W.

Wahlsatz oder willkührlicher Satz ist ein Satz, in welchem von willkührlichen Einrichtungen, Bezeichnungen und dergl., wie z. B. von den bei dem Längen- und Winkelmaaße üblichen Eintheilungen und Bezeichnungen, Nachricht gegeben wird. Die Benennung ist übrigens nicht sehr in Gebrauch gekommen.

Wahre Wurzeln einer Gleichung, s. Gleichung (15.).

Wahrscheinlicher Fehler, s. Wahrscheinlichkeitsrechnung (89.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi. Calcul des probabilités.) ist die Wissenschaft von der Berechnung der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

1. Die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität eines Ereignisses wird bestimmt durch das Verhältniß der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle, d. i. der Fälle, welche dasselbe wirklich herbeiführen, zu der Anzahl aller möglichen Fälle, vorausgesetzt, daß alle Fälle gleich möglich sind; oder, was dasselbe ist, die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird, unter derselben Voraussetzung, dargestellt durch einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle, und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle ist. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel eine bestimmte Anzahl von Augen zu werfen, $= \frac{1}{6}$, da die Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle $= 1$, die Anzahl aller möglichen Fälle $= 6$ ist. Mit zwei Würfeln, die wir durch A, B bezeichnen wollen, sind offenbar folgende verschiedene Würfe möglich:

A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Also ist die Anzahl aller möglichen Würfe = 36. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 1 und 2 zu werfen, ist $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit aber, mit zwei Würfeln einen bestimmten Pasch zu werfen, $= \frac{1}{36}$.

2. Bezeichnen wir also überhaupt die Anzahl der einem Ereignisse günstigen Fälle durch n, die Anzahl aller möglichen Fälle durch N, und die mathematische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch w; so ist

$$w = \frac{n}{N},$$

wobei aber, wie sich von selbst versteht, vorausgesetzt werden muß, daß alle Fälle an sich gleich möglich sind. Je größer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältniß zu der Anzahl aller Fälle ist, desto größer ist w, und desto größer ist in der That auch die Wahrscheinlichkeit, daß das in Rede stehende Ereigniß wirklich eintreffen wird. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist das bestimmte Maaß dessen, was man im gemeinen Leben Wahrscheinlichkeit nennt.

3. Die ganze Schwierigkeit in der Lehre von der Berechnung der Wahrscheinlichkeit kommt, wie man aus der so eben gegebenen Definition sieht, auf die Bestimmung der Anzahl aller einem gewissen Ereignisse günstigen, und der Anzahl aller möglichen Fälle, welche bei diesem Ereignisse überhaupt eintreten können, zurück, eine Bestimmung, die in der That häufig beträchtlichen Schwierigkeiten unterworfen ist. Die combinatorische Analysis leistet dabei vortreffliche Dienste, und wir sind berechtigt, die-

selbe hier aus den ihr gewidmeten Artikeln dieses Wörterbuchs als bekannt vorauszusetzen. Eigentlich unterscheidet man aber zwei Arten der Wahrscheinlichkeit. Läßt sich nämlich die Anzahl aller möglichen sowohl, als auch der günstigen Fälle auf rein wissenschaftlichem Wege, aus Gründen mittelst demonstrirter Sätze bestimmen; so nennt man die entsprechende Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit aus Gründen oder Wahrscheinlichkeit a priori, und nur diese Art der Wahrscheinlichkeit gehört in den Kreis dieser ersten Abtheilung unsers Wörterbuchs. Fehlt es aber bei der erwähnten Bestimmung an sichern Regeln, statt deren man Erfahrungen zu Hülfe nehmen muß, so erhält man eine Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung oder Wahrscheinlichkeit a posteriori, wovon nur in den folgenden Abtheilungen dieses Werkes ausführlich gehandelt werden kann, obgleich auch schon, der Uebersicht wegen, in diesem Artikel Einiges über diesen wichtigen Gegenstand beigebracht werden soll. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori ist desto sicherer, je größer die Anzahl der zum Grunde gelegten Beobachtungen ist, vorausgesetzt, daß alle mit möglichst größter Genauigkeit angestellt sind. Hätte z. B. die Erfahrung gelehrt, daß von 100 gleich gut gebauten, gleich gut ausgerüsteten Schiffen, welche zu einer gewissen Jahreszeit von Amsterdam nach Petersburg seegelten, 5 Schiffbruch gelitten haben; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ähnliches Schiff, welches um dieselbe Jahreszeit nach Petersburg seegeln soll, verunglücken werde, $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, und diese Probabilität muß so lange beibehalten werden, bis neuere wiederholte Erfahrungen eine andere bestimmen. Dies ist ein einfaches Beispiel einer Wahrscheinlichkeit a posteriori.

4. Ist $n = N$ (2.), so wird $w = 1$, und in diesem Falle sagt man, es sey Gewißheit vorhanden. Die Einheit ist also das Symbol der Gewißheit. Die Anzahl der günstigen Fälle ist hier der Anzahl aller möglichen Fälle gleich, und das in Rede stehende Ereigniß muß also nothwendig eintreffen, immer unter der Voraussetzung, daß

alle Fälle gleich möglich sind. Ist $w = \frac{1}{2}$, so nennt man das Ereigniß zweifelhaft; ist $w > \frac{1}{2}$, so heißt es schlechthin im gemeinen Leben wahrscheinlich, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

5. Was der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zur Gewißheit fehlt, heißt die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, welche in der Folge immer durch w_1 bezeichnet werden soll, so daß also

$$w + w_1 = 1,$$

$$w_1 = 1 - w = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N - n}{N};$$

und es ist folglich, da $N - n$ offenbar die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen Fälle ist, w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen desselben. Setzen wir $N - n = m$; so ist immer

$$n + m = N, \; w = \frac{n}{N}, \; w_1 = \frac{m}{N};$$

$$w + w_1 = \frac{n}{N} + \frac{m}{N} = 1;$$

$$w = \frac{n}{n+m}, \; w_1 = \frac{m}{n+m}.$$

Zuweilen ist es leichter, statt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unmittelbar zu bestimmen, seine entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit aufzusuchen.

6. Von der bisher betrachteten, oder der absoluten, Wahrscheinlichkeit ist verschieden die relative. Spielen z. B. zwei Personen mit zwei Würfeln unter der Bedingung mit einander, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der erste gewinnen soll, wenn er 7, der zweite, wenn er 4 wirft; so kann man fragen, welche Wahrscheinlichkeit jeder Spieler zu gewinnen habe. Nach der Tabelle in (1.) kann mit zwei Würfeln 7 auf 6, 4 auf 3 verschiedene Arten geworfen werden. Daher ist, weil alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, die Anzahl aller möglichen Fälle $= 9$, die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers also $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, die des zweiten $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, und ihre Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen verhalten sich $= 2:1$. Ist überhaupt die Anzahl aller möglichen Fälle,

wie immer, $= N$, die Anzahl der einen Art von Fällen unter diesen $= n'$, die Anzahl der andern Art $= n''$; so ist, indem alle übrigen Fälle unberücksichtigt bleiben, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falls der ersten Art

$$= \frac{n'}{n' + n''},$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles der zweiten Art unter derselben Bedingung

$$= \frac{n''}{n' + n''}.$$

Dies sind die relativen Wahrscheinlichkeiten. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf die beiden Arten von Fällen sind:

$$w' = \frac{n'}{N} \text{ und } w'' = \frac{n''}{N}.$$

Also

$$\frac{n'}{n' + n''} = \frac{n' : N}{(n' : N) + (n'' : N)} = \frac{w'}{w' + w''},$$
$$\frac{n''}{n' + n''} = \frac{n'' : N}{(n' : N) + (n'' : N)} = \frac{w''}{w' + w''},$$

so daß folglich die relative Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles der einen oder andern Art erhalten wird, wenn man die entsprechende absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten beider Arten dividirt.

7. Vorzüglich ist zwischen einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden, jenachdem nur ein Ereigniß, oder mehrere in Betracht kommen. In letzterer Beziehung sind wieder mehrere Fälle zu unterscheiden, die wir nach der Reihe durchgehen wollen.

8. Sey zunächst die Probabilität zu bestimmen, daß unter mehrern Ereignissen irgend ein unbestimmtes derselben eintreffe.

Die Anzahl aller möglichen Fälle sey $= N$, die Mengen der den einzelnen Ereignissen günstigen Fälle seyen

n', n'', n''', n'''', ..., und ihre einzelnen Probabilitäten w', w'', w''', w'''', ...; so ist

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N},\ w'''' = \frac{n''''}{N}, \ldots.$$

Die Anzahl aller günstigen Fälle, in Bezug auf die vorgelegte Aufgabe, ist =

$$n = n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots,$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse =

$$w = \frac{n}{N} = \frac{n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots}{N}$$

$$= \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} + \frac{n'''}{N} + \frac{n''''}{N} + \ldots.$$

Also $w = w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots$, d. i. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse ist der Summe der Probabilitäten der einzelnen Ereignisse gleich.

Mit einem Würfel eine bestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$. Also die Wahrscheinlichkeit, irgend eine unbestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen, $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$, d. i. Gewißheit, wie es auch seyn muß.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen, ist $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und die Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, $= \frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 7 oder 8 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $= \frac{4}{36}$. Also die Wahrscheinlichkeit, 7, 8 oder 9 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, 8 oder 9 zu werfen, dagegen $= \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Seyen w, w', w'', w''', ... wieder die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen verschiedener Ereignisse, w_1 aber sey die Wahrscheinlichkeit, daß keines dieser Ereignisse eintrifft; so ist immer

$$w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1 = 1.$$

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eines der gegebenen Ereignisse eintrifft, ist nach dem Obigen

$$= w + w' + w'' + w''' + \ldots,$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß keines eintrifft, nach der Voraussetzung $= w_1$. Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß entweder eines oder keines eintrifft, nach dem Obigen

$$= w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1.$$

In diesem Falle findet aber offenbar Gewißheit statt; und es ist also (4.)

$$w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1 = 1.$$

Dies ist eine Erweiterung des Princips von den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten (5.).

9. Sind wieder w', w'', w''', w'''', ... die Wahrscheinlichkeiten mehrerer einzelnen Ereignisse; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß alle diese Ereignisse zusammentreffen. Werfen z. B. zwei Personen zugleich aus einem Becher jede zwei Würfel auf den Tisch; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die eine 8, die andere 9 Augen werfe.

Man habe zuerst bloß zwei Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten

$$w' = \frac{n'}{N'},\ w'' = \frac{n''}{N''}$$

seyen. Die Anzahl aller möglichen Fälle in Bezug auf das erste Ereigniß ist $= N'$, in Bezug auf das zweite $= N''$. Jeder der ersten Fälle kann mit jedem der zweiten Fälle zusammentreffen, und in Bezug auf das Zusammentreffen beider Ereignisse ist also die Anzahl aller möglichen Fälle offenbar $= N'N''$, und auf dieselbe Art in derselben Beziehung die Anzahl der günstigen Fälle $= n'n''$, die Wahrscheinlichkeit also, daß beide Ereignisse zusammentreffen werden, $=$

$$w = \frac{n'n''}{N'N''} = \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w'w''.$$

Kommt noch ein drittes Ereigniß hinzu, dessen Probabilität $= w'''$ ist; so kann man das Zusammentreffen der beiden ersten Ereignisse als ein einzelnes Ereigniß, dessen Probabilität $= w'w''$ ist, ansehen, und die Probabilität,

daß alle drei Ereignisse zusammen eintreffen werden, ist also, wie vorher, =

$$w = w'w''.w''' = w'w''w'''.$$

So weiter gehend schließt man leicht, daß die Probabilität für das Zusammentreffen aller in Rede stehenden Ereignisse =

$$w = w'w''w'''w''''w''''' \ldots,$$

d. i. dem Producte der Probabilitäten aller einzelnen Ereignisse gleich ist.

In Bezug auf obiges Beispiel sind die beiden Probabilitäten $= \frac{5}{36}$, und $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; also die Probabilität für das zusammengesetzte Ereigniß, d. i. das Zusammentreffen beider Ereignisse, $= \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{324}$.

Wenn A, B jeder zwei, C einen Würfel auf den Tisch wirft; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A einen Pasch, B keinen Pasch, und C sechs Augen wirft, $= \frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$.

10. Wird eine und dieselbe Handlung mehrere Male wiederholt; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten w', w'', w''', w'''', ... sind, hinter einander eintreten.

Die Anzahl aller möglichen Fälle sey $= N$, und

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N},\ w'''' = \frac{n''''}{N}, \ldots.$$

Man habe zuerst nur zwei Ereignisse, die hinter einander eintreten sollen; so ist die Anzahl aller möglichen Fälle, das zweite Ereigniß mag vor oder nach dem ersten eintreten, offenbar $= NN = N^2$, nach der Lehre von den Variationen. (S. diesen Artikel.) Da nun ferner jeder dem zweiten Ereignisse günstige Fall hinter jedem einzelnen, dem ersten günstigen, Falle eintreten kann; so ist die Anzahl der für das auf einander folgende Eintreffen beider Ereignisse günstigen Fälle $= n'n''$, und folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$w = \frac{n'n''}{N^2}.$$

Kommt noch ein drittes Ereigniß hinzu; so ist nach der

Lehre von den Variationen die Anzahl aller möglichen Fälle $= N^3$, und, da jeder der dem dritten Ereignisse günstigen Fälle hinter jedem einzelnen der Fälle, in welchen das erste und zweite Ereigniß auf einander folgen, eintreten kann, die Anzahl der günstigen Fälle $= n'n''n'''$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$w = \frac{n'n''n'''}{N^3}.$$

Ist die Anzahl der gegebenen Ereignisse $= x$; so schließt man hieraus leicht, daß überhaupt

$$w = \frac{n'n''n'''n'''' \ldots.}{N^x},$$

oder $w = w'w''w'''w'''' \ldots.$ Ist einer oder der andere der Brüche, durch welche die einzelnen Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden, vielleicht aufgehoben; so erhellet leicht, daß letztere Gleichung dennoch richtig bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= w' = \frac{n'}{N'}$ ist, xmal hinter einander eintrifft, ist =

$$w = w'^x = \left(\frac{n'}{N'}\right)^x.$$

Mit einem Würfel ein As zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel xmal hinter einander ein As zu werfen, ist $= (\frac{1}{6})^x$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei Mal hinter einander zwei Augen zu werfen, ist $= (\frac{1}{36})^2 = \frac{1}{1296}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, ist $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Viermal hinter einander mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, ist also die Wahrscheinlichkeit $= (\frac{1}{6})^4 = \frac{1}{1296}$, und viermal hinter einander einen bestimmten Pasch, z. B. zwei Sechsen, zu werfen, $= (\frac{1}{36})^4 = \frac{1}{1679616}$.

11. Wird ein und dieselbe Handlung zwei Mal verrichtet, und

$$w' = \frac{n'}{N}, \; w'' = \frac{n''}{N}$$

sind, indem N die Anzahl aller möglichen Fälle bezeichnet, die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse; so könnte man auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, dann doch das zweite eintrifft.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß eintrifft, ist $= w'$; also die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht eintrifft, $= 1 - w'$ (5.). Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß nicht, aber dann das zweite eintrifft, $= (1 - w')w''$ (10.). Demnach die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder dieses Ereigniß nicht, dann aber das zweite erfolgt, $= w' + (1 - w')w''$ (8.). Ist also w die gesuchte Probabilität; so ist

$$\begin{aligned} w &= w' + w'' - w'w'' \\ &= 1 - 1 + w'' + w' - w'w'' \\ &= 1 - (1 - w'') + w'(1 - w'') \\ &= 1 - (1 - w')(1 - w''), \end{aligned}$$

d. i. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder, wenn dies nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen, ist

$$\begin{aligned} &= 1 - (1 - \tfrac{4}{36})(1 - \tfrac{5}{36}) \\ &= 1 - \tfrac{32}{36} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{62}{81} \\ &= \tfrac{19}{81}. \end{aligned}$$

12. Hat man drei Ereignisse, deren Probabilitäten

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N}$$

sind; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, das zweite erfolgt, oder, wenn auch dies nicht der Fall wäre, doch das dritte eintrifft. Setzt man

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w'');$$

so erhellet leicht, wie vorher, daß

$$w = 1 - (1 - v)(1 - w''').$$

Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten

Wurfe 7, oder, wenn dies nicht eintrifft, im zweiten Wurfe 7, oder, wenn auch dies nicht eintreffen sollte, doch im dritten Wurfe 7 zu werfen, ist

$$v = 1 - (1 - \tfrac{6}{36})(1 - \tfrac{6}{36}) = \tfrac{11}{36};$$
$$w = 1 - (1 - \tfrac{11}{36})(1 - \tfrac{6}{36}) = \tfrac{91}{216}.$$

Eben so setze man bei vier Ereignissen auf ähnliche Art wie vorher

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$w = 1 - (1 - v')(1 - w'''''),$$

und bei fünfen:

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$v'' = 1 - (1 - v')(1 - w''''''),$$
$$w = 1 - (1 - v'')(1 - w''''''')$$

u. s. f. u. s. f.

13. Frägt man, um noch ein Beispiel zu dem Vorhergehenden zu geben, nach der Wahrscheinlichkeit, mit einem Thaler in zwei Würfen wenigstens einmal Münz (Schrift oder croix) zu werfen; so wirft man entweder das erste Mal Münz, oder das erste Mal nicht Münz und dann das zweite Mal Münz, oder endlich das erste Mal nicht Münz und dann auch das zweite Mal Unmünz (Wapen; pile.). Die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz zu werfen, ist ebenfalls $= \frac{1}{2}$, und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz, aber das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.), und demnach die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eins dieser beiden Ereignisse eintreffe, d. h. die Wahrscheinlichkeit, in einem der beiden Würfe Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Unmittelbar giebt dies auch die Formel in (11.):

$$w = 1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - (1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2})$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Eben dieses erhält man auch durch Aufzählung aller Fälle. Die verschiedenen Fälle sind nämlich: das erste Mal Münz,

das zweite Mal Münz; das erste Mal Münz, das zweite Mal Unmünz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Münz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Unmünz. Also sind überhaupt 4 Fälle möglich, und 3 derselben sind günstig, die Wahrscheinlichkeit also $= \frac{3}{4}$.

D'Alembert (Opuscules mathématiques. T. II. p. 20.) hat sich bei dieser an sich ganz leichten Aufgabe geirrt, indem er die gesuchte Wahrscheinlichkeit nur $= \frac{2}{3}$ findet. Denn, sagt er, trifft man das erste Mal Münz, so ist das Spiel geendet, trifft man aber das erste Mal Unmünz, so muß noch zum zweiten Male geworfen werden, in welchem entweder Münz oder Unmünz fällt, so daß also nur 3 Fälle möglich, 2 günstig sind, die Wahrscheinlichkeit also $= \frac{2}{3}$ ist. Man übersieht leicht, mit dem Obigen verglichen, das Irrige dieser Schlußart. Vorzüglich liegt der Irrthum darin, daß d'Alembert allen drei Fällen gleiche Möglichkeit beilegt (S. Laplace Théorie des probabilités. Trois. édit. p. VII.). Man sieht aber hieraus, wie behutsam man bei Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung seyn muß. Ueber das Spiel: Münz und Unmünz (Schrift und Wapen; croix ou pile) s. m. auch einen Aufsatz von Lambert in dem Archiv der Mathematik von Hindenburg. Heft 10. S. 216.

