber nicht sind.

Setzt man $B = A + r$, so ist $n = m - 1$; und $B^{n,r} = B^{m-1,r} = \frac{(B-r)^{m,r}}{(B-r)^{1,r}} = \frac{A^{m,r}}{A}$. Zugleich setze man $p + q = 1$, oder $q = 1 - p$, so ist

$$A^{m,r} = A^p \cdot \frac{A^{1-p}(A+r)^p}{A+mr} \times \frac{(A+r)^{1-p}\,(A+2r)^p}{A+r+mr} \cdot \text{etc.}$$

Der Werth von p ist willkührlich. Nimmt man $p = m$, so hat man die Form eines interpolirten Gliedes in der

Reihe der Facultäten, a; a.a+r; a.a+r.a+2r; etc. wie sie Euler in dem Calc. differ. P. II. §. 401. angiebt.

39. Kramp lehrt zweyerley Entwickelungen einer Facultät, die angeführt zu werden verdienen.

Die erste ist die Entwickelung der Facultät mit einer binomischen Basis durch die Facultäten ihrer Theile. Es ist (Kramp, 54.)

$$(a+b)^{n,r} = a^{n,r} + Aa^{n-1,r}b + Ba^{n-2,r}b^{2,r} + Ca^{n-3,r}b^{3,r} + Da^{n-4,r}b^{4,r} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten, A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a+b)^n$ sind, nämlich $A = n$; $B = \frac{n.n-1.}{1.\ 2}$; u. s. f.

Den sinnreichen Beweis, der nur etwas lang ist, hat man bey dem Verfasser selbst nachzusehen. Der Satz ist dem binomischen Lehrsatze analog, und eine merkwürdige Erweiterung desselben. Er gilt auch für gebrochne Exponenten, weil die Facultät $(-mr)^{m+1,r}$ Null ist, so daß die Reihe für $(a-mr)^{n,r}$ mit dem Gliede $a^{n-m,r} \times (-mr)^{m,r}$ abbricht, wenn auch n ein Bruch ist, und die Coefficienten in diesem Falle eben die Form erhalten, wie für ganze Werthe von n. Dabey ist zu merken, daß die bey dem Beweise gebrauchte Gleichung, $Z^{n,r} - (Z-r)^{n,r} = nZ^{n-1,r}$ auch für gebrochne n gültig ist, s. 25. Am Ende dieses Artikels wird ein anderer Beweis dieser Formel gegeben.

40. Die Lehrsätze, welche Kramp aus dieser Form einer Facultät zieht (bey ihm nr 61.), können nur für ganze Exponenten gelten. Die Verwandlung einer Differenz in die entgegengesetzte, welche für ganze Exponenten gilt, (4.), kann nicht für gebrochne angewandt werden. Kramp nimmt sie auch als für solche gültig an, und gründet darauf die Verwandlung einer Integralformel in die Form einer Facultät, bey welcher noch der Übergang einer

Facultät mit einer unendlichen Basis in eine Potenz zu Hülfe genommen wird.

41. Die zweyte Entwickelung einer Facultät ist die, welche nach den Potenzen der Differenz geschieht.

Es sey $a^{m,r} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 + Da^{m-4}r^4 +$ etc. Da $a^{m,r}$ das Product aus den Factoren $a(a+r)(a+2r)(a+3r)$. etc. ist, so ist (Buchstabenrechnung, 19.) A die Summe der Zahlen, 1, 2, 3 ... m − 1; B die Summe der Producte je zweyer; C die Summe der Producte je dreyer; D je vierer, u. s. f. Man lasse für die Zahlen, 1, 2, 3, .. m die Buchstaben α, β, γ, δ, etc. die gleichnamigen Summen bedeuten, so ist, weil $a^{m+1,r} = (a+mr)a^{m,r}$ ist nicht allein für ganze Werthe von m, sondern auch für gebrochne, aus (18.), wenn daselbst $n = 1$ gesetzt wird,

$$\alpha = A + m$$
$$\beta = B + mA$$
$$\gamma = C + mB$$
$$\delta = D + mC$$

u. s. f.

Nach diesen Formeln ist die folgende Tafel berechnet.

m	A	B	C	D	E	F
2	1					
3	3	2				
4	6	11	6			
5	10	35	50	24		
6	15	85	225	274	120	
7	21	175	735	1624	1764	720

Die obigen Formeln sind rücklaufende.

Jeden Coefficienten, oder jede Summe von Combinationen, unabhängig von den vorhergehenden zu finden, ist ein Geschäft der combinatorischen Analysis. Kramp hat zweyerley Auflösungen dieser nicht leichten Auf-

gabe geliefert, aber ohne den Beweis beyzufügen, den mancher Leser von ihm zu erhalten wünschen mag.

42. Eine andere, auch rücklaufende Form der Coefficienten ist folgende.

$$A = \frac{m.m-1}{1.2}.$$

$$2B = \frac{m-1.m-2.}{1.2} A + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}.$$

$$3C = \frac{m-2.m-3.}{1.2} B + \frac{m-1...m-3.}{1.2.3} A + \frac{m...m-3.}{1...4}.$$

$$4D = \frac{m-3.m-4.}{1.2} C + \frac{m-2...m-4.}{1.2.3} B + \frac{m-1...m-4.}{1...4} A + \frac{m...m-4.}{1...5}.$$

u. s. f.

Es ist nämlich $(a + mr) \times a^{m,r} = a(a + r)^{m,1}$ aus (6. u. 19.). Da gesetzt ist $a^{m,r} = a^m + Aa^{m-1} r + Ba^{m-2} r^2 + Ca^{m-3} r^3 +$ etc. so ist auch $(a+r)^{m,1} = (a + r)^m + A(a + r)^{m-1} r + B(a + r)^{m-2} r^2 + C(a + r)^{m-3} r^3 +$ etc. Man entwickele in dieser letztern Reihe die Potenzen von $a + r$ nach dem binomischen Lehrsatze, und multiplicire darauf die Reihe mit a; desgleichen entwickele man das Product aus der Reihe für $a^{m,r}$ in den Factor $a + mr$. Beide Producte gleich gesetzt geben für jeden der Coefficienten, A, B, C, etc. eine Gleichung zur Bestimmung desselben.

43. Umgekehrt lassen sich Potenzen der ersten Art, a^m, durch Potenzen der zweyten Art, oder durch Facultäten, ausdrücken. Man setze den Unterschied der Factoren in der Facultät $= 1$. Es ist $a^{m+1,1} = a^{m,1} (a + m)$

nach (5; 18.), also ist $a.a^{m,1} = a^{m+1,1} - ma^{m,1}$. Mittelst dieser Formel kann man die gemeinen Potenzen folgeweise in eine Reihe von Facultäten verwandeln. Es ist,

$$a^{2,1} = a(a+1), \text{ also}$$
$$a^2 = a^{2,1} - a^{1,1}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit a, so ist

$$a^3 = a.a^{2,1} - a.a^{1,1}, \text{ das ist}$$
$$a^3 = a^{3,1} - 3a^{2,1} + a^{1,1}.$$

Daraus ist

$$a^4 = a^{4,1} - 6a^{3,1} + 7a^{2,1} - a^{1,1}.$$

u. s. f.

Allgemein sey

$$a^m = a^{m,1} - Aa^{m-1,1} + Ba^{m-2,1} - Ca^{m-3,1} + Da^{m-4,1} - \text{etc.}$$

so ist $a^{m+1} =$

$$a^{m+1,1} - (A+m)a^{m,1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,1} - (C+(m-2)B)a^{m-2,1} + (D+(m-3)C)a^{m-3,1} - \text{etc.}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Coefficienten, wie sie folgende Tabelle bis zu m = 9 darstellt.

m	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	6	7	1	0	0	0	0	0
5	10	25	15	1	0	0	0	0
6	15	65	90	31	1	0	0	0
7	21	140	350	301	63	1	0	0
8	28	266	1050	1701	966	127	1	0
9	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1

44. In der Reihe der Coefficienten A ist der erste Unterschied derselben, oder $\Delta A = m$. Hieraus ergiebt

sich, nach der Differenzenrechnung, (54.), $A = \frac{1}{2}m(m-1)$. Die Reihe der A ist eine arithmetische der zweyten Ordnung.

In der Reihe der B ist der Unterschied der Glieder,

$$\text{oder } \Delta B = (m-1) \cdot \frac{m.m-1.}{1.2} = \frac{1}{2}(m^3 - 2m^2 + m).$$

Daraus wird, (a. a. O. 54, 55, 56.).

$$B = \frac{1}{24}(3m^4 - 14m^3 + 21m^2 - 10m),$$

oder

$$24B = m.m-1.m-2.3m-5.$$

Da $B = 0$ ist, für $m = 1$ und $m = 2$, so muß der Werth von B die Factoren $m-1$ und $m-2$ haben. Die Reihe der B ist eine arithmetische Reihe der vierten Ordnung.

In der Reihe der C ist der Unterschied,

$$\Delta C = (m-2)B = \frac{1}{24}m.m-1.m-2.m-2.3m-5.$$
$$= \frac{1}{24}(3m^5 - 20m^4 - 49m^3 - 52m^2 + 20m).$$

Man setze auf gleiche Art, wie a. a. O. die integrirende Function

$$24C = am^6 - bm^5 + cm^4 - dm^3 + em^2 - fm,$$

setze hierin $m+1$ für m, und ziehe die Function 24C von der veränderten $24(C + \Delta C)$ ab, so erhält man den Werth von $24\Delta C$, worin die noch unbestimmten Coefficienten, a, b, c, d, e, f, enthalten sind. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von $24\Delta C$ giebt die Werthe derselben, nämlich $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{11}{2}$; $c = \frac{47}{2}$; $d = \frac{97}{2}$; $e = 48$; $f = 18$, so daß

$$48C = m^6 - 11m^5 + 47m^4 - 97m^3 + 96m^2 - 36m.$$

Da diese Function $= 0$ wird, für $m = 0$; $m = 1$; $m = 2$; $m = 3$, so ist sie durch $m(m-1)(m-2)(m-3)$ oder $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$ theilbar, und der Quotient der Division ist $m^2 - 5m + 6$. Also ist

$$48C = m.m-1.m-2.m-3.m^2 - 5m + 6.$$

Auf diese Art kann man die allgemeinen Ausdrücke für die folgenden Coefficienten erhalten.

45. Leichter geschieht es auf folgende Art, die an dem Coefficienten C gezeigt werden soll. Da ΔC eine ganze

Function von m ist, die von der ersten bis zur fünften Potenz von m steigt, so ist C eine solche vom sechsten Grade, ohne ein unveränderliches Glied. Da ferner C für die Werthe 0, 1, 2, 3, Null ist, so enthält diese Function die Factoren m, m−1, m−2, m−3, und einen quadratischen $\alpha m^2 - \beta m + \gamma$. Um hierin α, β, γ, zu bestimmen, muß man drey Werthe von C kennen, als für m = 4; m = 5; m = 6. Nun hat man drey Gleichungen,

$$\text{I.}\quad 1 = 4.3.2.1\ (16\alpha - 4\beta + \gamma).$$
$$\text{II.}\quad 15 = 5.4.3.2\ (25\alpha - 5\beta + \gamma.$$
$$\text{III.}\quad 90 = 6.5.4.3\ (36\alpha - 6\beta + \gamma).$$

Aus diesen drey Gleichungen wird erhalten $\alpha = \frac{1}{48}$; $\beta = \frac{5}{48}$; $\gamma = \frac{6}{48}$; so daß

$$48\,C = m.m-1.m-2.m-3.m^2 - 5m + 6.$$

wie vorher gefunden ist.

Hieraus erhellt, daß D die Form,

$$\frac{1}{n} m.m-1.m-2.m-3.m-4(\alpha m^3 - \beta m^2 + \gamma m - \delta)$$

haben müsse, so wie E die Form

$$\frac{1}{p} m.m-1 \ldots m-5.\alpha m^4 - \beta m^3 + \gamma m^2 - \delta m + \varepsilon.$$

u. s. f.

46. Noch einen Weg zur Entdeckung der allgemeinen Werthe dieser Coefficienten giebt die Differenzenrechnung auf Facultäten angewandt. Dieses Verfahren lehrt la Croix in dem Traité des différences et des Séries, (§. 903.) welcher den dritten Theil seines schätzbaren Werks über Differential- und Integralrechnung ausmacht. Es ist aus (25.), oder durch unmittelbare Entwickelung,

$$(m+1)^{n+1,-1} - m^{n+1,-1} = (n+1)m^{n,-1}.$$

Es sey $\Delta M = m^{n,-1}$; so ist $M = \frac{1}{n+1} m^{n+1,-1}$.

In der Reihe der A ist $\Delta A = m$, also ist $n = 1$, und $A = \frac{1}{2} m^{2,-1}$.

In der Reihe der B ist $\Delta B = (m-1)A = \frac{1}{2}(m-1)m^{2,-1} = \frac{1}{2}(m-2)m^{2,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1} = \frac{1}{2}m^{3,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1}$. Also ist $B = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}m^{4,-1} + \frac{1}{3}m^{3,-1})$.

In der Reihe der C ist $\Delta C = (m-2)B = \frac{1}{24}(3(m-2)m^{4,-1} + 4(m-2)m^{3,-1})$. Es ist $(m-2)m^{4,-1} = (m-4)m^{4,-1} + 2m^{4,-1} = m^{5,-1} + 2m^{4,-1}$, und $(m-2)m^{3,-1} = (m-3)m^{3,-1} + m^{3,-1} = m^{4,-1} + m^{3,-1}$; also $\Delta C = \frac{1}{24}(3m^{5,-1} + 10m^{4,-1} + 4m^{3,-1}$.

Daraus ist

$$C = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{6}m^{6,-1} + \frac{10}{5}m^{5,-1} + \frac{4}{4}m^{4,-1}\right)$$
$$= \frac{1}{48}(m^{6,-1} + 4.m^{5,-1} + 2m^{4,-1}).$$

Die Entwickelung dieser Formeln giebt dieselben Werthe mit den vorher gefundenen.

47. Die Potenzen lassen sich auch durch Facultäten mit subtractiven Unterschieden der Factoren darstellen. Es ist nämlich $a^{m+1,-1} = a^{m,-1}(a-m)$, aus (18.), oder bey ganzen Exponenten m durch unmittelbare Entwickelung. Also ist $a.a^{m,-1} = a^{m+1,-1} + ma^{m,-1}$.

Nun ist $a = a^{1,-1}$, dadurch

$$a^2 = a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Hieraus ist

$$a^3 = a^{3,-1} + a^{2,-1}$$
$$+ 2a^{2,-1} + a^{1,-1}$$
$$= a^{3,-1} + 3a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Allgemein sey

$$a^m = a^{m,-1} + Aa^{m-1,-1} + Ba^{m-2,-1} + Ca^{m-3,-1} + Da^{m-4,-1} + \text{etc.}$$

so ist

$$a^{m+1} = a^{m+1,-1} + (A+m)a^{m,-1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,-1} + (C+(m-2)B)a^{m-2,-1} + \text{etc.}$$

Die Coefficienten sind hier dieselben wie in (43.), absolut genommen, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen.

48. Die Reihe der Coefficienten A, B, C, etc. läßt sich rückwärts fortsetzen, indem man m negativ nimmt. Alsdann bekommen die Potenzen negative Exponenten, oder werden das Reciproke der Potenzen mit positiven Exponenten. Es ist zu untersuchen, ob jene Formeln und diese umgekehrten Potenzen zusammen gehören. Die Brüche,

$$\frac{1}{(a+1)^{m,1}} + \frac{A}{(a+1)^{m+1,1}} + \frac{B}{(a+1)^{m+2,1}} + \frac{C}{(a+1)^{m+3,1}} + \text{etc.}$$

sollen in den Zählern so bestimmt werden, daß ihre Summe $= a^{-m}$ wird. Dieses ist der erste Theil des Quotienten, welchen die Entwickelung des ersten Bruches, oder des $\frac{1}{a+1.a+2....a+m.}$ giebt. Alle übrigen Theile der Reihe, in welche dieser Bruch verwandelt wird, und die Reihen, welche aus den übrigen Brüchen entstehen, heben sich gegen einander auf.

49. Es ist $a^{-m,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m,1}}$,

und $a^{-m-1,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m+1,1}}$, nach (11.). Da $(a+1)^{m,1} : (a+1)^{m+1,1} = 1 : a+1+m$, nach

(9.), so ist $a^{-m,-1} : a^{-m-1,-1} = a+1+m : 1$, und $a.a^{-m-1,-1} = a^{-m,-1} - (m+1)a^{-m-1,-1}$.

Es sey nun

$$a^{-m} = a^{-m,-1} + Aa^{-m-1,-1} + Ba^{-m-2,-1} + Ca^{-m-3,-1} + Da^{-m-4,-1} + \text{etc.}$$

so ist

$$a^{-m+1} = a^{-m+1,-1} + (A-m)a^{-m,-1} + (B-(m+1)A)a^{-m-1,-1} + (C-(m+2)B)a^{-m-2,-1} + (D-(m+3)C)a^{-m-3,-1} \text{ etc.}$$

Man nehme zuerst $m=1$, so ist $a^{-m+1} = a^0 = 1$; und $a^{-m+1,-1} = a^{0,-1} = 1$, nach (12.), also $0 = (A-1)a^{-1,-1} + (B-2A)a^{-2,-1} + (C-3B)a^{-3,-1} + (D-4C)a^{-4,-1} + \text{etc.}$ Damit der Werth dieser Reihe von der Basis a der Facultäten unabhängig sey, müssen die Coefficienten $=0$ seyn. Demnach ist, für $m=1$; $A=1$; $B=2$; $C=6$; $D=24$; $E=120$; etc. Die Coefficienten sind nun folgende,

m	A	B	C	D	E
1	1	2	6	24	120
2	3	11	50	274	1764
3	6	35	225	1624	13132
4	10	85	735	6769	54152
5	15	175	1960	22449	256193

u. s. f.

Die Übereinstimmung mit den Coefficienten in der Reihe für $a^{m,r}$, §. 41. ist merkwürdig.

50. Die Differenzen, welche in diesen Reihen gegeben werden, sind die jedes Gliedes von dem vorhergehenden, nicht wie in dem Falle (43.) des Gliedes von dem folgenden. Folglich sind A, B, C, etc. solche Functionen

von m, die durch die Substitution von $m-1$ für m einen Werth erhalten, der von dem erstern Werthe den gegebenen Unterschied hat, nämlich A den Unterschied m; B den $(m+1)A$; C den $(m+2)B$, u. s. f. Hieraus kann man nach der Methode in (44.) die Formeln für die Coefficienten finden, indem man $m-1$ statt m in der noch unbestimmten Function von m setzt, und die Differenz beider Werthe mit der gegebenen vergleicht, um die noch unbekannten Coefficienten von m zu bestimmen.

51. Oder man gebrauche die Differenzenmethode in (46.), mit der Abänderung, die wegen der Entgegensetzung der Differenzen nöthig ist. Aus (25.) ist $a^{m,1}-(a-1)^{m,1} = ma^{m-1,1}$, oder wenn man für die Basis a setzt m, und den Exponenten $=n+1$ statt m nimmt,

$$m^{n+1,1}-(m-1)^{n+1,1}=(n+1)m^{n,1}.$$

Diese Formel enthält auch den Unterschied eines folgenden Gliedes in der Reihe der Facultäten mit dem Exponenten $n+1$ von dem vorhergehenden. Ist nun $\Delta M = m^{n,1}$, so ist $M=\frac{m^{n+1,1}}{n+1}$. Dadurch ergeben sich die Werthe der Coefficienten folgendergestalt.

Es ist $\Delta A = m$, also ist $A=\frac{1}{2}m^{2,1}$. Ferner ist $\Delta B=(m+1)A=\frac{1}{2}(m+1)m^{2,1}=\frac{1}{2}(m+2)m^{2,1}-\frac{1}{2}m^{2,1}=\frac{1}{2}m^{3,1}-\frac{1}{2}m^{2,1}$. Daher

$$B=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}m^{4,1}-\frac{1}{3}m^{3,1}).$$

Ferner ist $\Delta C=(m+2)B$. Nun ist $(m+2)m^{4,1}=(m+4)m^{4,1}-2m^{4,1}=m^{5,1}-2m^{4,1}$; auch $(m+2)m^{3,1}=(m+3)m^{3,1}-m^{3,1}=m^{4,1}-m^{3,1}$. Folglich ist

$$\Delta C=\frac{1}{8}m^{5,1}-\frac{5}{12}m^{4,1}+\frac{1}{6}m^{3,1}$$

und daraus

$$C=\frac{1}{48}m^{6,1}-\frac{1}{12}m^{5,1}+\frac{1}{24}m^{4,1}.$$

oder $C=\frac{1}{48}(m^{6,1}-4m^{5,1}+2m^{4,1})$.

Die hier gefundenen Werthe von A, B, C, entstehen aus denen in (46.), wenn daselbst für m gesetzt wird $-m$. So verhalten sich auch die entwickelten Werthe beiderseits. Die Reihen für die Potenzen von a^{+m} und a^{-m} machen eine zusammenhangende Folge aus, so wie die Potenzen selbst.

52. Um eine Reihe von Facultäten mit additiven Differenzen zu haben, setze man

$$a^{-m} = a^{-m,1} - Aa^{-m-1,1} + Ba^{-m-2,1}$$
$$- Ca^{-m-3,1} + Da^{-m-4,1} - \text{etc.}$$

Es ist, vermittelst (9 oder 14.)

$$a^{-m+1,1} = (a-m)\,a^{-m,1}$$

also $\quad a.a^{-m,1} = a^{-m+1,1} + m.a^{-m,1}.$

Dadurch ist

$$a^{-m+1} = a^{-m+1,1} - (A-m)a^{-m,1}$$
$$+ (B-(m+1)A)a^{-m-1,1}$$
$$-(C-(m+2)B)a^{-m-2,1}$$
$$+ (D-(m+3)C)a^{-m-3,1} - \text{etc.}$$

Die Coefficienten A, B, C, etc. haben eben dieselben absoluten Werthe wie in (49.), nur sind sie zum Theil in den Vorzeichen von jenen verschieden.

53. Noch füge ich eine sehr einfache Deduction des erweiterten binomischen Lehrsatzes aus dem angeführten Werke von la Croix §. 904. bey.

Es ist (aus 25.)

$$(a+1)^{n,-1} = a^{n,-1} + na^{n-1,-1}$$
$$(a+2)^{n,-1} = (a+1)^{n,-1} + n(a+1)^{n-1,-1}$$
$$(a+3)^{n,-1} = (a+2)^{n,-1} + n(a+2)^{n-1,-1}$$

u. s. f.

Hier müssen nun rechter Hand die Facultäten auf dieselbe Basis a reducirt werden. Dieses geschieht durch Substitutionen aus den vorhergehenden Werthen. Es ist dadurch

$$(a+2)^{n,-1} = a^{n,-1} + 2na^{n-1,-1} + n.n-1.a^{n-2,-1},$$

indem nämlich in der ersten Formel n mit n — 1 vertauscht wird. Mittelst dieser gefundenen Formel wird auf ähnliche Art erhalten

$$(a+3)^{n,-1} = a^{n,-1} + 3na^{n-1,-1} + 3n(n-1)a^{n-2,-1} + n.n-1.n-2.a^{n-3,-1}.$$

Hier entdeckt sich schon ein Gesetz der Formation, Die Factoren, welche von n abhangen, sind Facultäten mit der Basis n und Differenz — 1. Die numerischen sind Binomialcoefficienten. Man setze

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + An^{1,-1}.a^{n-1,-1} + Bn^{2,-1}.a^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}.a^{n-3,-1} + Dn^{4,-1}.a^{n-4,-1} + En^{5,-1}.a^{n-5,-1} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten A, B, C, etc. Functionen von b sind.

Nun setze man a + 1 für a, so ist $(a+1+b)^{n,-1} = (a+1)^{n,-1} + An^{1,-1}(a+1)^{n-1,-1} + Bn^{2,-1} \times (a+1)^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}(a+1)^{n-3,-1} + \text{etc.}$

Mittelst der Formel für $(a+1)^{n,-1}$ verwandle man die Facultäten mit der Basis a + 1 in Facultäten mit der Basis a, indem man folgeweise für n setzt n, n — 1, n — 2, u. s. f. Dadurch werden die Coefficienten von $a^{n,-1}$, $a^{n-1,-1}$ u. s. w. in der Facultät $(a+1+b)^{n,-1}$ folgende,

$$1 \parallel (A+1)n^{1,-1} \parallel (B+A)n^{2,-1} \parallel (C+B)n^{3,-1} \parallel (D+C)n^{4,-1} \parallel (E+D)n^{5,-1} \parallel + \text{etc.}$$

Die Coefficienten in der Facultät mit der Basis a + 1 + b werden aus denen in der Facultät mit der Basis a + b eben so zusammengesetzt, wie die Binomialcoefficienten in einer Potenz aus denen in der nächstvorhergehenden. Nun sind sie für die Bases, a + 1; a + 2; a + 3, die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 1,

2, 3, also sind die Coefficienten für die Bases, $a+4$; $a+5$; u. s. f. die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 4, 5, etc. folglich ist

$$A = b = \frac{1}{1} b^{1,-1}; \; B = \frac{b.b-1.}{1.2} = \frac{1}{1.2} b^{2,-1}.$$

$$C = \frac{b.b-1.b-2.}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3} b^{3,-1}; \text{ u. s. f.}$$

Setzt man die Divisoren zu den Facultäten von n, so verwandeln sich diese in die Binomialcoefficienten zu der nten Potenz, und es ist, wenn diese durch A, B, C, D, E, etc. bezeichnet werden,

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + Aa^{n-1,-1} . b^{1,-1}$$
$$+ Ba^{n-2,-1} . b^{2,-1} + Ca^{n-3,-1} . b^{3,-1}$$
$$+ Da^{n-4,-1} . b^{4,-1} + \text{etc.}$$

wie in 39. La Croix bleibt bey der erstern Form von $(a+b)^{n,-1}$ stehen. Die zweyte aber macht die Formel dem binomischen Lehrsatze ganz ähnlich.

Fälle, mögliche s. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Falsche Wurzel einer Gleichung, bey manchen ältern Algebraisten eine unschickliche Benennung für negative Wurzel einer Gleichung, s. Algebra Th. I. S. 58. und Entgegengesetzte Größen.

Familie krummer Linien ist der Inbegriff aller krummen Linien, die unter dieselbe Gleichung von einem unbestimmten Grade gehören. Eine solche Gleichung sey z. B. diese: $a^{m-1} x = y^m$, so begreift diese die Gleichungen; $ax = y^2$; $a^2x = y^3$; $a^3x = y^4$; u. s. f. Alle die krummen Linien, die durch diese Gleichungen bestimmt werden, gehören unter eine Familie. Das Wort hat also mit Geschlecht (genus) einerley Bedeutung.

Fehler, eine Abweichung von der richtigen und scharfen Bestimmung einer Größe, ist in arithmetischen

und analytischen Berechnungen oft unvermeidlich, wegen der Form, in welcher die Größen sich darstellen. So können die irrationalen Wurzeln von Zahlen und Gleichungen, nicht vollkommen durch die Einheit und ihre Theile angegeben werden. Alle Reihen-Ausdrücke lassen einen Theil des Ganzen zurück. Man muß deswegen auf gute Annäherungs-Methoden bedacht seyn, um mit dem kleinsten Aufwand an Rechnung die möglichste Verminderung des Fehlers zu erhalten. Es ist auch nöthig, die Gränzen zu kennen, welche der übrig gelassene Fehler nicht übersteigt.

In der angewandten Mathematik sind Fehler unvermeidlich, weil die Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, nie vollkommen genau zu erhalten stehen, es sey wegen der Werkzeuge selbst, oder wegen ihrer Anwendung. Man muß daher, wenn man die Gränze des Fehlers in den Datis schätzen kann, die daraus entspringenden Fehler in den Resultaten bestimmen. Dazu thut die Differentialrechnung nützliche Dienste. Der Fehler der Beobachtung oder der Angabe wird als eine Differentialgröße betrachtet, und eben so der Fehler in dem Resultate.

Von Cotes ist eine Abhandlung: aestimatio errorum in mixta Mathesi, bey seiner Harmonia mensurarum, und in den Oper. miscell. Lemgoviae 1768. Es werden darin Formeln zur Bestimmung der Fehler in der Berechnung geradlinichter und sphärischer Dreyecke gegeben, wenn eine Seite oder ein Winkel ein wenig unrichtig angenommen ist. S. Trigonometrische Formeln. In der Astronomie und in der Feldmeßkunst ist es sehr nöthig, Formeln zur Schätzung der Fehler zu haben, die von der Unrichtigkeit der Werkzeuge, ihrer Stellung, und von der Beobachtung selbst herrühren. Viele dergleichen sind in Kästners astron. Sammlungen, und was das Feldmessen betrifft, in Mayers praktischer Geometrie anzutreffen.

Fermats Lehrsätze von den Polygonalzahlen: Jede (ganze) Zahl ist entweder eine Triangularzahl, oder ist aus zwey oder drey Triangularzahlen zusammengesetzt.

Jede Zahl ist entweder ein Quadrat, oder sie ist aus zwey, drey oder vier Quadraten zusammengesetzt. Jede Zahl ist eine Pentagonalzahl, oder ist aus zwey, drey, vier oder fünf Pentagonalzahlen zusammengesetzt. Auf gleichförmige Art verhält es sich mit den Hexagonal- Heptagonal- und allen übrigen Polygonalzahlen, nach Maaßgabe der Anzahl ihrer Winkel.