14. Ein zu erwartender ungewisser Gewinn ist offenbar desto größer, oder hat vielmehr desto mehr Werth, je größer die zu gewinnende Summe, und je größer die Wahrscheinlichkeit ist, ihn zu erhalten. Sind die Wahrscheinlichkeiten gleich, so stehen die zu erwartenden Gewinne offenbar in geradem Verhältniß der zu gewinnenden Summen, und eben so stehen bei gleichen Summen die zu erwartenden Gewinne in geradem Verhältniß der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erhalten. Sind also für die Summen und Wahrscheinlichkeiten

$$s, s', s; w, w', w'$$

die zu erwartenden Gewinne g, g', g''; so ist

$$g : g'' = w : w', \; g'' : g = s : s',$$

woraus durch Zusammensetzung:

$$g : g' = sw : s'w' .$$

Setzt man nun für $s' = 1$ und $w' = 1$ auch $g' = 1$; so erhält man

$$g = sw ,$$

d. h. die Größe des zu erwartenden Gewinnes ist dem Producte aus der zu gewinnenden Summe in die Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, gleich, den bei einer Summe $= 1$ mit der Gewißheit, sie zu erhalten, zu erwartenden Gewinn als Einheit angenommen.

Das Product sw nennt man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die mathematische Hoffnung oder die Erwartung (sors, lucrum). Die eigentliche Bedeutung dieses Ausdrucks erhellet aus dem Vorhergehenden.

15. Hängt der zu erwartende Gewinn von mehrern Ereignissen ab; so erhält man ihn, wenn die zu erwartende Summe mit der Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, bei jedem einzelnen Ereignisse multiplicirt wird, und die einzelnen Producte zusammenaddirt werden. Sind die zu erwartenden Summen und die entsprechenden Probabilitäten $s, w; s', w'; s'', w''; s''', w'''$; u. s. f.; so ist die mathematische Hoffnung

$$= sw + s'w' + s''w'' + s'''w''' + \ldots .$$

Spielen z. B. A und B Münz und Unmünz unter der Bedingung, daß A zwei Thaler erhält, wenn er auf den ersten Wurf Münz trifft, und fünf Thaler, wenn er nur erst das zweite Mal Münz wirft, so daß aber das Spiel als geendigt angesehen würde, wenn A schon das erste Mal gewönne; so ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht, aber das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich ist die Erwartung des $A = 2 . \frac{1}{2} + 5 . \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Soll aber das Spiel nur erst beim zweiten Wurfe geendigt seyn, so daß nämlich A sowohl beim ersten als auch beim zweiten Wurfe den festgesetzten Gewinn erhält, wenn er Münz trifft; so sind beide Würfe offenbar als zwei ganz

verschiedene Spiele zu betrachten, da der erste gar keinen Einfluß auf den zweiten hat, und die Wahrscheinlichkeit ist folglich in beiden Fällen $= \frac{1}{2}$, die Erwartung also $= 2 . \frac{1}{2} + 5 . \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

16. Verlust wird als negativer Gewinn betrachtet, und als solcher in die Rechnung eingeführt. Soll A 2 Thlr. gewinnen, wenn er das erste Mal Münz wirft, und 11 Thlr. verlieren, wenn er das zweite Mal Unmünz wirft, so daß aber das Spiel als beendigt angesehen wird, wenn A beim ersten Male gewinnt; so ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$, und, es nicht zu werfen, ebenfalls $= \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, das zweite Mal Unmünz zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz, und das zweite Mal Unmünz zu werfen, $= \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die Erwartung des A $= 2 . \frac{1}{2} - 11 . \frac{1}{4} = -1\frac{3}{4}$, die sich aber hier in die Furcht verwandelt, $1\frac{3}{4}$ Thlr. zu verlieren. Wird nur einmal geworfen, und unter der Bedingung gespielt, daß A 2 Thlr. gewinnt, wenn er Münz, 2 Thlr. verliert, wenn er Unmünz wirft; so ist seine Erwartung $= 2 . \frac{1}{2} - 2 . \frac{1}{2} = 0$, d. h., er hat eben so viele Hoffnung, 2 Thlr. zu gewinnen, als 2 Thlr. zu verlieren, wie sich auch von selbst versteht.

17. Die sich aus den eben erläuterten Regeln zur Bestimmung der mathematischen Hoffnung ergebenden Resultate scheinen zuweilen dem, was der gesunde Menschenverstand lehrt, zu widersprechen, welches zuerst an einem Probleme beobachtet worden ist, welches im Jahre 1713 dem Herrn von Montmort von Nicolas Bernoulli vorgelegt wurde (Essay d'Analyse sur les jeux de hazard. 2. éd. Paris. 1713. p. 402.), und nachher vorzüglich durch Daniel Bernoulli's Behandlung unter dem Namen Petersburger Problem in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung berühmt geworden ist. Wir wollen dasselbe hier unter folgender Form betrachten:

A und B spielen Münz und Unmünz (Schrift und Wapen) unter der Bedingung, daß A dem B zwei Du-

caten giebt, wenn der erste Wurf Münz ist, vier Ducaten, wenn erst der zweite Wurf Münz ist, acht Ducaten, wenn erst der dritte Wurf Münz ist, und so fort bis zum nten Wurfe. Wie groß ist die Erwartung von B, und was kann also B am Anfange des Spiels setzen?

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit in (10.), und die Erwartung des B nach (15.); so erhält man sehr leicht für letztere folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}.2 + \tfrac{1}{4}.4 + \tfrac{1}{8}.8 + \tfrac{1}{16}.16 + \ldots + \frac{1}{2^n}.2^n$$

d. i. $= n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß in keinem der n Würfe Münz fällt, ist $= \frac{1}{2^n}$, und es scheint also, daß obige Reihe eigentlich noch um ein Glied zu vermehren sey. Da aber dann B auch Nichts erhält; so ist das noch beizufügende Glied $= \frac{1}{2^n}.0 = 0$. Wir erwähnen dies, wenn es sich auch schon von selbst versteht, wegen des Folgenden. Ist also die Anzahl der einzelnen Spiele sehr groß oder gar unendlich; so könnte B auch eine sehr große oder eine unendliche Summe wagen. Wird dies aber wohl ein auch nur einigermaßen verständiger Spieler thun, und stimmt obiges Resultat auch nur im Entferntesten mit dem, was der gesunde Verstand augenblicklich lehrt, überein? Gewiß Niemand wird bei einem solchen Spiele auch nur eine kleine Summe wagen.

18. Mehrere Mathematiker, z. B. Buffon, Cramer, Fontaine, Beguelin (Mém. de Berlin. 1767.), Lichtenberg (Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiele zu heben. Göttingen 1770.), vorzüglich aber Daniel Bernoulli in der Abhandlung: Specimen theoriae novae de mensura sortis (Comm. Petrop. T. V. p. 175.), von welcher sich auch ein kurzer Auszug in dem Hamburgischen Magazin. Bd. I. 5. 1747. S. 73. befindet, haben die Beseitigung der erwähnten Schwierigkeit versucht. Wir wollen hier möglichst kurz Bernoulli's Theorie vorzüglich nach Laplace (a. a. O. p. 432.) erläutern.

19. Der Werth einer Summe Geldes kann in der Mathematik bloß nach ihrer absoluten Größe beurtheilt werden, ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche jene Summe besitzt, oder nicht besitzt. Daß aber z. B. ein Thaler für Jemanden, dessen Vermögen sich auf hundert Thaler beläuft, einen weit größern Werth haben muß, als für einen Millionair, wird von Niemand bezweifelt. Dies hat darauf geführt, zwischen dem physischen und moralischen Werthe einer Summe Geldes zu unterscheiden, indem man unter jenem den absoluten Werth derselben ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, unter diesem aber ihren Werth in Bezug auf ihren absoluten Werth und zugleich mit Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, versteht. Sogleich bietet sich aber hier die Frage dar, wie man den von tausenderlei Dingen abhängenden moralischen Werth einer Summe Geldes beurtheilen könne, und es fällt leicht in die Augen, daß, allgemeine Regeln hierzu zu geben, unmöglich ist, da die Interessen der einzelnen Personen so unendlich verschieden sind. Indeß hat folgende Hypothese Daniel Bernoulli's den meisten Beifall gefunden, und scheint sich in der That auch der Erfahrung am besten anzuschließen:

„Der moralische oder relative Werth einer unendlich „kleinen Summe steht in geradem Verhältnisse ihres abso„luten Werthes, und in umgekehrtem Verhältnisse des „ganzen Vermögens der dabei interessirten Person."

Bernoulli bemerkt zugleich, daß jeder Mensch, auch der ärmste, nach den gemeinen Begriffen, ein gewisses Vermögen besitze, welches bei den meisten allerdings in ihrem Fleiße bestehe. Wer durch Betteln sein Leben fristet, und dadurch jährlich 10 Ducaten erwirbt, sagt Bernoulli, wird nicht 50 Ducaten annehmen, unter der Bedingung, auf jene Art, und auf jede andere, sein Leben zu fristen, Verzicht zu leisten. Also jeder Mensch hat ein gewisses Vermögen; nur der so eben vor Hunger Sterbende hat absolut nichts.

20. Bezeichnet nun x den absoluten Werth, y den relativen oder moralischen Werth einer Summe Geldes, und x erleidet eine unendlich kleine Veränderung, die durch ∂x ausgedrückt wird, so drückt Laplace, dem obigen Principe gemäß, den relativen Werth von ∂x allgemein durch $\frac{k\partial x}{x}$, wo k eine Constante bezeichnet, aus. Dies ist folglich die Veränderung des moralischen Werthes, so daß also $\partial y = \frac{k\partial x}{x}$, woraus durch Integration:

$$y = k \log n x + \log n h ,$$

wenn wir die willkührliche Constante durch $\log n h$ ausdrücken. Diese Constante müßte durch einen Werth von y, welcher einem gegebenen Werthe von x entspricht, bestimmt werden.

Aus dem in (19.) Bemerkten erhellet, daß man x und y nie $= 0$, auch nie negativ, setzen kann, da jeder Mensch, selbst der Bettler und Schuldner, so lange er sein Leben fristet, ein gewisses Vermögen hat, oder wenigstens als ein solches habend zu betrachten ist.

21. Sey nun a das physische oder absolute (19.) Vermögen einer Person A, mit der Hoffnung, daß dasselbe eine der Veränderungen α, α', α'', α''', ..., welche auch null oder negativ seyn können, erleiden werde, und die Wahrscheinlichkeiten, daß diese Veränderungen statt finden, seyen respective w, w', w'', w''', ..., wo $w + w' + w'' + w''' + \ldots = 1$ zu setzen ist, wie aus der in (17.) wegen des der Reihe eigentlich noch beizufügenden Gliedes beigebrachten Bemerkung, da obige Veränderungen auch $= 0$ seyn können, und aus dem in (8.) am Ende Bewiesenen erhellet.

Das moralische Vermögen des A kann also, da das physische $a + \alpha$, $a + \alpha'$, $a + \alpha''$, ... werden kann, nach (20.) übergehen in:

$$k \log n (a+\alpha) + \log n h, k \log n (a+\alpha') + \log n h, k \log n (a+\alpha'') + \log n h, \ldots$$

und daß das moralische Vermögen einen dieser Werthe erhalten werde, dazu sind die Wahrscheinlichkeiten w, w', w'', ... vorhanden.

Die Summe

$$\begin{aligned} Y = \; & w\,\{k\log n(a+\alpha) + \log n\,h\} \\ & + w'\,\{k\log n(a+\alpha') + \log n\,h\} \\ & + w''\,\{k\log n(a+\alpha'') + \log n\,h\} \\ & + w'''\,\{k\log n(a+\alpha''') + \log n\,h\} \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$= kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots$$
$$+ (w+w'+w''+w'''+\ldots)\log n\,h$$
$$= kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots + \log n\,h$$

nennt Bernoulli mensura sortis, und Laplace (a. a. O. p. 433.) schlechthin fortune morale. Am schicklichsten scheint uns der Ausdruck: erwartetes moralisches Vermögen, den wir im Folgenden beibehalten wollen, da moralisches Vermögen, ohne Beisatz, nach dem Vorhergehenden eigentlich schon etwas anderes bedeutet. Bezeichnen wir nun das dem physischen Vermögen a, oder dem erwarteten moralischen Vermögen Y, entsprechende erwartete physische Vermögen durch X; so ist nach (20.)

$$Y = k\log n X + \log n\,h\,,$$

und folglich, wenn man beide Ausdrücke von Y einander gleich setzt, nach leichter Reduction:

$$\log n X = w\log n(a+\alpha) + w'\log n(a+\alpha') + w''\log n(a+\alpha'') + \ldots,$$
$$X = (a+\alpha)^{w}.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots.$$

ein Ausdruck für das dem physischen Vermögen a entsprechende erwartete physische Vermögen. Die Differenz $X - a$ nennt Laplace espérance morale, d. i. moralische Hoffnung, deren Ausdruck also

$$(a+\alpha)^{w}.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots. - a$$

ist. Der Ausdruck der mathematischen Hoffnung ist (15.)

$$\alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots.$$

Die beständige Größe k, welche Laplace beifügt, verschwindet, wie zu erwarten war.

22. Entwickelt man $X - a$ nach Potenzen von α, α', α'', α''', ..., und behält bloß die ersten Potenzen dieser Größen bei; so erhält man

$$\begin{aligned} X - a = \; & aw + w' + w'' + w''' + \ldots. \\ & + aw + w' + w'' + w''' + \ldots - 1\,(w\alpha + w'\alpha' + w''\alpha'' + w'''\alpha''' + \ldots) \\ & + \ldots\ldots - a. \end{aligned}$$

Aber

$$w + w' + w'' + w''' + \ldots = 1, \quad w + w' + w'' + w''' + \ldots - 1 = 0.$$

Also

$$X - a = \alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots$$

wo alle folgenden Glieder α, α', α'', ... in höhern Dimensionen als die ersten enthalten. Die moralische Hoffnung nähert sich also der mathematischen desto mehr, je kleiner α, α', α'', ... sind, und beide sind einander gleich zu setzen, wenn diese Größen als unendlich klein angenommen werden.

23. Bernoulli bringt noch verschiedene Anwendungen seiner Sätze bei, und Laplace betrachtet dieselben unter allgemeinern Gesichtspunkten. Hier begnügen wir uns mit nachstehenden Bemerkungen.

Aus den obigen Formeln erhellet z. B., daß jedes auch noch so gleiche Spiel doch immer im Allgemeinen mit Nachtheil verknüpft ist. Das physische Vermögen eines jeden von zwei Spielern sey 100 Ducaten, jeder setze 50 Ducaten, und für jeden sey die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$. In diesem Falle ist $a = 100$, $\alpha = 50$, $\alpha' = -50$, $\alpha'' = \alpha''' = \ldots = 0$, $w = \frac{1}{2}$, $w' = \frac{1}{2}$, $w'' = w''' = \ldots = 0$. Folglich die moralische Hoffnung eines jeden Spielers

$$= (100 + 50)^{\frac{1}{2}} . (100 - 50)^{\frac{1}{2}} - 100$$
$$= \sqrt{50 . 150} - 100 = 86{,}60 - 100 = -13{,}4$$

d. h. jeder muß fürchten, 13,4 Ducaten zu verlieren. Laplace zeigt dies in allgemeinen Formeln.

24. Das physische Vermögen eines Kaufmanns sey $= a$. Er erwartet eine gewisse Summe ε über Meer, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schiff von gleicher Beschaffenheit im Hafen seines Wohnorts einläuft, ist nach den Beobachtungen $= w$. Welches ist die moralische Hoffnung des Kaufmanns?

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff nicht im Hafen einläuft, ist $= 1 - w$, und folglich, da in die-

sem Falle das physische Vermögen keine Veränderung erleidet, die moralische Hoffnung

$$= (a+\varepsilon)^w . a^{1-w} - a .$$

Das erwartete moralische Vermögen selbst ist

$$= kw \log n (a+\varepsilon) + k(1-w) \log n a + \log n h .$$

Setzt man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das physische Vermögen $a = 1$; so wird die moralische Hoffnung

$$= (1+\varepsilon)^w - 1 ,$$

und das erwartete moralische Vermögen

$$= kw \log n (1+\varepsilon) + \log n h .$$

Assecurirt der Kaufmann das Schiff; so kann er, da die Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff untergehen wird, $= 1 - w$ ist, an die Assecuranz-Gesellschaft nur $(1-w)\varepsilon$ bezahlen. Assecurirt er nicht, so ist das erwartete moralische Vermögen, wie wir schon gesehen haben,

$$= kw \log n (1+\varepsilon) + \log n h ;$$

assecurirt er aber, so ist das erwartete moralische Vermögen

$$= k \log n \{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon\} + \log n h$$
$$= k \log n (1+\varepsilon w) + \log n h.$$

Da nun w ein echter Bruch ist, so ist

$$\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$\int \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \int \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$\text{d. i. } \log n (1+\varepsilon w) > w \log n (1+\varepsilon) .$$

Folglich ist das erwartete moralische Vermögen des Kaufmanns in dem Falle, wo er assecurirt, größer als in dem Falle, wo er nicht assecurirt, vorausgesetzt, daß er nicht mehr als $(1-w)\varepsilon$ an die Assecuranz-Gesellschaft bezahlt. Er wird also in einem solchen Falle mit Vortheil für sich assecuriren.

Soll der Kaufmann überhaupt $(1-w)\varepsilon + v$ zahlen; so ist sein erwartetes moralisches Vermögen, wenn er assecurirt,

$$= k \log n \{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon-v\} + \log n h$$
$$= k \log n (1-v+\varepsilon w) + \log n h .$$

In dem Falle, wo der Kaufmann weder Vortheil noch

Nachtheil aus der Assecuranz zöge, müßte, wie sogleich erhellet,

$$kw \log n(1+\varepsilon) + \log n h = k \log n(1 - v + \varepsilon w) + \log n h,$$
$$w \log n(1+\varepsilon) = \log n(1 - v + \varepsilon w),$$
$$1 - v + \varepsilon w = (1+\varepsilon)^w,$$
$$v = 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$

seyn, und was der Kaufmann also höchstens an die Assecuranz-Gesellschaft zahlen könnte, wäre

$$= (1-w)\varepsilon + 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w$$
$$= 1 + \varepsilon - (1+\varepsilon)^w$$
$$= (1+\varepsilon)\{1 - (1+\varepsilon)^{w-1}\}.$$

Soll er mehr zahlen, so zieht er moralischen Nachtheil, soll er weniger zahlen, moralischen Vortheil aus der Assecuranz.

Ist z. B. $\varepsilon = 10000$, $w = \frac{19}{20}$, und das Vermögen des Kaufmanns $= a$; so ist das, was er höchstens an die Gesellschaft zahlen kann,

$$= \left\{1 + \frac{\varepsilon}{a} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^w\right\} . a$$
$$= a + \varepsilon - (a+\varepsilon)^w . a^{1-w}$$
$$= a + 10000 - (a + 10000)^{\frac{19}{20}} . a^{\frac{1}{20}}.$$

Da der, welcher weniger im Vermögen hat, offenbar mehr Ursach hat, zu assecuriren, so kann man nun auch fragen, wie viel der Kaufmann mindestens im Vermögen haben muß, wenn er die Assecuranz mit Vortheil unterlassen soll, indem die Gesellschaft einen bestimmten Preis, z. B. 800 Thlr., von ihm fordert. Dies giebt die Gleichung:

$$a + 10000 - (a + 10000)^{\frac{19}{20}} . a^{\frac{1}{20}} = 800,$$
$$\sqrt[20]{(a + 10000)^{19} . a} = a + 9200,$$
$$(a + 10000)^{19} . a = (a + 9200)^{20},$$

aus welcher Bernoulli nahe $a = 5043$ findet. Hat der Kaufmann mehr im Vermögen, so kann er die Assecuranz unterlassen, hat er weniger, so muß er assecuriren.