Fermat hat diese höchst merkwürdige Folge von Sätzen als Anmerkung in Bachets Ausgabe des Diophantus zu der 31sten Aufgabe im IV. B. beygefügt. Der Beweis, sagt er, beruhe auf vielen mannigfaltigen und sehr versteckten Eigenschaften der Zahlen, weswegen er denselben nicht mittheilen könne; er hätte dazu ein eigenes Werk bestimmt, worin er die Arithmetik durch diese Untersuchungen beträchtlich erweitern würde. Dieses Werk ist aber nicht erschienen; und in der nicht starken Sammlung seiner Werke kommt auch nichts darüber vor.

Die Aufgabe des Diophantus, bey welcher jene Sätze angeführt werden, ist folgende: Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe mit der Summe ihrer Wurzeln zusammengenommen eine gegebene Zahl ausmachen. Diophantus fordert hiezu, daß eine gegebene Zahl in vier Quadrate getheilt werde, ohne doch vorher die Art, wie dieses zu bewerkstelligen sey, gezeigt zu haben. Er versteht aber nicht bloß ganze Zahlen, sondern nimmt auch gebrochne Zahlen zu den Theilen, wie in dem Beyspiele seiner Auflösung. Bachet zeigt in der Anmerkung zu der Aufgabe, an den Zahlen von 1 bis 120, daß sie alle in vier oder weniger Quadrate ganzer Zahlen zerlegbar sind, wenn sie nicht selbst ein Quadrat sind.

Euler hat den Satz von der Zerlegung jeder ganzen Zahl in vier oder weniger Quadrate zu beweisen gesucht, in den Comment. novis Acad. Petrop. T. V. Den Beweis hat er aber hernach selbst für nicht genugthuend erkannt. La Grange hat in den Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, T. I. 1770. einen scharfsinnigen Beweis gegeben, der aber schwer und tief geschöpft ist. Hernach hat Euler aufs neue den Satz vorgenom-

men, in den Actis Acad. Petrop. T. I. P. II. a. a. 1777. Er gesteht dabey ein, daß sein Beweis dem Fermatschen nachstehen möge, da dieser auch die andern Zusammensetzungen aus Polygonalzahlen habe begreifen sollen. Diesen Vorzug räumt er auch in einer andern Abhandlung, de usu observationum in Mathesi pura, Commentarii novi Petrop. T. VI. ein. Gauß hat in den Disquisitionibus arithmeticis, §. 291. ff. erstlich erwiesen daß die ganzen Zahlen von der Form $8M + 3$ sich in drey ungerade Quadrate zerlegen lassen: daß daher jede ganze positive Zahl in drey Trigonalzahlen zerlegbar ist, und dann, daß jede ganze positive in vier Quadrate sich zerlegen läßt, wobey die Null und ihr Quadrat mit aufgenommen werden. Beguelin hat sich auch mit den Lehrsätzen über die Zerlegung in Trigonal- und Quadrat-Zahlen beschäftigt, Nouveaux Mem. de l'Acad. de Berlin, pour 1773, 1774. aber seine Erweise sind nicht überzeugend; er nimmt sogar metaphysische Gründe zu Hülfe.

Fermat hat manche scharfsinnige Entdeckungen über die Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen gemacht. Er wird für den größten Meister in dieser höhern Arithmetik anerkannt. Vielleicht hat er manche Sätze durch empirische Bemerkungen gefunden, und dann die Beweise gesucht. Es ist sehr Schade, daß diese alle verloren gegangen sind. Sie zu finden hat den besten neuern Analysten Mühe gemacht, wovon der angeführte Satz ein Beyspiel ist.

Hier folgen noch ein paar Sätze, die man nach Fermat benennt.

I. Es sey p eine Primzahl, und a nicht durch p theilbar, so ist $a^{p-1} - 1$ durch p theilbar.

II. Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweyer Quadrate.

Den erstern Satz trägt Fermat nicht ganz so vor, wie er hier nach Euler und Gauß angegeben ist. In der Sammlung seiner Werke, S. 163. lautet der Satz so: In jeder Reihe von Potenzen, a, a^2, a^3, a^4. etc. ist eine derselben a^m, um 1 vermindert, d. i. $a^m - 1$, durch

eine gegebene Primzahl p theilbar, und der Exponent m jener Potenz ist ein Theiler von $p - 1$. Ferner, nachdem die erste Potenz, welche die verlangte Beschaffenheit hat, gefunden ist, so ist jede, unter den folgenden, deren Exponent ein Vielfaches, mn, von dem Exponenten jener ist, eben so beschaffen, oder $a^{mn} - 1$ ist durch p theilbar. Ich habe nur die Bezeichnungen beygefügt.

Exempel. Es sey $a = 5$, $p = 13$; $p - 1 = 12$; so ist m ein Theiler von 12. Versucht man 4 für m, so findet sich $5^4 - 1$, d. i. 624, durch 13 theilbar. Oder es sey $p = 17$, und $p - 1 = 16$. Hier thut kein Theiler von 16 Genüge, als die Zahl selbst, und $5^{16} - 1$ ist durch 17 theilbar.

Der zweyte Theil des Satzes ist leicht erwiesen. Es sey $a^m - 1 = A$, so ist $a^m = A + 1$, und $a^{mn} = (A + 1)^n$, also $a^{mn} - 1 = A^n + nA^{n-1} +$ etc. wo in allen Theilen rechter Hand der Factor A enthalten ist. Da A durch p theilbar ist, so ist das Ganze, also $a^{mn} - 1$, durch dieselbe Zahl theilbar.

Hingegen ist nicht jede Primzahl ein Theiler von einer der um 1 vergrößerten Potenzen. Wenn die erste, welche um 1 vermindert durch die Primzahl p theilbar ist, einen ungeraden Exponenten hat, so ist in der ganzen Reihe keine Potenz anzutreffen, welche $a^m + 1$ durch jene Primzahl theilbar giebt. Fermat findet durch einen künstlichen Prozeß Primzahlen, welche eine Potenz mit einem ungeraden Exponenten, nachdem sie um 1 vermindert ist, ohne Rest theilen.

Euler hat den Satz I. auf zweyerley Art erwiesen, zuerst in den ältern Commentarien der Petersburger Akademie, T. VIII. p. 143. und in den neuern, T. VII. p 70. In dem sechsten Bande der ältern, S. 106. trägt er den Satz vor, daß $a^n - b^n$ immer durch $n + 1$ theilbar sey, wenn $n + 1$ eine Primzahl ist, die in a und b nicht aufgeht, aber mit der Bemerkung, daß er denselben nicht erweisen könne, ob er gleich von der Richtigkeit sich völlig versichert halte. Gauß hat in seinen Disquisitionibus

arithmeticis, sect. III. den zweyten Eulerischen Beweis gebraucht.

Der Satz II. ist von Euler in den Comm. novis Acad. Petrop. T. V. erwiesen. Fermat trägt den Satz mit einer Erweiterung in einer Anmerkung zu Bachets Ausgabe des Diophantus p. 127., folgendergestalt vor: Numerus primus, qui superat unitate quaternarii multiplicem semel tantum est hypotenusa trianguli rectanguli, ejus quadratus bis, cubus 3, quadratoquadratus 4. etc. in infinitum. Es ist aber das Quadrat von 17 oder 289 nur in die Quadrate 225 + 64 zerlegbar, der Cubus von 5 oder 125 nur in die Quadrate 121 + 4, und 100 + 25. Man muß also das Quadrat von Null mit zählen.

Fermat ist doch durch die Induction einmahl zum Irrthum verleitet worden. Er sagt in den Opp. mathem. p. 115, daß alle Zahlen von der Form $2^{2^m} + 1$ Primzahlen sind, als 3, 5, 17, 257, 65537, etc. oder, wie er es mit Worten giebt, numeros a binario quadratice in se ductos et unitate auctos esse semper numeros primos. In dem vorher angeführten Schreiben pag. 162. gesteht er, daß er den Satz noch nicht habe beweisen können, aber doch an der Richtigkeit desselben nicht zweifle. Allein schon die Zahl 2^{2^5} oder $2^{32} = 4294967296$ fügt sich, nach Eulers Bemerkung (Comm. Petr. vet. T. VI. p. 104.), nicht in das Gesetz. Diese um 1 vergrößert ist durch 641 theilbar.

Figur ist eine durch Flächen oder durch Linien ganz begränzte Ausdehnung. Die erstere nennt man gewöhnlicher einen Körper oder ein Solidum. Die zweyte, die durch Linien begränzte, ist entweder eine ebene oder unebene (krummflächige) Figur. Die unebene muß die Lage ihrer Theile stetiger Weise ändern, wie ein sphärisches Dreyeck oder Vieleck, sonst ist sie nicht Eine, sondern eine zusammengesetzte Figur. Die ebene ist entweder bloß von geraden Linien eingeschlossen, eine geradlinichte, oder von einer stetigen zusammenhangenden

krummen Linie, eine krummlinichte, wie Kreis und Ellipse, oder von krummen und geraden, eine gemischtlinichte.

Figur bedeutet auch jede Zeichnung, die zum Verständniß eines Beweises und einer Auflösung beygefügt wird. Bloße Linien und Winkel, zusammengesetzte Figuren, Abbildungen von sinnlichen Gegenständen heißen in diesem Verstande Figuren. Es ist sehr nöthig, daß diese gut und deutlich gezeichnet werden. Man muß die Durchschnittspuncte der Linien einander nicht zu nahe, noch weniger zwey verschiedene in einen fallen lassen. Linien, die nicht parallel oder senkrecht auf einander seyn sollen, müssen nicht es zu seyn scheinen. Die sich auf einander beziehenden Puncte hat man mit ähnlichen Buchstaben zu bezeichnen; auch die Linien, die bloß zur Demonstration dienen, durch einen punctirten Zug zu unterscheiden, und die richtigen Verhältnisse der Linien, wo es sich wegen des Raums thun läßt, zu beobachten; kurz in allem für eine deutliche und genaue Darstellung zu sorgen. Insbesondere hat man bey Zeichnungen, worin die Linien in verschiedenen Ebenen liegen, darauf zu sehen, daß keine Verwirrung entstehe. Bey körperlichen Gegenständen wird man durch Schatten der Vorstellung Deutlichkeit geben, nur daß dieser nicht den Buchstabenbezeichnungen hinderlich werde.

Figuren heißen auch zuweilen die Zahlziffern, im Englischen heißen diese gewöhnlich figures.

Figur eines Durchmessers in der Ellipse und Hyperbel heißt das Rechteck von demselben und seinem Parameter.

Allgemeine Bemerkungen über die geradlinichten Figuren

1. Die geradlinichten Figuren werden erstlich nach der Anzahl ihrer Seitenlinien unterschieden: dreyseitige, vierseitige . . . vielseitige; oder nach der Anzahl der Winkel, wofür wir im Deutschen die Endung Eck gebrauchen: Dreyeck, Viereck . . . Vieleck. Zweytens nach den Verhältnissen der Seiten unter ein-

ander: gleichseitige, ungleichseitige Figuren. Drittens nach den Verhältnissen der Seiten und Winkel zugleich. Sind diese, so wie jene, unter sich ungleich, so ist die Figur eine unregelmäßige; sind jene, so wie diese, alle einander gleich, so ist die Figur eine regelmäßige; sind die Seiten einander gleich, die Winkel aber nicht, oder umgekehrt, so mag man die Figur eine halb regelmäßige nennen. Zwey Figuren, von einerley Anzahl Seiten oder Winkel sind entweder ähnlich oder unähnlich, s. Ähnlichkeit. Von zwey Figuren kann die eine eine eingeschriebene, die andere eine umgeschriebene seyn.

2. In einer geradlinichten Figur werden drey auf einander folgende Bestimmungsstücke des Umfangs, als eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln, oder zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, wie auch drey auf einander folgende Winkel, durch die übrigen angenommenen gegeben. Dieses dient zu einer Probe bey Feldvermessungen. Wenn man die gemessenen Seiten und Winkel eines Feldes, jene nach einem verjüngten Maaßstabe aufs Papier trägt, so müssen die drey Bestimmungen, welche auf eine jener drey Arten aus den übrigen sich ergeben, mit den auf dem Felde gemessenen übereinstimmen.

3. Die Summe aller Winkel einer geradlinichten Figur ist zweymahl so viel rechten gleich, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechten. Denn man ziehe aus einem Puncte innerhalb der Figur nach allen Ecken gerade Linien, so erhält man so viele Dreyecke als die Figur Seiten hat. Die Summe ihrer Winkel, ohne die Winkel um jenen Punct, welche vier rechte ausmachen, ist die Summe der Winkel der Figur.

4. Wenn eine Figur lauter auswärts liegende (ausspringende, angles saillans) Winkel (unter zwey Rechten) hat, so ist die Summe aller äußern Winkel vier Rechten gleich. Ein äußerer Winkel ist der Nebenwinkel des innern, oder der Unterschied desselben von zwey rechten.

5. Der äußere Winkel eines einwärts liegenden (einspringenden, angle rentrant) Winkels sey der Überschuß

desselben über zwey rechte, so ist die Summe der äußern Winkel, die zu ausspringenden Winkeln gehören, so groß als vier rechte mit den äußern Winkeln, die zu den einspringenden gehören. Denn man schneide einen einwärts liegenden Winkel, oder alle die auf einander folgenden dieser Art, durch eine gerade Linie, wie in (Fig. 31.) die Winkel, C, D, E, zwischen den ausspringenden, ABC, EFG, durch die gerade BF ab, so sind in der Figur BCDEFB alle äußern Winkel vier rechten gleich, und, wenn man die äußern bey B und F beiderseits wegnimmt, die äußern bey C, D, E gleich den beiden innern, CBF, EFB. Man setze nun anstatt der Figur mit den einspringenden Winkeln irgend eine andere mit lauter ausspringenden Winkeln, welche nur mit jener die Seiten AB, FG gemein habe, aber statt der Seiten BC, CD, DE, EF die einzige BF hat. In dieser ist die Summe aller äußern Winkel vier rechten gleich; in der ersten Figur sind die beiden äußern Winkel bey B und F um die beiden, CBF, EFB größer als in der zweyten, das ist, um die Summe der äußern Winkel neben den einspringenden der erstern Figur. — So verhält es sich bey allen Theilen des Umfanges, wo einspringende Winkel vorkommen.

6. Setzt man den äußern Winkel bey einem einwärts liegenden negativ, da der Unterschied des innern von zwey rechten demjenigen bey auswärtsliegenden entgegengesetzt ist, so bleibt die Summe aller äußern Winkel in allen Fällen vier rechten gleich.

Verwandlung der geradlinichten Figuren.

7. Ein Parallelogramm wird in ein anderes ihm gleiches über derselben Grundlinie verwandelt, wenn die dieser Linie gegen überliegende Seite verlängert, und durch die Endpuncte jener bis an diese verlängerte Seite Parallelen gezogen werden.

8. Ein Dreyeck wird in ein anderes ihm gleiches über derselben Grundlinie verwandelt, wenn durch den gegenüberliegenden Winkelpunct einer dieser Linie parallele, und

an einen Punct dieser letztern von den Endpuncten jener gerade Linien gezogen werden.

9. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 26.) in ein anderes ihm gleiches mit der gegebenen AE als einer Seitenlinie zu verwandeln, trage man auf der verlängerten DA diese AE von A nach E; ziehe durch E die parallele EF mit AB, bis an die nach F verlängerte CB, dann FAG bis an die nach G verlängerte CD; durch G ziehe man mit AD die parallele GHK, welche die verlängerten BA, FE jene in H, diese in K schneide, so ist das Parallelogramm AHKE mit der Seitenlinie HK oder AE dem ABCD gleich. — Denn die Dreyecke GCF, FKG sind gleich, auch die Dreyecke GDA, AHG, und die Dreyecke ABF, FEA. Daher bleibt, gleiches von gleichem abgezogen, gleiches, das Pgrm AC gleich dem Pgrm AK.

10. Wegen der ähnlichen Dreyecke FAE, AGH ist AE : EF = GH : AH, das ist, AE : AB = AD : AH. Die Seiten zweyer gleichwinklichten und gleich großen Parallelogrammen sind wiederkehrend proportional, oder die Seiten des einen sind die mittlern Glieder der Proportion, in welcher die Seiten des andern die äußern Glieder sind.

11. Man ziehe BE und DH, so sind die Dreyecke BAE, HAD einander ähnlich (Dreyeck, 6. Nr. 2.); die Winkel ABE, AHD, welche den gleichnamigen Seiten AE, AD gegen über stehen, sind gleich; daher BE parallel mit HD.

12. Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogrammen wiederkehrend proportional sind, so sind diese gleich groß. Diese Parallelogrammen seyn AC, AK, in welchen AE : AB = AD : AH ist. Man stelle sie so zusammen, daß die Seiten AB, AH, so wie AD, AE in gerader Richtung liegen, und vollende die Pgrmme AF, AG, worin die Diagonalen AF, AG gezogen werden. Da AE : AB = AD : AH ist, so ist AE : EF = GH : AH, und die Dreyecke, AEF, GHA, worin die Winkel, E, H, gleich sind, sind sich ähnlich; also ist der

W. AFE = GAH, daher W. BAF = GAH, und die Diagonalen AF, AG liegen in gerader Richtung, so daß GAF die Diagonale des Pgrms GCFK ist. Daraus folgt nach (9.), daß die Pgrmme AC, AK gleich groß sind.

13. Hieraus ergiebt sich eine etwas einfachere Construction der Aufgabe in (9.). Auf der verlängerten Seite AD des gegebenen Pgrms AC nehme man AE der gegebenen Seite des andern gleich, ziehe BE, und mit dieser durch D die parallele DH, welche auf der verlängerten BA die andere Seite des gesuchten Pgrms AK, nämlich AH, abschneidet. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke BAE, HAD, ist AE : AB = AD : AH, und die Pgrmme AC, AK sind nach (12.) gleich groß.

14. Ein Dreyeck ABC (Fig. 27.) in ein anderes ihm gleiches ADE zu verwandeln, dessen Seite AD gegeben ist, und worin der W. DAE dem W. BAC gleich ist, ziehe man die Linie CD, und mit dieser die parallele BE, welche die gerade CAE in E treffe; ferner die gerade DE, so ist △ABC = △ADE. — Denn es ist das Dreyeck BCE = BDE (2.), und wenn von beiden das BAE weggenomen wird, so bleibt gleiches, d. i. △BAC = EAD.

15. Es sey ABCDEA (Fig. 28.) eine geradlinichte Figur, oder ein Theil einer größern; diese soll in ein Dreyeck verwandelt werden. Zu dem Ende ziehe man die Diagonalen AC, AD, AE (letztere, wenn die Figur nur ein Theil einer größern ist), darauf ziehe man mit AC die parallele BM bis an die nach M verlängerte DC, und verbinde AM, so ist das Dreyeck AMD = Trapez. ABCD. Ferner werde mit AD die parallele MN bis an die nach N verlängerte ED, und die gerade AN gezogen, so ist △ANE = Trapez. AMDE, also △ANE = Fig. ABCDE.

16. Auf diese Art wird jede geradlinichte Figur in ein Dreyeck verwandelt, dessen eine Seite zugleich eine Seite der Figur ist, welche man also so zu wählen hat, daß das Dreyeck eine dem für die wirkliche Zeichnung gege-

benen Raume schickliche Gestalt erhalte. Oder man zieht aus einem Winkelpuncte der Figur durch einen Punct einer ihrer Seiten eine gerade Linie, und verwandelt die auf beiden Seiten liegenden Theile in ein Dreyeck, worin jene Linie eine gemeinschaftliche Seite ist. Da die Grundlinien beider Dreyecke in die gewählte Seite der Figur fallen, wie in (Fig. 28.) DE in die DN, so machen beide ein einziges Dreyeck über dieser verlängerten Seite als Grundlinie aus.

17. Bey der vorhergehenden Construction sind die Winkel alle als auswärtsliegende (ausspringende) angenommen. Das Verfahren bleibt dasselbe, auch wenn einwärtsliegende (einspringende) Winkel vorkommen. Wäre der W. CDE ein solcher, so bekäme die Linie MN eine entgegengesetzte Lage, und das Dreyeck ADN schlösse sich an ADE eben so an, wie es in dem Falle der Figur geschieht.

18. Man kann aber auch den Umfang, wo einspringende Winkel sich finden, verändern, daß er ausspringende erhalte, ohne Veränderung des Inhalts. Es sey (Fig. 29.) ABCDE ein Theil des Umfangs mit dem einspringenden Winkel BCD. Mit der Linie BD werde CM parallel gezogen, welche AB in M treffe. Zieht man MD, so ist AMDE das Stück des Umfangs, welches statt ABCDE zu setzen ist, und eine Seite weniger, ohne einen einspringenden Winkel enthält. Statt M auf AB kann man auch auf DE den Punct m nehmen, in welchem diese von der mit BD parallelen Cm geschnitten wird.

19. Wenn die durch C mit BD gezogene parallele weder die Seite AB noch DE trifft, die beide eine bestimmte Länge haben, wie in Fig. 30. so ziehe man CE und mit dieser die parallele DM, welche CB in M schneide, und dann die EM. Dadurch ist anstatt des Stücks ABCDE des Umfangs das Stück ABME gesetzt, welches eine Seite weniger und einen weniger einspringenden Winkel enthält. Mit diesem veränderten Umfange verfährt man nach (29.), oder wiederholt die hier gewiesene Art der Umwandlung. Anstatt der Puncte, C, E, kann man auch die Puncte, A, C, nehmen.

20. Wenn mehrere einwärtsliegende Winkel auf einander folgen, wie in Fig. 31. die Winkel, C, D, E, in dem Stücke ABCDEFG eines geradlinichten Umfanges, so ziehe man durch die Winkelpuncte der beiden nächsten ausspringenden Winkel, B, F, die gerade BF, und verwandle die Figur BCDEF in ein Dreyeck über der Seite BF; wodurch man den Fall eines einspringenden Winkels zwischen zwey ausspringenden erhält.

21. Ein ausspringender Winkel liege zwischen zwey einspringenden, wie C zwischen den beiden, B, D, in Fig. 32. wo ABCDEF ein Stück des Umfanges einer geradlinichten Figur ist. In diesem Falle verändere man die Lage der Schenkel BC, DC jenes Winkels. Man ziehe BD, und mit dieser die parallele CM, welche die Seite DE, wenn es nöthig die verlängerte, in M schneide. Noch ziehe man BE, und mit dieser die parallele MN, welche die Seite FE, wenn es nöthig die verlängerte, in N treffe. Der veränderte Umfang der Figur von A bis F ist nun ABNF. — Denn $\triangle BCD = \triangle BMD = \triangle BED + \triangle BME = \triangle BED + \triangle BNE =$ Trapez. BDEN.

In dem Falle, daß CM die Seite DE selbst schneidet, ist die Construction dieselbe, nur der Beweis wird etwas geändert.

22. Aufg. Ein Trapezium, worin keine Seite einer andern parallel ist, in ein solches zu verwandeln, worin zwey Seiten einander parallel sind, und die eine dieser Seiten nebst den anliegenden Winkeln dieselbe Größe hat, wie in dem gegebenen Viereck.

Es sey ABCD (Fig. 33.) das gegebene Trapezium. Mit der Seite DC ziehe man die parallele AE bis an BC, und mit AD die parallele BF bis an AE; nehme die mittlere geometrische Proportionale AG zwischen AE und AF, theile die Seite CD nach dem Verhältnisse AE:AG in R, so nämlich, daß AE:AG = CR:DR sey, ziehe durch R die parallele PQ mit AB, so ist das Trap. ABPQ = Trap. ABCD.

Aus der Construction folgt erstlich, daß die Dreyecke CRP, EAB ähnlich sind, so wie auch die Dreyecke DRQ und FAB. Dadurch ist AE : AB = RC : RP, und AF : AB = RD : RQ. Aus der stetigen Proportion, AE : AG = AG : AF, folgt zweytens, daß AE : AF = $AE^2 : AG^2$ ist. Da nun AE : AG = RC : RD gesetzt ist, so ist auch $AE^2 : AG^2 = RC^2 : RD^2$, folglich AE : AF = $RC^2 : RD^2$.

Hiemit verbinde man die Proportion

$$AF : AB = RD : RQ,$$

so ist

$$AE : AB = RC^2 : RD \times RQ.$$

Da AE : AB = RC : RP = $RC^2 : RC \times RP$ ist, so ist $RC \times RP = RD \times RQ$, oder RC : RD = RQ : RP. Daher sind die beiden Dreyecke, CRP, DRQ, worin die Winkel bey R sich gleich sind, gleich groß (Dreyeck, 30.), und dadurch sind die beiden Trapezien, ABCD, ABPQ, gleich groß. In dem letztern sind die beiden Seiten AB, PQ parallel, wie es verlangt ist.

23. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen, und zwey divergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der einen jener ersten Seiten verwandeln.

Es sey (Fig. 34.) das Trapezium ABEF, dessen Seiten AB, EF parallel sind, und das Parallelogramm ABCD sey mit demselben gleich groß. Die verlängerte Seite CD des Pgrms, schneide die verlängerte AF in G, und die Seite EF des Trapezium schneide AD in H. Es ist also das Dreyeck FAH = Pgr. HC. Man halbire DG in K, und ziehe AK, welche FH in L schneide, so ist das Dreyeck FAL = HAL, und △HAL = △HED, dessen Seite DE eine Diagonale des Pgrms HECD ist. Man ziehe die Linie AE, so ist △ALE = △ADE. Daher ist die gerade DL durch D und L parallel mit AE. Dieses giebt nun die Construction des Pgrms. Man ziehe nämlich parallel mit BE die unbestimmte AD, welche EF in H schneide, halbire

FH in L, ziehe durch L eine parallele mit der durch die Puncte A, E, gezogenen oder gedachten Linie. Sie treffe AD in D. Nun ziehe man DC parallel mit AB, so ist das Pgrm ABCD gleich groß mit dem Trapezium ABEF.

24. Wo man sich, wie in praktischen Fällen gewöhnlich, mit einer empirischen Construction begnügen kann, mag man folgendergestalt die umgekehrte Aufgabe auflösen, das gegebene Pgrm ABCD in ein Trapezium ABEF zu verwandeln, dessen Seiten AB und EF parallel sind, und welches mit dem Pgrm die Seite AB und den Winkel B gemein hat. Der andere an AB liegende Winkel A ist willkührlich oder auch bestimmt. Man halbirt nämlich die Verlängerung DG der Seite CD in K, zieht AK, und nimmt darauf einen Punct L, so daß nach dem Augenmaaße die durch L mit AB gezogene parallele FE das Dreyeck FAH dem Pgrm HC gleich mache. Nun sehe man nach, ob AE und DL parallel sind. Trifft dies zu, so ist L richtig angenommen, wo nicht, so muß man einen andern Punct suchen. Eine kleine Verrückung des Punctes L macht die beiden AE, DL merklich von der parallelen Lage abweichen. Das begünstigt dieses empirische Verfahren.

25. Eine geometrische Construction werden wir folgendermaßen erhalten Es sey geschehen, was verlangt wird, und die FE schneide ein Trapezium ABEF ab, so groß als das gegebene Pgrm ABCD, das mit jenem die Seite AB nebst dem Winkel B gemein hat. Man verlängere CD bis in G auf der verlängerten AF, halbire DG in K, ziehe AK, welche EF in L schneide, so ist $\triangle ALH = \triangle DHE$. Dadurch ist (Dreyeck, 30.) $HL : HE = HD : HA$. Hiermit verbinde man die Proportion $DK : HL = AD : AH$, so entsteht aus beiden diese:

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2,$$

oder $$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Die Linie AD muß in H so getheilt werden, daß das Rechteck von der ganzen und dem Segment HD zu dem

Quadrate des andern Segments AH ein gegebenes Verhältniß habe. Die Aufgabe ist ein Fall der allgemeinern, welche Apollonius die Aufgabe von einem bestimmten Schnitt nannte. Er gehört in die zweyte Classe, s. bestimmter Schnitt, Th. I. S. 95. Die Aufgabe in (22.) gehört zu derselben Gattung, in die erste Classe.

Man suche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale, welche P heiße, so ist $AD : P = AD \times HD : AH^2$; dadurch auch

$$AD \times HD : P \times HD = AD \times HD : AH^2$$

folglich $$P \times HD = AH^2.$$

Diese Gleichung wird durch den Kreis construirt. Sie verwandelt sich erstlich in folgende,

$$P \times AD = P \times AH + AH^2 \text{ oder diese:}$$
$$P \times AD = (P + AH)\,AH.$$

Man ziehe (Fig. 35.) zwey Linien, MN, PQ, die sich in A unter einem beliebigen Winkel schneiden, trage von A aus auf diese die gegebenen Linien AB, AC, die in dem gegenwärtigen Falle gleich sind, und auf MN der AB entgegengesetzt die gegebene AD, halbire BD in E und AC in F, ziehe durch diese Puncte auf beide die senkrechten EG, FG, welche sich in G schneiden, beschreibe aus G durch die Puncte B, D einen Kreis, der PQ in H, K schneide. Vermöge der Eigenschaft des Kreises ist $AB \times AD = AK \times AH$, das ist, $AB \times AD = (AC + AH)\,AH$, oder, da $AC = AB$ genommen ist, $AB \times AD = (AB + AH)\,AH$.

Nimmt man AB und AC gleich der vorher durch P bezeichneten Linie, welches hier wegen des Raums nicht geschehen konnte, und AD so groß als AD in Fig. 34. so ist AH die gesuchte Seite AH oder BE des Trapezium.

Das andere Segment AK ist hier nicht brauchbar. Die Gleichung für die Linie AH in Fig 34. hat zwar zwey Wurzeln oder Werthe von AH, aber nur die kleinere und positive thut der Aufgabe, so wie sie hier vorgelegt ist, ein Genüge. Verlängert man die GA, DA, CB über A und B hinaus, so ist in dem Verticalwinkel von FAH

ein Dreyeck, das eben so die Summe des Pgrms ABCD und eines andern über AB auf der andern Seite dieser Linie ist, als das Dreyeck AFH der Unterschied der Pgrme ABCD und ABEH ist. Die in der Richtung von AH liegende Seite desselben ist die zweyte und negative Wurzel der Gleichung für AH, oder das Segment AK, das durch die Construction in Fig. 35. gefunden wird. Die parallele mit AB, die nun anstatt EF gezogen wird, fällt über den Durchschnitspunct der Linien FA EB hinaus.

26. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen und zwey convergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der größern der parallelen Seiten zu verwandeln.

Es sey (Fig. 36.) ABEF das Trapezium. Man ziehe AH parallel mit BE, und verlängere EF bis an H auf jener Linie, halbire FH in L, ziehe durch L mit der Diagonale AE die parallele LD bis an D auf AH, und durch D die parallele DC mit AB, so ist Pgrm ABCD = Trap. ABEF.

Denn es ist vermöge der Construction $\triangle ADE = \triangle ALE$. Zieht man beide von dem Dreyeck AHE ab, so bleibt $\triangle HDE = \triangle HAL$, und daher Pgrm HC = $\triangle HAF$, die von jenen Dreyecken das doppelte sind. Von beiden das Trapez. HDGF weggenommen, bleibt Trapez. FGCE = $\triangle DAG$, und beiderseits das Trap. ABCG addirt, Trap. ABEF = Pgrm ABCD.

27. Das Pgrm ABCD wird entweder empirisch in das Trapezium ABEF verwandelt, wie in (24.) gezeigt ist, oder durch eine geometrische Construction. Es sey Pgrm ABCD = Trap. ABEF, so ist $\triangle ADG$ = Trap. GCEF, und $\triangle AHF$ = Pgrm DHEC, also $\triangle AHL = \triangle DHE$. Dadurch ist nun $HL : HE = HD : HA$. Die Linie DC schneide AF in G, und AL in K, so ist $DK : HL = AD : AH$. Aus beiden Proportionen entsteht diese

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2$$

oder $$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Man suche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale P, so ist wie oben,

$$P \times HD = AH^2,$$

aber hier ist AH die Summe von AD und DH, dort ist AH ihr Unterschied. Man addire auf beiden Seiten der Gleichung das Rechteck $P \times AD$, so ist

$$P \times AH = AH^2 + P \times AD.$$

Diese Gleichung wird ebenfalls mittelst des Kreises construirt. Man lege zwey Linien AM, AN (Fig. 37.) unter irgend einem Winkel an einander, trage auf AM die gegebenen AB, AD, und auf AN die gegebene AC, halbire BD in E, und AC in F, errichte in E und F die senkrechten EG, FG, welche sich in G schneiden, beschreibe aus G durch B und D einen Kreis, der auf AN die AH, AK abschneide, so ist $AH \times AK = AB \times AD$. Da $AH = KC$ ist, so ist, wenn auf beiden Seiten AH^2 addirt wird.

$$AC \times AH = AH^2 + AB \times AD.$$

Nimmt man $AC = AB$, so erhält man eben eine solche Gleichung, wie die vorher für AH gefundene, welche also auf die jetzt gezeigte Art durch den Kreis construirt wird.

Die Gleichung hat noch einen Werth für AH, nämlich das zweyte Segment von AC, welches aber hier nicht anwendbar ist, weil die dazu gehörige parallele mit AB über den Durchschnittspunct der beiden AF, BE hinaus liegt.

Die Aufgabe kann unmöglich werden, nämlich wenn das gegebene Parallelogramm größer ist als das von AB und den verlängerten AF, BE eingeschlossene Dreyeck. In diesem Falle schneidet der Kreis die AN nicht.

28. Die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten geschieht leichter auf folgende Art. In Fig. 34. und 36. sey das Trapezium ABEF = Pgrm ABCD, so ist, wie vorher gefunden ward, $HL : HE = HD : HA$. Daraus durch die Verbindung der Verhältnißglieder

$$EL : EH = AD : AH.$$

Da $AD : AH = DK : HL$ ist, so ist

$$EL : EH = DK : HL$$

oder $$EL : CD = DK : HL.$$

Diese Proportion wird durch den Kreis construirt; in dem Falle, da die zwey nicht parallelen Seiten divergiren, wie in Fig. 35.; in dem Falle, da sie convergiren, wie in Fig. 37. In beiden Fällen sind in Fig. 35; 37. die Linien AB, AD, AC, AH, AK diejenigen, welche in Fig. 34. 36. die Linien CD, DK, CD, HL, EL sind, und man kann in Fig. 34. die Linie PQ aus Fig. 35. sogleich auf AD fallen lassen, wenn MN auf GC genommen, und der Durchschnittspunct der beiden Linien in D gelegt wird. In Fig. 36. werde AM aus Fig. 37. auf DC, AN auf AD gelegt, so daß der Punct A (Fig. 37.) auf D in Fig. 36. falle.

Verwandelt man die obige Proportion in eine Gleichung, worin entweder EL oder HL zur unbekannten Größe genommen, und die andere durch jene und die gegebene EH ausgedruckt wird, so sind hier beide Wurzeln brauchbar. Die eine ist EL, die andere HL, welche die Construction beide giebt.

Nachdem EL oder HL gefunden sind, ist es leicht die verlangte Linie EF zu ziehen. Man trage von A auf AB eine Linie so groß als LH seyn soll, ziehe durch den Endpunct eine parallele mit AK, so schneidet diese die AD in dem Puncte H, durch welchen EF geht. Auf ähnliche Art macht man es mit der EL.

Aus diesem Beyspiele sieht man, daß viel auf die Wahl der Größe ankommt, wodurch eine Aufgabe aufgelöset wird.

29. Aufg. Eine Figur, die in Trapezien mit parallelen Seiten getheilt ist, in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Figur AacC (Tab. XI. Fig. 38.) bestehe aus zwey Trapezien, ABba, BCcb, deren Seitenlinien, Aa, Bb, Cc, senkrecht auf ABC sind. Die gegebene Seite des Rechtecks, in welches die Figur zu verwandeln

ist, sey PQ, auf der verlängerten AC. Man halbire die Grundlinien, AB, BC, in G, H, ziehe parallel mit den Seitenlinien die, Gg, Hh, bis an die schief laufenden, ab, bc, in g, h. Durch g, h ziehe man die mit AC oder PQ parallelen, g 1, h 2, bis an die durch Q auf PQ senkrechte Qq. Dann ziehe man P 1, P 2. Ferner durch A mit P 1 die parallele A α bis an B b, durch α die parallele αβ mit P 2, bis an C c. Endlich ziehe man durch β die parallele R S mit P Q, und die auf P Q senkrechten, PR, QS, so ist das Rechteck PS gleich der vorgegebenen Figur ACca.

Das Trap. ABba ist gleich dem Rechteck von den Seiten, AB, Gg (s. Trapezium), oder AB und Q 1. Da Aα parallel mit P 1 ist, so ist AB : Bα = PQ : Q 1. Daher sind die Rechtecke, AB × Q 1 und PQ × Bα, gleich groß (12.). Ferner ist das Trap. BCcb gleich dem Rechteck mit den Seiten, BC, Hh, oder BC, Q 2. Durch α ziehe man noch αm parallel mit PQ. Da αβ parallel mit P 2 ist, so ist αm : mβ = PQ : Q 2, und das Rechteck αm × Q 2 oder BC × Q 2 = PQ × mβ. Die beiden Trapezien, Ab, Bc, zusammen sind also den beiden Rechtecken, PQ × Bα + PQ × mβ, oder dem PQ × Cβ, oder dem PQSR gleich.

Auf diese Art verfährt man weiter, für alle Trapezia, welche die Figur enthält. Die senkrechte Qq mag in oder neben der Figur liegen. Zu der Seite PQ wird bequem die Höhe der ganzen Figur genommen, und zu Qq die darauf senkrechte Grundlinie oder eine der mittlern Theilungslinien.

30. Dieses Verfahren ist das bequemste zur Verwandlung der Figuren, besonders wenn sie viele kleine Seitenlinien, und einwärts liegende Winkel hat, selbst bey krummlinichten Begränzungen. Lambert hat ein ähnliches gelehrt, in den Beyträgen zum Gebrauch der Mathem. 2 Th. IV. Abh. Das hier gewiesene ist etwas leichter, so wie es Mayer in seiner praktischen Geometrie, Th. III. §. 303. vorgetragen hat.

31. Aufg. Zwey Parallelogramme in ein einziges mit einer gegebenen Seite zu verwandeln, wenn diese kleiner ist als die Summe der Grundlinien jener.

Mit den beiden Grundlinien, AB, AC, der gegebenen Pgrmme und derjenigen des gesuchten, BC, zeichne man (Fig. 39.) das Dreyeck ABC. Über den beiden Seiten, AB, AC, zeichne man die zugehörigen Pgrmme, ABDE, ACFG, und verlängere die Seiten, DE, FG, bis zu ihrem Durchschnitt in H, ziehe HA und verlängere sie bis an BC in K. Mit HK ziehe man die Parallelen, BL, CM, bis an HD und HF, und verbinde die Durchschnittspuncte L, M durch die gerade LM, so ist die Figur BCML ein Parallelogramm, das den beiden BE, CG zusammengenommen gleich ist.

Denn BL und CM sind derselben Linie AH parallel, also einander parallel; da sie derselben gleich sind, so sind sie selbst einander gleich; daher ist BLMC ein Parallelogramm, und zwar über der gegebenen BC. Ferner ist das Pgrm BE = Pgrm BH, und dieses = Pgrm BLNK, das durch die mit LB parallele HNK von dem Pgrm BM abgeschnitten wird. Eben so ist Pgrm CG = Pgrm CH, und dieses = Pgrm CMNK. Folglich sind die beiden Pgrmme BE und CG so groß als die beiden BN, CN, oder als das Pgrm BCML.

Der Satz steht in den Sammlungen des Pappus B. IV. S. 1.

Eintheilung geradlinichter Figuren.

32. Wenn eine Seitenlinie eines Parallelogramms in irgend welche Theile getheilt wird, und durch die Theilungspuncte parallelen mit den anliegenden Seitenlinien gezogen werden, so wird das Parallelogramm durch diese nach denselben Verhältnissen getheilt, wie jene Grundlinie getheilt ist.

33. Wird eine Seite eines Dreyecks in irgend welche Theile getheilt, und werden durch die Theilungspuncte nach dem gegen über liegenden Winkelpuncte gerade Linien gezo-

gen, so theilen diese das Dreyeck gleichmäßig, wie die Seite getheilt ist, ein.

34. Aufg. Ein Dreyeck nach gegebenen Verhältnissen einzutheilen, so daß die Theilungslinien mit einer der Seiten parallel gehen.

Das Dreyeck sey ABC (Fig. 40.), und die Theilungslinien sollen mit der Seite BC parallel seyn. Man ziehe durch A unter einem beliebigen Winkel eine gerade AD, und nehme AD = AB. Diese AD theile man nach den gegebenen Verhältnissen ein, als hier in die Theile, AM, MN, ND, errichte in M, N die auf AD senkrechten, ME, NF, bis an den Umfang des über AD beschriebenen Halbkreises, ziehe AE, AF, und trage diese auf AB nach AE, AF. Durch die Puncte E, F ziehe man mit BC die parallelen EE, FF, so theilen diese das Dreyeck ABC in drey Theile, die sich wie AM, MN, ND, verhalten. So verfährt man auch, wenn mehr als drey Theile zu machen sind.

Die ähnlichen Dreyecke AEE, AFF, ABC verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten (Euklides VI. 19.). In dem Kreise ist $AE^2 = AM \times AD$, und $AF^2 = AN \times AD$, also verhalten sich $AE^2 : AF^2 : AD^2 = AM : AN : AD$, folglich die Dreyecke AEE : AFF : ABC = AM : AN : AD, daher auch $\triangle AEE$: Trap. EF : Trap. FC = AM : MN : ND.

35. Aufg. Ein Dreyeck nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen, so daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehe.

Das Dreyeck (Fig. 41.) sey ABC, der gegebene Punct D. Man theile eine der Seiten, AC, nach dem gegebenen Verhältnisse in E, und ziehe BE, so ist das Dreyeck BAE (oder auch das BCE) in ein anderes ihm gleiches, MAN, zu verwandeln, dessen dem W. A (oder dem W. C) gegen über liegende Seite durch den Punct D gehe. Es sey geschehen, was verlangt wird, und das Dreyeck MAN dem BAE gleich. Man ziehe DF parallel mit AB, so ist, wegen der gegebenen Lage des

Punctes D, sowohl DF als AF gegeben. Die Gleichheit jener beiden Dreyecke giebt die Proportion,

$$AM : AB = AE : AN,$$

und die parallele Lage der AM und DF diese,

$$FD : AM = NF : AN;$$

also ist

$$FD : AB = AE \times NF : AN^2.$$

Man nehme zu FD, AB, AE die vierte Proportionale P, so ist

$$AE : P = AE \times NF : AN^2.$$

Daher ist, wie in (25.),

$$P \times NF = AN^2.$$

In dem Falle der Figur ist $P \times AN = AN^2 + P \times AF$. Diese Gleichung wird eben so construirt, wie die in (27.). Die Linie AN hat zwey gleichnamige Werthe, und die Linie MN hat dadurch zweyerley Lagen in dem Winkel BAE. Es kann aber der Punct N über C hinaus fallen, und alsdann wäre der zugehörige Werth von AN für die Aufgabe, so wie sie vorgelegt ist, nicht brauchbar, aber wohl für die allgemeinere, in einem gegebenen Winkel ein Dreyeck zu zeichnen, das einen gegebenen Inhalt hat, und dessen jenem Winkel gegen über liegende Seite durch einen gegebenen Punct geht.

Wenn der Punct D nicht innerhalb des Winkels BAC liegt, in welchem das Dreyeck gezeichnet werden soll, so bleibt zwar die Gleichung, $P \times NF = AN^2$, aber es ist $P \times AF = AN^2 + P \times AN$. Diese Gleichung wird construirt, wie die in (25). Die Linie AN hat hier zwey ungleichnamige Werthe. Das zweyte Dreyeck liegt in dem Verticalwinkel von BAC. Hier ist die Construction immer möglich, der Inhalt des in den Winkel zu legenden Dreyecks sey groß oder klein: allein in dem Falle der Fig. 41. kann die Construction unmöglich werden, wenn der Punct D so liegt, daß jedes Dreyeck, wie MAN, dessen Seite MN durch D geht, größer ist als der gegebene Flächeninhalt. Dieses lehrt auch die

Theorie der Gleichungen vom zweyten Grade. Damit die Construction möglich sey, muß $\frac{1}{4}P^2 > P \times AF$ seyn, oder $P > 4AF$, das ist $AB \times AE > 4FD \times AF$.

In der Algebra von Wallis, Kap. 70. ist eine Auflösung des zweyten Falles dieser Aufgabe, da D außerhalb des Winkels BAC liegt, eingerückt. Sie ist von Thomas Strode nicht so einfach wie die hier gegebene, und kann scheinbar unmöglich werden.

35*. Hieraus ergiebt sich auch die Auflösung der Aufgabe, ein Trapezium in ein anderes von demselben Inhalt zu verwandeln, so daß eine Seite des letztern durch einen gegebenen Punct gehe. Das Trapezium sey BEGH (Fig. 41.), der gegebene Punct D. Man verlängere BH und EG bis zu ihrem Zusammentreffen in A, und construire nach der vorigen Aufgabe das Dreyeck AMN, welches dem Dreyeck ABE gleich sey, so ist Trap. MNGH = Trap. BEGH.

In dem Falle, da BH und EG parallel sind, ist die Auflösung sehr leicht. Die Linie NDM geht alsdann durch die Mitte von BE.

36. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse durch eine mit jenen parallele zu theilen.

Das gegebene Trapezium sey ABCD (Fig. 42.), das abzuschneidende ABEF, ihr Verhältniß sey $m:n$. Man ziehe mit BC die parallele AG, welche EF in H schneide, halbire DG in K, und ziehe AK, so halbirt diese die FH in L. Ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten ist gleich einem Rechteck, dessen eine Seite die arithmetisch mittlere zwischen jenen beiden Seiten, die andere ihr Abstand ist. Nun ist CK die arithmetisch mittlere zwischen CG und CD, oder zwischen AB und CD, so wie EL zwischen AB und EF ist. Die Höhen der beiden Trapezien, oder die Abstände ihrer parallelen Seiten, verhalten sich wie AK und AL, oder wie KG und LH; also verhalten sich die beiden Trapezien wie $CK \times KG : EL \times LH$. Man mache die Proportion, $m:n = CK:KM$, so ist $CK:KM = CK \times KG:$

EL × LH, und daher KM × KG = EL × LH, oder KM × KD = EL × LH.

Diese Gleichung wird wie die in (25.) construirt. Man nehme auf der verlängerten AK von K aus KN = AB (= EH), halbire DM in P und KN in Q, errichte in P und Q, auf DM und KN, die senkrechten PO, QO. welche sich in O schneiden, beschreibe aus O durch die Puncte D, M einen Kreis, welcher AN in R und S schneidet, so ist KR = EL, und KS = LH. Nun nehme man auf AB von A aus den Theil AT = KS, ziehe parallel mit AK die TH, welche AG in H schneide, und ziehe durch H mit AB die parallele EHF, so ist diese die verlangte Theilungslinie.

Denn es ist KM × KD = KR × KS, also ist KR × KS = EL × LH. Der Unterschied der beiden KR und KS (oder KR und RN) ist KN oder EH. Dieses ist auch der Unterschied der beiden EL und LH; daher ist KR = EL, und KS = LH. Denn auf jeder andern durch K gelegten Chorde des Kreises ist der Unterschied der Segmente größer oder kleiner als der Unterschied von KR und KS, oder als der von EL und LH.

37. Aufg. Von einer vielseitigen Figur ein Stück abzuschneiden, das einen gegebenen Inhalt hat, und innerhalb der ganzen Figur durch zwey gerade Linien begränzt wird, die durch einen gegebenen Punct gehen, und deren eine der Lage nach bestimmt ist.

Die Aufgabe ist die umgekehrte von der, eine geradlinichte Figur in ein Dreyeck zu verwandeln. An einem Beyspiele läßt sich das Verfahren hinreichend zeigen. Es sey (Fig. 43.) ABCDEFG ein Theil von dem Umfange einer Figur, in welcher P der Punct ist, durch welchen die beiden begränzenden Theillinien gehen sollen, und PA sey die gegebene derselben. Über der PA in dem Winkel PAB errichte man das Dreyeck PAa, das dem abzuschneidenden Stücke gleich groß ist. Durch a ziehe man mit PB die parallele ab, welche der verlängerten Seite der Figur BC in b begegne; durch b die parallele bc mit PC, welche die verlängerte Seite CD in c treffe;

durch c mit PD die parallele cd, welche die Seite DE selbst in d schneide. Durch diesen Punct d und P ziehe man die Pd, so ist PABCDdP dem Dreyeck PAa gleich groß, und ist also das Stück, welches von P aus abgeschnitten werden soll.

Es wird kaum nöthig seyn zu bemerken, daß ΔPbB = PaB; ferner ΔPcC = ΔPbC; dann ΔPdD = ΔPcD. Dadurch ist nach und nach das Dreyeck PAa in die Figur PABCDdP verwandelt worden.

38. Auf diese Art kann man eine geradlinichte Figur aus einem Puncte innerhalb derselben, oder auf ihrem Umfange, in irgend eine Anzahl Theile nach gegebenen Verhältnissen eintheilen. Es sey (Fig. 43.) ABCDEGA ein Abschnitt der ganzen Figur, worin P der Theilpunct, und PA die erste Theilungslinie ist. Über PA in dem Winkel A errichte man das Dreyeck PAa, so groß als der Theil, der an PA liegen soll, und reducire dasselbe auf die Figur in PABCDdP. Nun ist Pd die zweyte Theilungslinie. Auf dieser in dem Winkel PdE errichte man ein Dreyeck so groß als der zweyte abzuschneidende Theil, und reducire es auf die Figur. So fahre man fort, bis der letzte Theil übrig bleibt.

39. In der Ausübung wird gewöhnlich erfordert, daß die Theilungslinien eines Feldes parallel oder nahe es seyn. Auch müssen sie sich oft an einer langen Seite des ganzen Feldes endigen. Hier ist ein Beyspiel, wie dieses bewerkstelligt werden mag.

40. Es ist (Fig. 44) die Figur ABCDEFA in drey Theile, deren Verhältniß gegeben wird, zu theilen, so daß die Theilungslinien an der Seite AF sich endigen. Die Figur werde zuerst in ein Dreyeck FAP verwandelt. Die Seite AF theile man nach den gegebenen Verhältnissen ein, der Folge der Theile übereinstimmig, nämlich in die Theile AG, GH, HF, und ziehe GP, HP. Durch diese wird das Dreyeck APF nach den gegebenen Verhältnissen eingetheilt. Nun verwandle man das Dreyeck GAP in das Trapezium ABKG. Die mit BG parallele PK trifft hier die Seite der Figur BC in K.

Man ziehe GK, so ist GK die erste Theilungslinie. Diese verlängere man bis an die durch P mit AF gezogene Parallele PV in Q, und ziehe HQ, so ist $\Delta GQH = \Delta GPH$. Jenes Dreyeck werde nun in das Fünfeck GKCLH verwandelt, auf die in (37.) gewiesene Art. Nämlich mit HK wird Qc parallel bis an die verlängerte BC gezogen, und mit HC die parallele cL, welche die Seite CD in L schneidet, So ist HL die zweyte Theilungslinie. Der übrige Theil der Figur, nämlich HLDEF ist nun dem Dreyeck HPF gleich. Auch hier werde die Theilungslinie HL bis an die mit AF parallele PV verlängert, und FR gezogen, so ist $\Delta HPF = \Delta HRF$. Mit FL ziehe man parallel die Rd bis an die verlängerte CD; dann mit FD die parallele dE, welche die Seite ED in dem Endpuncte E trifft, wo die Seite FE sich anschließt. Also ist das Fünfeck HLDEF gleich dem Dreyeck FRH, d. i. dem HPF. Die ganze Figur ist nun in die verlangten drey Theile auf die verlangte Art getheilt.

Jede gefundene Theilungslinie wird bis an die mit der Grundlinie der Figur gezogene parallele PV verlängert, und an den Durchschnitt mit derselben von dem nächsten Theilungspuncte der Grundlinie (vorher der AF) eine gerade Linie gezogen; das Dreyeck, das zwischen diesen beiden an PV gezogenen, und der Theillinie der Basis enthalten ist, wird in eine vier- oder mehrseitige Figur über der Theillinie der Basis verwandelt. Solchergestalt ist jede Theilungslinie die erste Seitenlinie einer neuen Figur, bey welcher dasselbe Verfahren, wie im Anfange, wiederholt wird.

41. Die Theilungslinien einer Figur in der Lage zu ziehen, wie in der vorhergehenden Aufgabe verlangt ward, lehrt C. H. Wilke in der neuen und erleichterten Methode, den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, und dieselben ohne Rechnung einzutheilen. Halle, 1757. Aber sein Verfahren ist nicht so einfach als das hier gewiesene. Das Neue in seiner Schrift gehört dem Göttingischen Astronomen, Tobias Mayer, der sein Lehrer in der praktischen Geometrie gewesen war, welches der Verfasser

aber nur andeutet, nicht bestimmt angiebt. Er ward deswegen einer literarischen Entwendung in den Göttingischen Anzeigen beschuldigt, wogegen er sich in dem Anhange zu einer andern Schrift, neue Grundsätze der praktischen Geometrie, Halle, 1758. vertheidigt. Mayer hat über die Verwandlung und Eintheilung geradlinichter Figuren der Göttingischen Societät der Wissenschaften eine Abhandlung vorgelegt, die aber in ihren Sammlungen nicht erschienen ist.

42. Die Linie AF kann auch eine gerade Linie seyn, die innerhalb einer Figur so gezogen ist, daß diese zwischen ein paar durch ihre Endpuncte gezogenen parallelen ganz enthalten ist. Theilt man die beiden Theile der ganzen Figur, welche an beiden Seiten von AF liegen, nach denselben Verhältnissen in einerley Ordnung ein, so stoßen, die gleichnamigen Theilungslinien auf AF zusammen. Statt zweyer solcher kann man leicht eine einfache ziehen, die eben den Theil abschneidet, wie jene.

43. Nachdem eine Figur so getheilt ist, daß die Theilungslinien sich außer der Figur schneiden, so kann man diese mittelst der Auflösung der Aufgabe (22.) in parallele Linien verwandeln. Z. B. in (Fig. 44.) wird nach der Vorschrift daselbst das Viereck ABKG in ein Trapezium verwandelt, worin die veränderte Seite der AB parallel ist, ohne den Inhalt zu verändern. In dem Fünfeck GKCLH gedenke man sich durch C eine parallele mit AB, so giebt diese mit CL, LH und dem auf HG abgeschnittenen Stück ein Viereck, worin die Lage der Seite LH mit einer der AB parallelen vertauscht werden mag.

44. Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man habe die vorgegebene Figur durch parallelen aus jedem Winkelpuncte mit einer schicklichen Seitenlinie in Trapezia getheilt. Diese sind nach der Reihe in Rechtecke über einer gegebenen Grundlinie verwandelt, nach (29.). Die abzuschneidenden Theile seyn auch durch Rechtecke über derselben Grundlinie gegeben. Soll nun die Figur in gewisse Theile getheilt werden, so nehme man zu dem ersten derselben so

viele aufeinander folgende Trapezien von der dazu bestimmten Gränze an, daß der Unterschied von dem abzuschneidenden Theile kleiner sey als das nächste Trapezium. In diesem errichte man über der gemeinschaftlichen Scheidungslinie desselben und des nächsten jener erstern ein Rechteck so groß als der Überschuß des ersten Theils der Figur über jene Trapezien ist. Da dieser Überschuß durch ein Rechteck über einer andern Grundlinie gegeben wird, so muß dieses in jenes verwandelt werden, entweder nach (9, oder 13.) oder durch Rechnung. Die Höhen verhalten sich umgekehrt wie die Grundlinien (10.). Das Rechteck wird in ein Parallelogramm verwandelt, das mit dem Trapezium einen Winkel an der Grundlinie gemein hat, und darauf nach (25. oder 27.) in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, wenn man sich nicht der empirischen Construction in (24.) bedienen will.

Von der ersten gefundenen Theilungslinie an schneidet man nun den zweyten Theil auf dieselbe Art ab; von der zweyten Theilungslinie an den dritten Theil u. s. f. bis zu dem letzten.

Soll eine Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehen, so wird dieses durch die in (35*.) gewiesene Construction bewerkstelligt.

45. Noch ein bequemes Mittel, ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, das einen gegebenen Inhalt hat, zu zeichnen, ist folgendes, die Verwandlung eines Dreyecks in ein solches Trapezium.

Es sey ABC (Fig. 45.) das gegebene Dreyeck, und das Trapezium ABDE, worin ED parallel der AB, demselben gleich. Die Seite AB mit den beiden anliegenden Winkeln desselben sind gegeben. Die Seite ED schneide BC in F, so ist, da $\triangle CEF = BDF$ gesetzt wird, $FB : FC = FE : FD$. Man ziehe CG parallel mit AB bis an die verlängerte BD in G. Aus jener Proportion ist durch Verbindung der Glieder,

$$BC : BF = DE : FE$$

und $$BC : FC = DE : DF$$

Da nun auch, wegen der parallelen AB, ED, CG, ist

$$BC : BF = CG : FD$$

und $$BC : FC = AB : FE$$

so ist

$$AB : FE = DE : DF$$
$$FE : DE = DF : CG$$

und daraus

$$AB : DE = DE : CG,$$

oder DE ist die mittlere proportionale zwischen AB und CG. Nachdem diese gefunden ist, trage man sie auf AB von A nach H, ziehe HD parallel mit AC bis an BG in D, und durch D die parallele DE mit AB, so ist das Trap. ABDE dem Dreyeck ABC gleich.

46. Ausführlichen Unterricht von der Verwandlung und Theilung der Figuren findet man in J. T. Mayers Unterricht zur praktischen Geometrie, III. Th. 27. u. 29. Kap. Des ältern Mayers Methoden sind, wie schon vorher bemerkt, in Wilkens Schrift: Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, enthalten. Diese Schrift hat auch Böhm benutzt in der Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, V. Cap. S. 120 — 188. wo das Verfahren durch Beyspiele durchgehends erläutert wird. Zur praktischen Anwendung für wenig Geübte ist dienlich: Anweisung zu Felder- und Landtheilungen, von Vollimhauß. Hannover und Leipzig 1773. 134 S. in 8. mit 6 K. Schulze hat in seinem Taschenbuche zu Anwendungen der Meßkunst (Berlin 1782.), Th. I. §. 425 — 451. die Verwandlung und Theilung der Figuren umständlich vorgetragen, verschiedenes auf eigenthümliche Art.

Lambert hat gezeigt, wie Figuren in gleich große Rechtecke zu verwandeln sind. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, III. Th. 4te Abh. Auch hat Alb. Euler in dem V. Bande der Abhandl. der Bayerischen Akademie einen Aufsatz über die Theilung der Figuren geliefert.

In den Fundamentis arithmeticis et geometricis authore Ludolpho a Ceulen, Lugd. Bat. 1615.

sind schon mancherley Aufgaben über die Verwandlung und Theilung der Figuren enthalten.

Anweisung, die geradlinichten Figuren nach einen gegebenen Verhältniß ohne Rechnung zu theilen, Frft. u. Leipzig 1776. ist eine Übersetzung eines Abschnittes aus Ozanam Cours de Mathématique, T. III.

Eine Schrift von le Clerc, traité de Géométrie sur le terrain, die dessen Géométrie pratique, Amsterd. 1694. beygefügt ist, enthält die Lehre von der Eintheilung und Verwandlung der Figuren sehr gut vorgetragen, nach d'Alemberts Zeugniß in dem Dictionn. encyclop. Article, Géodésie.