Eben so kann man auch fragen, wieviel die Assecuranz-Gesellschaft mindestens im Vermögen haben muß, wofern sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr anbieten soll. Sey x das gesuchte Vermögen. Bietet sie die Assecuranz an,

so hat sie, wenn das Schiff nicht verunglückt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ ist, das Vermögen $x + 800$; verunglückt aber das Schiff, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ ist, so ist ihr Vermögen $x + 800 - 10000 = x - 9200$. Also ist, wenn die Assecuranz zu Stande kommt, das erwartete moralische Vermögen der Gesellschaft

$$(x + 800)^{\frac{19}{20}} . (x - 9200)^{\frac{1}{20}} .$$

Kommt die Assecuranz nicht zu Stande, so ist das Vermögen $= x$. Setzt man beides gleich; so erhält man die Gleichung

$$(x + 800)^{19} . (x - 9200) = x^{20} ,$$

woraus Bernoulli x nahe $= 14243$ findet. Dieses Vermögen muß die Gesellschaft mindestens haben, wenn sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr. eingehen soll. Hat sie weniger, so ist es Unrecht, sich in diese Speculation einzulassen.

25. Kehren wir nun wieder zu dem Petersburger Problem zurück. Sey a das Vermögen von B, und x das, was er am Anfange des Spiels setzt, so besitzt er, wenn Münz beim ersten Wurf fällt, $a - x + 2$; wenn es beim zweiten fällt, $a - x + 2^2$; wenn es beim dritten fällt, $a - x + 2^3$; und endlich, wenn es beim $n$ten fällt, $a - x + 2^n$. Fällt aber Münz in keinem der n Würfe, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2^n}$ ist (9.), so besitzt B nur $a - x$. Das erwartete moralische Vermögen des B ist also nach dem Vorhergehenden, da $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\ldots \frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind,

$$= \tfrac{1}{2} k \log n (a - x + 2) + \frac{1}{2^2} k \log n (a - x + 2^2) + \frac{1}{2^3} k \log n (a - x + 2^3) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^n} k \log n (a - x + 2^n) + \frac{1}{2^n} k \log n (a - x) + \log n h .$$

Das moralische Vermögen vor dem Spiel ist

$$= k \log n a + \log n h .$$

Sollen sich nun die Umstände des Spielers nicht ändern, so muß Beides einander gleich gesetzt werden, woraus man leicht die Gleichung

$$(a-x+2)^{\frac{1}{2}}.(a-x+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots.(a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}}.(a-x)^{\frac{1}{2^n}}=a$$

erhält. Setzt man mit Laplace $a-x=a'$, $\frac{1}{a'}=\alpha$; so wird

$$(a'+2)^{\frac{1}{2}}.(a'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}.a'^{\frac{1}{2^n}}=a,$$

$$\left(1+\frac{2}{a'}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{2^2}{a'}\right)^{\frac{1}{2^2}}\ldots\left(1+\frac{2^n}{a'}\right)^{\frac{1}{2^n}}.a'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}=a.$$

Aber

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{2^n}=1,$$

und

$$\frac{a}{a'}=\frac{a'+x}{a'}=1+\frac{x}{a'}=1+\alpha x.$$

Also

$$(1+2.\alpha)^{\frac{1}{2}}.(1+2^2.\alpha)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(1+2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}=1+\alpha x.$$

Die Factoren auf der linken Seite nehmen immer ab, und nähern sich also der Einheit fortwährend als Gränze; denn, um sich zu überzeugen, daß

$$(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}}>(1+2^{i+1}.\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}$$

ist, erhebe man auf beiden Seiten auf die Potenz 2^{i+1}, wodurch man erhält:

$$(1+2^i.\alpha)^2>1+2^{i+1}.\alpha,$$

$$1+2^{i+1}.\alpha+2^{2i}.\alpha^2>1+2^{i+1}.\alpha,$$

zwei Ausdrücke, deren Ungleichheit sogleich in die Augen fällt. Also werden die Factoren immer kleiner, und nähern sich, da α offenbar immer als positiv anzusehen ist, der Einheit immer mehr und mehr, je größer n ist. Nimmt man also an, daß das Spiel in's Unendliche fortgesetzt werde, so kann man für ein gegebenes α das gesuchte x immer durch Logarithmen ohne große Schwierigkeit berechnen, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von Factoren zu Hülfe nimmt. Für $a'=100$, $\alpha=0{,}01$ findet Laplace $a=107{,}89$, $x=7{,}89$, so daß

also Jemand, der nur 107,89 am Anfange des Spiels im Vermögen hat, bloß 7,89 setzen darf. Für $a' = 200$, $\alpha = 0{,}005$ findet Laplace $a = 208{,}78$, $x = 8{,}78$, so daß also B, wenn er am Anfange des Spiels nur 208,78 im Vermögen hat, bloß 8,78 wagen darf.

Dies mag an diesem Orte genug seyn über die Lehre von der moralischen Hoffnung. In der Folge werden wir immer bloß die mathematische Hoffnung berücksichtigen, bei den Beispielen, die wir aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei einigen Spielen hernehmen werden. Vorzüglich s. m. über die moralische Hoffnung Laplace's öfters angeführtes Werk a. a. O.

26. Eine Wette kann im Allgemeinen angesehen werden als ein Vertrag zweier Partheien, deren eine das Geschehen einer, die andere das Geschehen einer andern bestimmt möglichen Begebenheit behauptet, und darauf eine gewisse Geldsumme, oder etwas derselben Aequivalentes, die Mise, verpfändet, so daß diejenige Parthei, deren Behauptung zutrifft, die von der andern ausgesetzte Geldsumme erhält. In den meisten Fällen behauptet jedoch die eine Parthei das Geschehen, die andere das Nichtgeschehen ein und derselben Begebenheit, welches wir eine Wette im engern Sinne nennen wollen.

Soll eine Wette rechtmäßig und auf vernünftige Art angestellt seyn, so müssen sich die Misen wie die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Ereignisse verhalten, auf welche sie verpfändet werden. Bezeichnen wir also die Misen durch m und m′, die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse durch w und w′, so muß seyn $m : m' = w : w'$ oder $mw' = m'w$. Da nun die erste Parthei die Wahrscheinlichkeit w, die Mise m′, die zweite Parthei dagegen die Wahrscheinlichkeit w′ hat, die Mise m zu gewinnen; so kann man auch sagen, daß bei einer rechtmäßigen Wette die mathematischen Hoffnungen der beiden Wettenden einander gleich seyn müssen (14.).

Bei einer Wette im engern Sinne ist immer $w' = 1 - w$, und folglich $m(1 - w) = m'w$, also

$$m' = \frac{m(1-w)}{w} = m\left(\frac{1}{w} - 1\right),$$

wodurch die Mise der zweiten Parthei gefunden wird, wenn die der ersten festgesetzt worden ist. Bei einer Wette im weitern Sinne ist überhaupt $m' = m \cdot \frac{w'}{w}$. Ist bei einer Wette im engern Sinne die Anzahl der der ersten Parthei günstigen Fälle $= \mu$, die Anzahl der der zweiten günstigen $= \nu$; so ist $w = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, $w' = \frac{\nu}{\mu+\nu}$, und folglich

$$m : m' = w : w' = \mu : \nu,$$

d. h. die Misen müssen sich wie die Mengen der den entsprechenden Ereignissen günstigen Fälle verhalten.

27. Noch haben wir den Sinn einer Regel beim Spiel zu erläutern, welche man die Theilungsregel nennt. Die Sache wird an folgendem Beispiele sich völlig deutlich machen lassen.

Zwei Spieler legen einen Einsatz unter der Bedingung zusammen, daß derselbe dem gehören solle, welcher zuerst drei Parthien gewonnen haben wird. Die Wahrscheinlichkeit eines jeden Spielers, eine Parthie zu gewinnen, sey $= \frac{1}{2}$. Nachdem der erste zwei, der andere eine Parthie gewonnen hat, trennen sich die beiden Spieler. Es fragt sich nun, wie viel einem jeden von dem Einsatze gebühre.

Das Princip, welches man bei Theilungen dieser Art offenbar mit dem meisten Rechte zum Grunde der Theilung anzunehmen pflegt, ist, daß sich die Theile der einzelnen Spieler wie die Wahrscheinlichkeiten verhalten müssen, welche jeder Spieler bei Trennung des Spiels hat, dasselbe zu gewinnen. Seyen nun die beiden Spieler in obiger Aufgabe A und B; so läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden bei der Trennung, das Spiel zu gewinnen, in diesem Falle auf folgende Weise bestimmen. Hätten sie noch eine Parthie gespielt, und A dieselbe gewonnen, so würde der ganze Einsatz ihm gehört haben. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nach der Voraussetzung $= \frac{1}{2}$. Hätte A diese Parthie nicht gewonnen, so hätte jeder zwei Parthien gewonnen, und die folgende müßte das Spiel

entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit des A, die vierte Parthie nicht zu gewinnen, ist $= \frac{1}{2}$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, die fünfte zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, die vierte nicht, aber die fünfte, folglich das Spiel, zu gewinnen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die ganze Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, indem er dasselbe gewinnt, sowohl, wenn der erste, als auch, wenn der zweite Fall eintritt, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Die Wahrscheinlichkeit des B, das Spiel zu gewinnen, ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der vorhergehenden; folglich $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. War also der Einsatz $= 64$ Thlr., so erhält A davon $\frac{3}{4}$, d. i. 48 Thlr., B aber nur $\frac{1}{4}$, d. i. 16 Thlr. Eben so verfährt man, wenn mehr als zwei Spieler sind. Die Aufgabe reducirt sich dann auf eine bloße Gesellschaftsrechnung.

28. Um noch ein Beispiel zu dieser Regel zu haben, so setze man, A und B wetten mit einander, daß ersterer mit einem gewöhnlichen Würfel zwei Mal hinter einander ein und dieselbe bestimmte Zahl werfen oder nicht werfen werde; so fragt sich, wenn schon nach dem ersten Wurfe das Spiel geendigt wird, wie viel jedem von der stehenden Summe gebühre. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel ein und dieselbe bestimmte Zahl zwei Mal hinter einander zu werfen, ist $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (10.). Dies ist die Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, und die des B folglich $= \frac{35}{36}$. Ist also m die Mise des A, so ist, wenn die Wette rechtmäßig seyn soll, 35m die Mise des B (26.), und die ganze stehende Summe ist folglich $=$ 36m. Wird nun das Spiel beim ersten Wurfe getrennt, so sind in Bezug auf den ersten Spieler folgende Fälle möglich. Hat er im ersten Wurfe die bestimmte Zahl nicht getroffen, so hat er offenbar das Spiel verloren, und B erhält 36m. Hat aber A im ersten Wurfe die bestimmte Zahl getroffen; so ist seine Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Wurfe geschehen werde, $= \frac{1}{6}$, und dies ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, bevor noch der zweite Wurf geschieht. Die Wahrscheinlichkeit

des B in demselben Zeitpunkte, das Spiel zu gewinnen, ist folglich $= \frac{5}{6}$. Also muß nach der Theilungsregel bei der Trennung des Spiels A von der stehenden Summe $\frac{1}{6}$, d. i. $\frac{36m}{6} = 6m$, und der zweite Spieler $\frac{5}{6}$, d. i. $5.6m = 30m$ erhalten.

Anwendung der vorhergehenden Sätze auf die Auflösung einiger schwereren Aufgaben.

29. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen über das Würfelspiel, wobei wir aber den Ausdruck Würfel in einem allgemeinern Sinne, als gewöhnlich geschieht, nehmen werden, indem wir unter einem Würfel mit q Seiten ein gerades qseitiges Prisma mit regulären Polygonen als Grundflächen, welche, damit alle Würfe gleich möglich seyen, nicht mit zu den Seiten des Würfels gerechnet werden, verstehen wollen. Man hat sich nämlich nur einen Körper zu denken, mit welchem q Würfe in Bezug auf eben so viele Seitenflächen desselben völlig gleich möglich sind.

Unter dieser Voraussetzung sey jetzt die Anzahl der Würfe mit n Würfeln, deren jeder q Seiten hat, zu bestimmen, in denen eine bestimmte Anzahl p von Augen geworfen werden können.

Es fällt sogleich in die Augen, daß die gesuchte Größe der Anzahl der Variationen (nicht Combinationen, indem bei jedem einzelnen Wurfe jeder der gegebenen Würfel jede einzelne, in dem ganzen Wurfe enthaltene, Anzahl von Augen werfen kann) zur Summe p für die nte Klasse und die Elementenreihe 1, 2, 3, 4, ... q gleich ist.

Nun ist aber nach dem polynomischen Lehrsatze (s. diesen Artikel. 8.)

$$(\overset{1}{a} + \overset{2}{ax} + \overset{3}{ax^2} + \overset{4}{ax^3} + \ldots + \overset{q}{ax^{q-1}})^n$$
$$= {}^{n}N + {}^{n+1}Nx + {}^{n+2}Nx^2 + {}^{n+3}Nx^3 + {}^{n+4}Nx^4 + \ldots.$$

für den Zeiger:

$$(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots\ldots \overset{q}{a}),$$

wo nämlich die Coefficienten der Potenzen von x in der zweiten Reihe die Variationsklassen zur Summe n, n + 1, n + 2, n + 3, ... für obigen Zeiger bezeichnen (s. Variationen gegebener Dinge.). Setzt man

$$\overset{1}{a} = \overset{2}{a} = \overset{3}{a} = \overset{4}{a} = \ldots\ldots = \overset{q}{a} = 1;$$

so wird jede einzelne Complexion in diesen Coefficienten (als Product betrachtet) = 1, und die Coefficienten selbst (als Summen der einzelnen Complexionen betrachtet) bestimmen die Anzahl der Variationen in den gegebenen Klassen. Setzen wir nun $p = n + \alpha$, da offenbar p nur $\geqq n$ seyn kann; so wird

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n$$
$$= {}^nN + {}^{n+1}Nx + {}^{n+2}Nx^2 + \ldots\ldots + {}^pNx^\alpha + {}^{p+1}Nx^{\alpha+1} + \ldots$$

für den aus q Gliedern bestehenden Zeiger

$$(1, 1, 1, 1, \ldots\ldots),$$

und die gesuchte Größe ist folglich nach dem Obigen = ${}^pN$ für den vorhergehenden Zeiger, d. h. = dem Coefficienten von x^α in der Entwickelung von

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n.$$

Zu der Bestimmung dieses Coefficienten gelangt man aber am leichtesten auf folgende Art. Es ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1} = \frac{1 - x^q}{1 - x},$$

und folglich, wenn wir in diesem Artikel der Kürze oder vielmehr der Leichtigkeit des Drucks wegen überhaupt Eulers Bezeichnung der Binomialcoefficienten gebrauchen, wonach der nte Binomialcoefficient der mten Potenz durch $\left[\frac{m}{n}\right]$ bezeichnet wird, nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^{q-1})^n$$
$$= \left\{1 - \left[\frac{n}{1}\right]x^q + \left[\frac{n}{2}\right]x^{2q} - \left[\frac{n}{3}\right]x^{3q} + \left[\frac{n}{4}\right]x^{4q} - \ldots\right\}$$
$$\times \left\{1 - \left[\frac{-n}{1}\right]x + \left[\frac{-n}{2}\right]x^2 - \left[\frac{-n}{3}\right]x^3 + \left[\frac{-n}{4}\right]x^4 - \ldots\right\}$$

$$= \left\{1 - \left[\frac{n}{1}\right] x^q + \left[\frac{n}{2}\right] x^{2q} - \left[\frac{n}{3}\right] x^{3q} + \left[\frac{n}{4}\right] x^{4q} - \ldots\right\}$$
$$\times \left\{1 + \left[\frac{n}{1}\right] x + \left[\frac{n+1}{2}\right] x^2 + \left[\frac{n+2}{3}\right] x^3 + \left[\frac{n+3}{4}\right] x^4 + \ldots\right\}.$$

Um nun den Coefficienten von x^α in der Entwickelung dieses Products zu finden, hebe man aus der zweiten Reihe alle Glieder aus, welche die Potenzen

$$x^\alpha,\ x^{\alpha-q},\ x^{\alpha-2q},\ x^{\alpha-3q},\ x^{\alpha-4q},\ \ldots,$$

enthalten, schreibe sie nach der Ordnung unter die Glieder der ersten Reihe, und multiplicire die über einander stehenden Glieder in einander. Dadurch erhält man für das x^α enthaltende Glied:

$$\left[\frac{n+\alpha-1}{\alpha}\right] x^\alpha - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n+\alpha-q-1}{\alpha-q}\right] x^\alpha$$
$$+ \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+\alpha-2q-1}{\alpha-2q}\right] x^\alpha$$
$$- \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{n+\alpha-3q-1}{\alpha-3q}\right] x^\alpha$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Aber allgemein, da $n + \alpha = p$ ist:

$$\left[\frac{n+\alpha-\mu q-1}{\alpha-\mu q}\right] = \frac{(n+\alpha-\mu q-1)\ldots(n+1)n}{1.2.3.4\ldots(\alpha-\mu q)}$$
$$= \frac{(p-\mu q-1)\ldots(p-\mu q-n+1)(p-\mu q-n)\ldots n}{1.2.3\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(p-\mu q-n)}$$
$$= \frac{(p-\mu q-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(p-\mu q-n+1)}{1.2.3\ldots(p-\mu q-n)(p-\mu q-n+1)\ldots(n-1)}$$

jenachdem nämlich

$$p - \mu q - n \gtrless n$$

ist. Folglich immer

$$\left[\frac{n+\alpha-\mu q-1}{\alpha-\mu q}\right] = \left[\frac{p-\mu q-1}{n-1}\right],$$

und demnach die gesuchte Größe

$$= \left[\frac{p-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p-q-1}{n-1}\right]$$
$$+ \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p-2q-1}{n-1}\right]$$
$$- \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{p-3q-1}{n-1}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Um zu bestimmen, wann diese Reihe abbricht, überlege man, daß, wie aus dem Obigen unmittelbar folgt, $\alpha - \mu q$ nie negativ werden darf. Würde aber

$$n + \alpha - \mu q - 1 = n - 1 + (\alpha - \mu q)$$

negativ, so müßte, da n offenbar nicht < 1 seyn kann, offenbar auch $\alpha - \mu q$ negativ werden, also darf

$$n + \alpha - \mu q - 1 = p - \mu q - 1$$

nie negativ werden, und die Reihe bricht also ab, wenn dies eintritt.

30. Die Anzahl Würfe, welche sich überhaupt mit n Würfeln, deren jeder q Seiten hat, machen läßt, ist offenbar = der Anzahl der Variationen mit Wiederholungen der nten Klasse für q Elemente, d. i. $= q^n$ (Variationen gegebener Dinge. 3.); folglich die Wahrscheinlichkeit mit n solchen Würfeln p Augen zu werfen,

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{p-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p-q-1}{n-1}\right] \\ + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p-2q-1}{n-1}\right] \\ - \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{p-3q-1}{n-1}\right] \\ + \ldots\ldots\end{array}\right\}$$

oder, für

$$p-1=p',\ p-q-1=p'',\ p-2q-1=p''',\ \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\begin{array}{l}\frac{p'(p'-1)\ldots(p'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ - \frac{p''(p''-1)\ldots(p''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n}{1} \\ + \frac{p'''(p'''-1)\ldots(p'''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} \\ - \frac{p''''(p''''-1)\ldots(p''''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \\ + \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

Die hier entwickelten Formeln hat Moivre in den Miscellan. analyt. p. 196. und in seiner Doctrine of chances auf ähnliche Weise gefunden.

Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 4 gewöhnlichen Würfeln 16 zu werfen; so ist $n = 4$, $q = 6$,

$p = 16$, $p' = 15$, $p'' = 9$, $p''' = 3$. Also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{15.14.13}{1.2.3} - \frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{4}{1} + \frac{3.2.1}{1.2.3}.\frac{4.3}{1.2}$$

durch $6^4 = 1296$ dividirt, d. i. $= \frac{125}{1296} = 0{,}096\ldots$, d. i. nahe $= \frac{1}{10}$.

Sucht man nach der gefundenen Formel die Mengen der möglichen Arten, mit drei sechsseitigen Würfeln die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu werfen, und addirt die gefundenen Zahlen, so findet man 108. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei sechsseitigen Würfeln eine der obigen Zahlen zu werfen, $= \frac{108}{6^3} = \frac{108}{216}$ (8.) $= \frac{1}{2}$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. mehr als 10 zu werfen, ist $= 1 - \frac{1}{2}$, d. i. auch $= \frac{1}{2}$. Es ist also gleiche Wahrscheinlichkeit vorhanden, mit drei Würfeln weniger als 11, und mehr als 10, zu werfen. Dieser Satz, sagt Lacroix (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. A. d. Franz. v. Unger. Erfurt. 1818. S. 106.) ist die Grundlage des unter dem Namen Knöcheln (passe dix) bekannten Spiels.

In einem Programm: Ueber eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Brandenburg. 1829. habe ich eine schwerere Aufgabe über das Würfelspiel, welche auch Trembley im 10. Hefte des Archivs der Mathematik von Hindenburg. S. 123. auf eine sehr indirecte Art mittelst der wiederkehrenden Reihen behandelt hatte, auf einem völlig directen Wege aufgelöst, und mit der Combinationslehre in unmittelbare Verbindung gesetzt.

31. Bezeichnen wir die Menge der möglichen Arten, mit n Würfeln von q Seiten p Augen zu werfen, überhaupt durch (p), die Menge der möglichen Arten dagegen, mit $n + 1$ Würfeln von q Seiten p Augen zu werfen, durch $(p)'$; so folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{q-1})^n$$
$$= (0) + (1).x + (2).x^2 + (3).x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (q-1).x^{q-1} + (q).x^q + (q+1).x^{q+1} + \ldots$$

und folglich

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, x^{q-1})^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (0) \\
& + \{(1) + (0)\}x \\
& + \{(2) + (1) + (0)\}x^2 \\
& + \{(3) + (2) + (1) + (0)\}x^3 \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \{(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)\}x^{q-1} \\
& + \{(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)\}x^q \\
& + \{(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)\}x^{q+1} \\
& + \{(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)\}x^{q+2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also

$$x^{n+1}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, + x^{q-1})^{n+1}$$

$$= (0)' + (1)'.x + (2)'.x^2 + (3)'.x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (q-1)'.x^{q-1} + (q)'.x^q + (q+1)'.x^{q+1} + \ldots,$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (0).x \\
& + \{(1) + (0)\}x^2 \\
& + \{(2) + (1) + (0)\}x^3 \\
& + \{(3) + (2) + (1) + (0)\}x^4 \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \{(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)\}x^q \\
& + \{(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)\}x^{q+1} \\
& + \{(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)\}x^{q+2} \\
& + \{(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)\}x^{q+3} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0)' &= 0 \\
(1)' &= (0) \\
(2)' &= (0) + (1) \\
(3)' &= (0) + (1) + (2) \\
(4)' &= (0) + (1) + (2) + (3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(q)' &= (0) + (1) + (2) + (3) + \ldots + (q-1) \\
(q+1)' &= (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (q) \\
(q+2)' &= (2) + (3) + (4) + (5) + \ldots + (q+1) \\
(q+3)' &= (3) + (4) + (5) + (6) + \ldots + (q+2)
\end{aligned}$$

2c. 2c.

Unter der Voraussetzung, daß man immer

$$(-1) = (-2) = (-3) = (-4) = \ldots = 0$$

setzt, kann man diese Relationen durch folgende allgemeine Formel darstellen:

$$(p)' = (p-q) + (p-q+1) + (p-q+2) + \ldots + (p-2) + (p-1)$$

mittelst welcher die Construction einer Tafel der durch (p) bezeichneten Größen für irgend einen bestimmten Werth von q und verschiedene Werthe von n keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Nachfolgende Tafel ist für die gemeinen Würfel, wo $q = 6$ ist, berechnet, und erstreckt sich von $n = 1$ bis $n = 8$, und $p = 0$ bis $p = 36$. Es würde mit Hülfe obiger recurrirenden Formel leicht seyn, sie weiter fortzusetzen. Da $q = 6$; so wird diese Tafel nach

$$(p)' = (p-6) + (p-5) + (p-4) + (p-3) + (p-2) + (p-1)$$

berechnet, und man findet also jedes Glied einer Vertikalreihe, wenn die sechs vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Vertikalreihe zu einander addirt werden. Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die meisten Aufgaben über das Würfelspiel leicht auflösen. Sie ist entlehnt aus Eulers Abhandlung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. Nov. Comm. Petrop. T. XIV. 1759., und findet sich auch in der deutschen Uebersetzung der Introductio in Analysin infinitorum. Thl. I. S. 620. Der Anfang einer solchen Tabelle findet sich auch schon in Jacobi Bernoulli Ars conjectandi. Basileae. 1713. p. 24. Mehr Aufgaben über das Würfelspiel findet man in eben diesem Werke, welchem Huygens Tractatus de ratiociniis in ludo aleae beigefügt ist (p. 1—71.), mit Anmerkungen von Bernoulli.

Tafel,

welche anzeigt, wie oft die Zahl p mit n gemeinen Würfeln geworfen werden kann.

p	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

32. Mittelst vorstehender Tafel ist die Anordnung eines Würfelspiels leicht. Im Allgemeinen ist zu bemerken, daß, wenn das Spiel für den Spielhalter vortheilhaft seyn soll, die höchsten Gewinne auf die am seltensten, die Nieten auf die am häufigsten vorkommenden Würfe zu setzen sind, und daß die Gewinne im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen stehen müssen, welche anzeigen, wie oft die entsprechenden Würfe vorkommen können, oder daß man diesem Verhältnisse wenigstens möglichst nahe zu kommen suchen muß. Bei einem für den Spieler vortheilhaften Spiele ist auf umgekehrte Art zu verfahren. Man findet dies weiter ausgeführt in E. G. Fischers Rechenbuche für das gemeine Leben. Berlin. 1799. Th. 1. S. 292. ff. Daraus entlehne ich folgende kleine Tabelle für ein Spiel mit drei Würfeln, wo das Spiel A. für den Spielhalter, das Spiel B. für der Spieler vortheilhaft eingerichtet ist, obgleich beim ersten mehr und größere Gewinne vorkommen.

Spiel A.			Spiel B.		
Summe der Augen.	Anzahl der Würfe nach (31.)	Gewinn.	Summe der Augen.	Anzahl der Würfe nach (31.)	Gewinn.
3	1	10	3	1	0
4	3	4	4	3	0
5	6	3	5	6	0
6	10	2	6	10	0
7	15	1	7	15	0
8	21	0	8	21	0
9	25	0	9	25	2
10	27	0	10	27	3
11	27	0	11	27	3
12	25	0	12	25	2
13	21	0	13	21	0
14	15	1	14	15	0
15	10	2	15	10	0
16	6	3	16	6	0
17	3	4	17	3	0
18	1	10	18	1	0
	216			216	

Nimmt man an, daß in 216 Würfen alle 216 möglichen Würfe auch wirklich vorkommen, welches offenbar mit desto mehr Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, je öfter und je länger gespielt wird, und setzt jeder Spieler z. B. 1 gr.; so beträgt beim ersten Spiele die ganze Einnahme des Spielhalters in 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 150 gr., sein Gewinn also 66 gr., d. i., mit 216 verglichen, etwa $3\frac{1}{2}$ pC. Im zweiten Spiele ist die Einnahme des Spielhalters bei 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 262 gr., also 46 gr., d. i., mit 216 verglichen, beinahe $21\frac{3}{10}$ pC. Verlust.

33. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Würfelspiel wählen wir, um die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei einem zusammengesetztern Spiele zu zeigen, das Pharao, gewöhnlich bloß Pharo genannt. Es wird nöthig seyn, die Hauptregeln dieses Spiels kurz aus einander zu setzen.

1) Der Banquier hält das ganze wohlgemischte Spiel von 52 Karten verkehrt in der Hand.

2) Er zieht hierauf alle Karten nach der Reihe von dem Spiele ab, und legt sie aufgedeckt abwechselnd rechts und links auf den Tisch, indem er auf der rechten Seite anfängt.

3) Je zwei abgezogene Karten heißen eine Taille.

4) Sowohl vor Anfang des Spiels als auch nach jeder Taille hat jeder Spielende das Recht, auf eine oder einige bestimmte Karten eine namhafte Summe zu setzen.

5) Der Banquier gewinnt die Mise des Spielers, wenn die von demselben besetzte Karte beim Abziehen der Karten auf die rechte Seite, also, da auf dieser Seite angefangen wird, in einer ungeraden Zahl, fällt.

6) Dagegen muß der Banquier das Aequivalent der Mise an den Spieler bezahlen, wenn die besetzte Karte auf die linke Seite, also in einer geraden Zahl, fällt.

7) Fällt in einer Taille die besetzte Karte, z. B. der König oder der Bube, zweimal; so gewinnt der Banquier die Hälfte der Mise.

8) Die letzte Karte ist weder dem Banquier, noch dem

Spieler, zum Vortheil, und wird gar nicht gerechnet, so daß also, wenn die vorletzte Karte die des Spielers ist, der Banquier immer das Ganze gewinnt, sollte auch die letzte Karte wieder dieselbe seyn.

34. Man übersieht leicht, daß bei diesem Spiel der Vortheil des Banquiers bloß in den beiden letzten Bedingungen besteht, indem sonst für den Banquier und den Spieler die Bedingungen des Spiels völlig gleich sind. Bleibt das Spiel unentschieden, wenn auf beide Seiten die Karte des Spielers fällt, und wird auch die letzte Bedingung aufgehoben; so läßt sich leicht zeigen, daß dann der Banquier und der Spieler in gleich vielen Fällen gewinnen. Der Banquier habe $p + q$ Karten in Händen, und unter diesen komme die Karte des Spielers $q$mal vor; so wird die Anzahl aller möglichen Lagen dieser Karten unter einander, da die Karten des Spielers sowohl, als auch die Karten des Banquiers als unter einander identisch zu betrachten sind, indem es offenbar bloß auf die gegenseitige Lage der Karten des Spielers und des Banquiers ankommt, durch die Permutationszahl für $p + q$ Elemente, unter denen p einander gleiche, und q andere einander gleiche Elemente vorkommen ausgedrückt, so daß also (Versetzungen. 4.) diese Zahl

$$= \frac{1.2.3.4.5 \ldots (p+q)}{1.2.3 \ldots p.1.2.3 \ldots q}$$

ist. Denkt man sich, indem man die Karte des Spielers durch a, jede andere Karte durch b bezeichnet, diese Permutationen wirklich aufgestellt; so ist klar, daß a in jeder Vertikalreihe so oft vorkommt, als die übrigen Elemente (ohne das eine a) sich unter einander permutiren lassen, d. i.

$$\frac{1.2.3.4.5 \ldots (p+q-1)}{1.2.3 \ldots p.1.2.3 \ldots (q-1)} \text{ mal,}$$

so daß also a in jeder Vertikalreihe, also auch in den geraden und ungeraden Stellen, gleich oft vorkommt, und folglich offenbar der Banquier und der Spieler in gleich vielen Fällen gewinnen oder verlieren. Hat der Banquier

noch 6 Karten in Händen, unter denen die Karte des Spielers drei Mal vorkommt; so sind die möglichen Lagen der Karten:

a a a b b b
a a b a b b
a a b b a b
a a b b b a
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a a b
b b a a b a
b b a b a a
b b b a a a

Fälle, wo der Banquier gewinnt:

a a a b b b
a a b b a b
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b b a a a b
b b a b a b

Fälle, wo der Spieler gewinnt:

a a b a b b
a a b b b a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a b a
b b b a a a

Man vergesse hierbei nicht, daß Fälle wie aa oder bb das Spiel unentschieden lassen, wie oben angenommen worden ist. In gewissen Fällen kann unter dieser Voraussetzung freilich das Spiel gar nicht entschieden werden. Hätte z. B. der Banquier die Karten aabbbb in Händen; so wären alle möglichen Fälle:

a a b b b b
a b a b b b
a b b a b b
a b b b a b
a b b b b a
b a a b b b
b a b a b b
b a b b a b
b a b b b a
b b a a b b
b b a b a b
b b a b b a
b b b a a b
b b b a b a
b b b b a a

Fälle, wo der Banquier gewinnt:	Fälle, wo der Spieler gewinnt:
a b a b b b	b a a b b b
a b b a b b	b a b a b b
a b b b a b	b a b b a b
a b b b b a	b a b b b a
b b a b a b	b b b a a b
b b a b b a	b b b a a b

In folgenden Fällen würde das Spiel unentschieden bleiben:

a a b b b b
b b a a b b
b b b b a a

da nämlich angenommen worden ist, daß weder aa, noch bb, das Spiel entscheide. Die Anzahl der Fälle, wo der Banquier oder der Spieler gewinnen, ist aber immer dieselbe.

35. Will man nun, unter Voraussetzung der in (33.) aufgestellten Regeln des Spiels, den Vortheil des Banquiers beim Pharao bestimmen; so muß man, weil derselbe zunächst bloß davon abhängt, daß in einer Taille zwei Blätter des Spielers fallen, die Wahrscheinlichkeit suchen, daß dies, ohne daß in irgend einer der vorhergehenden Taillen ein Blatt des Spielers fällt, wodurch entweder diesem oder dem Banquier ein besonderer Vortheil erwächst, in irgend einer Taille der Fall seyn werde. Der Banquier habe noch p Karten in Händen, unter denen die Karte des Spielers qmal vorkommt.

α) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Karte des Spielers in der ersten Taille zuerst gezogen werde, ist $= \frac{q}{p}$.

β) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß kein Blatt des Spielers in der ersten Taille zuerst gezogen wird,

$$= 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}.$$

γ) Ist im ersten Zuge die Karte des Spielers wirklich gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Zuge geschehe $= \frac{q-1}{p-1}$, und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille zwei Karten des Spielers gezogen werden, nach (α) $= \frac{q(q-1)}{p(p-1)}$ (9.), die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten dem Banquier günstigen Falls.

δ) Ist beim ersten Zuge die Karte des Spielers nicht gezogen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies beim zweiten Zuge geschehe, $= \frac{q}{p-1}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{q}{p-1} = \frac{p-q-1}{p-1}$.

ε) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt des Spielers falle, nach (β) und (δ)

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)} \quad (9.).$$

ζ) Ist nun in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der zweiten Taille zwei seiner Blätter fallen, nach (γ), wenn man $p-2$ für p setzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-2)(p-3)}$.

η) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt, in der zweiten zwei Blätter des Spielers fallen, nach (ε) und (ζ)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

ϑ) Die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch in der zweiten keines fällt, ist nach (ε), wenn man $p-2$ für p setzt, $= \frac{(p-q-2)(p-q-3)}{(p-2)(p-3)}$.

ι) Also die Wahrscheinlichkeit, daß weder in der ersten,

noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers fällt, nach (ε) und (ϑ)

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

$\varkappa$) Ist nun weder in der ersten, noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der dritten zwei fallen, nach (γ), wenn man $p-4$ für p setzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}$.

λ) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß weder in der ersten, noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers, daß aber in der dritten zwei fallen, nach (ι) und ($\varkappa$)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}.$$

μ) Die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in der ersten und zweiten Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch in der dritten keins fällt, ist nach (ε), wenn man $p-4$ für p setzt, $= \frac{(p-q-4)(p-q-5)}{(p-4)(p-5)}$.

ν) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers fällt, nach (ι) und (μ) $= \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-q-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-5)}$.

o) Ist in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der vierten zwei fallen, nach (γ), wenn man $p-6$ für p setzt,

$$= \frac{q(q-1)}{(p-6)(p-7)}.$$

π) Also die Wahrscheinlichkeit, daß in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers, daß aber in der vierten zwei fallen, nach (ν) und (o)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-7)}.$$

ϱ) Es erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann, und nach (8.) ist folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der 1ten, oder 2ten, oder 3ten, oder 4ten, u. s. f. Taille zwei Blätter des Spielers fallen, ohne daß in den vorhergehenden Taillen eines fällt,

$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \quad (\gamma)$$
$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (\eta)$$
$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)} \quad (\lambda)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \left\{ 1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-7)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

36. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-2r+3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-2r+1)},$$

und es entsteht nun zunächst die Frage, wie weit obige Reihe in jedem Falle fortzusetzen ist.

Ist zuerst q gerade; so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q}{2} + 1,$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind $2(r-1) = p-q$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q) = q$ Blätter bleiben. Da in den $r-1$ ersten Taillen kein Blatt des Spielers fiel, so sind dies alle Blätter desselben, und der Banquier muß folglich in der rten Taille nothwendig gewinnen, da nun 2 Blätter des Spielers fallen müssen, wodurch das Spiel beendigt wird.

Ist q ungerade, so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q+1}{2},$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q-1}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind also $2(r-1) = p-q-1$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q-1) = q+1$ Blätter bleiben, und sich folglich das Spiel offenbar wieder endigt, indem in der rten Taille entweder das noch vorhandene Blatt des Banquiers und ein Blatt des Spielers,

oder zwei Blätter des Spielers fallen müssen, also einer von beiden Theilen gewinnt.

Für ein gerades q ist das (r + 1)te Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots[p-q-(p-q+4)+3]}{(p-2)(p-3)\ldots[p-(p-q+4)+1]}$$

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots.o.(-1)}{(p-2)(p-3)\ldots.(q-2)(q-3)},$$

und für ein ungerades q

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots[p-q-(p-q+3)+3]}{(p-2)(p-3)\ldots[p-(p-q+3)+1]}$$

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots.1.0}{(p-2)(p-3)\ldots(q-1)(q-2)},$$

also, wenn $q > 2$, in beiden Fällen $= o$, so daß also für $q > 2$ die Reihe so weit fortzusetzen ist, bis sie abbricht.

Für $q = 2$ ist der größte Werth von r nach dem Obigen $= \frac{p-2}{2} + 1 = \frac{1}{2}p$, $2r = p$. Folglich die (r + 1)te Taille unmöglich, eben so, wie für $q = 1$, da auch in diesem Falle der größte Werth von $r = \frac{p-1+1}{2} = \frac{1}{2}p$, $2r = p$. Die Unmöglichkeit der (r + 1)ten Taille in diesen Fällen wird dadurch angezeigt, daß man für das (r + 1)te Glied den Werth $\frac{0}{0}$ erhält. Die Reihe ist also so weit fortzusetzen, bis ein Glied $= o$ oder $= \frac{0}{0}$ wird.

37. Für $q > 2$ bleiben bei der rten Taille, mit welcher das Spiel endigt, q oder q + 1 Karten übrig, und die Karten werden also in diesem Falle nie erschöpft, so daß also in demselben auf (33. No. 8.) keine Rücksicht zu nehmen ist. Setzen wir daher die Mise des Spielers $= 1$, so gewinnt der Banquier in den hierher gehörenden ihm günstigen Fällen $\frac{1}{2}$, so daß also für $q > 2$ seine mathematische Hoffnung

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-7)} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis ein Glied $= o$ wird.

38. Für $q = 2$ muß man die Reihe so weit fortsetzen, bis ein Glied $= \frac{0}{0}$ wird. Dies giebt die mathematische Hoffnung des Banquiers

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \left\{ 1 + \frac{(p-2)(p-3)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1))}{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1))} \right\}$$

Da nun $p - 1 = 2 . \frac{p}{2} - 1$, die $\left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ ungerade Zahl, und 3 die zweite ist; so ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe $= \frac{p}{2}$; also die mathematische Hoffnung des Banquiers $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2(p-1)}$. Es ist aber in diesem Falle die mathematische Hoffnung wegen der Spielregel No. 8. größer, weil in diesem Falle mit der letzten rten $= \left(\frac{p}{2}\right)^{ten}$ Taille die Karten erschöpft werden, und die beiden Blätter des Spielers in die letzte Taille fallen können, wo der Banquier nicht $\frac{1}{2}$, sondern 1 gewinnt. Die Probabilität, daß die beiden Blätter des Spielers auf die rte $= \left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ Taille fallen, ist nach (35.)

$$= \frac{2.1.(p-2)(p-3)\ldots(p-2-p+3)}{p(p-1)(p-2)\ldots(p-p+1)}$$
$$= \frac{2.1.(p-2)\ldots.1}{p(p-1)(p-2)\ldots.1} = \frac{2.1}{p(p-1)}.$$

Die mathematische Hoffnung des Banquiers, 1 zu gewinnen, ist also $= 1 . \frac{2.1}{p(p-1)}$. Die Hälfte hiervon ist aber schon in der vorigen Formel $\frac{1}{2(p-1)}$ begriffen; also ist die mathematische Hoffnung des Banquiers, wenn $q = 2$, überhaupt doch nur

$$= \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)} = \frac{p+2}{2p(p-1)}.$$

39. Ist endlich $q = 1$; so können nie zwei Blätter des Spielers in einer Taille fallen, und die mathematische Hoffnung des Banquiers reducirt sich also darauf, daß das eine Blatt des Spielers, welches in dem Spiele vorhanden, in die erste Ziehung der letzten Taille fällt. Da bei der ersten Ziehung der letzten Taille offenbar jedes Blatt

gezogen werden kann, die Anzahl aller Fälle also $= p$, die der günstigen $= 1$ ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß Obiges geschehe, $= \frac{1}{p}$, und, weil der Banquier in diesem Falle die ganze Mise des Spielers gewinnt, seine mathematische Hoffnung $= 1 . \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$.

40. Die gefundene Reihe für $q > 2$ läßt sich auf verschiedene Arten transformiren. Ist q eine gerade Zahl; so ist das letzte Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-2)(p-3)\ldots q(q-1)} \quad (36.).$$

Folglich wenn man die Reihe umgekehrt schreibt, die Erwartung des Banquiers, die wir durch S bezeichnen wollen:

$$S = \tfrac{1}{2}.\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{\begin{array}{l} \frac{(p-q)(p-q-1)..3.2.1}{(p-2)(p-3)..q(q-1)} \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)..4.3}{(p-2)(p-3)..(q+1)} \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + 1 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1..(p-q)}{2(q+1)(q+2)..p}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{q(q-1)}{1.2} \\ + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{1.2.3.4} \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + \frac{(p-4)(p-5)..q(q-1)}{1.2.3..(p-q-2)} \\ + \frac{(p-2)(p-3)..q(q-1)}{1.2.3..(p-q)} \end{array}\right\}$$

Ist q ungerade; so ist das letzte Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2}{(p-2)(p-3)\ldots(q+1)q},$$

und man erhält auf ähnliche Art wie vorher

$$S = \frac{(q-1).1.2.3..(p-q)}{2.(q+1)(q+2)..p}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{(q+1)q}{1.2.3} \\ + \frac{(q+3)(q+2)\ldots q}{1.2.3.4.5} \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + \frac{(p-4)(p-5)\ldots q}{1.2.3..(p-q-2)} \\ + \frac{(p-2)(p-3)\ldots q}{1.2.3..(p-q)} \end{array}\right\}$$

41. Aus der zuerst gefundenen Reihe folgt auch leicht

$$S = \frac{q}{2p}\left\{\frac{q-1}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)(q-1)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)\,..\,(p-q-3)(q-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)\,..\,(p-q-5)(q-1)}{(p-1)(p-2)\,..\,(p-7)} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Aber

$$\frac{q-1}{p-1} = 1 - \frac{p-q}{p-1},$$
$$\frac{q-1}{p-3} = 1 - \frac{p-q-2}{p-3},$$
$$\frac{q-1}{p-5} = 1 - \frac{p-q-4}{p-5},$$
$$\frac{q-1}{p-7} = 1 - \frac{p-q-6}{p-7},$$

2c. 2c.

Also auch

$$S = \frac{q}{2p}\left\{1 - \frac{p-q}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-1)(p-2)} - \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\,..\,(p-q-3)}{(p-1)(p-2)\,..\,(p-4)} - \frac{(p-q)(p-q-1)\,..\,(p-q-4)}{(p-1)(p-2)\,..\,(p-5)} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Ist q gerade, so hat die ursprüngliche Reihe $\frac{p-q}{2} + 1$, die transformirte also $p - q + 2$ Glieder. Das letzte Glied ist aber

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1.(q-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(q-1)} = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-1)(p-2)\ldots q},$$

welches nicht mehr in zwei Glieder zerlegt werden kann. Also hat die transformirte Reihe nur $p - q + 1$ Glieder, eben so, wie in dem Falle, wenn q ungerade, wo die Gliederzahl der transformirten Reihe wirklich $= 2.\frac{p-q+1}{2} = p - q + 1$ ist.

42. Nach dem Artikel Umformung der Reihen (22.) ist also

$$S = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{q}{p} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{p(p-1)} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{p(p-1)(p-2)} + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \cdots\cdots + \frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}[1+(-1)^{p-q}]\right\}$$

wenn man das dortige S' mit $\frac{q}{2p}$ multiplicirt.

43. Endlich erhält man auch nach Umformung der Reihen (23.)

$$S = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{q}{p-q+1} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \tfrac{1}{16}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)} \cdots\cdots + (-\tfrac{1}{2})^{q}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)},$$

da beim Pharao immer p gerade, $p-2q+1$ ungerade, also das dortige $1+(-1)^{p-2q+1} = 1-1 = 0$ ist, wodurch das dortige letzte Glied verschwindet.

Die hier entwickelten Reihen haben Montmort, Johann und Nicolas Bernoulli gefunden. M. s. Analyse sur les jeux de hazard. éd. 2. p. 77. p. 304. p. 287. p. 98. p. 299. Noch eine Formel giebt Euler in den Mém. de Berlin. 1764. p. 163. M. s. über diesen Gegenstand auch ein Programm von Mollweide: Multiplex et continuata serierum transformatio etc. Lips. 1820., wo die Formel für den Vortheil des Banquiers beim Pharao als Beispiel einer Umformung einer Reihe gebraucht ist.

Aus (38. 39.) und der vorhergehenden allgemeinen Formel erhält man in den vier Fällen, wo $q = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$ ist, leicht den Vortheil des Banquier respective

$$= \frac{1}{p},\ = \frac{p+2}{2p(p-1)},\ = \frac{3}{4(p-1)},\ = \frac{2p-5}{2(p-1)(p-3)}.$$

Diese vier speciellen Formeln giebt auch Moivre in der Doctrine of Chances. London. 1718. p. 41—43.

44. Montmort hat nach diesen speciellen Formeln zwei Tabellen für den Vortheil des Banquier beim Pharao berechnet, welche ich hier mittheile. Sie werden keiner weitern Erklärung bedürfen. Die Tabelle B. giebt bloß Gränzen an, die aber in kleinern Brüchen ausgedrückt sind, als die Werthe in der Tabelle A. Die Ansicht dieser Tabellen lehrt augenblicklich, daß der Vortheil des Banquiers am kleinsten, der des Spielers also am größten ist, wenn $q = 2$ oder $q = 3$, und p nahe $= 52$ ist. Daraus ergeben sich folgende zwei Regeln für den Spieler:

a) Er muß nur in den ersten Taillen eine Karte besetzen, und desto weniger, je mehr Taillen schon gezogen sind.

b) Die Karten sind für ihn die schlechtesten, welche entweder schon drei Mal, oder noch gar nicht heraus sind. Die besten sind diejenigen, welche zwei Mal heraus sind, und eine solche Karte muß also der Spieler, so viel möglich, sogleich nach einer der ersten Taillen besetzen, wenn er mit dem größten Vortheile spielen will. Der Banquier wird dann den geringsten Vortheil haben. Die Beobachtung dieser Regeln ist allen Spielern zu empfehlen; aber immer wird doch der Banquier im Vortheil seyn.

In der Schrift: Exercitationes quaedam mathematicae. Venetiis. 1724. 4. hat Daniel Bernoulli bei Gelegenheit eines Streites mit Rizetti welcher Montmorts und Joh. Bernoulli's Formeln für den Vortheil des Banquiers für falsch hielt, dieselben kurz entwickelt, und ebenfalls eine Tabelle beigefügt.

A.

	Vortheil des Banquiers, wenn			
p =	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
52	—	—	—	$\frac{2295086253}{1158908419 50}$
50	—	$\frac{3117}{350350}$	$\frac{3}{196}$	$\frac{7208829}{349595300}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1787}{161304}$	$\frac{3}{188}$	$\frac{276199}{12842280}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{3431}{296010}$	$\frac{3}{180}$	$\frac{11002}{489555}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{822}{67639}$	$\frac{3}{172}$	$\frac{913}{38786}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{3145}{246246}$	$\frac{3}{164}$	$\frac{79}{3198}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1501}{111540}$	$\frac{3}{156}$	$\frac{25}{962}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{2849}{201068}$	$\frac{3}{148}$	$\frac{1349}{49210}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{679}{45045}$	$\frac{3}{140}$	$\frac{1139}{39270}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{2573}{160446}$	$\frac{3}{132}$	$\frac{357}{11594}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1215}{70928}$	$\frac{3}{124}$	$\frac{177}{5394}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{2287}{124410}$	$\frac{3}{116}$	$\frac{55}{1566}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{536}{27027}$	$\frac{3}{108}$	$\frac{221}{5850}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{2001}{92950}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{611}{14950}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{929}{39468}$	$\frac{3}{92}$	$\frac{473}{10626}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1715}{66066}$	$\frac{3}{84}$	$\frac{143}{2926}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1572}{54340}$	$\frac{3}{76}$	$\frac{35}{646}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1429}{43758}$	$\frac{3}{68}$	$\frac{31}{510}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{429}{11440}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{9}{130}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{44}{1001}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{23}{286}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{132}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{19}{198}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{42}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{11}{70}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$

B.

	Vortheil des Banquiers, wenn						
p =	q = 1	q = 2		q = 3		q = 4	
	=	>	<	>	<	>	<
52	—	—	—	—	—	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$
50	—	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{48}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{87}$	$\frac{1}{86}$	$= \frac{1}{60}$	—	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{44}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{83}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{79}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{40}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{74}$	$= \frac{1}{52}$	—	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{67}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$= \frac{1}{44}$	—	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{32}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{28}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$	$= \frac{1}{36}$	—	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{24}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$= \frac{1}{28}$	—	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{16}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$	$= \frac{1}{20}$	—	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{1}{10}$	$= \frac{1}{15}$	—	$= \frac{1}{12}$	—	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	$= \frac{1}{4}$	—	$= \frac{1}{4}$	—	$= \frac{1}{2}$	—

Die Nenner der größern Gränzen findet man auch bei Moivre a. a. O. p. 44. in einer Tabelle berechnet.

45. Bei den deutschen Zahlenlotterien, dem Lotto di Genova, und der Loterie de France liegen 90 Nummern im Glücksrade, von denen 5 gezogen werden. Jeder, wer auf eine der gezogenen Nummern gesetzt hat, erhält seinen Einsatz eine gewisse Anzahl mal wieder, bei der Loterie de France z. B. 15mal. Den Spielern steht es frei, entweder bloß die einzelnen von ihnen gewählten Zahlen zu besetzen, oder auch die in denselben enthaltenen Verbindungen zu zwei, drei, u. s. f., d. h. Amben, Ternen, u. s. f., welche bei allen Lotterien höher bezahlt werden, als die einzelnen Auszüge. Bei der Loterie de France z. B. eine Ambe 270, eine Terne 5200 mal. Bei den meisten Lotterien darf man nur bis Ternen gehen. Quinten sind überhaupt nur möglich, da bloß 5 Nummern gezogen werden. Größerer Allgemeinheit wegen wollen wir im Folgenden immer setzen, daß die Lotterie aus n Nummern bestehe, von denen r gezogen werden.

46. Hat man nun s Nummern besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben t herauskommen werden; so muß man auf folgende Art schließen. Die besetzten s Nummern können zu t auf

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-t+1)}{1.2.3.4\ldots t}$$

Arten combinirt werden (Combination. 12.). Die übrigen n — s Nummern lassen sich zu r — t auf

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-s-r+t+1)}{1.2.3.4\ldots(r-t)}$$

Arten combiniren. Weil jede der erstern Arten mit jeder der letztern in Verbindung kommen kann; so ist die Anzahl der günstigen Fälle

$$=\frac{(n-s)\ldots(n-s-r+t+1)}{1.2.3.4\ldots(r-t)}\cdot\frac{s\ldots(s-t+1)}{1.2.3\ldots t}.$$

Die Anzahl aller Fälle ist die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu r, d. i.

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s...(s-t+1).1.2.3...r}{1.2.3..(r-t).1.2.3..t.n(n-1)..(n-r+1)}$$
$$=\frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s..(s-t+1).r..(r-t+1)}{1.2.3...t.n(n-1)..(n-r+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Terne zu gewinnen, ist also z. B. bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie, da in diesem Falle $n = 90$, $r = 5$, $s = 3$, $t = 3$ ist,

$$= \frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu gewinnen, ist $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, und die, eine Ambe zu gewinnen, $= \frac{2}{801}$, ungefähr $= \frac{1}{400}$.

47. Will man die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von den s besetzten Nummern wenigstens t herauskommen; so sollen entweder t, oder $t+1$, oder $t+2$, oder $t+3$, u. s. f. herauskommen. Ist $s \leqq r$, so erstreckt sich diese Reihe bis s; ist aber $s > r$, nur bis r, da überhaupt nur r Nummern gezogen werden. Nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) muß man die einzelnen, den obigen Ereignissen entsprechenden, Wahrscheinlichkeiten, nach (46.) berechnen, und die erhaltenen Brüche addiren. Hat z. B. Jemand 2 Nummern besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben wenigstens eine herauskommen werde; so ist $n = 90$, $r = 5$, $s = 2$, $t = 1$, $t + 1 = 2 = s$, da $s < r$. Also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} + \frac{88.87.86.2\ 1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86}$$
$$= \frac{85}{9.89} + \frac{2}{9.89} = \frac{87}{801}, < \frac{1}{9}, > \frac{1}{10}.$$

48. Soll man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß von den n Nummern einer Lotterie in einer Ziehung von r Nummern s bestimmte Nummern herauskommen; so ist die Anzahl aller Fälle, wie oben,

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots.r}.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist offenbar die Anzahl der Combinationen der übrigen $n-s$ Nummern zu $r-s$, nämlich

$$= \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)}.$$

Also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{(n-s)\ldots(n-r+1).1.2.3\ldots r}{1.2.3\ldots(r-s).n(n-1)..(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n-s)..(n-r+1).1..(r-s).(r-s+1)..r}{1..(r-s).n\ldots(n-s+1).(n-s)..(n-r+1)}$$

$$= \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

49. Will man die Wahrscheinlichkeit haben, daß im vorigen Falle die s bestimmten Nummern in einer bestimmten Ordnung herauskommen; so ist die Anzahl der günstigen Fälle, da es nach der Theorie der Permutationen $1.2.3\ldots s$ verschiedene Ordnungen giebt, in welchen die s Nummern herauskommen können, $=$ der obigen, durch $1.2.3\ldots s$ dividirt, so daß man also auch die obige Probabilität durch dieses Product dividiren muß, wodurch man für die gesuchte Probabilität

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2.3\ldots s.n(n-1)..(n-s+1)}$$

erhält.

50. Ist $s = r$; so ist die Probabilität, daß die s bestimmten Nummern in einer Ziehung herauskommen,

$$= \frac{1.2.3\ldots r}{n(n-1)\ldots(n-r+1)},$$

und daß sie in einer bestimmten Ordnung herauskommen,

$$= \frac{1.2.3\ldots r}{1.2.3..r.n(n-1)..(n-r+1)} = \frac{1}{n(n-1)..(n-r+1)}.$$

51. Ist die Mise des Spielers $= m$, p seine Probabilität, zu gewinnen, x aber das, was die Lotterie an den Spieler bezahlen muß; so ist $x - m$ der Gewinn des Spielers, und folglich $p(x - m)$ seine mathematische Hoffnung. Die Probabilität des Spielers zu verlieren, also die Probabilität der Lotterie, zu gewinnen, ist $= 1 - p$, und folglich die mathematische Hoffnung der Lotterie $= m(1 - p)$. Der Gleichheit des Spiels wegen muß

$$p(x-m) = m(1-p)$$

seyn, woraus man

$$x = \frac{m}{p}$$

erhält. Was die Lotterie dem Spieler bezahlen muß, ist also dem Quotienten seiner Mise durch seine Probabilität, zu gewinnen, gleich. Nach (46.) muß die Lotterie also für einen einfachen Gewinn 18m, für eine Ambe $\frac{801}{2}$m $= 400\frac{1}{2}$m, für eine Terne 11748m bezahlen. Gewöhnlich werden aber von den Lotterien nur 15m, 270m, 5200m bezahlt, und das Uebrige also für Risico und Kosten abgezogen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Quinte zu gewinnen, wäre nach (46.) $= \frac{1}{43949268}$, und die Lotterie müßte also in diesem Falle 43949268m bezahlen. Man hat jedoch diese Art zu spielen allgemein abgeschafft, weil die Probabilität zu gewinnen so sehr klein ist.

Die ehemalige Berliner Zahlenlotterie bezahlte einen simplen Auszug 15, eine Ambe 270, eine Terne 5300, eine Quaterne 60000 Mal, in Bezug auf die Mise des Spielers. Die oben angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Loterie de France.

52. Eine wichtige Aufgabe, mit deren Auflösung sich vorzüglich Euler (Opuscula analytica. T. II. p. 333.) und Laplace (Théorie analytique des probabilités. p. 191—201.) beschäftigt haben, ist folgende:

Eine Lotterie bestehe aus n Nummern; man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in i Ziehungen, wenn jedes Mal r Nummern gezogen werden, alle Nummern herauskommen werden.

Eulers Auflösung.

Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß $i \geqq \frac{n}{r}$ seyn muß, indem, für $i < \frac{n}{r}$, die gesuchte Probabilität $= 0$ ist.

Die Anzahl aller möglichen Fälle bei einer Ziehung ist offenbar die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu r, wie wir auch schon oben gesehen haben, also

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} = \left[\frac{n}{r}\right].$$

Für i Ziehungen kann sich jeder einzelne Fall bei jeder ein-

zelnen Ziehung mit jedem einzelnen Falle bei jeder andern Ziehung combiniren, so daß also die Anzahl aller möglichen Fälle bei i Ziehungen $= \left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right]^i$ ist.