Der gegenwärtige Artikel wird zur bessern Übersicht der Methoden und zur Ergänzung dienen. Die hier in (22 — 28.) gegebenen brauchbaren Auflösungen fehlen bey den angeführten Schriftstellern.

Verwandlung und Theilung der Figuren durch Rechnung.

47. Geradlinichte Figuren durch Rechnung auszumessen, zerlegt man sie in Dreyecke. Der Inhalt eines Dreyecks wird durch das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe ausgedrückt, wobey das Quadrat der Längen-Einheit die Flächen-Einheit ist. Oder man bedient sich der Formel aus den drey Seiten den Inhalt zu finden. (Dreyeck, 34.). Zwey Dreyecke mit einer gemeinschaftlichen Seite geben ein Trapezium. Dieses wird ausgedruckt durch das halbe Product aus der einen Diagonale in die Summe der darauf gefällten Perpendikel.

48. Am bequemsten ist es, die Figur in Trapezien mit parallelen Seiten zu zerlegen, wie die in Fig. 46. gezeichnete, worin durch alle Winkelpuncte parallelen mit der einen Seite A A gezogen sind. Die äußerste Seite F F ist hier auch der A A parallel, statt dessen auch ein Winkelpunct vorhanden seyn mag.

Der Inhalt eines Trapezium mit zwey parallelen Seiten ist das halbe Product aus der Summe derselben in ihren Abstand von einander. In der gezeichneten Figur ziehe man auf AA eine senkrechte in a, welche die parallelen in b, c, d, e, f schneide. Der Inhalt dieser Figur ist =

$$\tfrac{1}{2}(AA \,.\, ab + BB \,.\, ac + CC \,.\, bd + DD \,.\, ce + EE \,.\, df + FF \,.\, ef).$$

49. Wenn die Abstände der Parallelen alle von der ersten AA angenommen werden, so ist der Inhalt der Figur =

$$\tfrac{1}{2}((AA - CC)\, ab + (BB - DD)\, ac + (CC - EE)\, ad + (DD - FF)\, ae + EE \,.\, af + FF \,.\, af).$$

Es ist nämlich $bd = ad - ab$; $ce = ae - ac$; $df = af - ad$; $ef = af - ae$.

Wo die größern der parallelen von der kleinern abzuziehen ist, da wird das Product des Unterschiedes in den Abstand von der ersten subtractiv.

50. Hat die Figur irgendwo mehrere kleine Seiten nach einander, so schneide man diese durch eine gerade Linie zwischen den Endpuncten der äußersten unter ihnen ab, und berechne die Fläche zwischen ihnen und dieser Linie besonders, durch Zerlegung in kleine Trapezien, die wegen der kleinern parallelen und Abstände leicht berechnet werden können.

Auf diese Art werden selbst die durch krumme Linien begränzten Abschnitte der Figur nahe genug berechnet werden können.

51. Die Eintheilung der Figuren wird am bequemsten bewerkstelligt, wenn sie in Trapezien mit zwey parallelen Seiten bey der Berechnung des Inhalts zerlegt worden sind, wie dies schon oben (44.) gezeigt ist. Es ist nur hier noch anzugeben, wie die Lage einer Theilungslinie, die mit der gegebenen Seite, so wie die andern durch die Winkelpuncte gezogenen, auch parallel seyn soll, durch

Rechnung gefunden wird, oder wie ein gegebenes Rechteck in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, worin die eine derselben mit den anliegenden Winkeln gegeben ist, verwandelt wird. Die Aufgabe ist oben (25. 27.) geometrisch aufgelöset.

Es sey in (Fig. 34.) das Parallelogramm ABCD gleich dem Trapezium ABEF, worin die Seite EF der AB parallel ist. Man setze $AB = a$, die (hier nicht ausgedruckte) Höhe des Pgrms $= h$, die Seite des Trapezium, $EF = a + 2y$, die Höhe $= x$, so ist $(a + y)x = ah$. Die verlängerten CD und AF schneiden sich in G, und es sey $DG = 2b$, so ist $h : x = b : y$, und $y = \frac{bx}{h}$. Also ist

$$\left(a + \frac{bx}{h}\right)x = ah,$$

oder $$xx + \frac{ah}{b}x = \frac{ahh}{b}.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{ahh}{b} + \frac{aahh}{4bb}\right)} - \frac{ah}{2b}.$$

Die negative Wurzel kann hier nicht gebraucht werden. Die bequemste Form der positiven Wurzel ist,

$$x = \frac{ah}{2b}\left(\sqrt{(1 + \frac{4b}{a}} - 1)\right).$$

Wenn die beiden Seiten, AE, AF, convergiren, wie in Fig. 36. so ist b negativ, und, b absolut genommen,

$$x = \frac{ah}{2b}\left(1 - \sqrt{(1 - \frac{4b}{a})}\right).$$

Ist $2b = \frac{1}{2}a$, so wird das Trapezium zu einem Dreyeck, dessen Höhe $= 2h$ ist. Für die gegenwärtige Aufgabe ist also $a > 4b$, und $x < 2h$, daher $x < \frac{a.2h}{4b}$, oder

$x < \frac{ah}{2b}$. Darum muß die Wurzelgröße das Vorzeichen — bekommen. Die zweyte positive Wurzel ist für die gegenwärtige Aufgabe nicht anwendbar.

52. Exempel. In dem Trapezium AB (Fig. 46.) sey AA = 216 Fuß, BB = 364; der Abstand beider Seiten = 240, also der Inhalt = 69600 Quadratf. Es soll ein Stück, 34800 Quadratf. groß abgeschnitten werden.

Hier ist $a = 216$, $ah = 34800$, also $h = \frac{2900}{18}$.

Die Linie $a + 2b$ zu finden, ziehe man in diesem Abstande von AA eine parallele, oder man suche b durch Rechnung, da $240 : \frac{2900}{18} = BB - AA : 2b = 74 : b$ ist. Diese Proportion giebt $b = \frac{2900 \cdot 74}{18 \cdot 240} = \frac{145 \cdot 37}{27 \cdot 4}$.

Also $1 + \frac{4b}{a} = 1 + \frac{145 \cdot 37}{27 \cdot 216} = \frac{11197}{5832}$, und

$\sqrt{\left(1 + \frac{4b}{a}\right)} = 1{,}385613$, mit Hülfe der Logarithmen,

$$\begin{aligned} l\ 11197 &= 4{,}0491017 \\ l\ 5832 &= 3{,}7658175 \\ \text{Untersch.} &= 0{,}2832842 \\ \text{Hälfte} &= 0{,}1416421 \end{aligned}$$

Nun ist $x = \frac{34800 \cdot 54}{145 \cdot 37} \times 0{,}385613$

$= \frac{1879200}{5365} \times 0{,}385613 = 135{,}07.$

$$\begin{aligned} l\ 1879200 &= 6,2739780 \\ l\ 0,385613 &= 9,5861517 \\ S.\ l\ 5365 &= 3,7295697 \\ \hline \log x &= 2,1305550. \end{aligned}$$

Das Exempel ist in Mayers prakt. Geom. III. §. 308. nach einer andern Formel berechnet. Das Resultat ist vollkommen dasselbe.

53. Soll die Theilungslinie durch einen gewissen Punct des Umfangs gehen, so ziehe man durch diesen Punct eine parallele mit der Grundlinie der Figur, berechne den durch diese parallele und eine der nächsten parallelen erhaltenen Abschnitt, und lege auf der einen Seite jener Linie noch ein Dreyeck zu, oder ziehe auf der andern ein solches ab, das mit jenem Trapezio den verlangten Inhalt gebe. Die Höhe dieses Dreyecks wird durch die gezogene parallele und den Inhalt des Dreyecks gegeben.

54. Von der Berechnung des Inhalts einer vier- oder mehrseitigen Figur aus den gegebenen Seiten und Winkeln, oder der unbekannten Seiten und Winkel s. den Artikel, Polygonometrie.

Ähnlichkeit geradlinichter Figuren.

55. Ebene und geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, gleich, und die Verhältnisse der zwischen diesen gleichen Winkeln liegenden Seiten dieselben sind. Z. B. in den Fünfecken Fig. 47. a und 47. b, sind die Winkel $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, und es ist $AB : BC = ab : bc$; $BC : CD = bc : cd$; $CD : DE = cd : de$; $DE : EA = de : ea$. Dadurch sind diese beiden Figuren einander ähnlich.

Die zwischen den gleich geordneten Winkeln liegenden Seiten der ähnlichen Figuren heißen gleichnamige (latera homologa).

56. Einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, zerlege man jene in Dreyecke, und zeichne diesen ähnliche

und ähnlich gelegte Dreyecke, wobey eine Seite der Figur willkührlich angenommen wird, wenn sie nicht gegeben ist, wie in Fig. 47., a, b, wo die mit gleichnamigen Buchstaben bezeichneten Dreyecke sich ähnlich, und die so bezeichneten Winkel sich gleich sind. Durch diese Construction sind die Winkel der zweyten Figur denen der ersten nach ihrer Ordnung gleich. Es ist ferner

AB : AC = ab : ac
AC : CD = ac : cd
also AB : CD = ab : cd.
Eben so ist CD : DE = cd : de
Daher AB : DE = ab : de.

So erhellt, daß in jedem Falle die zwischen den übereinstimmigen Winkeln beider Figuren liegenden Seiten einerley Verhältniß haben, daher die Figuren ähnlich sind.

57. Die Seiten AE, BC seyn in M, N gleichmäßig getheilt, wie die gleichnamigen Seiten ae, bc der ähnlichen in m, n, so daß AM : AE = am : ae, und BN : BC = bn : bc ist. Dadurch sind die geraden MN, mn, in beiden Figuren ähnlich liegende, und theilen beide gleichmäßige in, so daß die Figuren MABN, mabn ähnlich, und MEDCN, medcn es gleichfalls sind.

Denn die Verhältnisse AM : AE : AB : BC : BN sind denen am : ae : ab : bc : bn nach ihrer Ordnung gleich, daher sind die daraus zusammengesetzten Verhältnisse AM : AB : BN denen am : ab : bn folgeweise gleich. Es werden MB und mb gezogen, so sind die Dreyecke MAB, mab ähnlich, und die Winkel ABM, abm sind gleich, daher die Winkel MBN, mbn. Nun sind MB : AB : BN wie mb : ab : bn, folglich sind die Dreyecke MBN, mbn ähnlich; die W. BNM, bnm sind sich gleich, und es ist MN : NB = mn : nb. Da NB : AB = nb : ab, so ist MN : AB = mn : ab. Die Figuren MABN, mabn, die aus den ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

58. Wenn die abgeschnittene Figur mehr als zwey Dreyecke enthält, so ist der Beweis derselbe. In dem

andern Theile der Figur ziehe man die Diagonalen MD, MC; md, mc. Es sind ME : AE : ED : DC : CB : CN nach der Ordnung wie me : ae : ed : dc : cb : cn; also ME : ED : DC : CN wie me : ed : dc : cn. Daher sind erstlich die Dreyecke MED und med ähnlich, und die Winkel EDM, edm, sich gleich, also auch die Winkel MDC, mdc. Da MD : DE : DC wie md : de : dc sind, so ist MD : DC = md : dc, und die Dreyecke MDC, mdc sind ähnlich. Also ist MC : CD = mc : cd. Da CD : CN = cd : cn ist, so ist MC : CN = mc : cn; dadurch, und durch die gleichen Winkel MCN, mcn, sind die Dreyecke MCN, mcn ähnlich.

59. Man sieht hieraus, daß die Ähnlichkeit zweyer Figuren dargethan ist, wenn erwiesen ist, daß die gleichgeordneten Winkel bis auf zwey in beiden sich gleich, und die zwischen jenen liegenden Seiten, bis auf die zwischen diesen beiden liegende, gleiche Verhältnisse haben, so wie Figuren gleich sind, wenn die Winkel beider nach ihrer Folge bis auf zwey, und die Seiten auch nach ihrer Folge bis auf die zwischen jenen Winkeln liegende als gleich erkannt sind.

60. Figuren sind ähnlich, wenn erwiesen ist, daß die gleichgeordneten Winkel in beiden sich gleich, und daß die Verhältnisse der zwischen ihnen liegenden Seiten, bis auf zwey an einander stoßende, dieselben sind.

61. Auch sind Figuren ähnlich, von welchen erwiesen ist, daß die gleich geordneten Winkel, bis auf drey nach einander folgende, sich gleich, und daß alle gleich geordnete Seiten einerley Verhältnisse haben.

62. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 48. a. b.) haben die Puncte M, m, ähnliche Lagen, wenn die Linien, welche von denselben nach den Winkelpuncten gezogen werden, nach ihrer Folge einerley Verhältnisse haben, und die Winkel derselben in beiden übereinstimmig sind. Ist der Punct M in der einen Figur gegeben, so mache man in der andern das Dreyeck amb dem AMB ähnlich, und es hat m eine ähnliche Lage mit M.

Denn es ist, wegen der Ähnlichkeit der Figuren, AB : BC = ab : bc. Die beiden ähnlichen Dreyecke AMB, amb geben die Proportion MB : AB = mb : ab, woraus und aus jener folget MB : BC = mb : bc. Da die Winkel ABC, abc, und auch ABM, abm gleich sind, so sind die Winkel MBC, mbc gleich, und die Dreyecke BMC, bmc sind ähnlich. Folglich ist MB : MC = mb : mc, und die Winkel bey M, m sind sich gleich. Dasselbe wird von allen um M und m gelegten Dreyecken erwiesen, so viele Seiten auch die Figur haben mag.

63. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 49. a. b.) seyn M und m, N und n ähnlich liegende Puncte, so sind die Dreyecke über den Linien MN, mn, deren Spitzen in die gleichnamigen Winkelpuncte der Figur fallen, ähnlich, und es ist MN zu einer der Seiten, als AB, wie mn zu der gleichnamigen Seite ab in der andern Figur.

Denn wegen der ähnlichen Lage der Puncte sind die Dreyecke AMB und amb, ANB und anb ähnlich. Dadurch ist AM : AB = am : ab, und AB : AN = ab : an also AM : AN = am : an. Wegen der gleichen Winkel MAB und mab, NAB und nab ist W. MAN = man. Folglich sind die Dreyecke MAN, man ähnlich, und so sind auch die übrigen über MN und mn construirten Dreyecke, deren der MN und mn gegen über liegende Spitzen in die Winkelpuncte der Figuren fallen, ähnlich, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, genommen. Nun ist MN : AM = mn : am, und AM : AB = am : ab. Daraus entsteht die Proportion MN : AB = mn : ab. So ist auch MN : BC = mn : bc, und auf gleiche Art für die übrigen Seiten.

64. Umgekehrt, wenn die Dreyecke man, mbn, mcn, u. s. f. den Dreyecken MAN, MBN, MCN, u. s. f. in einer gegebenen Figur ähnlich gemacht werden, so geben die Spitzen der Dreyecke, a, b, c, etc. eine Figur, die jener ähnlich ist. Denn es sind erstlich die Winkel AMN und amn, BMN und bmn gleich, also

W. AMB = amb. Ferner sind AM : MN : MB wie am : mn : mb, daher AM : MB = am : mb, und die Dreyecke AMB und amb ähnlich. Eben dieses wird von den andern um M und m gelegten Dreyecken erwiesen, daher beide Figuren aus ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zusammen gesetzt werden, und ähnlich sind.

Bey Feldvermessungen ist dieses Verfahren das bequemste, und erfordert nur bey sehr spitzigen Winkeln Vorsicht.

65. Die Flächenräume ähnlicher geradlinichter Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten, weil die Dreyecke, worein sie zerlegt werden, sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten verhalten. Es verhalten sich in (Fig. 47. a. b.) die Dreyecke, ABC : ACD : ADE zu den Dreyecken, abc : acd : ade wie $BC^2 : CD^2 : DE^2$ zu $bc^2 : cd^2 : de^2$ in der hier gesetzten Ordnung. Da die Linien BC : CD : DE sich wie bc : cd : de verhalten, so verhalten sich auch $BC^2 : CD^2 : DE^2$ wie $bc^2 : cd^2 : de^2$, und die Verhältnisse der Dreyecke ABC : abc; ACD : acd; ADE : ade sind dem von $BC^2 : bc^2$ oder dem duplicirten zweyer andern gleichnamigen Seiten, als $AB^2 : ab^2$, gleich; daher sind auch die Summen der Dreyecke, oder die Flächen der ähnlichen Figuren in diesem Verhältnisse.

66. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen P ähnlich, und einer andern gegebenen Q gleich sey. — Über einer der Seiten AB der Figur P (Tab. XII. Fig. 50.) beschreibe man ein Rechteck ABCD so groß als die Figur P, und errichte auf AC ein Rechteck AEFC so groß als die Figur Q (nach 29. oder auf andere Art). Dann suche man die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und AE, so ist diese die mit AB gleichnamige Seite der gesuchten Figur. Sie sey GH. Über dieser beschreibe man die Figur R, welche der P ähnlich ist, so ist R so groß als die Figur Q.

Denn da AB : GH = GH : AE ist, so ist $AB^2 : GH^2$ = AB : AE, und da P : R = $AB^2 : GH^2$ ist, so ist P : R = AB : AE. Es ist aber P : Q =

AB : AE, da ABCD = P, und AEFC = Q, gemacht sind. Also ist P:R = P:Q, folglich R = Q.

67. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die zwey gegebenen ähnlichen Figuren zusammen genommen gleich, und ihnen ähnlich sey. — Zwey gleichnamige Seiten jener beiden Figuren setze man unter einem rechten Winkel zusammen, und ziehe durch ihre beiden andern Endpuncte eine gerade Linie, so ist diese eine Seite der gesuchten Figur, und zwar die denen aus jenen Figuren genommenen gleichnamige.

Denn es seyn die beiden gegebenen Figuren P, Q, die gesuchte R, die gleichnamigen Seiten derselben seyn p, q, r, so sind P : Q : R wie pp : qq : rr, und P + Q : P = pp + qq : pp. Da P : R = pp : rr, so ist P + Q : R = pp + qq : rr. Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatze pp + qq = rr, also ist P + Q = R.

Figurirte Zahlen sind die Glieder arithmetischer Reihen aller Ordnungen, deren erstes Glied die Einheit ist. Der Grund der Benennung wird unten angegeben. Hier wollen wir nur diejenigen betrachten, deren letzte Differenzreihe zu Gliedern die Einheit hat. Mit Hinzufügung dieser letztern Reihe sind die Reihen solcher figurirten Zahlen:

O.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	etc.
I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	etc.
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	etc.
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	etc.
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	etc.
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	etc.

u. s. f.

Das allgemeine Glied jeder dieser Reihen wird nach der Formel, in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen (7.), mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen gefunden. Um diese Formel hier anzuwenden, muß 0 als Anfangsglied in den Reihen vorgesetzt werden,

weil dort bey den Anfangsgliedern der Differenzreihen, a, b, c, d, etc. ein Glied in der Stelle o angenommen ist, dagegen hier die Glieder der ersten Reihe I. am einfachsten zu Stellenzahlen für die Glieder der folgenden gebraucht werden.

Die Stelle eines Gliedes in einer Reihe sey x, das Glied = y, so ist in I. $y = x$.

Für die Reihe II. sind die Anfangsglieder der Differenzreihen, 1 : 1. Also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 1, \text{ und } y = \frac{x \cdot x+1 \cdot}{1 \cdot 2}.$$

Für die Reihe III. sind die Anfangsglieder der drey Differenzreihen, 1; 2; 1, also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{x \cdot x-1 \cdot x-2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1.$$

Durch die Entwickelung der Producte wird erhalten $y = \frac{1}{6} x (x^2 + 3x + 2)$, oder $y = \frac{x \cdot x+1 \cdot x+2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Für die Reihe IV. sind die Anfangsglieder der vier Differenzreihen, 1; 3; 3; 1, also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{x \cdot x-1 \cdot x-2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3$$

$$+ \frac{x \ldots x-3 \cdot}{1 \ldots 4} \cdot 1.$$ Durch die Entwickelung der Producte ergiebt sich $y = \frac{x}{24} (x^5 + 6x^2 + 11x + 6)$ oder $y = \frac{x \cdot x+1 \cdot x+2 \cdot x+3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. (Von der Verwandlung eines Aggregats in ein Product s. Artikel, Factor.)

Für die folgenden Reihen wird die Rechnung immer beschwerlicher. Die gefundenen allgemeinen Glieder zeigen die Fortschreitung derselben hinlänglich. Denn da alle Reihen auf eine gleichförmige Art gebildet werden, so muß

das Gesetz, welches sich ganz unzweydeutig aus den wirklich berechneten Gliedern ergiebt, allgemein seyn. Zur Bestätigung dient folgendes. In der nten Reihe sey $y = \frac{x.x+1...x+n-1.}{1.2.....n}$, und gleichmäßig in der (n + 1)ten Reihe das Glied in der Stelle x, welches z heiße, $z = \frac{x.x+1...x+n.}{1.2....n+1.}$, und in derselben das in der Stelle x − 1, welches z^1 sey, $z^1 = \frac{x-1.x...x+n-1.}{1.2....n+1.}$. Der Unterschied dieser beiden Glieder muß der Werth von y seyn, wie er es auch wirklich ist.

Die Zahl x, die Stellenzahl einer figurirten Zahl, heißt ihre Seite (latus), oder ihre Wurzel.

Jedes Glied einer Verticalreihe in der Tafel der figurirten Zahlen ist die Summe aller Glieder der nächst vorhergehenden Verticalreihe von 1 in der letzten Differenzreihe, oder der mit O bezeichneten, bis mit zu dem Gliede der Horizontalreihe, worin jenes Glied befindlich ist. Denn das xte Glied einer Horizontalreihe ist die Summe des (x − 1)ten Gliedes derselben Reihe und des xten in der nächst obern. Dieses ist wieder die Summe des (x−1)ten Gliedes seiner Horizontalreihe und des xten in der Verticalreihe zunächst über ihm befindlichen. So fortfahrend erhält man durch Zerlegung der Glieder der xten Verticalreihe die Summe der Glieder in der (x − 1)ten.

Auf diese Art werden auch die Binomialcoefficienten in einer Stelle summirt, s. Binom. Coeff. 6. In der Tafel daselbst (4.) sind dieselben Zahlen wie hier, nur daß die Querreihen nicht übereintreffen. Die Querreihen in der Tafel der figurirten Zahlen sind dort herablaufende, so wie die Querreihen dort hier hinauflaufende sind.

Hieraus läßt sich nun auch die Form der Zahlen jeder Reihe der figurirten Zahlen herleiten. Das erste Glied der nten Reihe gehört in der Tafel der Binomialcoefficien-

ten auch zu der nten; das zweyte jener in dieser zu der $(n+1)$ten Reihe; das dritte jener in dieser zu der $(n+2)$ten Reihe, und so das xte jener zu der $(n+x-1)$ten Reihe der Binomialcoefficienten. Nun ist, für den Exponenten $n+x-1$, der xte Binomialcoefficient, wenn 1 mit gezählt wird, $= \frac{n+x-1 \,.\, n+x-2 \ldots n+1.}{1 \,.\, 2 \ldots x-1.}$.

Ist x größer als n, so heben sich die Factoren $x-1 \ldots n+1$ im Zähler gegen die Factoren $n+1 \ldots x-1$. im Nenner auf, und es ist dieser Binomialcoefficient, oder das xte Glied in der nten Reihe der figurirten Zahlen $= \frac{n+x-1 \,.\, x+1 \,.\, x}{1 \ldots n-1 \,.\, n}$, wie vorher gefunden ist. Ist x kleiner als n, so setze man in dem Binomial-Coefficienten im Zähler die Factoren, $n.n-1 \ldots x$, und im Nenner dieselben, in der Ordnung $x.x+1 \ldots n$ zu, so erhält man ebenfalls den oben gefundenen Werth für das xte Glied der nten Reihe.

Die nte Reihe der figurirten Zahlen, wenn die mit O bezeichnete als erste mit gezählt wird, besteht aus den Coefficienten der entwickelten Potenz $(1-z)^{-n}$. Es ist nämlich (binomischer Lehrsatz, 11.)

$$(1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n.n+1}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{n.n+1.n+2.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} z^4 + \frac{n \ldots n+4.}{1 \ldots 5} z^5 + \text{etc.}$$

Aus dieser Formel läßt sich umgekehrt die Form der figurirten Zahlen herleiten. Man bezeichne die Coefficienten, außer 1, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. so daß

$$(1-z)^{-n} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$$

Nun ist $(1-z)^{-n-1} = (1-z)^{-n}(1-z)^{-1} = (1-z)^{-n}(1+z+z^2+z^3+z^4+\text{etc.})$. Also ist

$$(1-z)^{-n-1} = 1 + (1+\mathfrak{A})z + (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B})z^2$$

$$+ (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})z^3 + (1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})z^4$$

$+ (1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) z^5 +$ etc. Diese Coefficienten sind aber auch, $1 + \mathfrak{A} = \frac{n+1}{1}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{n+1 . n+2 .}{1 . 2}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{n+1 . n+2 . n+3 .}{1 . 2 . 3}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \frac{n+1 .. n+4 .}{1 .. 4}$; $1 + \ldots + \mathfrak{E} = \frac{n+1 \ldots n+5}{1 \ldots 5}$, u. s. w. so daß der rte Coefficient in der Potenz $(1-z)^{-n-1}$ die Summe der r Coefficienten in der Potenz $(1-z)^{-n}$ ist, beiderseits die Einheit mit gezählt. Auf gleiche Art ist auch das rte Glied in einer Querreihe der figurirten Zahlen die Summe von r Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe, zufolge der Natur arithmetischer Reihen. Gilt nun die Form der Binomial-Coefficienten für eine Reihe der figurirten Zahlen, so gilt sie auch für die folgende, also auch für jede der übrigen. Sie gilt aber offenbar für $n = 1$, also auch für $n = 2$; $n = 3$, u. s. f.

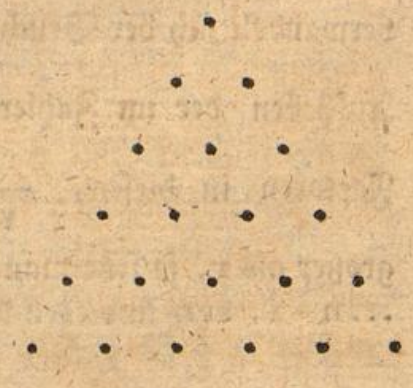
Demnach ist für die nte Reihe, diejenige der gleich großen Differenzen mitgezählt, das rte Glied (mit Einschluß der 1) $= \frac{n . n+1 \ldots n+r-2 .}{1 . 2 \ldots r-1}$.

Hieraus wird die zuerst gefundene Form auf die schon angewandte Art hergeleitet. Ist n kleiner als $r-1$, so verwandelt sich der Bruch, $\frac{n \ldots . r \ldots n+r-2 .}{1 \ldots n \ldots r-1 .}$, durchs Aufheben der im Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren in diesen, $\frac{r \ldots . n+r-2 .}{1 \ldots . n-1 .}$. Ist aber n größer als r, so setze man im Zähler die Factoren $r . r+1 \ldots n-1 .$ vor, und eben dieselben im Nenner nach, so wird

erhalten $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots n-1.}$. Dieses ist die zuerst gefundene Form. Es bedeutet hier nur n eine um 1 größere Zahl als dort, weil hier die Reihe der gleich großen Differenzen mitgezählt wird.

Jede Querreihe in der Tafel der figurirten Zahlen kommt auch als Verticalreihe vor, in einerley Abstand von der äußersten, die oberste Reihe O mitgezählt. Die Glieder einer Verticalreihe sind eben so summirende Glieder von der nächst vorhergehenden, als es die Glieder einer Querreihe sind. Daher ist jede figurirte Zahl zweymahl vorhanden, außer diejenige, welche in dem Durchschnitte beider gleichen Reihen enthalten ist. Dieses erhellt auch aus der Form der Glieder. Wenn n die Zahl der Querreihe ist, die Reihe O mitgerechnet, so ist das rte Glied $=$ $\frac{n.n+1\ldots n+r-2.}{1.2..r-1}$. Eben diesen Werth giebt aber auch der Bruch $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots n-1.}$. Jene Form giebt für ein gegebenes r und veränderliches n ein Glied der rten Verticalreihe; die andere das nte Glied der rten Querreihe.

Die Benennung, figurirte Zahlen, hat ihren Ursprung von der geometrischen Erzeugung der drey ersten Reihen. Die Einheit werde durch einen Punct dargestellt, so bildet eine Reihe von Puncten ein Glied der arithmetischen Reihe I. ab. Diese Zahlen heißen daher auch numeri lineares. Man lege ferner 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. m. Puncte in gleichen Abständen von einander, auf parallelen, gleich weit von einander abstehenden geraden Linien, die mit ihren Endpuncten in die Schenkel eines gleichseitigen Dreyecks fallen, so ist die



Anzahl der Puncte in einem der gleichseitigen Dreyecke ein Glied der Reihe II. Die Zahlen dieser Reihe heißen daher Triangular- oder Trigonalzahlen. Man stelle sich die Puncte als Mittelpuncte von Kugeln vor. Auf das Dreyeck, das in der Seite n Kugeln enthält, werde ein anderes geschichtet, das n − 1 Kugeln in der Seite enthält, über je drey Kugeln immer eine. Auf dieses Dreyeck lege man gleichmäßig eine Schicht von n − 2 Kugeln, und fahre fort, bis zuletzt nur noch eine Kugel aufzulegen ist. Die Anzahl aller Kugeln in der dadurch entstandenen Pyramide ist die Summe von n Triangularzahlen, also ein Glied der Reihe III. Diese heißt daher die Reihe der Pyramidalzahlen. Die Zahlen der folgenden Reihen kann man zwar nicht geometrisch construiren, doch nennt man sie analogisch auch Pyramidalzahlen, mit dem Zusatze die zweyten, die dritten, die vierten, da jene die ersten heißen. Auch fügt man noch, um sie von andern verwandten Zahlen zu unterscheiden, den Zusatz, Dreyeckige (triangulares) hinzu.