Um nun die Anzahl der günstigen Fälle zu finden, bezeichne man die einzelnen Nummern der Lotterie durch a, b, c, d, e, ...; so erhellet leicht, daß unter obiger Anzahl aller Fälle auch die Fälle mit begriffen sind, in denen eine Nummer, z. B. a, fehlt, deren Anzahl offenbar die Anzahl aller Fälle bei einer Lotterie mit $n-1$ Nummern für i Ziehungen ist, d. i. nach dem Obigen $= \left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Folglich ist, da die Lotterie überhaupt n Nummern enthält, die Anzahl der Fälle, in denen keine Nummer fehlt, $= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Man überzeugt sich aber leicht, daß hierbei ein Fehler begangen worden, indem man zu viel abgezogen hat. Jeder Fall nämlich, wo zwei Nummern, z. B. a, b, fehlen, ist doppelt, einmal in Bezug auf a, und einmal in Bezug auf b, abgezogen worden, da er doch offenbar nur einmal abgezogen, und daher wieder einmal addirt werden muß. Die Anzahl aller Fälle, in denen a und b fehlen, ist aber offenbar der Anzahl aller Fälle bei einer Lotterie mit $n-2$ Nummern für i Ziehungen gleich, d. i. $= \left[\frac{n-2}{r}\right]^i$, und man muß folglich, da die n Nummern zu zweien sich $\frac{n(n-1)}{1.2}$ mal combiniren lassen, zu obiger Differenz noch das Product der beiden letzten Größen addiren, wodurch man

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$

erhält.

Aber auch hier ist wieder ein Fehler begangen. Jeder Fall, wo drei Nummern, z. B. a, b, c, fehlen, ist nämlich drei Mal in Bezug auf a, b und c subtrahirt, und dann wieder drei Mal in Bezug auf ab, ac und bc addirt worden, welches sich gegenseitig aufhebt, so daß also diese Fälle eigentlich noch ganz unberücksichtigt geblieben sind, und demnach noch abgezogen werden müssen,

wodurch man, nach einer ähnlichen Betrachtung, wie vorher

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$$

erhält.

Hierbei ist aber wieder jeder der Fälle, in denen vier Nummern, z. B. a, b, c, d, fehlen, vier Mal subtrahirt, in Bezug auf a, b, c, d; sechs Mal addirt, in Bezug auf ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Mal subtrahirt in Bezug auf abc, abd, acd, bcd; also überhaupt zwei Mal subtrahirt worden, und muß folglich wieder einmal addirt werden, wodurch man erhält:

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left[\frac{n-4}{r}\right]^i,$$

mit gehöriger Rücksicht auf die Combinationszahl der n Nummern zu vieren.

Man könnte auf diese Art weiter gehen. Um aber der Untersuchung die nöthige Allgemeinheit zu geben, setze man, daß man bis zu α fehlenden Nummern gegangen sey, und für die Anzahl aller Fälle, in denen keine Nummer fehlt,

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i$$
$$\pm \text{ wenn } \alpha \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$$

erhalten habe. Jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, ist hierbei

1) subtrahirt bei einer fehlenden Nummer

$(\alpha + 1)$mal;

2) addirt bei zwei fehlenden Nummern so oft, als sich $\alpha + 1$ Nummern zu zweien combiniren lassen, d. i.

$\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}$mal;

3) subtrahirt bei drei fehlenden Nummern so oft, als sich $\alpha + 1$ Elemente zu dreien combiniren lassen, d. i.

$$\frac{(\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\text{mal};$$

4) endlich addirt oder subtrahirt, jenachdem α gerade oder ungerade ist, bei α fehlenden Elementen so oft, als sich $\alpha + 1$ Elemente zu α combiniren lassen, d. i.

$$\frac{(\alpha+1)\alpha\,(\alpha-1)\ldots 3.2}{1.2.3.4\ldots\alpha}\text{mal}.$$

Gebraucht man, jenachdem addirt oder subtrahirt worden ist, das Zeichen + oder —; so ist die Zahl, wie oft jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, addirt oder subtrahirt worden ist,

$$= -\frac{\alpha+1}{1} + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2} - \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3} + \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1.2.3\ldots\alpha}$$

$$\pm \text{ wenn } \alpha \begin{Bmatrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{Bmatrix}$$

$$= 1 - \left[\frac{\alpha+1}{1}\right] + \left[\frac{\alpha+1}{2}\right] - \left[\frac{\alpha+1}{3}\right] + \cdots$$

$$\cdots \pm \left[\frac{\alpha+1}{\alpha}\right] \mp 1 - \begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix}$$

$$= (1-1)^{\alpha+1} - \begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix}$$

d. i. $= -0$, wenn α gerade, $= -2$, wenn α ungerade ist. Ist also α gerade, so ist jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, noch gar nicht, wenn α ungerade ist, zwei Mal subtrahirt worden, so daß also jeder solcher Fall im ersten Falle einmal subtrahirt, im zweiten einmal addirt werden muß, wodurch man, da die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu $\alpha + 1$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots(\alpha+1)}$$

ist, für die gesuchte Größe

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i \mp \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots(\alpha+1)}\left[\frac{n-\alpha-1}{r}\right]^i$$

erhält.

Da nun höchstens $n-r$ Nummern fehlen können, so ist der höchste Werth von $\alpha+1=n-r$, d. i. $\alpha=n-r-1$, welches, in obige Formel gesetzt, für die Anzahl aller möglichen Fälle, in denen keine Nummer fehlt, den Ausdruck

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots \mp \frac{n(n-1)..(r+1)}{1.2\ldots(n-r)}\left[\frac{r}{r}\right]^i$$

giebt. Da nun $\left[\frac{r-1}{r}\right]$ an sich $=0$ ist; so kann man obige Größe

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.$$

setzen, wenn nur die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Unter derselben Voraussetzung ist also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1}{\left[\frac{n}{r}\right]^i}\left\{\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.\right\}$$

53. Aber allgemein

$$\frac{\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]}{\left[\frac{n}{r}\right]} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)..(n-\alpha-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-\alpha)..(n-r+1)(n-r)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-r)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)..(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-r+1)(n-r)..(n-\alpha+1)}$$
$$= \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)(n-2)..(n-\alpha+1)}$$

Also obige Probabilität, wenn man mit $\left[\frac{n}{r}\right]^i$ wirklich dividirt,

$$= 1 - \frac{\{n-r\}^i}{1.n^{i-1}} + \frac{\{(n-r)(n-r-1)\}^i}{1.2.\{n(n-1)\}^{i-1}}$$
$$- \frac{\{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\}^i}{1.2.3.\{n(n-1)(n-2)\}^{i-1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

bis die Reihe abbricht. Bezeichnet man die Glieder dieser Reihe, vom zweiten an, durch A, B, C, D, E, ...; so wird die Probabilität

$$= 1 - \frac{1}{1}\cdot\frac{(n-r)^i}{n^{i-1}} + \frac{A}{2}\cdot\frac{(n-r-1)^i}{(n-1)^{i-1}}$$
$$- \frac{B}{3}\cdot\frac{(n-r-2)^i}{(n-2)^{i-1}} + \frac{C}{4}\cdot\frac{(n-r-3)^i}{(n-3)^{i-1}} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{n}{1}\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i + \frac{(n-1)A}{2}\left\{\frac{n-r-1}{n-1}\right\}^i$$
$$- \frac{(n-2)B}{3}\left\{\frac{n-r-2}{n-2}\right\}^i + \frac{(n-3)C}{4}\left\{\frac{n-r-3}{n-3}\right\}^i - \ldots$$

Für $n = 90$, $r = 5$, $i = 100$ findet Euler obige Probabilität $= 0{,}7419$, Trembley (Mém. de Berlin. 1794. 95. p. 76.), der die Rechnung genauer geführt hat, $= 0{,}7410$, also $> \frac{7}{10}$, d. i. um $\frac{2}{10}$ größer als $\frac{1}{2}$.

Laplace's Auflösung.

54. Laplace hat diese Aufgabe nach einer Methode behandelt, welche in Fällen dieser Art häufig mit großem Nutzen angewandt wird, und daher hier einer Erläuterung bedarf.

Man bezeichne durch $Z_{n,q}$ die Anzahl der Fälle, in welchen in i Ziehungen die Nummern 1, 2, 3, ... q, durch $Z_{n,q-1}$ also die Anzahl der Fälle, in denen in i Ziehungen die Nummern 1, 2, 3, ... q — 1 alle herauskommen, u. s. f.; so ist klar, daß die Anzahl der Fälle, in welchen, 1, 2, 3, ... q in i Ziehungen herauskommen, gleich ist der Anzahl der Fälle, in welchen 1, 2, 3, ... q — 1 herauskommen, weniger der Anzahl der Fälle, in welchen, wenn man die Nummer q aus der Lotterie wegließe, so daß sie nur n — 1 Nummern enthielten, die Nummern 1, 2, 3, ... q — 1 in i Ziehungen herauskommen; d. i. nach obiger Bezeichnung

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1}.$$

Damit dies völlig deutlich erhelle, überlege man zunächst, daß $Z_{n,q}$ kleiner als $Z_{n,q-1}$ seyn muß, weil $Z_{n,q-1}$ offenbar alle Fälle enthält, welche $Z_{n,q}$ enthält, in denen die Zahlen 1, 2, 3, ... q — 1 mit q verbunden vorkom-

men, und außerdem noch alle Fälle, in denen zwar 1, 2, 3, ... $q-1$, aber nicht mit q verbunden, vorkommen. Die Anzahl der letztern ist aber offenbar der Anzahl der Fälle gleich, in welchen bei einer Lotterie von $n-1$ Nummern, die q nicht enthält, die Nummern 1, 2, 3, ... $q-1$ in i Ziehungen alle herauskommen; d. i. $= Z_{n-1,\,q-1}$. Es ist folglich

$$Z_{n,\,q-1} = Z_{n,\,q} + Z_{n-1,\,q-1},$$

woraus obige Gleichung augenblicklich folgt. Betrachtet man nun die Reihe

$$Z_{1,\,q-1},\ Z_{2,\,q-1},\ Z_{3,\,q-1},\ Z_{4,\,q-1},\ \ldots\ Z_{n,\,q-1},\ \ldots$$

so ist nach der in den Artikeln Arithmetische Reihen höherer Ordnungen und Differenzenrechnung angewandten Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
Z_{2,\,q-1} - Z_{1,\,q-1} &= \Delta Z_{1,\,q-1},\\
Z_{3,\,q-1} - Z_{2,\,q-1} &= \Delta Z_{2,\,q-1},\\
Z_{4,\,q-1} - Z_{3,\,q-1} &= \Delta Z_{3,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
Z_{n,\,q-1} - Z_{n-1,\,q-1} &= \Delta Z_{n-1,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Folglich

$$Z_{n,\,q} = \Delta Z_{n-1,\,q-1};$$

und, wenn man $q-1 = 1, 2, 3, 4, \ldots$ setzt:

$$\begin{aligned}
Z_{n,\,2} &= \Delta Z_{n-1,\,1},\\
Z_{n,\,3} &= \Delta Z_{n-1,\,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1},\\
Z_{n,\,4} &= \Delta Z_{n-1,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1},\\
Z_{n,\,5} &= \Delta Z_{n-1,\,4} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also allgemein

$$Z_{n,\,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,\,1}.$$

Im Allgemeinen bedeutet nun $Z_{n,\,1}$ die Anzahl aller Fälle, in welchen in i Ziehungen bei einer Lotterie von n Nummern die Nummer 1 herausgekommen ist. Die Anzahl dieser Fälle ist offenbar der Anzahl aller möglichen Fälle bei n Nummern und i Ziehungen gleich, weniger der Anzahl der Fälle, in welchen bei n Nummern und i Ziehungen die Nummer 1 fehlt, d. i. weniger der Anzahl aller möglichen Fälle bei $n-1$ Nummern und i Ziehungen. Folglich, da jedes Mal r Nummern gezogen werden:

$$Z_{n,1} = \left[\frac{n}{r}\right]^i - \left[\frac{n-1}{r}\right]^i,$$

da die Anzahl aller möglichen Fälle bei n Nummern $= \left[\frac{n}{r}\right]^i$ ist (52.). Also

$$Z_{n,1} = \frac{\{n(n-1)..(n-r+1)\}^i - \{(n-1)(n-2)..(n-r)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i},$$

d. i., in Bezug auf n als veränderlich (wie oben),

$$Z_{n,1} = \frac{\Delta.\{(n-1)(n-2)..(n-r)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i},$$

und demnach, $n-q+1$ für n gesetzt, nach dem Vorhergehenden:

$$Z_{n,q} = \Delta^{q-1}\left\{\frac{\Delta.\{(n-q)..(n-q-r+1)\}^i}{\{1.2.3...r\}^i}\right\}$$

$$= \frac{\Delta^q.\{(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\}^i}{\{1.2.3....r\}^i}.$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist, bei n Nummern und i Ziehungen,

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i = \frac{\{n(n-1)...(n-r+1)\}^i}{\{1.2.3...3\}^i} \quad (52.).$$

Also die Probabilität, daß in i Ziehungen einer Lotterie von n Nummern die Nummern 1, 2, 3, ... q herauskommen werden, wenn man der Kürze wegen $n-q=s$ setzt,

$$= \frac{\Delta^q.\{s(s-1)...(s-r+1)\}^i}{\{n(n-1)...(n-r+1)\}^i}.$$

Will man nun die Probabilität haben, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen, so muß man obige Differenz, in Bezug auf s als veränderlich, entwickeln, und im Resultate $q=n$, $n-q=o$, d. i. $s=o$ setzen. Da nun hier

$$\{s(s-1)...(s-r+1)\}^i,$$
$$\{(s+1)s...(s-r+2)\}^i,$$
$$\{(s+2)(s+1)..(s-r+3)\}^i,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\{(s+q-1)(s+q-2)..(s-r+q)\}^i,$$
$$\{(s+q)(s+q-1)..(s-r+q+1)\}^i,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Hauptreihe ist; so ist, wie aus dem Art. Arithmetische Reihen höherer Ordnungen (2.) leicht geschlossen wird, obige qte Differenz

$$
\begin{aligned}
= & \quad \{(s+q)(s+q-1)..(s-r+q+1)\}^i \\
& - \frac{q}{1}\{(s+q-1)(s+q-2)..(s-r+q)\}^i \\
& + \frac{q(q-1)}{1.2}\{(s+q-2)(s+q-3)..(s-r+q-1)\}^i \\
& - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\{(s+q-3)(s+q-4)..(s-r+q-2)\}^i \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \pm \frac{q(q-1)}{1.2}\{(s+2)(s+1)..(s-r+3)\}^i \\
& \mp \frac{q}{1}\{(s+1)s(s-1)..(s-r+2)\}^i \\
& \pm \{s(s-1)(s-2)..(s-r+1)\}^i ,
\end{aligned}
$$

wobei nur zu bemerken ist, daß die Reihe a. a. O. des angezogenen Artikels umgekehrt werden muß;

$$
\begin{aligned}
= & \quad \{n(n-1)..(n-r+1)\}^i \\
& - \frac{q}{1}\{(n-1)(n-2)..(n-r)\}^i \\
& + \frac{q(q-1)}{1.2}\{(n-2)(n-3)..(n-r-1)\}^i \\
& - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\{(n-3)(n-4)..(n-r-2)\}^i \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \mp \frac{q}{1}\{(n-q+1)(n-q)..(n-q-r+2)\}^i \\
& \pm \{(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\}^i
\end{aligned}
$$

welches noch durch

$$\{n(n-1)..(n-r+1)\}^i$$

dividirt werden muß, um die Probabilität zu erhalten. Dadurch erhält man leicht für die Probabilität, daß in i Ziehungen q Nummern herauskommen, folgenden Ausdruck:

$$1 - \frac{q}{1}\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i$$
$$+ \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right\}^i$$
$$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{n(n-1)(n-2)}\right\}^i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp \frac{q}{1}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+2)}{n(n-1)..(n-q+2)}\right\}^i$$
$$\pm \left\{\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+1)}{n(n-1)..(n-q+1)}\right\}^i.$$

Setzt man hierin $q = n$; so erhält man leicht die schon oben (52. 53.) gefundenen Ausdrücke für die Probabilität, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen. Man sieht, daß Laplace's scharfsinnige Auflösung allgemeiner ist, als die von Euler gegebene.

55. Laplace's großes Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht bloß wichtig wegen der vielen schwierigen und merkwürdigen Aufgaben, deren Auflösung es enthält, sondern auch wegen der vielen neuen analytischen Methoden, vorzüglich der schönen Approximationsmethoden, die in demselben angewandt werden, größtentheils aber dem Verfasser so eigenthümlich sind, daß sich hier nur einzelne Beispiele beibringen lassen, wozu wir hier folgendes wählen.

Wird in jeder Ziehung nur eine Nummer gezogen, so ist die Probabilität, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen, nach dem Vorhergehenden =

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{n-3}{n}\right)^i + \ldots,$$

die Reihe fortgesetzt, bis sie abbricht. Laplace vergleicht diese Reihe mit der Reihe

$$1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3i} + .. = \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n$$

deren erste beiden Glieder mit den beiden ersten Gliedern

jener Reihe übereinstimmen. Vergleicht man überhaupt die Factoren

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i \text{ und } \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

zweier gleichstelligen Glieder mit einander, und nimmt die Logarithmen; so erhält man

$$\log n\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = i \log n\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{m^2 i}{n^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{m^3 i}{n^3} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{m^4 i}{n^4} - \ldots,$$

$$\log n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi} = mi \log n\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{mi}{n^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{mi}{n^3} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{mi}{n^4} - \ldots.$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen stimmen mit einander überein. Ist also n eine sehr große Zahl, und man vernachlässigt die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$ an; so ist

$$\log\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \log n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi},$$

und folglich auch

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

näherungsweise. Der Unterschied wächst desto mehr, je größer m wird, wie aus dem Obigen erhellet. Wollte man nun z. B. die Anzahl von Ziehungen bestimmen, bei welchen für ein sehr großes n die obige Probabilität

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i} = \frac{1}{k}$$

wird; so setze man nach der so eben gedachten Nährungsmethode

$$\frac{1}{k} = \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n,$$

woraus man leicht erhält:

$$i = \frac{\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log(n-1) - \log n}.$$

Man nehme natürliche Logarithmen, und es sey

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z$$

so erhält man leicht

$$\frac{1}{n}\log_n k = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots,$$

oder, für $\frac{1}{n}\log_n k = y$:

$$y = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots.$$

Nun sey $z = Ay + By^2 + \ldots$; so erhält man durch Substitution

$$y = Ay + (B + \tfrac{1}{2}A^2)y^2 + \ldots;$$
$$A = 1,\ B + \tfrac{1}{2}A^2 = 0,\ B = -\tfrac{1}{2};$$
$$z = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \ldots = \frac{\log_n k}{n} - \frac{(\log_n k)^2}{2n^2} + \ldots.$$

Geht man nun bloß bis zu Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$; so erhält man

$$z = \frac{\log_n k}{n}\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\},$$

und folglich auch

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{\log_n k}{n}\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\},$$

$$\begin{aligned}\log_n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) &= \log_n(\log_n k) - \log_n n \\ &\quad + \log_n\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\} \\ &= \log_n(\log_n k) - \log_n n \\ &\quad - \frac{\log_n k}{2n} - \frac{(\log_n k)^2}{8n^2} - \ldots \\ &= \log_n(\log_n k) - \log_n n - \frac{\log_n k}{2n}.\end{aligned}$$

Ferner

$$\log_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \ldots.$$

Also nach dem Obigen

$$i = \frac{\log_n(\log_n k) - \log_n n - \frac{1}{2n}\log_n k}{-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \ldots}$$

$$= \frac{\log_n n - \log_n(\log_n k) + \frac{1}{2n}\log_n k}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots}$$

$$= \frac{n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\} + \frac{1}{2}\log n\, k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\log n\, k}{1 - \frac{1}{4n^2}}$$

$$= n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\log n\, k\,,$$

oder auch, wenn $\log n\, k$ klein, und n sehr groß ist,

$$i = n\left\{\log n\, n - \log n(\log n\, k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\log n\, k\,.$$

Für $n = 10000$, $k = 2$ findet Laplace nach einer andern annähernden Formel, die sich hier nicht entwickeln läßt, die Anzahl der Ziehungen $= 95767{,}4$.