Unter den drey Arten, wie Kugeln in Zeughäusern regelmäßig auf einander gelegt werden, ist eine, nach welcher die Schichten gleichseitige Dreyecke bilden. Der Haufe macht eine Pyramide mit drey gleichen Seitenflächen. Aus der Anzahl der Kugeln in einer der Seiten des untersten Dreyecks ergiebt sich sogleich die Anzahl der Kugeln in der Pyramide. Ist jene = n, so ist diese

$\frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}$. Z. B. für n = 9, ist die Anzahl der Kugeln = 165.

Man kann die Puncte auch in Quadrate und andere regelmäßige Vielecke vertheilen, die zusammen ein Vieleck derselben Art bilden. Die Anzahl der Puncte in einer solchen Figur ist eine Polygonalzahl, woraus auf ähnliche Art Pyramidalzahlen gebildet werden.

Figurirte Zahlen hießen in ältern Zeiten Producte aus zwey oder mehr Factoren, welche die Seiten der Zahl genannt wurden. So erklärt sie Lazarus Schoner in

einer Abhandlung de numeris figuratis, die er seiner Ausgabe von Petri Rami Arithmetica et Algebra, Francof. 1586. beygefügt hat. Ein Product aus zwey Factoren läßt sich durch Puncte, die innerhalb eines Rechtecks gleichmäßig vertheilt sind, darstellen; ein Product aus drey Factoren durch Puncte in einem Parallelepipedum. Schoner nennt eine solche Zahl solidus. Weiter geht die geometrische Darstellung nicht, aber nach einer erdichteten Modification, wie Schoner sich ausdruckt, heißt ein Product von vier Factoren ein Biquadrat, von fünf wieder solidus, besser nach andern sursolidus, von sechs quadrati cubus, von sieben bisolidus, von acht triquadratus, von neun cubicubus. In neuern Zeiten ist die Benennung, figurirte Zahlen, für die Glieder arithmetischer Reihen aller Ordnungen, in welchen das erste Glied die Einheit ist, eingeführt. Einige, als Lambert, und d'Alembert in dem Dictionn. encyclopédique, schränken diese Benennung auf diejenigen Reihen ein, die in diesem Artikel betrachtet sind. Allein der Grund der Benennung findet auch bey denen Reihen Statt, welche aus den beständigen Unterschieden, 2, 3, 4, 5, etc. gebildet werden. Die Summen von den Gliedern der Reihe, 1, 3, 5, 7, etc. lassen sich durch Vertheilung auf Quadraten darstellen; die Summen von den Gliedern der Reihe 1, 4, 7, 10, etc. durch Vertheilung auf Fünfecken, u. s. f. die Formeln für dergleichen Reihen werden in dem Artikel, Polygonalzahlen, vorkommen. Sie fließen aus den hier entwickelten unmittelbar.

In der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts hat man sich viel mit den figurirten Zahlen beschäftigt. Faulhaber, Remmelin u. a. suchten in den Zahlen, die in der Bibel vorkommen, algebraische Zusammensetzungen, da sie glaubten, Gott habe einen geheimen Sinn, einen Fingerzeig hineingelegt, um die späte Nachwelt noch darauf aufmerksam zu machen. Die berüchtigte Zahl 666 in der Apokalypse ist, wie Remmelin fand, eine Trigonalzahl, deren Radix 36. Diese ist eine Tetragonalzahl, deren Radix 6; diese eine Pronikzahl (von der Form $nn + n$),

deren Radix 2, welche auch eine Pronikzahl ist. In den Schriften Daniels finden sich drey Zahlen, deren Zusammensetzung sonderbar genug ist, daß sie, bey der Voraussetzung eines geheimen, der Nachwelt zu enthüllenden Sinnes, als prophetische Zahlen erscheinen mußten. Kästners Gesch. der Mathem. III. S. 114. ff.

Jakob Bernoulli kam bey seiner Untersuchung über die Combinationen für die Lehre von der Wahrscheinlichkeit auf die Betrachtung der figurirten Zahlen, derer, wovon in diesem Artikel gehandelt ist, und erwies das Gesetz derselben allgemein, welches er zuerst geleistet zu haben scheint. Ars conjectandi P. II. cap. 3. Sein Bruder gab ihm noch einige Abkürzungen des Beweises an. Io. Bernoulli Opera, T. III. 521. IV. 14. Hausen hat den Bernoullischen Beweis in seinen Elementis Matheseos, pag. 61. aufgenommen.

Wallis hat in der Arithmetica Infinitorum weitläuftige Rechnungen über die figurirten Zahlen angestellt, Propos. 176. seqq. Operum Vol. I. p. 445 — 451. Er gründet sie auf die Sätze von der Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, die er nur durch Induction dargethan hatte, so wie er auch die Formen der figurirten Zahlen nur auf solche Art erweiset.

L'Huilier hat einen ihm eigenthümlichen Beweis der Formen der figurirten Zahlen in seiner Algebra, Th. II. Kap. 8. gegeben. Die Methoden in diesem Artikel sind nicht entlehnt.

Fläche, ist die Oberfläche eines Körpers (seine Begränzung) abgesondert von dem Körper gedacht. Sie ist eine ebene (s. Ebene) oder krumme Fläche. Die krummen Flächen sind entweder solche, worin sich gerade Linien, die ganz in sie fallen, ziehen lassen, wie cylindrische und konische; oder solche, worauf zwischen keinen zwey Puncten eine gerade Linie gezogen werden kann, wie die Oberflächen von Kugeln und Sphäroiden.

Die Natur der Flächen wird durch eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen, nebst gegebenen, die

auch fehlen können, ausgedrückt. Man setze drey Ebenen auf einander senkrecht, so ist jeder Punct der Fläche durch die Abstände von diesen drey Ebenen bestimmt. Die drey Abstände sind die drey veränderlichen Größen in jener Gleichung. Zur Deutlichkeit des Verfahrens wird es nöthig seyn, dieses bis nach dem Artikel, krumme Linien zu versparen.

Flächen-Maaß, die Einheit zur Berechnung eines Flächenraumes oder zur Vergleichung desselben mit andern Flächenräumen, z. B. Quadratfuß, Quadratmeile, Morgen, Hufe.

Flächenraum, ein durch Linien begränzter Theil einer Fläche.

Flächenzahl, numerus planus, eine Zahl, die aus der Multiplication zweyer Zahlen entsteht.

Flächen-Körperzahl, numerus planosolidus, eine Zahl, die aus der Multiplication von fünf Zahlen entsteht.

Florentinische Aufgabe (Aenigma Florentinum) ist die von Viviani zu Florenz den Analysten im J. 1692. vorgelegte geometrische Aufgabe, woran er sie ihre Geschicklichkeit in der damahls neuen Analysis versuchen lassen wollte. Er betitelte sie: Aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphaericae, autore D. Pio Lisci Posillo Geometra. Der angenommene Name bedeutet Postremo Galilaei Discipulo. Die Einkleidung, welche er der Aufgabe ertheilte, zeugt von dem Vergnügen, welches ihm ihre Erfindung gemacht hat. Sein Programm fängt folgendergestalt an.

Unter den ehrwürdigen Denkmählern des alten Griechenlands ist noch ein unzerstörbarer herrlicher Tempel vorhanden, welcher der Geometrie gewidmet ist, von kreisrunder Form, mit einem Gewölbe bedeckt, das inwendig eine vollkommene Halbkugel ist. Dieses ist mit vier gleich großen Öffnungen, rings an der Grundfläche herum, durchbrochen, die mit großer Kunst so gestaltet und so groß

gemacht sind, daß die übrige, mit kostbarer Mosaik gezierte Oberfläche geometrisch genau quadrirbar ist.

1. Die Aufgabe war für die neue Analysis leichter als Viviani vielleicht geglaubt haben mochte, wenn er gleich in seinem Programm sagt, daß er nicht zweifele, sie würde dadurch ohne Schwierigkeit aufgelöset werden, und daß er nur die verschiedenen Auflösungsarten durch dieselbe zu erhalten wünsche. Leibnitz fand die Auflösung an demselben Tage, an welchem er die Aufgabe erhielt, und theilte sie in den Actis Erud. 1692. mit. Jakob Bernoulli lösete sie nicht allein auf, sondern zeigte auch, daß ihr auch auf unendlich viele Arten Genüge geschehen könne. (Acta Erud. 1692. Operum, Nr. 52.). Wallis handelt in dem letzten Capitel seiner Algebra von dieser Aufgabe, hat sie aber nicht recht gefaßt. Viviani selbst machte seine sehr scharfsinnige geometrische Auflösung, mittelst der Durchschnitte der Oberflächen zweyer Cylinder mit der Halbkugelfläche, in einer kleinen, italienisch geschriebenen, Schrift, Florenz 1692, aber ohne Beweise, bekannt. Diese suchte der P. Grandi, ein Camaldulenser Mönch, auf, und trug sie vor in der Schrift, Geometrica divinatio Vivianeorum problematum, Florent. 1699. Er zeigt unter andern auch, daß auf der Oberfläche eines senkrechten Kegels ein Stück abgeschnitten werden kann, das vollkommen quadrirbar ist. Die dadurch entstandene Figur nennt er Velum Camaldulense. Allein Joh. Bernoulli hatte schon früher (Act. Er. Jun. 1696.) dieses angezeigt. Der Satz ist: Wenn auf der Grundfläche eines senkrechten Kegels ein senkrechtes Prisma über irgend einer Grundfläche, gerad- oder krummlinichter, errichtet wird, so schneidet dieses Prisma auf der Kegelfläche ein Stück ab, welches sich zu der Grundfläche des Prisma verhält, wie die Seite des Kegels zu dem Halbmesser seiner Grundfläche.

2. Die Aufgabe betrifft zwar nur eine geometrische Curiosität, allein sie ist ein sehr dienliches Beyspiel zu der Lehre von krummen Flächen, und krummen darauf gezogenen Linien. Das Interesse bey einer geometrischen Untersuchung beruht nicht auf der praktischen Brauchbarkeit,

sondern auf der Künstlichkeit und Nettigkeit der Auflösung, und auf der Eurythmie der gefundenen Verhältnisse.

3. Es stelle ABCDA (Tab. XII. Fig. 51.) die Hälfte einer Halbkugel vor, worin der Halbkreis BAD senkrecht auf den Halbkreis BCD steht. Auf ihrer Oberfläche sollen die sich gleichen Curven BEC, DFC gezogen werden, von solcher Beschaffenheit, daß der Flächenraum zwischen ihnen beiden und dem halben Kreisumfange BAD quadrirbar sey, oder zu dem Quadrate des Halbmessers ein rationales Verhältniß habe.

Zu der Auflösung dieser Aufgabe ist es nöthig, den Inhalt eines Sectors der Kugelfläche zwischen zwey gleichen Bogen größter Kreise und einem Bogen eines kleinern angeben zu können, das ist, ihn mit dem Inhalte der Kugelfläche zu vergleichen.

4. Es sey (Fig. 52.) O der Mittelpunct einer Kugel, ihr Halbmesser OP. Auf ihrer Oberfläche sind zwey Quadranten, PNM, gezogen, welche den Winkel MPM, oder deren Ebenen den Winkel MOM, mit einander machen. Mit den Halbmessern OM seyn die geraden QN in der Ebene der beiden Quadranten parallel, so ist NN der Bogen eines zu MM gehörigen Parallelkreises. Wenn der Quadrant PM eine volle Drehung um PO macht, so beschreibt PM die halbe Kugelfläche, und PN ein Segment derselben. Jene ist $= 2\pi . PO^2$, dieses $= 2\pi . PO \times PQ$, (Complanation, Th. I. S. 513.). Der Umfang eines größten Kreises der Kugel ist $= 2\pi . PO$, und der Sector MPM verhält sich zu der halben Kugelfläche wie MM zu $2\pi . PO$; also ist der Sector MPM $= MM \times PO$, und der kleinere NPN $= MM \times PQ$. Auch ist der Abschnitt MNNM $= MM \times OQ = MM \times OP \times \sin MON$.

5. Man lege (Fig. 51.) durch C, und durch zwey Puncte, M, m, der Curve BEC zwey größte Kreise, welche den Quadranten AB in P, p treffen. Da C der Pol von AB ist, so stehen CP, Cp senkrecht darauf, und PCp ist ein Sector der Halbkugel. Der Halbmesser der Kugel sey $= a$, der zu BP gehörige Winkel am Mittel-

puncte $= \omega$, der zu PM gehörige $= \varphi$, so ist der Bogen PB $= a\omega$, PM $= a\varphi$. Der zu Pp gehörige Winkel sey $\Delta\omega$, der zu pm $= \varphi + \Delta\varphi$, so ist Pp $= a\Delta\omega$ und pm $= a(\varphi + \Delta\varphi)$. Die sphärische Fläche PBM sey $= Z$, die PMmp $= \Delta Z$, so ist $\Delta Z >$ Pp $\times$ a. sin PM, und $\Delta Z <$ Pp $\times$ a. sin pm, das ist

$$\Delta Z > aa \sin \varphi . \Delta\omega$$

$$\Delta Z < aa \sin (\varphi + \Delta\varphi) . \Delta\omega .$$

Es ist $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi . \cos . \Delta\varphi + \cos\varphi . \sin\Delta\varphi$, (Goniometrie, II.), und $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{6}\Delta\varphi^3 +$ etc.; $\cos\Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 +$ etc. (Cyklometrie, 5, 6.), also der von der Größe der Differenzen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ unabhängige Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta Z}{\Delta\omega}$, das ist der Differentialquotient $\frac{\partial Z}{\partial\omega} = aa \sin\varphi$, oder es ist $\partial Z = aa \sin\varphi . \partial\omega$.

6. Die Relation zwischen ω und φ hängt von der Natur der Curve BMC ab, so wie diese von jener Relation. Damit Z einen geometrisch bestimmbaren Werth erhalte, unabhängig von der Quadratur des Kreises oder einer andern Curve, muß $\sin\varphi$ eine solche trigonometrische Function von ω seyn, die keine constante Größe enthält. Dieses kann auf mancherley Art geschehen. Z. B. es sey $\varphi = \omega$, oder $\varphi = m\omega$, oder $\sin\varphi = m \sin\omega$, u. dgl. Die einfachste Annahme ist $\varphi = \omega$.

7. Man setze $\varphi = \omega$, oder nehme den Abstand jedes Punctes M der Curve auf CP von dem Quadranten AB gleich dem Bogen BP, so ist $\partial Z = aa \sin\omega . \partial\omega$, also $Z = \text{Const} - aa \cos\omega$. In dem Anfange der Curve ist $Z = 0$, und $\cos\omega = 1$, also Const $= aa$, und daher $Z = aa(1 - \cos\omega)$. Für $\omega = 90°$, da P in A fällt, ist $\cos\omega = 0$, und $Z = aa$, oder die sphärische Fläche BACEB $= aa$. Wird nun auf jedem Quadranten der Halbkugel eine Curve wie BEC gezogen, so schneiden diese

auf ihrer Fläche um A herum einen Flächenraum ab, so groß als 4aa oder als das Quadrat des Durchmessers. Das Halbkugelgewölbe wird von vier Öffnungen durchbrochen, die jede einen Quadranten des Umfanges der Grundfläche bespannen, so daß zwischen zwey neben einander liegenden ein Pfeiler bleibt, der freylich nur auf einen Puncte ruhet.

8. Auf einer künstlichen Erdkugel kann man die Curve BEC leicht zeichnen. Sie geht durch die Puncte, deren Breite ihrer Länge bis zu einem Quadranten, gleich ist.

9. Man ziehe durch A und M einen größten Kreisbogen AM, so ist in dem bey P rechtwinklichten sphärischen Dreyeck APM für AM die Gleichung, $\cos AM = \cos AP \times \cos PM = \sin\omega . \cos\omega = \frac{1}{2}\sin 2\omega$. Also ist $\cos AM$ am größten, wenn $2\omega = 90°$, oder $\omega = 45°$ ist, das ist, AM am kleinsten, für $\omega = 45°$. Es sey $\cos AE = \frac{1}{2}\sin 90° = \frac{1}{2}$, so ist $AE = 60°$, der kleinste Abstand der Curve von A.

10. Es sey BGC (Fig. 53.) ein Quadrant, dessen Halbmesser demjenigen der Kugel gleich ist. In demselben sey BmC die orthographische Projection der Curve BMC auf der Kugelfläche, und GB, GC von den Bogen AB, AC, auch GmQ von AMQ, dem durch M gelegten Quadranten AQ. Der Winkel BGQ, welchen der Durchschnitt der Ebene des Kreisbogens AMQ und der Grundfläche mit GB macht, ist dem sphärischen Winkel BAQ oder PAM (Fig. 51.) gleich, wie daselbst der Winkel BGQ auf der Ebene des Halbkreises BCD an dem Mittelpuncte desselben G. In dem sphärischen Dreyeck PAM ist.

I. $\cos AM = \cos AP . \cos PM$.

II. $\sin AM . \sin PAM = \sin PM$.

III. $\tang AM . \cos PAM = \tang AP$.

IV. $\sin AM . \cos PAM = \sin AP . \cos PM$.

von welchen IV. aus der Verbindung von I. und III. entsteht.

Durch den Punct m ziehe man mX senkrecht auf GB, und mY senkrecht auf GC. Noch beschreibe man

über GQ den Quadranten AMQ, und ziehe darin auf GQ die senkrechte mM, so ist Mm die Höhe des Punctes M auf der Kugel über der Grundfläche BCD. Die Linien, GX, GY, mM, sind drey Coordinaten für die Curve BMC. Da sie nicht in einer und derselben Ebene liegt, so sind zu ihrer Gleichung drey Coordinaten nöthig.

Man setze $GX = x$; $GY = y$, $mM = z$. Da $Gm = a \sin AM$ ist, so ist $x = a. \sin AM. \cos mGB = a. \sin AM. \cos PAM = a \sin AP. \cos PM = a \cos \omega^2$. Ferner ist $y = a. \sin AM. \sin mGB = a. \sin AM. \sin PAM = a. \sin PM = a \sin \omega$. Drittens ist $Mm = a. \cos AM = a. \cos AP. \cos PM = a \sin \omega. \cos \omega$. Also

$$x = a. \cos \omega^2;\ y = a \sin \omega;\ z = a \sin \omega. \cos \omega.$$

Da M ein Punct auf der Kugelfläche ist, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Dieses geben auch die drey gefundenen Werthe der Coordinaten. Es ist nämlich

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (\cos \omega^4 + \sin \omega^2 + \sin \omega^2. \cos \omega^2)$$
$$= a^2 (\cos \omega^2 (\cos \omega^2 + \sin \omega^2) + \sin \omega^2) =$$
$$= a^2 (\cos \omega^2 + \sin \omega^2) = a^2.$$

11. Man beschreibe (Fig. 54.) über dem Durchmesser GB, der dem Halbmesser der Kugel, a, gleich ist, einen Halbkreis, und nehme auf demselben die Abscisse $GX = a \cos \omega^2$, errichte auf GB in X die senkrechte MX, so ist $MX^2 = aa(1 - \cos \omega^2) \cos \omega^2 = aa \sin \omega^2. \cos \omega^2$; und $MX = a \sin \omega. \cos \omega$; also $MX = z$, der auf die Grundfläche der Halbkugel senkrechten Ordinate zu dem Puncte M der Curve BMC.

12. Über dem Halbkreise GMB errichte man einen halben, darauf senkrechten Cylinder von der Höhe GB oder a. In dem Abstande, $y = a \sin \omega$, von der Grundfläche führe man einen Schnitt derselben parallel. Dieser ist dem Halbkreise GMB gleich. Man nehme auf dem Durchmesser GB den Theil $GB = x = a \cos \omega^2$, so ist wie eben gefunden ward, die senkrechte $MX = z = a \sin \omega. \cos \omega$, und alle Puncte der cylindrischen Oberfläche, die wie dieser Punct M bestimmt werden, haben

mit den correspondirenden Puncten der Curve CEB auf der Kugel für einerley Werthe von ω, dieselben Ordinaten so daß die Curve auf der cylindrischen Oberfläche der auf der Kugel gleich ist.

13. Wenn nun auf der Fläche des Halbkreises BAD (Fig. 51.) über dem Durchmesser BD zwey Halbkreise, wie GMB (Fig. 54.) beschrieben, und über diesen auf beiden Seiten zwey senkrechte Halbcylinder errichtet werden, welche die Oberfläche der Halbkugel auf der einen und der andern Seite von BAD in Curven, wie BEC, CFD, schneiden, so ist die sphärische Oberfläche, welche von den vier Curven um A herum abgeschnitten wird, dem Quadrat des Durchmessers gleich.

14. Dieses ist die Construction, welche Viviani selbst zur Auflösung seiner Aufgabe giebt. Vermuthlich hat er die Gestalt des Durchschnitts einer sphärischen und cylindrischen Fläche gesucht, und ist dabey, gewiß nicht ohne Schwierigkeit, auf das merkwürdige Resultat gekommen, daß die von den durchschneidenden Cylindern übrig gelassene Fläche der Halbkugel dem Quadrat des Durchmessers gleich ist. Montücla sagt in seiner Gesch. d. Mathem. Th. II. S. 94. daß dieser Flächenraum dem doppelten Quadrat des Halbmessers gleich sey, welches unrichtig ist.

15. Der Flächenraum zwischen der nach der vorher angegebenen Construction auf der Oberfläche eines Halbcylinders beschriebenen Curve, dem Umfange des Halbkreises auf dessen Grundfläche, und einer Seite des Cylinders, ist dem Quadrat des Durchmessers desselben, oder dem des Halbmessers der Kugel gleich. — Denn wenn man einen Bogen des Halbkreises als Abscisse, die darauf in der Oberfläche bis an den Punct M der Curve gezogene als Ordinate betrachtet, so ist das Differential des Flächenraums gleich dem Product aus der Ordinate in das Differential der Abscisse, wie bey ebenen Figuren. Der Kreisbogen sey BM (Fig. 54.), dessen linearischer Sinus in dem Halbkreise MX $= z$, so ist der dazu gehörige Winkel $=$

Ang $\sin \frac{2z}{a}$, weil der Halbmesser des Kreises $= \frac{1}{2}a$ ist, und der Bogen $BM = \frac{1}{2}a \,.\, \text{Ang} \sin \frac{2z}{a}$. Das Differential ist $= \frac{a\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$ (Differentialformeln, 29.). Die Ordinate an der Curve auf der cylindrischen Fläche ist der Abstand des Schnittes, worin M befindlich ist, von der Grundfläche, also $= y$. Der cylindrische Flächenraum sey $= Z$, so ist $\partial Z = \frac{ay\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$. Nun ist $z = a \sin \omega \,.\, \cos \omega = \frac{1}{2} a \sin 2\omega$, also $\partial z = a \cos 2\omega \,.\, \partial\omega$. Ferner ist $\sqrt{(aa-4zz)} = a \cos 2\omega$, und $y = a \sin \omega$. Demnach ist $\partial Z = a^2 \sin \omega \,.\, \partial\omega$, und daraus $Z = C - a^2 \cos \omega$. Für $BM = 0$ ist $\omega = 0$, und $\cos \omega = 1$, daher $C = aa$, so daß $Z = aa(1 - \cos \omega)$. Das ist derselbe Werth, der vorher für die sphärische Fläche BPM gefunden ist. Diese und die cylindrischen sind für zusammengehörige Puncte M einander gleich, so daß die cylindrische zwischen der Curve, dem Halbkreise der Grundfläche und der Seite a dem Quadrat des Halbmessers der Kugel gleich ist. Der Theil der Oberfläche von dem durch die Kugel auf die vorher angegebene Art ganz durchgesteckten Halbcylinder, innerhalb der Kugel ist daher zweymahl jenem Quadrate gleich, und die von beiden Halbcylindern so groß als das Quadrat des Durchmessers der Kugel. Montucla macht a. a. O. diese Bemerkung.

16. Bossut hat dem Vivianischen Problem noch eine merkwürdige Erweiterung gegeben. Er findet, daß der körperliche Raum in der Kugel, welchen zwey Cylinder, deren Durchmesser halb so groß als derjenige der Kugel ist, übrig lassen, wenn sie neben einander auf einen großen Kreis der Kugel senkrecht gestellt werden, zwey Neuntel von dem Würfel des Durchmessers der Kugel ist. Traités du calcul différentiel et intégral, T. II. p. 546. ff.

Der zweyte Beweis, den er daselbst giebt, ist noch leicht genug, um hier mitgetheilt werden zu können. Ich werde ihn etwas verändern, indem ich ihn an die hier schon erwiesenen Sätze knüpfe.

17. Es ist (Fig. 55.) AGB der Quadrant eines Kreises; auf diesem stehen die Quadranten CGB, CGA senkrecht, die es auch auf einander seyn, so daß die Figur GABC den Octanten einer Kugel abbildet. Über GB als Durchmesser werde der Halbkreis BNG beschrieben, und auf diesem ein halber senkrechter Cylinder errichtet. Dieser schneidet die Kugelfläche mit seiner krummen Oberfläche in der gedoppelt krummen Linie CMB, da die ebene, den ganzen Cylinder halbirende Fläche GCHB von jener in dem Quadranten CB geschnitten wird. Die innerhalb der Kugel enthaltene Portion des halben Cylinders wird theils von zwey ebenen Figuren, dem Halbkreise GNB und dem Quadranten CGB, theils von der cylindrischen Fläche CGNBMC und der sphärischen CMBC begränzt. Die krumme Linie CMB ist die zur Auflösung der Vivianischen Aufgabe gefundene (12.).

18. Man setze durch CG und einen Punct M dieser Curve eine Ebene, welche den Quadranten AGB in GP, den Halbkreis GNB in GN schneidet. Ihr Durchschnitt mit der sphärischen Fläche CMBC ist der Bogen CM eines großen Kreises, mit der cylindrischen die gerade, auf die Grundfläche senkrechte MN. (Denn eine durch M und die Axe des Cylinders gelegte Ebene schneidet die cylindrische Fläche in einer geraden, auf die Grundfläche senkrechten Linie. Der Durchschnitt der Ebenen durch CG und die Axe, und den Punct M, ist auch eine solche senkrechte, also mit jener dieselbe). Durch die gesetzte Ebene erhalten wir nun einen Abschnitt des Cylinderstücks zwischen dem Quadranten CGB und dem gemischtlinichten Viereck CGNMC. Man setze noch eine Ebene durch CG, welche die sphärische Fläche des Cylinderstücks in Cm, die cylindrische in mn, die Grundfläche in Gn schneide. Der Inhalt des zwischen beiden durch CG gelegten Ebenen enthaltenen Cylinderstücks ist die Differenz zweyer von

CGB an genommenen Cylinderstücke. Diese Differenz drucke man durch den zugehörigen Unterschied der Winkel BGN, BGn aus, ohne auf die Veränderungen von CM und MN zu achten, so hat man das Differential von dem Cylinderstück zwischen CGB und CGNMC, woraus sich dieses Cylinderstück wird finden lassen. Zur Vergleichung mit Fig. 51. sind zu denselben Puncten, auch dieselben Buchstaben gesetzt. Jene Figur kehre man um, so erhalten die Linien daselbst dieselbe Lage wie hier in Fig. 55.

19. Man setze GB = a; den Winkel BGP = ω. Der Bogen BP und der Punct M gehören hier eben so zusammen, wie in Fig. 51. der Bogen BP und der Punct M. Nun ist dort der Abstand des Punctes M von der Ebene BAD oder BAG = a sin ω, nämlich der in (10.) durch y bezeichnete. Also ist MN = a sin ω. Die Verlängerung von Gn treffe BA in p, so ist der Bogen Nn = Pp, auch wenn sie endlich sind. Denn der Bogen BN gehört zu einem Winkel am Mittelpuncte, der doppelt so groß ist, als der Winkel BGP am Mittelpuncte des Bogens BP, dagegen aber der zu jenem gehörige Halbmesser halb so groß ist als der Halbmesser zu BP. Daher ist BP = BN; Bp = Bn, und Pp = Nn. Man ziehe die in N berührende NH, und auf diese die senkrechte GH. Der Winkel GNH ist gleich dem Winkel am Umfange, GBN, der auf dem Bogen GN steht. Also ist GH = GN. sin GBN = GB. cos ω^2 = a. cos ω^2.

Das Cylinderstück zwischen den beiden durch CG gelegten Ebenen besteht aus zwey pyramidenartigen Körpern, mit der gemeinschaftlichen Spitze G. Der eine derselben hat zur Grundfläche das Stück MNnm der Cylinderfläche und zur Höhe GH, als die senkrechte auf die den Cylinder in MN berührende Ebene. Da eine Pyramide der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe ist, so ist die Pyramide über MNnm = $\frac{1}{3}$. MN. Nn. GH, in dem bey der elementarischen Differenz zweyer Cylinderstücke weder die Krümmung der Grundfläche noch der Unterschied der beiden MN, mn in Betracht kommen darf.

Nun ist $MN = a \sin\omega$; $pn = PN = a\partial\omega$; $GH = a\cos\omega^2$, also die Pyramide über $MNnm = \frac{1}{3}a^3 \sin\omega . \cos\omega^2 . \partial\omega$.

Die Fläche CMm ist $= a(1 - \cos CM) . Pp$, (4.). Man verlängere den Bogen CM bis an AB in P, so ist für unsere Curve $PM = PB$, (7.), also $\cos CM = \sin PM = \sin\omega$, und die Fläche $CMm = a(1 - \sin\omega) . a\partial\omega = a^2 (1 - \sin\omega)\, \partial\omega$. Diese mit $\frac{1}{3}a$ multiplicirt giebt die elementarische Pyramide über $CMm = \frac{1}{3}a^3 (1 - \sin\omega)\, \partial\omega$.