Für $r = 5$ ist die Probabilität nach dem Obigen

$$= 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right\}^i - \ldots.$$

Diese Reihe vergleicht Laplace mit

$$1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \ldots = \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n.$$

Die ersten Glieder beider Reihen stimmen überein. Man kann daher näherungsweise die gesuchte Probabilität

$$= \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n$$

setzen. Soll dieselbe $= \frac{1}{2}$ werden; so findet man aus der Gleichung

$$\left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n = \frac{1}{2}$$

durch bekannte arithmetische Methoden

$$i = \frac{\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2} - 1}\right)}{\log\left(\frac{n}{n-5}\right)}.$$

Für $n = 90$ findet Laplace aus einer andern genauern Formel $i = 85{,}53$, und nach der hier entwickelten Formel $i = 85{,}204$, wo der Unterschied also $= 0{,}326$ beträgt. Werden also in jeder Ziehung 5 Nummern gezogen, so kann man, da die Probabilität, daß alle 90 Num-

mern herauskommen, $= \frac{1}{2}$ seyn soll, etwas weniger als Eins gegen Eins wetten, daß dies in 85, und etwas mehr als Eins gegen Eins, daß dies in 86 Ziehungen geschehe, in Bezug auf den erstern genauern Werth von $i = 85{,}53$.

56. Eine Urne enthalte x Kugeln; man soll die Wahrscheinlichkeit finden, daß man, indem man in die Urne hineingreift, eine gerade oder eine ungerade Anzahl Kugeln ergreifen werde.

Die Anzahl der Verbindungen der gegebenen Kugeln zu zwei, vier, sechs, u. s. f. ist (Combination 12.)

$$\frac{x(x-1)}{1.2}, \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}, \frac{x(x-1)\ldots(x-5)}{1.2.3\ldots6}, \ldots;$$

die Anzahl der Verbindungen zu eins, drei, fünf u. s. f. dagegen

$$\frac{x}{1}, \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}, \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-4)}{1.2.3.4.5}, \ldots.$$

Folglich die Anzahl aller möglichen Verbindungen der gegebenen Kugeln

$$= \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots - 1$$

$$= (1+1)^x - 1 = 2^x - 1.$$

Also nach der Lehre von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) die Probabilität, eine gerade Anzahl Kugeln zu ergreifen

$$= \frac{1}{2^x - 1}\left\{\frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)\ldots(x-3)}{1.2.3.4} + \frac{x\ldots(x-5)}{1\ldots6} + \ldots\right\},$$

und die Probabilität, eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{1}{2^x - 1}\left\{\frac{x}{1} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{x(x-1)\ldots(x-4)}{1.2\ldots5} + \ldots\right\}.$$

Aber

$$(1+1)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x\ldots(x-2)}{1.2.3} + \frac{x\ldots(x-3)}{1\ldots4} + \ldots,$$

$$(1-1)^x = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x\ldots(x-2)}{1.2.3} + \frac{x\ldots(x-3)}{1\ldots4} + \ldots.$$

Folglich durch Addition und Subtraction:

$$2^x = 2\left\{1 + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x..(x-3)}{1...4} + \frac{x..(x-5)}{1...6} + \cdots\right\},$$

$$2^x = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x..(x-2)}{1.2.3} + \frac{x..(x-4)}{1.2..5} + \cdots\right\}.$$

Also die Probabilität, eine gerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1},$$

und die Probabilität, eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}.$$

Die Summe beider Probabilitäten ist, wie es seyn muß, $= 1$. Auch ist klar, daß es wahrscheinlicher ist, eine ungerade, als eine gerade, Anzahl der Kugeln zu ergreifen. Es ist

$$2^{x-1} > 2^{x-1} - \tfrac{1}{2},\ 2^{x-1} > \tfrac{1}{2}\left\{2^x - 1\right\};$$

$$\frac{2^{x-1}}{2^x - 1} > \tfrac{1}{2},\ \text{also}\ \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1} < \tfrac{1}{2}.$$

Sey also $\frac{2^{x-1}}{2^x-1} = \frac{1}{2} + y$; so findet man leicht, wenn man aus dieser Gleichung y bestimmt,

$$\frac{2^{x-1}}{2^x - 1} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(2^x-1)},\ \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer x ist, desto kleiner wird der Bruch

$$\frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer also die Anzahl der Kugeln ist, desto mehr nähern sich die beiden Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Je kleiner x ist, desto mehr nähert sich obiger Bruch dem Bruche $\frac{1}{2}$, also die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu greifen, der Gewißheit, die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu greifen, dagegen der Null, d. i. der Unmöglichkeit. Für $x = 1$ wird erstere Wahrscheinlichkeit wirklich $= 1$, letztere $= 0$.

57. Ist x unbekannt, und bloß bestimmt, daß es nicht $> n$ sey, also selbst alle Werthe von 1 bis n haben kann; so ist jetzt die Anzahl aller möglichen Fälle nach (56.)

$$= (2-1) + (2^2-1) + (2^3-1) + (2^4-1) + \ldots + (2^n-1)$$
$$= 2^{n+1} - n - 2.$$

Also die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von Kugeln zu greifen, nach (8.) und (56.)

$$= \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}}{2^{n+1} - n - 2} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}.$$

und die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln zu greifen,

$$= \frac{(2^0 - 1) + (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \ldots + (2^{n-1} - 1)}{2^{n+1} - n - 2} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2}.$$

Erstere Wahrscheinlichkeit ist wieder größer als letztere, und die Summe beider, wie es seyn muß, $= 1$.

58. Die Urne enthalte jetzt x weiße und eben so viele schwarze Kugeln; man sucht die Wahrscheinlichkeit, bei dem Ziehen irgend einer geraden Anzahl von Kugeln halb weiße und halb schwarze Kugeln zu ziehen.

Die Mengen der Fälle eine, zwei, drei, vier, u. s. f. Kugeln von jeder Farbe zu ziehen, sind nach dem Vorhergehenden (56.)

$$\left[\frac{x}{1}\right], \left[\frac{x}{2}\right], \left[\frac{x}{3}\right], \left[\frac{x}{4}\right], \left[\frac{x}{5}\right], \ldots$$

Da sich nun jede einzelne Combination weißer Kugeln mit jeder einzelnen Combination derselben Klasse schwarzer Kugeln verbinden kann; so sind die Mengen der Fälle eine weiße und eine schwarze Kugel, zwei weiße und zwei schwarze, drei weiße und drei schwarze Kugeln zu ziehen, u. s. f.

$$\left[\frac{x}{1}\right]^2, \left[\frac{x}{2}\right]^2, \left[\frac{x}{3}\right]^2, \left[\frac{x}{4}\right]^2, \left[\frac{x}{5}\right]^2, \ldots$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle also, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln zu ziehen, ist

$$= \left[\frac{x}{1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{3}\right]^2 + \left[\frac{x}{4}\right]^2 + \left[\frac{x}{5}\right]^2 + \ldots$$

$$= 1 + \left[\frac{x}{1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{3}\right]^2 + \left[\frac{x}{4}\right]^2 + \ldots - 1$$

$$= \left[\frac{2x}{x}\right] - 1$$ (Binomial-Coefficienten. 17. S. 318.).

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist nach (56.) $= 2^{2x-1} - 1$, da man voraussetzt, daß jedes Mal eine ge-

rade Anzahl von Kugeln gezogen werde. Folglich die gesuchte Probabilität

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x-1} - 1}.$$

Setzte man nicht voraus, daß immer eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen, sondern ganz willkührlich in die Urne gegriffen würde; so wäre die Anzahl aller Fälle $= 2^{2x} - 1$, und folglich unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln zu ziehen,

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x} - 1}.$$

Auch ist

$$\left[\frac{2x}{x}\right] = \frac{2x(2x-1)\ldots\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots x}$$

$$= \frac{2x(2x-1)\ldots(x+1).x(x-1)\ldots 1}{1.2.3\ldots x\,.\,1.2.3\ldots x}$$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots\ldots x\}^2}.$$

Folglich obige beide Probabilitäten

$$= \frac{\frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots x\}^2} - 1}{2^{2x-1} - 1},$$

$$\text{und} = \frac{\frac{1.2.3.4\ldots 2x}{\{1.2.3\ldots x\}^2} - 1}{2^{2x} - 1}.$$

59. Nach dem Artikel Binomial-Coefficienten (16.) ist immer

$$\left[\frac{2x}{x}\right] < 2^{2x}.\sqrt{\frac{1}{x\pi}},\ \left[\frac{2x}{x}\right] > 2^{2x}.\sqrt{\frac{2}{(2x+1)\pi}}.$$

Das Verhältniß dieser Gränzen ist, wie man leicht findet,

$$= \sqrt{\frac{2x+1}{2x}},$$

und wird, wenn man $x + 1$ für x setzt,

$$= \sqrt{\frac{2x+3}{2x+2}}.$$

Sey nun

$$\Gamma\frac{2x+1}{2x} = 1 + \alpha, \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} = 1 + \alpha'.$$

Da

$$\frac{2x+3}{2x+2} = \frac{2x+2+1}{2x+2} = 1 + \frac{1}{2x+2}, \quad \frac{2x+1}{2x} = 1 + \frac{1}{2x}$$

ist; so ist offenbar

$$\frac{2x+3}{2x+2} < \frac{2x+1}{2x}, \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} < \Gamma\frac{2x+1}{2x}.$$

Also $\alpha' < \alpha$, und das Verhältniß obiger Gränzen kommt also dem Verhältnisse der Gleichheit desto näher, je größer x ist. Ist also x sehr groß, so kann man offenbar die Probabilität

$$\frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x-1} - 1} = \frac{\left[\frac{2x}{x}\right]}{2^{2x-1}}$$

setzen, wodurch die Größe dieses Bruchs nicht merklich geändert wird. Denn sey überhaupt

$$\frac{p-1}{q-1} = \frac{p}{q} + z; \text{ so ist}$$

$$z = \frac{p-1}{q-1} - \frac{p}{q} = \frac{p-q}{q(q-1)},$$

offenbar ein sehr kleiner Bruch, wenn q sehr groß ist. Annähernd kann man aber auch

$$\left[\frac{2x}{x}\right] = 2^{2x}\Gamma\frac{1}{x\pi}$$

setzen, wodurch man obige Probabilität

$$= \frac{2^{2x}}{2^{2x-1}}\Gamma\frac{1}{x\pi} = 2\Gamma\frac{1}{x\pi} = \frac{2}{\Gamma x\pi}$$

erhält, wie auch Laplace a. a. O. p. 203 findet.

60. Man habe jetzt $x + x'$ Urnen, von denen die erste p weiße und q schwarze, die zweite p' weiße und q' schwarze, die dritte p'' weiße und q'' schwarze Kugeln enthalte, u. s. f. Man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß, indem man nach der Reihe aus jeder Urne eine Kugel nimmt, x weiße und x' schwarze Kugeln gezogen werden.

Bei der ersten Ziehung sind offenbar $p + q$ verschiedene Fälle möglich, und eben so $p' + q'$ bei der zweiten. Jeder der ersten kann sich mit jedem der zweiten Fälle verbinden,

welches für die beiden ersten Ziehungen $(p+q)(p'+q')$ verschiedene Fälle giebt. Jeder dieser Fälle kann sich wieder mit jedem der $p''+q''$ bei der dritten Ziehung möglichen Fälle verbinden, welches für die drei ersten Ziehungen überhaupt $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ verschiedene Fälle giebt. Eben so erhält man für alle Ziehungen die Anzahl der möglichen Fälle

$$=(p+q)(p'+q')(p''+q'')(p'''+q''')\ldots.$$

Um nun die Anzahl der günstigen Fälle zu bestimmen, wollen wir zuerst die Anzahl der Fälle suchen, in welchen x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen gezogen werden können. Diese x weißen Kugeln sind offenbar aus x Urnen gezogen, und da sich jede der in der ersten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln mit jeder der in der zweiten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln, jede dieser Verbindungen zu zweien sich wieder mit jeder der in der dritten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln verbinden kann, u. s. f.; so giebt das Product der Zahlen, welche anzeigen, wie oft eine weiße Kugel in jeder dieser x Urnen enthalten ist, die Anzahl der möglichen Arten, aus den genannten x Urnen x weiße Kugeln zu ziehen. Da aber diese x Urnen ganz willkührlich sind; so erhellet, wenn man sich die $x+x'$ gegebenen Urnen auf alle mögliche Arten zu x (natürlich ohne Wiederholungen) combinirt denkt, daß man die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen zu ziehen, erhält, wenn man für die Elementenreihe

$$p, p', p'', p''', p'''', \ldots\ldots$$

die $x$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen entwickelt, und jede Combination als ein Product der in ihr enthaltenen Elemente betrachtet. Das Aggregat dieser Combinationen, welches wir durch C bezeichnen wollen, ist dann die gesuchte Zahl.

Jede Art, aus x bestimmten Urnen x weiße Kugeln zu ziehen, kann sich nun aber mit jeder Art, aus den übrigen x' Urnen x' schwarze Kugeln zu ziehen verbinden, so daß man also die Anzahl aller Arten, aus den gegebenen $x+x'$ Urnen x weiße und x' schwarze Kugeln zu ziehen, erhält,

wenn man jeder der in C enthaltenen Combinationen noch x' qs beifügt, und diesen qs die Indices giebt, welche die in der entsprechenden Combination vorkommenden p noch nicht haben. Das Aggregat der so erhaltenen Producte, welches wir durch A bezeichnen wollen, ist nun die gesuchte Anzahl der günstigen Fälle, und folglich die gesuchte Probabilität

$$= \frac{A}{(p+q)(p'+q')(p''+q'')(p'''+q''')\ldots}$$

61. Wäre $p = p' = p'' = p''' = \ldots$, $q = q' = q'' = q''' = \ldots$; so wird der Nenner, da $x + x'$ die Anzahl der Urnen, $= (p+q)^{x+x'}$, und jeder Theil des Zählers wird $= p^x q^{x'}$. Die Anzahl dieser Theile ist der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen der xten Klasse für $x + x'$ Elemente gleich, d. i.

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x}.$$

Folglich die gesuchte Probabilität in diesem Falle

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x} \cdot \frac{p^x q^{x'}}{(p+q)^{x+x'}}$$

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'}.$$

62. Hat man $x + x' + x''$ Urnen, die nach der Reihe $p, q, r; p', q', r'; p'', q'', r''; p''', q''', r'''$; u. s. f. weiße, schwarze und rothe Kugeln enthalten, und man will die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß man, wenn man aus jeder Urne eine Kugel nimmt, x weiße, x' schwarze und x'' rothe Kugeln ziehen werde; so ist, wie vorher, die Anzahl aller möglichen Fälle

$$= (p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots.$$

Alle Arten, x weiße Kugeln zu ziehen, erhält man, wie vorher, wenn man die xte Combinationsclasse ohne Wiederholungen für die Elementenreihe

$$p, p', p'', p''', p'''', \ldots.$$

bildet, und das Aggregat derselben $= C$ setzt. Bei jeder einzelnen Art, x weiße Kugeln zu ziehen, bleiben noch $x' + x''$ Urnen übrig. Aus diesen lassen sich x' schwarze Kugeln auf so viele verschiedene Arten ziehen, als das

Aggregat der Combinationen anzeigt, welche man erhält, wenn man die x'te Combinationsklasse ohne Wiederholungen für die den noch übrigen $x' + x''$ Urnen entsprechenden q bildet. Um also die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße und x' schwarze Kugeln zu ziehen, zu erhalten, muß man jede einzelne der in C enthaltenen Combinationen in die x'te Combinationsklasse der $x' + x''$ qs multipliciren, welche die noch nicht bei den p der entsprechenden Combination befindlichen Indices tragen. Das Aggregat aller auf diese Weise erhaltenen Producte, jedes in seine einzelnen Theile zerlegt, sey $= C'$. Will man nun endlich die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße, x' schwarze und x'' rothe Kugeln zu ziehen, erhalten; so muß man jeden der einzelnen in C' enthaltenen Theile mit x'' rs verbinden, und letzteren die noch nicht bei p oder q der entsprechenden Theile von C' befindlichen Indices beifügen. Setzt man das so erhaltene Aggregat wieder $= A'$; so ist die Probabilität, x weiße, x' schwarze, x'' rothe Kugeln aus $x + x' + x''$ Urnen nach der Reihe zu ziehen,

$$= \frac{A'}{(p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots}.$$

63. Für $p = p' = p'' = p''' = \ldots$, $q = q' = q'' = q''' = \ldots$, $r = r' = r'' = r''' = \ldots$ wird der Nenner $= (p+q+r)^{x+x'+x''}$, und jeder Theil des Zählers $= p^x q^{x'} r^{x''}$. Die Anzahl dieser Theile ist nach dem Vorigen offenbar

$$= \frac{(x+x'+x'')(x+x'+x''-1)\ldots(x'+x''+1)}{1.2.3.4\ldots x} \cdot \frac{(x'+x'')\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots x'}$$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}.$$

Folglich die Probabilität in diesem Falle

$$= \frac{1.2\ldots(x+x'+x'')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''} \cdot \frac{p^x q^{x'} r^{x''}}{(p+q+r)^{x+x'+x''}}$$

$$= \frac{1.2\ldots(x+x'+x'')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''} \cdot \left(\frac{p}{p+q+r}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''}$$

wo $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$.

die Probabilitäten sind, aus jeder Urne eine weiße, oder eine schwarze, oder eine rothe Kugel zu ziehn.

64. Es erhellet leicht, wie man auf diese Art weiter gehen kann. Für $x + x' + x' + x'''$ Urnen mit $p, q, r, s; p', q' r', s'; p'', q'', r'', s''$; u. s. f. weißen, schwarzen, rothen und gelben Kugeln, erhält man, wenn man auf ähnliche Art wie vorher A und A′ das Aggregat A″ bildet, die Probabilität, x weiße, x′ schwarze, x″ rothe und x‴ gelbe Kugeln aus den $x + x' + x'' + x'''$ Urnen zu ziehen, wenn man aus jeder eine zieht,

$$= \frac{A''}{(p+q+r+s)(p'+q'+r'+s')(p''+q''+r''+s'')\ldots},$$

und, wenn $p = p' = p'' = \ldots$, $q = q' = q'' = \ldots$, $r = r' = r'' = \ldots$, $s = s' = s'' = \ldots$, ist,

$$= \frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x''')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''.1\ldots x'''}$$

$$\times \left(\frac{p}{p+q+r+s}\right)^{x} \cdot \left(\frac{q}{p+q+r+s}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r+s}\right)^{x''} \cdot \left(\frac{s}{p+q+r+s}\right)^{x'''}.$$

Diese Aufgaben leiten uns zu folgendem sehr wichtigen Theile der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen.