Also ist das elementarische Cylinderstück,

$$\partial Z = \tfrac{1}{3}a^3 (1 - \sin\omega + \cos\omega^3 . \sin\omega)\, \partial\omega.$$

Es ist $\sin\omega . \partial\omega = - \partial\cos\omega$ (Differentialrechnung, 38.); dadurch

$$\partial Z = \tfrac{1}{3}a^3 (\partial\omega + \partial\cos\omega - \cos\omega^2 . \partial\cos\omega).$$

Daher durch die Integration

$$Z = \tfrac{1}{3}a^3 (\omega + \cos\omega - \tfrac{1}{3}\cos\omega^3) + C.$$

Für $Z = 0$ ist $\omega = 0$, und $\cos\omega = 1$, also $Const = -\frac{2}{9}a^3$, und

$$Z = \tfrac{1}{3}a^3 (\omega + \cos\omega - \tfrac{1}{3}\cos\omega^3 - \tfrac{2}{3}).$$

Das ganze Cylinderstück, für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ (oder 90°) ist $= \frac{1}{3}a^3 (\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$.

Die ganze Kugel ist $= \frac{4}{3}\pi a^3$, also der Octant $GABC = \frac{1}{6}\pi a^3$. Daher ist der Raum, welchen das Cylinderstück in dem Octanten übrig läßt $= \frac{2}{9}a^3$.

19. Nimmt man in dem anliegenden Octanten die andere Hälfte des Cylinders, so läßt diese darin denselben Raum übrig. Verlängert man den ganzen Cylinder nach der entgegengesetzten Seite, so läßt er in der Halbkugel den Raum $4 . \frac{2}{9}a^3$ übrig. Wird durch die andere Halbkugel eben ein solcher Cylinder gesteckt, so lassen beide in der ganzen Kugel den Raum $8 . \frac{2}{9}a^3$ übrig, das ist $\frac{2}{9}$ von dem Würfel des Durchmessers.

20. Euler hat die von Viviani vorgelegte Aufgabe ganz allgemein und nach einer andern Methode behandelt, als Beyspiel in einer Abhandlung de formulis integrali-

bus duplicatis. Comm. novi Acad. Petrop. T. XIV. a. a. 1759. Er sucht die Gleichung für eine krumme Linie, die innerhalb des Quadranten eines Kreises beschrieben wird, von solcher Beschaffenheit, daß die sphärische Oberfläche, wovon ein Sector der Curve, von dem Mittelpuncte aus genommen, die orthographische Projection ist, algebraisch sich angeben lasse, oder quadrirbar sey. In der Formel zwischen dem Radius der Curve und dem zugehörigen Winkel mit dem einen Halbmesser (als zwischen Gm und BGm in Fig. 53.) sind zwey unbestimmte Functionen der Tangente dieses Winkels vorhanden. Die hier gefundene besondere Auflösung bringt Euler ebenfalls bey. Auch löset Euler noch die Aufgabe auf, eine Curve auf dem Quadranten eines Kreises zu finden, von der Beschaffenheit, daß das über ihrer Area senkrecht gesetzte und von einer Portion der Kugelfläche begränzte Solidum einen algebraisch bestimmbaren Inhalt habe. Den Fall, den Bossüt betrachtet, daß der übrige Theil des Octanten der Kugel sich cubiren lasse, hat Euler nicht untersucht.

Man sehe auch Lacroix Calcul différential et intégral, T. II. §. 538—542.

29. Pappus beweiset, daß der sphärische Raum auf einer Halbkugel zwischen ihrem Grundkreise und einer Spirale, die von einem beweglichen Puncte auf einem Quadranten während einer Umdrehung beschrieben wird, dem Quadrat des Durchmessers gleich ist. Collect. mathem. IV. 30.

Fluens, die fließende (Größe) ist in der Newtonischen Analysis des Unendlichen, was in der Leibnitzischen die veränderliche heißt. Newton stellte sich die Größen alle als geometrische vor, die durch Bewegung erzeugt würden, s. Differentialrechnung, Th. I. S. 833. ff. Das Wort Fluens, doch als Beywort, gebraucht Cavaleri in der Geometria indivisibilibus continuorum, L. II. p. 8. 9. Er läßt daselbst ebene und körperliche Figuren jene durch Bewegung einer geraden Linie, diese durch die einer Ebene entstehen.

Fluxio wird von Newton die Geschwindigkeit genannt, womit eine Fluente durch die erzeugende Bewegung zunimmt. Da Geschwindigkeit ein Verhältnißbegriff ist, so ist es genauer, wie auch Newton (Methodus fluxionum, art. II.) es thut, im Plural zu sagen, Fluxionen sind die Geschwindigkeiten, womit die verschiedenen Fluenten durch die erzeugende Bewegung zunehmen. Das Verhältniß der Fluxionen ist ganz dasselbe, was nach Leibnitz Verhältniß der Differentiale genannt wird. Der Unterschied zwischen Differentialen und Fluxionen liegt bloß in der Art, wie man sich die Zunahme (oder Abnahme) einer veränderlichen Größe vorstellt. Bey dem Gebrauch der Fluxionen vermeidet man zwar die Vorstellung unendlich kleiner Größen, allein in der That nur den Ausdruck. Denn um den Begriff der Geschwindigkeit, welcher der Lehre von der Bewegung besonders angehört, hier anzuwenden, muß man unendlich kleine Räume vergleichen, wenn die Geschwindigkeiten veränderlich sind. Man kommt also doch auf den Begriff von Gränze eines Verhältnisses, oder eines solchen, welches von der Quantität der Veränderungen unabhängig ist. Geht man gleich von dieser Vorstellung aus, so ist Differential, als eine unendlich kleine Veränderung betrachtet, nur eine Abkürzung der Rede, und Fluxion ist ein bildlicher Ausdruck, um das Verhältniß der unendlich kleinen Veränderungen stetig veränderlicher Größen faßlich zu machen. Newtons Momente der Fluenten sind nichts als Leibnitzens Differentiale veränderlicher Größen.

Zwey zusammengehörige veränderliche Größen, x, y, stelle man sich als Coordinaten einer Curve vor, die jede durch die Bewegung eines Punctes beschrieben werden. Die Geschwindigkeiten der beschreibenden Puncte sind die Fluxionen der Coordinaten. Die Curve selbst, als die dritte, zu jenen beiden gehörige, Fluente betrachtet, werde auch durch einen Punct beschrieben, der immer mit dem Endpuncte der Ordinate zusammentrifft, so ist die Geschwindigkeit dieses Punctes die Fluxion der Curve.

Z. B. an dem Kreise ist die Gleichung für die Coordinaten $2ax - xx = yy$, wenn die Abscissen von einem Endpuncte des Durchmessers an genommen, und die Ordinaten senkrecht darauf gesetzt werden. Bezeichnet man nach Newton die Fluxionen durch die Symbole der Fluenten mit einem Puncte darüber, so ist $\dot{x} : \dot{y} = y : a - x$. Der zu x und y gehörige Kreisbogen sey $= s$, so ist $\dot{x} : \dot{s} = y : a$, und $\dot{y} : \dot{s} = a - x : a$.

Die Fluxion einer Fläche ist nicht die Geschwindigkeit der beschreibenden oder erzeugenden Linie, wie die Fluxion einer Linie die Geschwindigkeit des beschreibenden Puncts ist. Denn die Zunahme der Fläche kommt auf die Größe der beschreibenden Linie an, und hängt bloß von derselben ab, wenn man für die verschiedenen Portionen der Fläche die Geschwindigkeit der beschreibenden Linie gleich groß setzt. Man muß sich statt der Fläche eine ihr proportionale Linie vorstellen. Z. B. für die Parabel ist die Gleichung zwischen den Coordinaten, $ax = yy$. Die zu x und y gehörige Area sey Z. Diese vergleiche man mit dem Rechteck ax, und die Fluxion $\dot{Z}$ mit der Fluxion $\dot{ax}$. Allgemein ist $\dot{Z} : \dot{ax} = y : a$ (nach der Notation in der Differentialrechnung $\partial Z = y \partial x$). Da an der Parabel ist $\dot{ax} = 2y\dot{y}$, so ist $\dot{Z} : 2y\dot{y} = y : a$, oder $\dot{Z} : a\dot{y} = 2yy : aa$.

Auf ähnliche Art werden die Fluxionen der körperlichen Räume und der Oberflächen, so wie aller Arten von Größen auf Fluxionen von Linien gebracht. Dieses macht aber Weitläuftigkeit, die man auch in der Fluxionenrechnung sich erspart. Alsdann ist aber diese von der Differentialrechnung nur in der Notation unterschieden.

Die Notation in der Fluxionenrechnung ist offenbar lange nicht so bequem als die in der Differentialrechnung eingeführte. Die Engländer sind die einzigen, welche jene noch immer beybehalten, aus Ehrerbietung für ihren großen Landsmann, und aus Vorliebe für Nationalsitten.

In dem Artikel, Fluxion, des Dictionn. encyclop. par ordre des matieres, sagt d'Alembert: Man hat keinen recht hellen Begriff von Geschwindigkeit, wenn sie veränderlich ist. Geschwindigkeit ist nichts wirkliches, es ist das Verhältniß des Raumes zu der Zeit, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig ist. Bey der ungleichförmigen Bewegung aber ist sie das Verhältniß der Differentiale des Raums und der Zeit, ein Verhältniß, wovon man eine deutliche Erklärung nicht anders geben kann als vermittelst der Gränzen. Auf diese muß man also doch zurück kommen, wenn man von Fluxionen einen befriedigenden Begriff geben will. — Daß d'Alembert zwischen zwey ungleichartigen Größen, Zeit und Raum, ein Verhältniß Statt finden läßt, ist nicht nachzuahmen.

Focus, s. Brennpunct.

Folium, foliata curva, ist eine krumme Linie, deren Gleichung ist $x^3 + y^3 = axy$. Sie hat zwey Zweige mit einer geradlinichten Asymptote, an welcher diese auf derselben Seite sich erstrecken. Die beiden Zweige schneiden sich, und bilden eine blattähnliche Figur, fast auf die Art, wie die zum ersten Theile Tab. III. Fig. 37. gezeichnete Curve, deren Zweige aber nicht auf derselben Seite der Asymptote liegen. In Newtons Verzeichniß der Linien der dritten Ordnung ist sie die 41ste. Viele Linien haben einen blattähnlichen Theil, weswegen man nicht eine einzelne daher benennen sollte. Sie heißt auch das Folium von Descartes, weil dieser Geometer sie zuerst angegeben hat. Er führt sie in der Sammlung seiner Briefe, P. III. epist. 48., als Beyspiel an, daß Fermats Methode berührende zu ziehen sich bey ihr nicht anwenden lasse. In dem 57sten Briefe zeigt er, wie die berührende gezogen werden kann, welche mit der Axe der x oder der y einen halben rechten Winkel macht. Dieses hatte Roberval nicht finden können, dem sie merkwürdig genug war, daß er ihr den Namen Galand oder Fleur de Jasmin gab. Descartes sagt, er könne ihm noch unendlich viele Linien mittheilen, die nicht zusammengesetzter

als jene wären, und doch noch nettere Figuren bildeten. Die Sache sey aber eine solche Kleinigkeit, daß er sich schäme darüber zu schreiben. Descartes bleibt bey dem in sich zurücklaufenden Theil der Curve stehen, und beachtet die beiden ins Unendliche fortlaufenden Zweige nicht, die doch mit ihr stetig zusammenhängen. Die Linie ist quadrirbar. Als Exempel wird sie in dem Artikel, Quadratur, dienen können.

Form einer Größe ist die Art, wie sie aus andern Größen zusammengesetzt wird. So sind Formen ganzer Zahlen, $2n$; $2n + 1$, jene für gerade, diese für ungerade; allgemeiner $ma + b$, wo b eine kleinere ganze Zahl als a, und m ebenfalls eine ganze Zahl ist. Alle Primzahlen sind unter den Formen $6a + 1$ und $6a + 5$ begriffen; statt der letztern kann man auch die Form $6a - 1$ setzen. Nur sind nicht alle Zahlen von jener Form Primzahlen. Potenzen und Wurzeln sind Formen von Zahlen, so wie Producte und Quotienten. Der binomische Lehrsatz enthält die Form der Potenzen zweytheiliger Größen, der polynomische die Form der Potenzen vieltheiliger Größen. Die Formen der Coefficienten in einer algebraischen Gleichung sind die Zusammensetzungen aus den Combinationen der Wurzeln. Die Formen der Größen sind das, was in der reinen Mathematik durchgehends an den Größen betrachtet wird.

Form einer Reihe ist das Gesetz, welches die Exponenten der unbestimmten Größe, nach welcher die Glieder der Reihe geordnet sind, beobachten, z. B. daß diese Exponenten die Reihe der natürlichen Zahlen, oder der geraden allein, oder der ungeraden sind, zugleich mit Angabe des Vorzeichens + oder — der Exponenten, von welchen das erstere zu nehmen ist, wenn nichts darüber bestimmt wird.

Formel ist der in allgemeinen Zeichen gefaßte Ausdruck des Werthes einer Größe mittelst derjenigen Größen, durch welche sie bestimmt wird. In einer solchen Formel braucht man nur in jedem Falle die Werthe der gegebenen

Größen zu setzen, um die gesuchte herauszufinden. Sie ist das Resultat einer analytischen Rechnung, die alle darunter gehörige Fälle begreift. Die Formeln dienen auch durch die Combinationen derselben wieder neue herauszubringen. Denn sie sind zugleich Lehrsätze über die Verbindungen zusammengehöriger Größen.

Die Algebra liefert Formeln für die Wurzeln der Gleichungen vom ersten, zweyten und dritten Grade, der letztern doch nur mit einer Einschränkung; ferner für jede der unbekannten Größen in mehreren Gleichungen durch die Elimination der übrigen. Die Analysis liefert Formeln für die Entwickelung vielerley Größen aus ihren Bestandtheilen, als der Potenzen von Binomien und Polynomien; für die Summen der Potenzen, deren Wurzeln in arithmetischer Progreßion sind, und mancher andern Reihenglieder; für die Interpolation zwischen den Gliedern einer Reihe u. m. Die Trigonometrie mit der Goniometrie ist in ihrer gegenwärtigen Gestalt ganz formularisch, und dadurch zu allgemeinen Rechnungen desto geschickter. Die Differential- und Integralrechnung enthalten eine Menge Vorschriften der Operationen in Formeln ausgedruckt. Auch in der angewandten Mathematik sucht man alles auf bequem ausgedruckte Formeln zu bringen.

Allgemeinere Formeln sind solche, welche mehrere Größen unbestimmt lassen, da speciellere Formeln diesen einen gewissen Werth beylegen. Die letztern werden dadurch oft viel einfacher, und ersparen die Mühe der Reduction des Allgemeinen auf das Besondere, weswegen es bequem ist, dergleichen neben den allgemeinen zur Hand zu haben.

Fragezahl ist in der praktischen Arithmetik diejenige Zahl, von welcher etwas gefragt wird. Sie ist mit der gesuchten zusammengehörig, das ist mit ihr durch die Frage, wie viel? wie groß? oder eine ähnliche verbunden, und kommt eigentlich in der Regel de tri, der einfachen und zusammen gesetzten, vor. In der einfachen ordentlichen Regel de tri wird sie von den Rechenmeistern in die

dritte Stelle gesetzt, in der umgekehrten aber in die erste. Z. B. in dem erstern Falle

7 Pf. — 9 Thlr. — 28 Pf.?

wo 28 Pf. die Fragezahl ist, von welcher der Preis gefragt oder gesucht wird.

Für den zweyten Fall sey das Beyspiel: 6 Arbeiter liefern eine Arbeit in 10 Tagen, wie viele werden erfordert, sie in 5 Tagen fertig zu schaffen. Hier ist die Fragezahl 5 Tage, und

5 Tage? — 6 Arb. — 10 Tage.

In der Regel Quinque kommen zwey Fragezahlen vor, so wie hier zwey Paare gleichartiger Größen gegeben werden. In mehr zusammen gesetzten Fällen kommen noch mehrere vor, nach der Anzahl der Paare gleichartiger Größen, die gegeben werden. Z. B. 100 Thlr. bringen in 12 Monathen 5 Rthlr Zinsen wie viel bringen 480 Thlr. in 8 Monathen? Die Rechenmeister machen folgenden Ansatz.

100 Thlr. — 5 Rthlr. — 480 Rthlr.?
in 12 Mon. — 8 Mon.?

Weil hier die gesuchte Größe so viel mahl größer oder kleiner ist, als die ihr gleichnamige gegebene, so viel mahl die Fragezahlen größer oder kleiner sind, als die ihnen gleichnamigen, so stehen die Fragezahlen in der dritten Stelle.

Wäre die Frage, in wie viel Monathen bringen 480 Thlr. 16 Thlr. Zinse, so wäre der Ansatz folgender.

480 Thlr? — 12 Mon. — 100 Thlr.
5 Thlr. — 16 Thlr.?

Je mehr Interesse, desto länger ist die Zeit, allein je größer das Capital, desto kürzer ist die Zeit.

Die Aufgabe sey: 480 Thlr. bringen in 8 Monaten 16 Thlr. zu 5 Procent belegt, wie groß ist das Capital, das eben die Interesse bey 4 Procent in 6 Monathen bringt, so kommen beide Fragezahlen in die erste Stelle.

6 Mon.? — 480 Rthlr. — 8 Mon.
4 P. C.? — 5 P. C.

Bey einerley Interesse verhalten sich die Capitalien umgekehrt wie die Zeiten und die Procente.

Auf gleiche Art verfährt man bey mehreren Fragezahlen. Man muß nur die Vergleichungsformel, je größer die Fragezahl, desto größer die gesuchte, oder je größer jene, desto kleiner diese, nicht unrichtig anwenden, wo sie nicht Statt findet. Doch in den Fällen, die im gemeinen Leben vorkommen, läßt sich das leicht beurtheilen. In dem Artikel, Proportion, wird ein Ansatz der zusammengesetzten Regel de tri gezeigt werden, welcher der Zusammensetzung der Verhältnisse gemäßer, und auch deutlicher ist.

Function einer veränderlichen Größe ist der analytische Ausdruck der Zusammensetzung einer Größe aus dieser veränderlichen Größe, und einer oder mehrern unveränderlichen. Eine Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ist eben so die analytische Darstellung aus dieser und aus unveränderlichen. Z. B.

$a + bx + cx^2$; oder $\frac{aa + xx}{b - x}$; oder $b\sqrt{(aa + xx)}$;

oder $a \sin x$; oder a^x; oder $a \log x$, sind Functionen der veränderlichen Größe x. Ferner ist $xx + axy + bx + cy + d$ eine Function zweyer veränderlichen Größen x und y;

so auch $\frac{ax}{\sqrt{(bx + yy)}}$ oder $ax + y \sin x$.

1. Der Ausdruck, **Function**, ist zuerst von Joh. Bernoulli in dem erklärten Verstande gebraucht, bey Gelegenheit des isoperimetrischen Problems (Mem. de l'Acad. des Scienc. 1718. Opp. T. II. p. 241.). Leibnitz bezeigt ihm darüber seinen Beyfall (Commerc. epist. T. I. p. 386.). Früher hatte Leibnitz selbst auch den Ausdruck, Function, in einer ähnlichen aber eingeschränktern Bedeutung gebraucht, den Theil einer geraden Linie zu bezeichnen, der in der Verbindung mit krummen Linien auf irgend eine Art bestimmt wird, als Ordinate, Abscisse, Subtangente, Normale, Subnormale, Krümmungshalbmesser. Man sehe auch Iac. Bernoulli Opp. T. II. p. 788.

2. Wenn die Function eine unveränderliche Art der Zusammensetzung ist, und als Glied einer Gleichung, oder als Factor eines Gliedes darin vorkommt, so gebraucht man die Capitalbuchstaben, M, N, P, u. dgl. oder X, Y, Z, die letztern insbesondere, um Functionen von x, y, z, zu bezeichnen. Ist aber die Function selbst noch unbekannt, wie das in den sehr allgemeinen Untersuchungen der neuern Analysis häufig der Fall ist, oder wenn Entwicklungen und Verwandlungen damit vorgenommen werden sollen, so gebraucht man die Notation, fx, Fx, φx, ψx, um Functionen einer veränderlichen x dadurch anzuzeigen. Wenn mehrere Functionen derselben Größe vorkommen, so werden sie durch die vorgesetzten Buchstaben, als f, F, φ, ψ, unterschieden. Daß diese Functionszeichen nicht multiplicirende Größen sind, ergiebt sich in jedem Falle von selbst. Euler gebraucht das Kolon nach dem Functionszeichen, um einer solchen Verwechslung, die inzwischen nicht leicht möglich ist, vorzubeugen, wie f : y. (Institt. Calc. integr. T. III. p. 40.). Ist die Functionalgröße eine zusammengesetzte, so schließt man sie in Klammern ein, als f (xx), oder f (a + bx), welches Functionen von xx, von a + bx, anzeigt. Eine Function zweyer von einander unabhängigen Größen, x, y, wird folgendergestalt, f (x, y), bezeichnet, dagegen f (xy) die Function des Products zweyer veränderlichen Größen, als einer einzigen, angiebt. Die Function wird bloß aus diesen so verbundenen, nicht aus den getrennten, zusammengesetzt. Die Bezeichnung scheint Clairaut zuerst gebraucht zu haben. In einer Abhandlung in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1733., p. 269., édit. d'Amst. gebraucht er nicht allein den Ausdruck, Function, sondern sagt auch, daß er sich der Bezeichnungen, Πx, Φx, Δx, etc. bedienen wolle, um verschiedene Functionen im Allgemeinen zu bezeichnen. D'Alembert in der Abhandlung, sur la cause générale des vents, Berlin 1747. gebraucht pag. 111. die Bezeichnungen, Δu, s und Γu, s für Functionen von u und s.

3. Das Differential einer Function von x, die durch Fx bezeichnet ist, wird durch $\partial x F'x$, oder $\partial x f x$, oder $\partial x \varphi x$ angedeutet, wo $F'x$ oder fx oder φx diejenige Function von x anzeigt, welche aus Fx durch die Differentiation hergeleitet ist. Das Buchstabenzeichen F', f oder φ ist willkührlich, wenn nur dasselbe Zeichen und dieselbe Function zusammenbleiben

Enthält die Function zwey veränderliche Größen, wie $F(x, y)$, so ist ihr Differential $= \partial x\, F'(x, y) + \partial y\, F''(x, y)$, wo wiederum $F'(x, y)$ die aus $F(x, y)$ durch die partielle Differentiation nach x, und $F''(x, y)$ die eben daher durch die partielle Differentiation nach y hergeleitete Function ist.

Z. B. Es sey $Fx = xx + ax$, so ist $\partial . Fx = \partial x\, F'x = 2x\partial x + a\partial x$, und $F' = 2x + a$.

Es sey $F(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma x$, so ist $\partial . F(x + y) = (2\alpha x + \beta y + \gamma)\partial x + \beta x \partial y$, so daß $F' = 2\alpha x + \beta y + \gamma$, und $F'' = \beta x$ ist.

4. Eine Function von x ist entweder eine unmittelbare, wenn sie schlechthin durch x gegeben wird, oder eine mittelbare, wenn sie durch eine veränderliche z gegeben wird, die eine Function von x ist. So ist $xx + ax + b$ eine unmittelbare Function von x; aber $F(xx + ax + b)$ ist eine mittelbare Function von x, weil hier $xx + ax + b$ als eine einzige veränderliche Größe zu betrachten ist. Eine Function des $\sin \varphi$ ist eine mittelbare des Winkels φ. Eine Function von $xx + yy$ ist eine mittelbare der beiden x und y.

5. Die Functionen werden eingetheilt in algebraische und transscendente. Die erstern sind solche, in welchen die Zusammensetzung bloß durch algebraische Operationen geschiehr, nämlich durch die vier Rechnungsspecies, wie auch durch Erhebung auf Potenzen und Ausziehung der Wurzeln. Auch gehören hieher diejenigen Functionen, worin die Function der veränderlichen Größe mit dieser selbst noch algebraisch verbunden ist, und nicht unmittelbar durch sie gegeben wird. Transscendente Functionen sind solche, worin die Functionalgröße von dem

Verhältnisse der Winkel zu ihren trigonometrischen Begleitern, der Logarithmen zu den Zahlen, und von Integrationen, die algebraisch nicht angegeben werden können, abhängt, z. B. $a\varphi + b \sin \varphi$ ist eine transscendente Function des Winkels φ. Einige unterscheiden noch Functionen, worin Potenzen der veränderlichen Größe mit irrationalen Exponenten vorkommen, z. B. $x^{\sqrt{2}}$, und nennen diese Art, functiones interscendentes. Die Unterscheidung ist unnöthig.

6. Die algebraischen Functionen sind theils rationale, theils irrationale. In jenen kommen nur Potenzen der veränderlichen Größe mit ganzen Exponenten vor; z. B. $ax^2 + bx$; oder $\frac{a^2 + x^2}{b + x}$. In den irrationalen sind gebrochne Potenzen der veränderlichen Größe, oder einer Function derselben enthalten, z. B. in $x^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{1}{2}} + b$; oder in $x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{(a^2 + x^2)}$, oder $\sqrt[3]{(a + x + x^2)}$.

7. Die irrationalen algebraischen Functionen sind entweder gesonderte oder ungesonderte (explicitae vel implicitae). Jene sind solche, dergleichen zum Beyspiele vorher angeführt sind. Die ungesonderten sind, worin die Function einer Größe mit derselben verbunden ist, so daß sie nicht durch diese rein und abgesondert in einem endlichen Ausdrucke dargestellt werden kann, z. B. in der Gleichung, $y^6 = axy^2 + bx^4$. Hier ist y eine Function von x, weil sie auf eine bestimmte Art durch x gegeben wird; aber man hat kein Mittel, y durch x anders als durch eine unendliche Reihe auszudrucken, außer in dem Falle, daß y nur bis zu der zweyten Potenz steigt. Diese Art Functionen kommt bey allen geometrischen krummen Linien vor, da deren Ordinaten im Allgemeinen ungesonderte Functionen der Abscissen sind. In besondern Gattungen, oder bey gewissen Lagen der Coordinaten können die Ordinaten gesonderte Functionen der Abscissen seyn.

8. Die rationalen Functionen werden eingetheilt in ganze und gebrochne. Jene sind solche, in welchen die veränderliche Größe x nirgends einen negativen Exponenten hat, noch sonst ein Bruch vorkommt, dessen Nenner x enthält. Ihre allgemeine Form ist, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ etc. Die gebrochnen rationalen Functionen können alle auf die Form,

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}},$$

durch die Vereinigung der einzelnen Brüche unter einem gemeinsamen Nenner gebracht werden.

9. Ein wichtiger Unterschied der Functionen beruht auf der Anzahl der Werthe, welche die Function für irgend einen Werth der veränderlichen Größe x haben kann. Hat sie für jeden Werth von x nur einen Werth, so ist sie eine einförmige Function; kann sie zwey und nicht mehr mögliche Werthe erhalten, so ist sie eine zweyförmige Function; bey drey und nicht mehrern möglichen Werthen eine dreyförmige, u. s. f. überhaupt eine vielförmige, wenn sie für irgend einen Werth von x mehr als einen möglichen Werth bekommen kann. Alle rationale gesonderte Functionen, sie mögen ganze oder gebrochne seyn, sind einförmige Functionen. Hingegen die ungesonderten algebraischen Functionen sind vielförmige. Es sey y eine solche Function von x, und erstlich $y^2 - Py + Q = o$, wo P und Q irgend welche einförmige Functionen von x bezeichnen, ganze oder gebrochne, so hat y für jedes x entweder zwey mögliche oder zwey unmögliche Werthe (Gleichung, II.), und ist also eine zweyförmige Function von x. An den Kegelschnitten sind die Ordinaten zweyförmige Functionen der Abscissen, einen besondern Fall ausgenommen. In gewissen Gattungen höherer krummen Linien sind die Ordinaten auch solche Functionen.

Es seyn P, Q, R, einförmige Functionen von x, und $y^3 - Py^2 + Qy - R = o$, so ist y eine dreyförmige Function von x, weil eine cubische Gleichung drey mögliche Wurzeln haben kann. Da nur zwey Wurzeln

derselben zugleich unmöglich seyn können, so hat die Function y immer entweder drey mögliche Werthe oder einen. In einigen Gattungen der Linien der dritten Ordnung sind die Ordinaten dreyförmige Functionen ihrer Abscissen. Dergleichen kommen auch bey höhern krummen Linien vor.

Sind P, Q, R, S, einförmige Functionen von x, und es ist $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$, so ist y eine vierförmige Function von x. Für manche Werthe von x mag y nur zwey mögliche Werthe oder gar keinen möglichen Werth erhalten. Es wird hier nur auf die möglich größte Anzahl der möglichen Werthe gesehen.

10. Wenn in einer Function von x bloß die geraden Potenzen dieser Größe vorkommen, so heißt die Function eine gerade (functio par). Die Werthe der Function, einfache oder vielfache, sind für gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x gleich groß und gleichnamig, das ist, beiderseits positiv oder negativ. Stellt die Function Ordinaten einer krummen Linie vor, so wird diese von einer mit den Ordinaten durch den Anfang der Abscissen gezogenen Parallele in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt. Dieses entsteht daher, daß die Werthe gerader Potenzen, x^2, x^4, etc. das Vorzeichen nicht ändern, man mag x positiv oder negativ nehmen.

11. Wenn in einer Function von x bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, so ist die Function eine ungerade (functio impar.). Für gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x erhält sie gleiche, aber entgegengesetzte Werthe, weil die ungeraden Potenzen von x ihr Vorzeichen ändern, wenn x entgegengesetzt genommen wird. Bedeutet die Function Ordinaten einer krummen Linie, so ist diese in den entgegengesetzten, oder den Verticalwinkeln der Axen der Coordinaten sich gleich und ähnlich.

12. Eine gleichartige Function (functio homogenea) zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, x, y, etc. ist eine solche, worin die Summe der Exponenten derselben in allen Gliedern gleich groß ist, z. B. $ax^2y + bx^3 + cxy^2 + dy^3$ ist eine gleichartige Function

von x und y. So auch $ax^2 + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^4}{x^2 + y^2}$.

Die Dimensionen der veränderlichen Größen werden hier allein gezählt. Bey Divisoren sind sie subtractiv zu nehmen. Daher ist die Anzahl der Dimensionen eines Bruches der Unterschied der Dimensionen im Zähler und Nenner, wenn beide gleichartige Functionen sind. Die Anzahl der Dimensionen von einer Wurzelgröße ist diejenige von ihrer Potenz dividirt durch den Grad der Wurzel.

13. Ähnliche Functionen sind solche, worin die veränderlichen und unveränderlichen Größen auf eine und dieselbe Art mit einander verbunden sind. Sie kommen in der Form überein, wenn gleich nicht in der Quantität. Z. B. $a + bx + cx^2$, und $A + By + Cy^2$, sind ähnliche Functionen von x und y. Ähnliche Functionen erhalten dasselbe Functionszeichen, als φx, φy.

14. Eine functio inexplicabilis ist eine solche, die weder durch bestimmte Ausdrücke, noch durch Wurzeln von Gleichungen dargestellt werden kann, so daß sie nicht allein keine algebraische ist, sondern daß es auch in den meisten Fällen sich nicht bestimmen läßt, zu welcher Gattung von transscendenten Functionen sie zu rechnen sey. Eine solche Function ist die Summe, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, oder das Product, $1.2.3.4 \ldots x$. Euler hat über diese Art von Functionen Untersuchungen angestellt, in den Instit. Calc. diff. P. II. Cap. 16. 17. In dem Artikel, Facultät, numerische, sind die Functionen dieser Art, $a(a+b)(a+2b) \ldots (a+nb)$, und $\frac{a(a+b)(a+2b).\text{etc.}}{c(c+b)(c+2b).\text{etc.}}$, ausführlich erörtert worden.

15. Wenn y eine Function von x ist, so ist auch x eine Function von y. Es ist eine wichtige Aufgabe in der Analysis, eine Function umzukehren, das ist, aus einer gesonderten Function y von x, die Functionalgröße x durch y auszudrücken. Dieses wird in dem Artikel,

Umkehrung einer Reihe, gelehrt, wo auch gezeigt wird, wie eine Potenz von x durch eine nach y geordnete Reihe dargestellt werden kann. Wie eine ungesonderte Function entwickelt wird, soll in diesem Artikel gezeigt werden. Wie von zwey verschiedenen Functionen einer und derselben veränderlichen Größe die eine durch die andere ausgedruckt wird, lehrt la Grange's Lehrsatz, s. denselben.

Verwandlungen der Functionen.

16. Eine Function läßt sich oft auf verschiedene Arten darstellen, z. B. als Product, oder als Potenz, und als Aggregat von Theilen, die aus der Entwickelung des Products entstehen; als Wurzelgröße und als entwickelte Wurzel; als Bruch und als Reihe, je nachdem es zu den Absichten der Rechnung am bequemsten ist.

17. Es sey y eine ganze gesonderte Function von x, z. B. $y = x^3 - ax^2 + bx - c$, so läßt sich diese in ein Product aus so vielen Factoren von der Form $x - p$ verwandeln, als die bestimmte Gleichung für x, welche der Werth $y = 0$ giebt, Wurzeln hat, wenn diese alle möglich sind, und p ist eine der Wurzeln. Hat die Gleichung für x unmögliche Wurzeln, so enthält die Function y als Product so viele quadratische Factoren, $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$, als Paare unmöglicher Wurzeln in der Gleichung vorhanden sind. Z. B. wenn $y = x^3 - ax^2 + bx - c$ gesetzt wird, und wenn die Wurzeln der Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, sind p, q, r, so ist $y = (x-p)(x-q)(x-r)$. Hat die Gleichung aber zwey unmögliche Wurzeln, $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$, nebst der möglichen r, so ist $y =$

$$(x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})(x-r).$$

Dieses ist dasselbe, was in dem Artikel, Gleichung, VI. erwiesen wird. Die Function y ist der Werth einer Gleichung, in welcher statt einer unbekannten Größe x eine veränderliche, auf jede beliebige Art bestimmbare, gesetzt wird.

18. Die Sätze von dem Verhalten der Wurzeln einer Gleichung zu den Coefficienten derselben (Gleichung, VI.) lassen sich alle auf die ganzen Functionen anwenden. In den gesonderten Functionen von x ist das gegebene Glied, vermindert um y, das gegebene Glied der Gleichung. In den ungesonderten Gleichungen wird die eine der veränderlichen Größen als eine gegebene behandelt.

19 Rationale gebrochne Functionen werden mittelst der Division des Zählers durch den Nenner in eine Reihe verwandelt, deren Progressionalgröße dieselbe mit der in dem Zähler und Nenner ist. Die Reihe ist eine rücklaufende, s. den Artikel, rücklaufende Reihe.

20. Wenn der Nenner einer rationalen gebrochnen Function ein Product aus einfachen Factoren von der Form $x + p$ ist, so läßt sich der Bruch in partielle Brüche, jeden mit einem der Factoren zum Nenner, zerlegen, wenn die Factoren alle verschieden sind. Enthält der Zähler eine höhere Potenz der Größe x als der Nenner, so sondere man durch die Division eine rationale ganze Function der Größe x ab, bis daß in einem Reste der Division die höchste Potenz von x niedriger ist, als die höchste im Divisor, ganz auf dieselbe Art, wie man bey der Absonderung der ganzen Zahl von einem uneigentlichen Bruche verfährt.

21. Der Bruch sey, $\frac{ax + b}{xx + (p+q)x + pq}$ $= \frac{ax + b}{(x+p)(x+q)}$. Dieser wird zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q}$. Um die Zähler, A, B, zu bestimmen, bringe man die beiden Brüche auf denselben Nenner $x^2 + (p+q)x + pq$ oder $(x+p)(x+q)$. Alsdann wird der Zähler $= (A+B)x + Aq + Bp$. Hier erhellt, daß A und B unveränderliche Größen seyn müssen, da derselbe dem $ax + b$ gleich ist. Damit jener für jeden Werth von x diesem gleich seyn könne, müssen beide identisch gleich seyn, das ist, es ist

I. $A + B = a$; II. $Aq + Bp = b$.

Hieraus folgt

$$A(p-q) = ap - b,$$
$$B(q-p) = aq - b,$$

und daraus

$$A = \frac{ap-b}{p-q};\ B = \frac{aq-b}{q-p}.$$

Exempel. Der gegebene Bruch sey

$\frac{3x+7}{xx+8x+15} = \frac{3x+7}{(x+5)(x+3)}$. Dieser wird zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{4}{x+5} - \frac{1}{x+3}$.

22. Der gegebene Bruch sey $\frac{axx+bx+c}{(x+p)(x+q)(x+r)}$. Dieser werde in die drey Brüche, $\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q} + \frac{C}{x+r}$, zerlegt. Bringt man diese drey Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, und setzt den Zähler des so erhaltenen Bruchs identisch gleich dem Zähler des gegebenen, so ist

I. $A + B + C = a$.

II. $A(q+r) + B(p+r) + C(p+q) = b$.

III. $Aqr + Bpr + Cpq = c$.

Die Glieder der Gleichung I. multiplicire man durch p^2, die in II. durch p; und ziehe von der Summe I. u. III. die II. ab, so gehen B und C heraus, und es wird für A erhalten die Gleichung,

$$A(p^2 - (q+r)p + qr) = ap^2 - bp + c$$

oder $A(p-q)(p-r) = ap^2 - bp + c$.

$$\text{und } A = \frac{ap^2 - bp + c}{(p-q)(p-r)}.$$

Auf ähnliche Art wird gefunden

$$B = \frac{aq^2 - bq + c}{(q-p)(q-r)}; \quad C = \frac{ar^2 - br + c}{(r-p)(r-q)}.$$

Wenn einer dieser Werthe als A, gefunden ist, so sind die andern auch dadurch bekannt, weil man nur p mit q oder r vertauschen darf, da die Zähler A, B, C alle auf gleiche Art in den Gleichungen durch p, q, r, bestimmt werden.

Die Zähler der Brüche A, B, C, entstehen aus dem Zähler des vorgegebenen Bruchs, wenn darin für x die entgegengesetzten von p, q, r gesetzt werden. In (21.) wird durch eine solche Substitution das entgegengesetzte der Zähler von A und B erhalten.

23. Der gegebene Bruch sey

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)}.$$

Dieser werde in die Brüche,

$$\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q} + \frac{C}{x+r} + \frac{D}{x+s},$$

zerlegt. Bringt man diese auf den gemeinsamen Nenner $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)$, und setzt den Zähler des dadurch entstehenden Bruchs identisch gleich dem Zähler des gegebenen, so ist

I. $A + B + C + D = a.$

II. $A(q+r+s) + B(p+r+s) + C(p+q+s) + D(p+q+r) = b.$

III. $A(qr+qs+rs) + B(pr+ps+rs) + C(pq+ps+qs) + D(pq+pr+qr) = c.$

IV. $Aqrs + Bprs + Cpqs + Dpqr = d.$

Die Glieder dieser Gleichungen multiplicire man in I. mit p^3; in II. mit p^2; in III. mit p, in IV. mit 1, und ziehe dann von der Summe der ersten und dritten dieser neuen Gleichungen die zweyte und vierte derselben ab, so gehen B, C, D aus dem Aggregat heraus, und es bleibt

$$Ap^3 - A(q+r+s)p^2 + A(qr+qs+rs)p$$
$$- Aqrs = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

das ist

$$A(p-q)(p-r)(p-s) = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

und $A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$.

Aus dem Werthe von A werden nun die von B, C, D durch die Vertauschung von p mit q, r, s erhalten.

Der Zähler von A entsteht, wie in (21.) aus dem Zähler des gegebenen Bruchs, wenn darin $-p$ für x gesetzt, und das entgegengesetzte des Aggregats genommen wird.

24. Der Factor von B in dem Aggregat (23) ist $= p^3 - (p+r+s)p^2 + (pr+ps+rs)p - prs$. Hier ist der Coefficient von p^2 die Summe dreyer Unionen; der von p die Summe ihrer Binionen; das letzte Glied die Ternion von denselben. Nun ist in einer cubischen Gleichung, $p^3 - Pp^2 + Qp - R = 0$, worin p^3 wie in jener die Einheit zum Coefficienten hat, P das Aggregat der Wurzeln, Q das ihrer Binionen, R die Ternion derselben. Daher ist jener Factor eben so $= 0$, wie das Aggregat von den Gliedern dieser Gleichung, indem p eines der Elemente der Combinationen ist. Eben so ist

$$r^3 - (p+r+s)r^2 + (pr+ps+rs)r - psr = 0,$$

und auch

$$s^3 - (p+r+s)s^2 + (pr+ps+rs)s - prs = 0.$$

Daraus folgt, daß wenn p mit r oder s vertauscht wird, um C oder D, auf dieselbe Art, wie vorher A gefunden ist, zu erhalten, B in dem Aggregat der Gleichungen, die dadurch entstehen, ebenfalls einen Factor, der $= 0$ ist, bekommt.

Hingegen ist der Factor von A nicht $= 0$, weil p keine der Unionen in den Coefficienten von p^2, p und p^0, oder dem Producte qrs, ist. Da eben dieser Factor, wenn er $= 0$ gesetzt wird, eine Gleichung mit den Wurzeln, q, r, s giebt, so ist derselbe das Product $(p-q)(p-r) \times (p-s)$, s. Gleichung III. 10.

Was von dem Factor zu B bemerkt ist, gilt auch, mutatis mutandis, von den Factoren zu A, C, D.

25. Es sey die Summe von $m-1$ Unionen, $r+s+t+$ etc. $=\alpha$; die Summe ihrer Binionen $=\beta$; ihrer Ternionen $=\gamma$; ihrer Quaternionen $=\delta$, u. s. f. das Product aller $=\pi$, so ist (Gleichung VI. 1.)

$$p^m-(p+\alpha)p^{m-1}+(p\alpha+\beta)p^{m-2}$$
$$(p\beta+\gamma)p^{m-3}+(p\gamma+\delta)p^{m-4}\ldots\pm\pi=0.$$

Hieraus erhellt, daß nach der vorher angewandten Combination der Gleichungen bey Zerlegung eines Bruches von der Art, wie die behandelten sind, wenn die Gleichungen nach der Reihe mit p^m, p^{m-1}, u. s. f. multiplicirt werden, die Factoren von B, C, D etc. immer $=0$ werden, dagegen der vom A nicht $=0$ wird, und daß derselbe sich in das Product $(p-q)(p-r)(p-s)$. etc. verwandeln lassen wird.

26. Eine andere Methode, die Zähler der einfachen Brüche zu finden ist folgende, nach Euler in der Introd. in Anal. Infin. §. 41.

Der Bruch sey $\frac{M}{N}$, und $N=(x+p)S$, so daß S das Product der übrigen Factoren von N nach Absonderung eines derselben, $x+p$, sey. Es sey nun $\frac{M}{N}=\frac{A}{x+p}+\frac{P}{S}$, wo A kein x enthält, P aber eine Function von x ist. Es ist $AS+P(x+p)=M$, und $\frac{M-AS}{x+p}=P$. Da P eine ganze Function von x ist, so ist $M-AS$ durch $x+p$ theilbar, und es wird $M-AS=0$, wenn der Factor $x+p=0$, oder $x=-p$ gesetzt wird. Folglich ist $A=\frac{M}{S}$, wenn im Zähler und Nenner dieses Bruches $-p$ für x gesetzt wird.

In der gebrochnen Function (23.) ist

$$M = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$
$$S = (x+q)(x+r)(x+s).$$

Setzt man hier $x = -p$, so ist $\frac{M}{S} =$

$$\frac{-ap^3 + bp^2 - cp + d}{(-p+q)(-p+r)(-p+s)},$$

oder $\frac{M}{S} = A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$, wie daselbst für A gefunden ist.

27. Wenn unter den Factoren des Nenners der gebrochnen Function zwey oder mehrere gleiche sind, so muß das obige Verfahren abgeändert werden, weil in den Nennern einiger einfachen Brüche ein Factor Null wird. Wie man hier zu verfahren hat, zeigt folgendes Beyspiel.

28. Es sey der gegebene Bruch $\frac{axx + bx + c}{(x+p)^2(x+r)}$ $= \frac{M}{N}$. Er werde zerlegt in die Brüche $\frac{A}{(x+p)^2}$ $+ \frac{B}{x+p} + \frac{C}{x+r}$. Hier müssen drey Brüche genommen werden, weil bey der Vergleichung des Zählers des reducirten Bruchs mit dem Zähler des gegebenen drey Gleichungen da sind. Die drey Brüche werden, wie vorher, auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, welcher der Nenner N ist. Der Zähler ist

$$A(x+r) + B(x+p)(x+r) + C(x+p)^2.$$

Die Vergleichung desselben mit M giebt

I. $B + C = a$; II. $A + B(p+r) + 2Cp = b$;
III. $Ar + Bpr + Cp^2 = c$.

Multiplicirt man II. mit p, und zieht sie darauf von III. ab, so wird erhalten,

$$A(r-p)-(B+C)p^2=c-bp,$$

das ist, wegen I.

$$A(r-p)-ap^2=c-bp,$$

$$A=\frac{ap^2-bp+c}{r-p}.$$

Wird I. mit r^2; II. mit r multiplicirt, und von dem Aggregat des Products aus I. in r^2 und III. abgezogen, so wird

$$Cp^2-2Cpr+Cr^2=ar^2-br+c$$

$$C=\frac{ar^2-br+c}{(p-r)^2}.$$

Endlich ist $B=a-C=\frac{ap^2-2apr+br-c}{(p-r)^2}$.

Der Werth von C ist hier derselbe, wie er aus der Rechnung in (22.) folgt, wenn daselbst $q=p$ gesetzt wird.

29. Man kann hier auch auf eine ähnliche Art wie in (26.) verfahren. Es sey $\frac{ax^2+bx+c}{(x+p)^2(x+r)}=$

$$=\frac{M}{N}=\frac{A}{(x+p)^2}+\frac{B}{x+p}+\frac{C}{x+r}.$$

Nun ist $M=A(x+r)+B(x+p)(x+r)$ $+C(x+p)^2$, und

$$M-A(x+r)-B(x+p)(x+r)=C(x+p)^2.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist durch $(x+p)^2$ theilbar, also auch durch $x+p$. Da das Glied, $B(x+p)(x+r)$ durch $x+p$ theilbar ist, so ist $M-A(x+r)$ auch dadurch theilbar. Diese Function wird also $=0$, wenn $x=-p$ gesetzt wird, und es ist folglich $A=\frac{M}{x+r}$, für $x=-p$. Dieses giebt sogleich $A=\frac{ap^2-bp+c}{-p+r}$. Man setze zur Abkür-

zung, $\frac{M-A(x+r)}{x+p} = T$, so ist $T-B(x+r)$ $= C(x+p)$. Da C kein x enthält, so ist der erste Theil dieser Gleichung durch $x+p$ theilbar, oder enthält den Factor $(x+p)$. Er wird also $=o$, wenn $x=-p$ gesetzt wird. Demnach ist $B = \frac{T}{x+r}$, für $x=-p$. Es ist

$$T = \frac{a(p-r)x + apr - br + c}{p-r}.$$

Für $x=-p$ ist

$$T = \frac{-app + 2apr - br + c}{p-r},$$

und daher $B = \frac{app - 2apr + br - c}{(p-r)^2}$,

wie vorher gefunden ist.

Den Zähler C des partiellen Bruches, dessen Nenner nur einmahl als Factor in N vorhanden ist, findet man eben so, wie in dem Falle, da alle Factoren in dem Nenner des vorgegebenen Bruches einander ungleich sind. Es sey nämlich $N=(x+r)S$, und $\frac{M}{N} = \frac{C}{x+r} + \frac{P}{S}$, so ist $M = CS + P(x+r)$, und $\frac{M-CS}{x+r} = P$. Da P eine ganze Function von x ist, so ist $M-CS$ durch $x+r$ theilbar, und wird $=o$, für $x=-r$. Folglich ist $C = \frac{M}{S}$ für diesen Werth von x, und dadurch

$$C = \frac{arr - br + c}{(p-r)^2}.$$

Auf diese Art findet man die Zähler aller partiellen Brüche, deren Nenner in dem Nenner N des vorgegebe-

nen Bruches nur einmahl vorkommen, wenn dieser mehrere solche einzelne enthält.

30. Die Function $\frac{M}{N}$, wo M und N ganze Functionen von x sind, und M von einem niedrigern Grade als N ist, habe im Nenner drey gleiche Factoren, so daß $N = (x+p)^3 S$ ist. Nun ist der Bruch zu zerlegen in die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3} + \frac{B}{(x+p)^2} + \frac{C}{x+p} + \frac{P}{S}$, wo A, B, C unveränderliche Größen sind, und P eine ganze Function von x ist, wenn S kein einfacher Factor von der Form $x+q$ ist. Es ist nun $M = AS + BS(x+p) + CS(x+p)^2 + P(x+p)^3$, folglich $M - AS$ theilbar durch $x+p$. Da also diese Function $= o$ wird, für $x = -p$, so ist $A = \frac{M}{S}$, wenn in den Functionen M und S jener Werth für x gesetzt wird.

Man setze $\frac{M-AS}{x+p} = T$, so ist $T = BS + CS(x+p) + P(x+p)^2$, und $T - BS$ theilbar durch $x+p$. Daher ist $B = \frac{T}{S}$, wenn in den Functionen T und S gesetzt wird $x = -p$.

Noch setze man $\frac{T-BS}{x+p} = V$, so ist $V - CS = P(x+p)$, und $V - CS$ theilbar durch $x+p$. Dadurch wird $C = \frac{V}{S}$, wenn in V und S gesetzt wird $x = -p$.

31. Exempel. Es sey $\frac{M}{N} = \frac{xx}{(x-1)^3(xx+1)}$.

Hier ist $M = xx$; $p = -1$; $S = xx + 1$ Daß der Factor $xx + 1$ sich nicht in zwey einfache Factoren zerlegen läßt, hat auf die Auflösung des Exempels keinen Einfluß.

Es ist $A = \frac{1}{2}$; $T = \frac{x+1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $V = -\frac{x}{2}$;

$C = -\frac{1}{4}$. Dadurch ist $\frac{xx}{(x-1)^3(xx+1)} = \frac{1}{2(x-1)^3}$

$+ \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{P}{xx+1}$.

Um P zu erhalten vereinige man die drey ersten Brüche des zweyten Theils in einen einzigen, und ziehe denselben von dem vorgegebenen Bruche ab, so wird dadurch gefunden

$P = \frac{1}{4}(x-1)$.

32. Wenn der Nenner des vorgegebenen Bruches nur einen quadratischen nicht zerlegbaren Factor hat, so kann man so verfahren, wie in dem Beyspiele (31.). Sind mehrere solche Factoren in dem Nenner vorhanden, so bediene man sich der zuerst gelehrten Methode. Ein solcher quadratischer oder trinomischer Factor hat die Form $xx + 2px + pp + qq$, wofür man auch die Form, $xx + 2px\cos\alpha + pp$ setzen kann, und der Zähler des partiellen Bruchs mit diesem Nenner hat die Form $Ax + B$.

Man suche in diesem Falle zuerst die Brüche, deren Nenner die Form $x + p$ haben, und ziehe die Summe derselben von dem vorgegebenen Bruche ab, so ist der Rest ein Bruch mit einem Nenner, der bloß quadratische, nicht zerlegbare Factoren enthält. Jene partiellen Brüche werden auf gleiche Art gefunden, als wenn bloß einfache Factoren vorhanden wären. Es seyn z. B. in dem Nenner eines Bruches, $(x + p)(x + q)(x + r)(x + s)$, die Größen r und s unmögliche, so aber doch, daß

$x^2 + (r+s)x + rs$ eine mögliche Größe ist, indem $r+s$ und rs wahre Größen sind. Nun ist der Zähler des partiellen Bruchs $\frac{A}{x+p}$, wenn r und s mögliche Größen sind, $A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$. Hier ist der Nenner $= (p-q)(pp - (r+s)p + rs)$, wo es einerley ist, ob r und s wahre Größen sind oder nicht.

33. Es sey

$$\frac{M}{N} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(xx + 2px + pp + qq)(xx + 2rx + rr + ss)},$$

und zur Abkürzung $pp + qq = mm$; $rr + ss = nn$. Der Bruch werde zerlegt in die Brüche

$$\frac{Ax + B}{xx + 2px + mm} + \frac{Cx + D}{xx + 2rx + nn},$$

Wenn diese beiden Brüche in einen einzigen zusammengezogen werden, so giebt der Zähler durch die Vergleichung mit M vier einfache Gleichungen für A, B, C, D, und es ist

$$A((mm - nn)^2 - 4(p-r)(m^2r - n^2p)$$
$$=$$
$$a(m^2(mm - nn) - 4p(m^2r - n^2p)$$
$$+ 2b(m^2r - n^2p) - c(mm - nn) + 2d(p-r).$$

Ferner ist

$$B((mm - nn)^2 - 4(p-r)(m^2r - n^2p)$$
$$=$$
$$2am^2(n^2p - m^2r) + bm^2(mm - nn)$$
$$- 2cm^2(p-r) - d(mm - nn - 4pp + 4pr).$$

Aus der ersten Formel wird C durch die Vertauschung von m und p mit n und r gefunden, und eben so D aus der zweyten.

Dieses Verfahren wird für mehr als zwey quadratische Factoren zu beschwerlich. Euler hat ein allgemeineres

und künstlicheres gewiesen in der Introd. in Anal. Infin. Cap. XII.

34. Die Zerlegung einer gebrochnen Function in einfache Brüche hat Leibnitz zuerst gelehrt, und davon Anwendungen zu Summirungen und Integrationen gemacht. Acta Erud. 1702 et 1703. Opp. T. III. nr. 65 et 66. Commerc. epist. T. II. p. 161. Euler hat die Ausführung dieser zu Integrationen oft erforderlichen Operation sehr lichtvoll und scharfsinnig gewiesen, für einfache und mögliche Factoren des Nenners eines Bruches, in der Introd. in Anal. Inf. Cap. II. für quadratische nicht zerlegbare das. Cap. XII. durch Hülfe trigonometrischer Formeln; und für beide Fälle mit Zuziehung der Differentialrechnung in den Institt. Calc. differ. P. II. Cap. XVIII. wovon noch am Ende dieses Artikels einiges angeführt werden wird. Man vergleiche noch Lacroix, traité du calcul différentiel et integral, T. II. nr. 364—375. Die in diesem Artikel von mir völlig entwickelten Formeln werden zur deutlichen Einsicht in die Zerlegung der Brüche beförderlich seyn.

Verwandlung der Functionen durch Substitution.

35. Eine brauchbare Verwandlungsart ist die Einführung einer dritten veränderlichen Größe, die sowohl mit der Größe x, als derjenigen y, die von x eine Function ist, verbunden wird. Dieses ist besonders nützlich, wenn y als Function von x durch eine nicht gesonderte Gleichung gegeben wird, oder eine irrationale Function von x ist. Auch erhält oft durch die Substitution einer Größe für die Functionalgröße die Function selbst eine einfachere Gestalt, wovon in dem Artikel, Reihe, Beyspiele vorkommen.

36. Die Gleichung zwischen x und y sey eine ungesonderte, wie diese, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = 0$. Man setze $y = xz$, so ist nach geschehener Division durch x,

$$axz^2 + bxz + cx + dz + e = 0,$$

also $x = \frac{-dz - e}{az^2 + bz + e}$,

und $y = \frac{-dz^2 - ez}{az^2 + bz + e}$.

Setzt man für z eine Reihe von Werthen, so erhält man zwey für x und y zusammengehörige Reihen ihrer Werthe, woraus für jedes x das zugehörige y, oder umgekehrt, entweder unmittelbar, oder durch Interpolation näherungsweise erhalten werden kann.

37. Die Gleichung sey $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 = 0$. Man setze $y = xz$, so ist die neue Gleichung durch xx theilbar, so daß

$$axz^3 + bxz^2 + cxz + dx + ez^2 + fz + g = 0.$$

Daraus ist $x = \frac{-ez^2 - fz - g}{az^3 + bz^2 + cz + d}$,

und $y = \frac{-ez^3 - fz^2 - gz}{az^3 + bz^2 + cz + d}$.

38. Es sey $y = \sqrt{(a + bx)}$. Man setze $a + bx = b^2z^2$, so ist $x = bz^2 - \frac{a}{b}$, und $y = bz$.

Es sey $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx)}$. Man setze $c + dx = (a + bx)z^2$, so ist $x =$

$\frac{az^2 - c}{d - bz^2}$, und $y = \frac{(ad - bc)z}{d - bz^2}$.

39. Es sey $y = \sqrt{(aa + bx + cxx)}$, man soll für x eine solche Function von z setzen, daß y einen rationalen Werth erhalte.

Zu dem Ende sey $\sqrt{(aa + bx + cxx)} = a + xz$, so ist, auf beiden Seiten quadrirt,

$$b + cx = 2az + xz^2,$$

also $x = \frac{2az - b}{c - z^2}$, und $y = \frac{az^2 - bz + ac}{c - z^2}$.

Es ist nicht nöthig, daß a rational sey; nur muß die gegebene Größe aa positiv seyn.

40. Es sey $y = \sqrt{(a + bx + c^2x^2)}$, man soll eben dasselbe, was in (39.) leisten.

Zu dem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)} = z + cx$, so ist $a + bx = zz + 2cxz$,

also $x = \frac{zz - a}{b - 2cz}$, und $y = \frac{bz - czz - ac}{b - 2cz}$.

Entwickelung ungesonderter Functionen.

41. Die Function y von x sey eine ungesonderte, wie die in der Gleichung $ayy + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$ enthaltene. Um y durch x auszudrucken, nimmt man für y eine nach Potenzen von x geordnete Reihe an, deren Form man aber vorher gehörig bestimmen muß, das ist, die Fortschreitung der Exponenten von x.

42. Die Reihe der Exponenten kann allemahl eine arithmetische m, $m + \delta$, $m + 2\delta +$ etc. seyn. Denn wenn sie auch eine andere wäre, nämlich, α; β; γ; δ; etc. so ist es doch immer möglich, eine arithmetische Reihe zu finden, in welcher die Glieder α, β, γ, δ, etc. vorkommen. Die Coefficienten der Potenzen, deren Exponenten nicht unter denen, α, β, γ, δ, etc. befindlich sind, müssen durch die Rechnung gleich Null gefunden werden.

43. Die Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} + Dx^{m+3\delta} +$ etc. ist eine steigende, wenn δ positiv ist, eine fallende, wenn δ negativ ist. In jenem Falle giebt sie für x, die kleiner sind als die zur Einheit angenommene oder anzunehmende Größe, die dazu gehörigen Werthe von y, mit schnellerer oder langsamerer Annäherung zu dem völligen Werthe, nachdem die Coefficienten mehr oder weniger abnehmen. Ist die Reihe der Coefficienten eine wachsende, so mag die Reihe für y nicht dienlich seyn, die Quantität von y zu finden, ob die Reihe gleich die Form dieser veränderlichen Größe angiebt. —

Ist δ negativ, so dient die Reihe für y den Werth oder auch nur die Form für solche x anzugeben, die größer als die numerische Einheit, oder als die zur Einheit dienende Größe sind.

44. Die Potenzen von y geben Reihen, in welchen die Exponenten der Potenzen von x ebenfalls eine arithmetische Reihe mit dem Unterschiede $\pm \delta$ ausmachen. Setzt man nun in der zwischen x und y gegebenen Gleichung für die Potenzen von y ihre Werthe zufolge der für y angenommenen Reihe, so entsteht aus jedem Gliede, das y enthält, eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe. Diejenigen Glieder aus allen diesen Reihen, welche einerley Potenz von x enthalten, und das Glied der Gleichung, welches dieselbe Potenz von x ohne y enthält, nehme man zusammen als ein einziges Glied einer Reihe, die aus allen Particular-Reihen (mit Einschluß der Glieder ohne y) zusammengesetzt ist. Der Werth dieser Totalreihe ist Null, wie das Aggregat aller Glieder der Gleichung zwischen x und y. Die Coefficienten von x in dieser Totalreihe sind jeder $= 0$, damit für jedes x der Werth der Reihe Null seyn möge.

45. Wenn die Gleichung zwischen x und y vom zweyten Grade ist, wie die in (41.) angeführte, so läßt sich für y eben ein solcher Werth finden, wie für die Wurzel einer quadratischen Gleichung, durch einen theils rationalen, theils irrationalen Ausdruck, der die veränderliche, beliebig zu bestimmende, und die unveränderlichen Größen enthält. Es kann daher, durch Entwickelung der Wurzel aus der Größe unter dem Wurzelzeichen, y durch eine nach x geordnete Reihe dargestellt werden.

46. Die allgemeine Gleichung vom dritten Grade zwischen x und y ist

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0.$$

Um die Rechnung für ein Beyspiel der Methode nicht zu weitläuftig zu machen, nehme man die Gleichung,

$$y^3 + ax^2y + by^2 + cy + dx + e = 0.$$

I. Zuerst suche man eine fallende Reihe für y, die den Werth für große x angiebt, und setze $y = Ax^m + Bx^{m-\delta} + Cx^{m-2\delta} + Dx^{m-3\delta} +$ etc. so entstehen aus den Gliedern der Gleichung nach ihrer Ordnung folgende Reihen von Exponenten:

y^3	$3m$; $3m-\delta$; $3m-2\delta$; $3m-3\delta$; etc.
ax^2y	$m+2$; $m+2-\delta$; $m+2-2\delta$; $m+2-3\delta$; etc.
by^2	$2m$; $2m-\delta$; $2m-2\delta$; $2m-3\delta$; etc.
cy	m; $m-\delta$; $m-2\delta$; $m-3\delta$; etc.
dx	1
e	0

II. Damit die Particularreihen nebst den Gliedern dx und e zu einer einzigen Reihe, deren Coefficienten alle = 0 sind, vereinigt werden mögen, so müssen die Exponenten jeder Particularreihe unter den Exponenten jeder der übrigen Particularreihen solche antreffen, die ihnen gleich sind. Denn sonst würden entweder die Coefficienten einer Particularreihe für sich null seyn, welches anzeigte, daß das Glied der Gleichung, woraus sie entstanden seyn soll, fehlte; oder, wenn einige Particularreihen besonders genommen für sich null wären, so müßte die Summe der dazu gehörigen Glieder der Gleichung auch für sich besonders genommen null seyn, da diese Glieder sich doch nur mit allen übrigen Gliedern der Gleichung zusammen heben sollen. Eben so müssen die gegebenen Exponenten, hier 1 und 0, unter den Exponenten der Particularreihen vorkommen, weil sonst dx und e fehlen müßten. Es kann aber auch nicht eines dieser Glieder mit einem oder mehrern der übrigen sich besonders heben, aus dem gleich vorher angeführten Grunde. Daher sind alle die in I. aufgeführten Exponen

ten Glieder einer einzigen arithmetischen Reihe, worin der Unterschied der Glieder $= \delta$ ist, und dieses δ ist also auch der Unterschied der Exponenten in der Reihe für y.

III. Die Exponenten, welche kein δ enthalten, hier $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0; sind also auch Glieder aus einer arithmetischen Reihe, in welcher der Unterschied der Glieder $= \delta$ ist, nur nicht gerade in der hier gesetzten Ordnung. Wenigstens zwey unter denselben müssen einander gleich seyn. Denn die Anfangsglieder der Particularreihen sind Ax^{3m}; aAx^{m+2}; bAx^{2m}; cAx^{m}; wozu noch die monomischen Größen, dx und e, kommen. Von diesen müssen wenigstens zwey das erste Glied der zusammengesetzten Reihe ausmachen, und die übrigen treten bey einem der folgenden Glieder ein.

IV. Weil die Reihe der Exponenten eine fallende ist, so müssen diejenigen unter den Exponenten, $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0, welche sich gleich gesetzt werden, nicht kleiner als die übrigen unter denselben seyn. Dieses erhält man nur, wenn man entweder setzt $3m = m+2$, welches $m = +1$ giebt; oder wenn man setzet $m+2 = 1$, woraus $m = -1$ folgt. In dem ersten Falle sind die Exponenten der Anfangsglieder, mit Einschluß der von den beiden Gliedern dx und e, diese: 3; 3; 2; 1; 1; 0. In dem andern Falle sind die Exponenten, und zwar nach ihrer Größe, 1; 1; 0; -1; -2; -3, wo die negativen Werthe für kleiner als jede positive angesehen werden.

V. In beiden Fällen machen die Exponenten der Anfangsglieder eine arithmetische Reihe mit dem Unterschiede, Eins, aus. Größer als Eins darf also δ nicht seyn, damit keiner jener Exponenten ausfalle; aber kleiner könnte δ seyn. Man nehme $\delta = 1$, unter der Voraussetzung, daß die Bestimmung der Coefficienten keine Wiedersprüche enthalte, so ist

theils $y = Ax + Bx^{0} + Cx^{-1} + Dx^{-2} + \text{etc.}$

theils $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$

wo aber beareiflich die Buchstaben, A, B, C, D, etc. in beiden Reihen nicht einerley Größe bezeichnen.

VI. Man nehme zuerst $y = Ax + Bx^0 + Cx^{-1} + \text{etc.}$ so ist

$$\begin{array}{lllll}
y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^2 & + 3A^2Cx & + 3A^2D & & \\
 & + 3AB^2 & + 6ABC & + \text{etc.} & \\
 & & + B^3 & & \\
xyx^2 = aA & + aB & + aC & + aD & + \text{etc.} \\
by^2 = & + bA^2 & + 2bAB & + 2bAC & \\
 & & & + bB^2 & + \text{etc.} \\
cy = & & + cA & + cB & + \text{etc.} \\
dx = & & + d & & \\
e = & & & + e &
\end{array}$$

Setzt man die Coefficienten der vereinigten Reihe $= 0$, so ist erstlich, $A^3 + aA = 0$, und $A = \pm\sqrt{-a}$. Ist a positiv, so kann die erste Reihe nicht Statt finden, nach welcher für ein unendlich großes x ein ebenfalls unendliches y, mit einem endlichen Verhältnisse, zugeordnet wäre. Ist aber a negativ, so giebt es zwey Fortschreitungen der y, in welchen diese ohne Ende wachsen, und zu dem gleichfalls ohne Ende zunehmenden x ein endliches Verhältniß haben. Zweytens ist $3A^2B + aB + bA^2 = 0$, also $B = -\frac{1}{2}b$. Drittens ist $3A^2C + 3AB^2 + aC + 2bAB + cA + d = 0$, oder $2A^2C - \frac{1}{4}Ab^2 + cA + d = 0$, also $C = \frac{b^2A - 4cA - 4d}{8A^2}$, welcher Werth gedoppelt ist, nachdem für A entweder $+\sqrt{-a}$ oder $-\sqrt{-a}$ gesetzt wird. Es ist nun

$$y = Ax - \tfrac{1}{2}b + \frac{b^2A - 4cA - 4d}{8A^2}x^{-1} + \text{etc.}$$

Daß δ nicht kleiner als 1, z. B. $= \frac{1}{2}$ gesetzt werden konnte, erhellt daher, daß bey dieser Annahme die Gleichung zur Bestimmung von B seyn würde, $3A^2B + aB = 0$, also $B = 0$, so daß $Bx^{\frac{1}{2}}$ wirklich wegfällt.

VII. Aus der zweyten Form für y, nämlich

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$$

wird

$$\begin{aligned}
ayx^2 &= aAx + aB + aCx^{-1} + aDx^{-2} + \text{etc.} \\
dx &= +d. \\
e &= \quad + e \\
cy &= \quad + cA. \quad + cB. \quad + \text{etc.} \\
by^2 &= \quad + bA^2. \quad + \text{etc.} \\
y^3 &= \quad + A^3 x^3.
\end{aligned}$$

Hieraus wird $A = -\frac{d}{a}$; $B = -\frac{e}{a}$; $C = -\frac{cd}{aa}$;

$D = \frac{ce}{aa} - \frac{bdd}{a^3}$ etc. also ist

$$y = -\frac{d}{a}x^{-1} - \frac{e}{a}x^{-2} + \frac{cd}{aa}x^{-3} + \text{etc.}$$

Diese Reihe giebt die dritte Fortschreitung der y, die immer möglich bleibt, wenn auch die beiden in VI. unmöglich sind. Denn y hat als Wurzel einer cubischen Gleichung wenigstens einen möglichen Werth. Aber auch nicht mehr als drey, und deshalb wird A hier durch eine einfache Gleichung gefunden. Für sehr große x ist y sehr klein, und verschwindet, wenn x unendlich groß genommen wird.

VIII. Um eine steigende Reihe für y zu erhalten, nämlich $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} + \text{etc.}$ muß man unter den Exponenten der Anfangsglieder und der Glieder ohne y, nämlich $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0, wenigstens zwey einander gleich setzen, so daß sie nicht größer seyn als die Werthe der übrigen, die sich aus dem Werthe von m ergeben. Dieses läßt sich nicht anders bewerkstelligen als wenn $m = 0$ gesetzt wird. Dadurch werden jene Exponenten folgende: 2; 0; 0; 1; 0. Diese sind Glieder der arithmetischen Reihe 0; 1; 2; etc. Man darf also δ nicht größer als 1 setzen. Gebrochne Exponenten hat man nicht nöthig anzunehmen. Man setze demnach

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

so ist

$$\begin{array}{lllll}
y^3 & = & A^3 + 3A^2Bx & + 3A^2Cx^2 & + \text{etc.} \\
 & & & + 3AB^2. & \\
by^2 & = & bA^2 + 2bAB. & + 2bAC. & + \text{etc.} \\
 & & & + bB^2 \quad . & \\
cy & = & cA + cB \quad . & + cC \quad . & + \text{etc.} \\
e & = & e & & \\
dx & = & + d \quad . & & \\
ayx^2 & = & & + aA \quad . & + \text{etc.}
\end{array}$$

Hier ist A die Wurzel der cubischen Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = 0$, und hat wenigstens einen möglichen Werth. Ferner ist $B = -\frac{d}{3A^2 + 2bA + c}$, und

$$C = -\frac{3AB^2 + bB^2 + aA}{3A^2 + 2bA + c}.$$

Hat A drey mögliche Werthe, so haben B, C, etc. auch drey Werthe, und es sind alsdann drey verschiedene Fortschreitungen der Größe y. Hat A nur einen möglichen Werth, so haben B, C, etc. auch nur einen Werth. Diese Form ist für unendlich große x nicht anwendbar, und daher auch nicht für beträchlich große.

IX. Wenn $3A^2 + 2bA + c$ nicht $= 0$ ist, so ist δ richtig $= 1$ gesetzt. Denn wollte man δ kleiner, z. B. $= \frac{1}{2}$ setzen, so würde dieses, da dx nun in das dritte Glied der Totalreihe käme, $B = 0$ geben, welches also wieder auf die Annahme $\delta = 1$ zurückführte. Allein, wenn neben jener cubischen Gleichung in VIII. noch die quadratische, $3A^2 + 2bA + c = 0$, Statt hat, so kann die Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 + \text{etc.}$ mit der beiden Gleichungen für A gemeinschaftlichen Wurzel nicht angewandt werden, sondern dx muß erst bey dem dritten Gliede der zusammengesetzten Reihe ein-

treten. Man setze nun $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \text{etc.}$ und es ist

$$
\begin{array}{lllll}
y^3 = A^3 & + 3A^2Bx^{\frac{1}{2}} & + 3A^2Cx & + 3A^2Dx^{\frac{3}{2}} & \\
 & + 3AB^2 & + 6ABC & & + \text{etc.} \\
 & & + B^3 & & \\
by^2 = bA^2 & + 2bAB & + 2bAC & + 2bAD & \\
 & + bB^2 & + 2bBC & & \\
cy^2 = cA & + cB & + cC & + cD & + \text{etc.} \\
e = e & & & & \\
dx = & & + d & & \\
ayx^2 = & & & & + \text{etc.}
\end{array}
$$

Da $3A^2 + 2bA + c = 0$ ist, so ist der Coefficient des zweyten Gliedes der zusammengesetzten Reihe für sich $= 0$, und der Coefficient des dritten ist $3AB^2 + bB^2 + d = 0$, da der in C multiplicirte Theil $= 0$ ist. Dieses giebt

$$B^2 = -\frac{d}{3A+b}, \text{ und } B = \pm\sqrt{\frac{-d}{3A+b}},$$

wo die Werthe des Zählers und Nenners entgegengesetzt seyn müssen, damit B einen möglichen Werth erhalte. Der Coefficient des vierten Gliedes in der zusammengesetzten Reihe ist $= 6ABC + B^3 + 2bBC$, also ist $C = -\frac{B^2}{6A+2b}$. Die folgenden Coefficienten mögen hier unberechnet gelassen werden.

X. Wenn $3A^2 + 2bA + c = 0$ ist, so hat die cubische Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = 0$ zwey gleiche Wurzeln (Gleichung, IX.). Die Werthe von y bilden demnach drey Fortschreitungen, von welchen, für $x = 0$, zwey ein gemeinschaftliches Glied haben. Für ein an 0 gränzendes x, positives oder negatives, haben diese beiden Fortschreitungen wieder verschiedene Glieder. Die erstere Reihe für y, in welcher der Unter-

schied der Exponenten $= 1$ ist, gäbe aber nur zwey Werthe für y, da A nur zwey verschiedene Werthe hat. Für denjenigen Werth von A, der eine einzelne Wurzel der cubischen Gleichung für A, und also nicht von der quadratischen ist, giebt die Reihe Werthe von y, die in die Fortschreitung gehören, in welcher jener Werth von A für $x = 0$ Statt hat. Aber für die beiden gleichen Werthe von A, als Doppelwurzel der cubischen Gleichung, kann die Reihe nicht verschiedene Fortschreitungen der y angeben. Für diese ist eine andere Form der Reihe erforderlich, die zwey Werthe von B enthalte. Diese sind in dem gegenwärtigen Falle gleich und entgegengesetzt, so daß für sehr kleine x die Glieder der beiden Fortschreitungen fast gleichviel auf entgegengesetzte Art von dem gemeinschaftlichen Gliede sich entfernen, in dem das Glied Cx in Betracht der Potenz x viel kleiner ist als das Glied $Bx^{\frac{1}{2}}$.

XI. Exempel. Es sey $y^3 + 4yx^2 - 5y^2 + 7y + 24x - 3 = 0$. Die steigenden Reihen zu finden, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ suche man zuerst die Wurzeln der Gleichung, $A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0$. Diese sind $+1$; $+1$; $+3$. Setzt man $A = 3$, so ist $B = -6$; $C = -26$, und $y = 3 - 6x - 26x^2 + \text{etc.}$ Da $3A^2 - 10A + 7 = 0$ ist für $A = 1$, so sind die beiden andern aufsteigenden Reihen von der Form $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + \text{etc.}$ und es ist $B^2 = +12$; $C = +3$, so daß $y = 1 \pm \sqrt{12x} + 3x + \text{etc.}$

XII. Wenn außer der cubischen und quadratischen Gleichung für A noch die einfache, $3A + b = 0$, Statt hat, so kann dx erst mit dem vierten Gliede der zusammengesetzten Reihe eintreten, und die Form der Reihe für y ist nun $y = A + Bx^{\frac{1}{3}} + Cx^{\frac{2}{3}} + Dx + Ex^{\frac{4}{3}} + Fx^{\frac{5}{3}} + Gx^2 + \text{etc.}$ In diesem Falle hat die cubische Gleichung für A drey gleiche Wurzeln, jede $= -\frac{1}{3}b$, oder es ist $(A + \frac{1}{3}b)^3 = 0$.

47. Die Verwandlung einer ungesonderten Function in eine gesonderte geschieht nicht sowohl, um für irgend ein x den Werth von y zu erhalten, als nur die Form von y für sehr große und sehr kleine x zu bestimmen. Es würde oft sehr mißlich seyn, die Quantität von y selbst auf diesem Wege erfahren zu wollen. Die Folge der y, für welche eine Reihe die Werthe angeben soll, kann innerhalb zweyer Glieder eingeschlossen seyn, deren zugehörige x nur wenig von einander verschieden sind. Die fallenden Reihen geben zu erkennen, wie viele Fortschreitungen, der y sich ins Unendliche erstrecken, ob die Werthe der y für unendlich große x gegen diese ein endliches oder ein unendliches Verhältniß haben, und wie die Annäherung zu dem Gränzverhältnisse beschaffen ist. Dieses dient zur Unterscheidung der verschiedenen Gattungen einer ungesonderten Function eines gegebenen Grades. Die steigenden Reihen dienen als Differenzformeln, um die endlichen Veränderungen der y für kleine x anzugeben. Dadurch ergeben sich die besondern Beschaffenheiten einer Function an der Gränze der positiven und negativen x. Ist x eine nicht kleine Größe, so muß dafür eine andere $z \pm k$ gesetzt werden, wo z klein genug genommen werden mag.

48. Das erste Glied der Reihe bequem zu finden hat Newton eine geometrische Construction angegeben, die unter dem Namen, Newtonisches Parallelogramm, bekannt ist, s. den Artikel, der davon handelt.

In dem Artikel, krumme Linien, wird die Natur der ungesonderten Functionen durch die geometrische Darstellung der veränderlichen Größen, als Coordinaten an einer krummen Linie, vieles Licht erhalten.

49. Lacroix giebt in seiner Differential- und Integralrechnung, §. 119. ein allgemeines directes Verfahren an, die Werthe des Exponenten in dem ersten Gliede der Reihe Ax^m, zu bestimmen, welches von La Grange herrührt. Es ist aber die Erklärung desselben etwas zu umständlich, daher es hier nicht Platz findet. Das hier gewiesene Verfahren wird das allgemeinere gut erläutern. Es werden kaum Fälle eintreten, wo man nicht durch Ver-

suche die Werthe von dem Exponenten leicht sollte bestimmen können. Lacroix zeigt ferner, wie man die folgenden Glieder der Reihe für y bestimmt. Dieses leistet er auf eine andere Art als hier geschehen ist. Er bemerkt auch, daß die Größe y durch einen Kettenbruch sich darstellen läßt.

Werth einer gebrochnen Function, deren Zähler und Nenner = o gesetzt wird.

50. Es seyn φx und ψx Functionen einer veränderlichen x, die für einen gewissen Werth von x jede = o werden, es ist die Frage, was bey dieser Annahme der Werth des Bruches $\frac{\varphi x}{\psi x}$ ist.

Man gebe der veränderlichen Größe zwey Werthe, deren einer durch x, der andere durch $x + u$ bezeichnet werde, und entwickele die Functionen $\varphi(x + u)$ und $\psi(x + u)$. Aus Differenzenrechnung (17.) ist

$$\varphi(x+u) = \varphi x + pu + \tfrac{1}{2}qu^2 + \tfrac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$$

wo p der Gränzquotient von $\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$, q derselbe von $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^2\varphi x}{\Delta x^2}$; r derselbe von $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^3\varphi x}{\Delta x^3}$ ist. Oder es ist

$$p = \frac{\partial\varphi x}{\partial x};\ q = \frac{\partial^2\varphi x}{\partial x^2};\ r = \frac{\partial^3\varphi x}{\partial x^3},\ \text{etc.}$$

s. Differenzenrechnung, 38.

Auf gleiche Art ist

$$\psi(x+u) = \psi x + p'u + \tfrac{1}{2}q'u^2 + \tfrac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}$$

wo $p' = \frac{\partial\psi x}{\partial x}$; $q' = \frac{\partial^2\psi x}{\partial x^2}$; $r' = \frac{\partial^3\psi x}{\partial x^3}$; u. s. f. sind.

Dadurch ist

$$\frac{\varphi(x+u)}{\psi(x+u)} = \frac{\varphi x + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}}{\psi x + p'u + \frac{1}{2}q'u^2 + \frac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}}$$

Nun sey, wenn $x = a$ genommen wird, sowohl $\varphi a = o$ als $\psi a = o$, so ist

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{p + \frac{1}{2}qu + \frac{1}{6}ru^2 + \text{etc.}}{p' + \frac{1}{2}q'u + \frac{1}{6}r'u^2 + \text{etc.}},$$

nachdem Zähler und Nenner durch u dividirt sind. Setzt man nun $u = o$, so wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{p}{p'} = \frac{\partial\varphi x : \partial x}{\partial\psi x : \partial x},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist.

Es kann sich ereignen, daß für $x = a$, sowohl p als $p' = o$ sind. Alsdann ist

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{6}ru + \text{etc.}}{\frac{1}{2}q' + \frac{1}{6}r'u + \text{etc.}},$$

$$\text{und } \frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{q}{q'} = \frac{\partial^2\varphi x : \partial x^2}{\partial^2\psi x : \partial x^2},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist.

Wären für $x = a$, auch q und q' jedes $= o$, so wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{r}{r'} = \frac{\partial^3\varphi x : \partial x^3}{\partial^3\psi x : \partial x^3}.$$

Auf solche Art erhält man zuletzt den gesuchten Werth des Quotienten, der entweder endlich ist, oder auch Null, oder unendlich groß seyn kann.

51. In dem Artikel, berührende Linie, (24 — 26.), ist schon eine Anwendung dieser Aufgabe auf die Bestimmung der Subtangenten an den Doppelpuncten oder vielfachen Puncten einer Curve gemacht worden; auch in den Interpolations-Formeln, Artikel, Einschalten, 36 – 38. Hier wollen wir auch noch davon Gebrauch machen, rationale Brüche in einfache zu zerlegen.

52. Es seyn M und N ganze rationale Functionen von x, und $N = (x - \alpha) S$. Der Bruch $\frac{M}{N}$ werde zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$, so daß $\frac{M}{N} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$. Also ist $M = AS + P(x - \alpha)$, und $M - AS$ ist durch $x - \alpha$ theilbar, da P eine ganze Function von x ist. Folglich wird $M - AS = 0$, wenn darin $x = \alpha$ gesetzt wird, und es ist bey dieser Annahme $A = \frac{M}{S}$, oder $A = \frac{M(x-\alpha)}{N}$. Aber für $x = \alpha$ sind Zähler und Nenner $= 0$. Darum ist $A = \frac{\partial . M(x-\alpha)}{\partial N} = \frac{(x-\alpha)\partial M + M\partial x}{\partial N}$, wo $x = \alpha$ zu setzen ist. Dadurch wird $A = \frac{M\partial x}{\partial N}$, worin $x = \alpha$ zu setzen ist.

53. Diesen Ausdruck für A erhält man auch auf folgende Art. Da $A = \frac{M}{S}$, wenn $x = \alpha$ genommen wird, so ist auch $A = \frac{M\partial x}{S\partial x}$, bey derselben Annahme. Nun ist $\partial N = S\partial x + (x - \alpha)\partial S$, und für $x = \alpha$, ist $\partial N = S\partial x$, folglich $A = \frac{M\partial x}{\partial N}$, wofern nur $x = \alpha$ genommen ist.

54. Exempel. Es sey wie in (23.)

$$\frac{M}{N} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$

wo die Größen, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ statt p, q, r, s, in (23.) gesetzt sind, um Verwechslung mit den in (50.)

gebrauchten Bezeichnungen zu verhüten. Es ist, wenn $(x-\beta)\ x-\gamma\ (x-\delta) = S$ gesetzt wird,

$$\partial N = S\partial x + (x-\alpha)\partial S, \text{ oder}$$

$$\partial N = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\partial x + (x-\alpha)\partial S.$$

Setzt man $x = \alpha$, so wird

$$\partial N = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\partial x.$$

In dem Zähler M gleichfalls $x = \alpha$ gesetzt, wird der Zähler des partiellen Bruchs, dessen Nenner $x - \alpha$ ist, oder

$$A = \frac{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

übereinstimmig mit dem in (23) gefundenen Werthe von A.

55. Der Nenner des zu zerlegenden Bruchs enthalte einen quadratischen Factor, $(x-\alpha)^2$, oder es sey $\frac{M}{N} = \frac{M}{(x-\alpha)^2 S}$. Er werde zerlegt in die drey Brüche, $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$, wo A und B bestimmte Größen sind, so ist

$$M = AS + BS(x-\alpha) + P(x-\alpha)^2,$$

und

$$M - AS - BS(x-\alpha) = P(x-\alpha)^2.$$

Da P eine ganze Function ist, so ist der Theil linker Hand durch $(x-\alpha)^2$ theilbar, also enthält $M-AS$ den Factor $x-\alpha$. Dadurch wird $A = \frac{M}{S}$, für $x-\alpha$, oder es ist $A = \frac{M(x-\alpha)^2}{N}$. Hier sind Zähler und Nenner $= 0$, für $x = \alpha$, also ist $A = \frac{\partial . M(x-\alpha)^2}{\partial N}$. Beyde Differentiale sind wieder $= 0$ für $x = \alpha$. Differentiirt man

aufs neue, so wird erhalten $A = \frac{\partial^2 . M(x-\alpha)^2}{\partial^2 N}$ für $x = \alpha$, das ist, $A = \frac{2 M \partial x^2}{\partial^2 N}$ oder $A = \frac{M}{S}$, wie schon gefunden ist.

Um B zu erhalten, bemerke man, daß $\frac{M - AS}{x-\alpha} - BS$ durch $x - \alpha$ theilbar ist, also für $x = \alpha$ verschwindet, so daß $B = \frac{M - AS}{(x-\alpha)S}$ ist für $x = \alpha$. Da der Zähler den Factor $x - \alpha$ enthält, so verschwindet derselbe, wie der Nenner für $x = \alpha$, also ist $B = \frac{\partial M - A \partial S}{S \partial x}$, wo $x = \alpha$ zu nehmen ist. Oder da $A = \frac{M}{S}$, bey derselben Annahme, so ist $B = \frac{S \partial M - M \partial S}{S^2 \partial x}$ das ist, $B = \frac{1}{\partial x} \partial . \frac{M}{S}$.

55. Exempel. Es sey $\frac{M}{N} = \frac{a x^2 + b x + c}{(x-\alpha)^2 (x-\beta)}$, so ist erstlich $A = \frac{a \alpha^2 + b \alpha + c}{\alpha - \beta}$. Zweytens ist $\partial . \frac{M}{S} = \frac{a x^2 - 2 a \beta x - b \beta - c}{(x-\beta)^2} \partial x$ und $B = \frac{a \alpha^2 - 2 a \beta \alpha - b \beta - c}{(\alpha - \beta)^2}$, übereinstimmig mit (29.).

56. Euler trägt in dem zweyten Theile seiner Differentialrechnung, Cap. XVIII. de usu calculi differentialis in resolutione fractionum, diese Methode vor, und giebt zugleich eine wichtige Ergänzung zu der in der Introductione in Anal. Infin. abgehandelten Lehre von der Zerlegung der Brüche. Durch die Zerlegung solcher, die im Nenner trinomische nicht zerlegbare Factoren, nämlich von der Form $ff - 2fgx \cos \varphi + ggxx$, enthalten. Diese schwe-

rere Untersuchung werden Geübte besser aus jenem Werke kennen lernen, als es hier aus einem unvollständigen Auszuge möglich wäre.

57. Der erste, welcher den Werth eines Bruches bestimmte, der bey einer gewissen Annahme der darin enthaltenen veränderlichen Größe $= \frac{0}{0}$ wird, ist Joh. Bernoulli. Er schätzte diese Auflösung so hoch, daß er die Aufgabe den französischen Mathematikern als ein Räthsel vorlegte. Sie sollten angeben, was der Werth des Bruches $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ ist, wenn $x = a$ gesetzt wird. Da sie auf die Anwendung der Differentialrechnung nicht dachten, so konnten sie die Frage nicht beantworten. Endlich ließ er sich bewegen, ihnen seine Auflösung mitzutheilen. Seine Methode hat hernach l'Hopital in der Analyse des infiniment petits, §. 163 vorgetragen. Joh. Bernoulli selbst fügt noch eine wichtige Ergänzung bey, für den Fall, da die Differentialquotienten im Zähler und Nenner selbst Null werden. Acta Erud. 1704. Opp. T. I. nr. 71. An beiden Stellen werden nach damahliger Gewohnheit krumme Linien zu der Auflösung angewandt. Der Werth des angeführten Bruchs für $x = a$ ist $= \frac{16}{9}a$. Man sehe auch Saurins Aufsätze in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1716 und 1723.

Functionalgröße ist diejenige veränderliche Größe, aus welcher eine andere zusammengesetzt wird, mit oder ohne Zuziehung gegebener Größen.

Functionalzeichen ist das Buchstabenzeichen, welches der Functionalgröße vorgesetzt wird, und mit dieser in Verbindung die Function bedeutet.

Fundamentalabstand, s. Perspectiv.

Funfzehneck, s. Vieleck, ordentliches.