65. Unter wiederholten Versuchen werden hier z. B. die mehrmaligen Würfe mit derselben Anzahl gleicher Würfel, die Züge von Kugeln, welche man aus einer Urne nimmt, nach jedem Zuge aber immer wieder in die Urne hineinlegt, um immer dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle jeder Art zu behalten, u. dgl. Sind nun p und $p' = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeiten zweier einander entgegengesetzten Ereignisse, und man will die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in $x + x'$ Versuchen das erste Ereigniß xmal, das zweite x′mal eintreffe; so erhellet leicht, daß diese Aufgabe mit der in (60.) aufgelösten Aufgabe: die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß aus $x + x'$ Urnen, deren jede eine gewisse gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, wenn nach der Reihe aus jeder Urne eine Kugel genommen wird, also in $x + x'$ Zügen, x weiße und x′ schwarze Kugeln gezogen worden, iden-

tisch ist. Setzt man also p und p′ für die dortigen $\frac{p}{p+q}$ und $\frac{q}{p+q}$; so erhält man die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1.2.3\ldots.(x+x')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'} p^x p'^{x'}.$$

Eben so leicht erhellet, daß die allgemeinere Aufgabe: die Probabilität zu bestimmen, daß bei mehrern Ereignissen, deren Probabilitäten p, p′, p″, p‴,.... sind, so daß

$$p + p' + p'' + p''' + \ldots. = 1$$

ist, in $x + x' + x'' + x''' + \ldots$ Versuchen das erste Ereigniß xmal, das zweite x′mal, das dritte x″mal eintreffe u. s. f. mit der in (63.) und (64.) aufgelösten allgemeinern Aufgabe identisch, und die gesuchte Probabilität folglich

$$= \frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x'''+\ldots)}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''.1\ldots x'''\ldots} p^x p'^{x'} p''^{x''} \ldots.$$

ist.

66. Die Probabilität

$$\frac{1.2.3\ldots(x+x')}{1\ldots x.1\ldots x'} p^x p'^{x'}$$

wird leicht auf folgenden Ausdruck gebracht:

$$\left[\frac{x+x'}{x'}\right] p^{x+x'-x'} p'^{x'},$$

welches das $(x' + 1)$te Glied in der Entwickelung von $(p + p')^{x+x'}$ ist. Setzen wir nun $x + x' = \alpha$, so drücken die Glieder der Entwickelung von $(p + p')^\alpha$ nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten aus, daß in α Versuchen das in Rede stehende Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, αmal und das entgegengesetzte kein Mal, $(\alpha - 1)$mal und das entgegengesetzte ein Mal; $(\alpha - 2)$mal und das entgegengesetzte zwei Mal eintreffe, u. s. f.

67. Soll das in Rede stehende Ereigniß in α Versuchen wenigstens $(\alpha - \beta)$mal, wo natürlich $\beta < \alpha$ ist, eintreffen, so kann es αmal, $(\alpha - 1)$mal, $(\alpha - 2)$mal,... $(\alpha - \beta + 1)$mal, $(\alpha - \beta)$mal eintreffen, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall von diesen statt finde, ist nach (8.) und dem Vorhergehenden

$$= p^\alpha + \frac{\alpha}{1} p^{\alpha-1} p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} p^{\alpha-2} p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta} p^{\alpha-\beta} p'^\beta$$
$$= p^\alpha \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{p'}{p} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta} \left(\frac{p'}{p}\right)^\beta \right\}$$
$$= p^\alpha \left(1 + \frac{p'}{p}\right)^\beta \left\{ 1 + \frac{\alpha-\beta}{1} \cdot \frac{p'}{p+p'} \right.$$
$$+ \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2} \left(\frac{p'}{p+p'}\right)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\beta} \left(\frac{p'}{p+p'}\right)^\beta \right\}$$

(s. Umformung der Reihen 19.) oder, da $p + p' = 1$ ist,

$$= p^{\alpha-\beta} \left\{ 1 + \frac{\alpha-\beta}{1} p' + \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2} p'^2 \right.$$
$$+ \frac{(\alpha-\beta+2)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2.3} p'^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\beta} p'^\beta \right\}$$

und, wenn man $\alpha - \beta = \gamma$ setzt, obige Probabilität

$$= p^\gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma}{1}(1-p) \right.$$
$$+ \frac{(\gamma+1)\gamma}{1.2}(1-p)^2$$
$$+ \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)\gamma}{1.2.3}(1-p)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma} \right\}$$

wodurch also die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, in α Versuchen wenigstens γmal eintreffe. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in 4 Würfen wenigstens zwei Mal 6 zu werfen, ist

$$= \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left\{ 1 + \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{5}{6} + \frac{3 \cdot 2}{1.2} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \right\} = \tfrac{12}{144}, > \tfrac{1}{8}, < \tfrac{1}{7}.$$

68. Soll man die Anzahl von Versuchen finden, welche nöthig ist, damit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß,

dessen Probabilität $= p$ ist, wenigstens γmal eintrifft, $= w$ wird; so muß man aus der Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1} p^{\alpha-1} p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} p^{\alpha-2} p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\gamma+1)}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)} p^\gamma p'^{\alpha-\gamma}$$
$$= p^\gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma}{1}(1-p) + \frac{(\gamma+1)\gamma}{1.2}(1-p)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma} \right\}$$

wo p, p', γ, w bekannt sind, α bestimmen.

Für $\gamma = 1$ wird diese Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1} p^{\alpha-1} p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} p^{\alpha-2} p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1.2.3..(\alpha-1)} p\, p'^{\alpha-1}$$
$$= p \left\{ 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{\alpha-1} \right\}$$
$$= p \cdot \frac{(1-p)^\alpha - 1}{1-p-1} = 1 - (1-p)^\alpha \text{ (Geom. Reihe. 4.)}.$$

Also

$$(1-p)^\alpha = 1 - w,$$

woraus durch Logarithmen

$$\alpha = \frac{\log(1-w)}{\log(1-p)},$$

und, wenn man

$$1 - w = \frac{v}{v'},\ 1 - p = \frac{u}{u'}$$

setzt,

$$\alpha = \frac{\log v - \log v'}{\log u - \log u'} = \frac{\log v' - \log v}{\log u' - \log u}.$$

Sey z. B. die Anzahl der Würfe mit zwei Würfeln zu bestimmen, bei welcher es eben so wahrscheinlich ist, zwei Sechsen zu werfen, als nicht; so ist $w = \frac{1}{2}$, $1 - w = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v' = 2$, $p = \frac{1}{36}$, $1 - p = \frac{35}{36}$, $u = 35$, $u' = 36$; also

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6.$$

Wirft man also nur 24 Mal, so ist es wahrscheinlicher, nicht zwei Sechsen zu werfen; wirft man aber 25 Mal, so ist es wahrscheinlicher zwei Sechsen zu werfen, als nicht.

69. Will man bestimmen, wie oft bei α Versuchen das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$, und dessen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= p'$ ist, am wahrscheinlichsten eintrifft; so muß man offenbar (66.) in der Entwickelung von $(p + p')^\alpha$ das größte Glied ausmitteln. Das $(k+1)$te Glied sey $=$

$$\left[\frac{\alpha}{k}\right] p^{\alpha-k} p'^{k} = t\,.$$

Das nächst vorhergehende und nächstfolgende Glied sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k-1}\right] p^{\alpha-k+1} p'^{k-1} = {}'t\,,\ \left[\frac{\alpha}{k+1}\right] p^{\alpha-k-1} p'^{k+1} = t'\,,$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}\,.$$

Betrachten wir nun zuerst den einfachsten Fall, wo $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ ist; so ist

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1},\ t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}\,.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe seyen A, B, C, D, E, ...; so ist hiernach

$$A = 1,\ B = A.\frac{\alpha}{1},\ C = B.\frac{\alpha-1}{2},\ D = C.\frac{\alpha-2}{3},\ \ldots$$

$$\ldots\ t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1},\ \ldots\ldots$$

woraus sogleich erhellet, daß diese Glieder so lange zunehmen, so lange $\alpha - k > k + 1$, $k < \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ ist. Ist α eine gerade Zahl, $= 2\beta$; so hat man also $k < \frac{1}{2}(2\beta - 1)$, $< \beta - \frac{1}{2}$. Folglich nehmen die Glieder zu, bis $k = \beta - 1$, $k + 1 = \beta$, d. i. bis zum $(\beta+1)$ten Gliede, welches $= t'$, da t das $(k+1)$te $= \beta$te, also t' das $(k+2)$te $= (\beta+1)$te Glied ist. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t'.\frac{2\beta-\beta}{\beta+1} = t'.\frac{\beta}{\beta+1}\,,$$

$$t''' = t''.\frac{2\beta-(\beta+1)}{\beta+2} = t''.\frac{\beta-1}{\beta+2}\,,$$

$$t'''' = t'''.\frac{2\beta-(\beta+2)}{\beta+3} = t'''.\frac{\beta-2}{\beta+3}\,,$$

. . . . . .

und nehmen folglich offenbar fortwährend ab. Das Glied t' ist also in diesem Falle das größte. Da die Entwicke-

lung von $(p + p')^{2\beta}$ bekanntlich $2\beta + 1 = \beta + 1 + \beta$ Glieder hat; so ist t' in dieser Entwickelung das mittelste Glied

$$= \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] p^{2\beta-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2\beta}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\frac{1}{2}\alpha+1)}{1.2.3\ldots.\frac{1}{2}\alpha} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\alpha}.$$

Es ist also am wahrscheinlichsten, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist, in α Versuchen $2\beta - \beta = \beta = \frac{1}{2}\alpha$mal eintrifft, und die Wahrscheinlichkeit, daß dies wirklich geschehe, wird durch obigen Ausdruck dargestellt.

Ist α eine ungerade Zahl, $= 2\beta + 1$; so hat man nach dem Obigen $k < \frac{1}{2}(2\beta + 1 - 1)$, $< \beta$, so daß also die Glieder zunehmen bis $k = \beta - 1$, $k + 1 = \beta$, also wieder bis t'. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' \cdot \frac{2\beta + 1 - \beta}{\beta + 1} = t' \cdot \frac{\beta + 1}{\beta + 1},$$

$$t''' = t'' \cdot \frac{2\beta + 1 - (\beta + 1)}{\beta + 2} = t'' \cdot \frac{\beta}{\beta + 2},$$

$$t'''' = t''' \cdot \frac{2\beta + 1 - (\beta + 2)}{\beta + 3} = t''' \cdot \frac{\beta - 1}{\beta + 3},$$

. . . . . .

und nehmen folglich von t'' an, welches $= t'$ ist, ab. Die größte Wahrscheinlichkeit ist also entweder t' oder t''. Da nun t' das $(\beta + 1)$te, t'' das $(\beta + 2)$te Glied ist, so ist die Wahrscheinlichkeit am größten, daß das Ereigniß entweder $2\beta + 1 - \beta = \beta + 1$, oder $2\beta + 1 - (\beta + 1) = \beta$mal eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist

$$= \left[\frac{2\beta + 1}{\beta}\right] p^{2\beta+1-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta + 1}{\beta}\right] \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\left(\frac{\alpha+1}{2} + 1\right)}{1.2.3\ldots.\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\alpha},$$

Da $(p + p')^{2\beta+1}$ bekanntlich $2\beta + 2 = \beta + 1 + 1 + \beta$ Glieder hat; so ist obige Wahrscheinlichkeit ebenfalls das mittelste Glied, wobei jedoch zu bemerken, daß hier zwei Mittelglieder vorkommen, die aber einander gleich sind.

70. In dem Falle, wo α eine gerade Zahl, $= 2\beta$, ist, sind nach dem Art. Binomial-Coefficienten (16.) die Gränzen der Probabilität

$$2^{2\beta}.\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}.(\tfrac{1}{2})^{2\beta},\ 2^{2\beta}.\sqrt{\frac{1}{2\beta\pi}}.(\tfrac{1}{2})^{2\beta};$$

$$\text{d. i. } \sqrt{\frac{2}{(\alpha+1)\pi}} \text{ und } \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}},$$

und diese Gränzen kommen einander offenbar desto näher, je größer α ist.

Für $\alpha = 2\beta + 1$ ist die Probabilität

$$= \left[\frac{2\beta+1}{2\beta}\right].(\tfrac{1}{2})^{\alpha} = \frac{2\beta+1}{\beta+1}.\left[\frac{2\beta}{\beta}\right].(\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Folglich die Gränzen derselben:

$$\frac{2\beta+1}{\beta+1}.2^{2\beta}.\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}.(\tfrac{1}{2})^{\alpha},\ \frac{2\beta+1}{\beta+1}.2^{2\beta}.\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}.(\tfrac{1}{2})^{\alpha};$$

$$\text{d. i. } \frac{2\beta+1}{\beta+1}.\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}.\tfrac{1}{2},\ \frac{2\beta+1}{\beta+1}.\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}.\tfrac{1}{2};$$

$$\text{oder } \frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \text{ und } \frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{(\alpha-1)\pi}}.$$

71. Andere Nährungsausdrücke erhält man auf folgende Art. Nach Thl. IV. S. 663. ist

$$\begin{aligned}
&\log n\,1 + \log n\,2 + \log n\,3 + \log n\,3 + \log n\,4 + \ldots + \log n\,x \\
&= \tfrac{1}{2}\log n\,2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n\,x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \ldots \\
&= \log n\,(1.2.3.4\ldots.x) \\
&= \tfrac{1}{2}\log n\,2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n\,x + \log n\,e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}
\end{aligned}$$

wenn e, wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Für die Bernoullischen Zahlen müssen a. a. O. ihre Werthe gesetzt werden (Thl. I. S. 254.). Also

$$\begin{aligned}
1.2.3..x &= \sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots} \\
&= \sqrt{2\pi}.\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^{x}}.e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}.
\end{aligned}$$

Hat man nun im Allgemeinen das Product

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1) = \frac{1.2.3\ldots.\alpha}{1.2.3\ldots(\alpha-\beta)};$$

so erhält man mittelst der gefundenen Formel

$$\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-\beta+1)$$

$$=\left\{\sqrt{2\pi}\,.\,\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha}}\,.\,e^{\frac{1}{12\alpha}-\frac{1}{360\alpha^3}+\cdots}\right\}$$

$$:\left\{\sqrt{2\pi}\,.\,\frac{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha-\beta}}\,.\,e^{\frac{1}{12(\alpha-\beta)}-\frac{1}{360(\alpha-\beta)^3}+\cdots}\right\}$$

$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\,.\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\cdots}.$$

Folglich der Binomial-Coefficient

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\,.\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\cdots}$$

$$:\sqrt{2\pi}\,.\,\frac{\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}}\,.\,e^{\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\cdots}.$$

$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\,.\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

ein Nährungsausdruck für jeden Binomial-Coefficienten, welchen man, wenn die Anzahl der Factoren sehr groß ist, mit Vortheil gebrauchen wird. Für $\alpha=2\beta$ wird

$$\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]=\frac{(2\beta)^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\,.\,\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

$$=\frac{2^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,\beta^{\frac{1}{2}}}\,.\,e^{-\frac{1}{8\beta}-\cdots}=\frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}\,.\,e^{-\frac{1}{8\beta}-\cdots}.$$

Für $\alpha=2\beta+1$ wird

$$\left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right]=\frac{(2\beta+1)^{2\beta+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\,.\,(\beta+1)^{\beta+\frac{3}{2}}}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta+1}-\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\beta}\right\}-\cdots}$$

Nährungsausdrücke für die obige Probabilität lassen sich hieraus nun leicht construiren.

72. Gehen wir nun zu dem allgemeinern Falle über, wenn die Wahrscheinlichkeit nicht $=\frac{1}{2}$ ist; so ist, wenn das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$ das

$(k+1)$te ist, und $= t$ gesetzt, übrigens ganz die vorige Bezeichnung beibehalten wird, wie vorher (69.):

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}.$$

Folglich ist, da nach der Bedingung der Aufgabe $t > 't$, $t > t'$ seyn muß,

$$t > t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ t > t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p},$$

woraus man leicht findet:

$$k < (\alpha+1)(1-p),\ k > \alpha(1-p)-p;$$
$$k < \alpha(1-p)-p+1,\ k > \alpha(1-p)-p,$$

so daß also k die größte in $\alpha(1-p)-p+1$ enthaltene ganze Zahl, oder die ganze Zahl ist, welche zunächst $> \alpha(1-p)-p$ ist. Die vor dem t vorhergehenden, und auf t folgenden Glieder sind

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},$$
$$''t = 't.\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},$$
$$'''t = ''t.\frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$
$$\text{und } t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{1},$$
$$t'' = t'.\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},$$
$$t''' = t''.\frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Da nun k nach dem Obigen so bestimmt worden ist, daß $'t < t$, $t' < t$ ist; so sind

$$\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ \frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p};$$

folglich um so mehr

$$\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-3}{\alpha-k+4}.\frac{p}{1-p},\ldots$$
$$\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-3}{k+4}.\frac{1-p}{p},\ldots$$

echte Brüche, und demnach t, $'t$, $''t$, $'''t$, ...; t, t',

t'', t''', ... zwei abnehmende Reihen, also t das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$.

73. Setzt man, da k die ganze Zahl ist, welche zunächst größer als $\alpha(1-p)-p$ ist,

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo δ einen echten Bruch bezeichnet; so erhält man leicht

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k+\delta}{k-\delta+1}.$$

Je größer k und $\alpha - k$ sind, desto genauer ist, da $\delta < 1$,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k}{k}.$$

Da nun $\alpha - k$ und k die Exponenten von p und $p' = 1-p$ in dem durch t bezeichneten Gliede sind (69.); so erhellet aus dem Vorhergehenden und aus (66.) leicht, daß bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen zur Hervorbringung eines Ereignisses oder seines entgegengesetzten die wahrscheinlichste Verbindung dieser Ereignisse die ist, in welcher jedes derselben seiner Probabilität proportional wiederholt vorkommt.

74. Das $l$te Glied nach oder vor dem größten, d. h. das $(k+1\pm l)$te oder $(k+1+l)$te Glied, wenn man l gehörig positiv und negativ nimmt, ist

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k-l+1)}{1.2.3\ldots(k+l)} p^{\alpha-k-l}(1-p)^{k+l}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(k'-l).1.2.3\ldots(k+l)} p^{k'-l}(1-p)^{k+l},$$

für $k + k' = \alpha$.

Eine Nährungsformel zur Berechnung dieses Gliedes erhält man auf folgende Art. Nach (71.) ist, wenn man sich die Potenz von e mit dem zusammengesetzten Exponenten entwickelt denkt:

$$1.2.3\ldots\alpha = \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}.\sqrt{2\pi}.\left\{1+\frac{1}{12\alpha}+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k'-l)} = (k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k'-l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k'-l)}-\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k+l)} = (k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k+l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k+l)}-\ldots\right\}.$$

Der hyperbolische Logarithmus von $(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$ ist

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\operatorname{logn} k' + \operatorname{logn}\left(1-\frac{l}{k'}\right)\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\operatorname{logn} k' - \frac{l}{k'} - \frac{l^2}{2k'^2} - \frac{l^3}{3k'^3} - \dots\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\operatorname{logn} k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$+ \frac{l^2}{4k'}\cdot\frac{l}{k'} + \frac{l^2}{6k'}\cdot\frac{l}{k'^2} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'^2} + \dots$$

$$- \tfrac{1}{12}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'} - \tfrac{1}{20}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'^2} - \tfrac{1}{30}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^3\cdot\frac{l}{k'^2} - \dots.$$

Nimmt man nun l im Verhältniß zu k' nur klein an, so daß nur erst l^2 mit k' verglichen werden kann; so erhält man nährungsweise hieraus

$$\operatorname{logn}(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\operatorname{logn} k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$= \operatorname{logn} k'^{l-k'-\frac{1}{2}} + \operatorname{logn} e^{l+\frac{l}{2k'}-\frac{l^2}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}},$$

und folglich

$$(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{l-\frac{l^2}{2k'}}\cdot k'^{l-k'-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1+\frac{l}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}\right\};$$

also auch $(k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}}$

$$= e^{-l-\frac{l^2}{2k}}\cdot k^{-l-k-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1-\frac{l}{2k}+\frac{l^3}{6k^2}\right\}.$$

Ferner ist nach dem Obigen aus der Gleichung

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo $\delta < 1$ ist:

$$p = \frac{\alpha-k+\delta}{\alpha+1} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}.$$

Setzt man nun $p = \frac{k'-z}{\alpha}$; so ist $z < 1$. Denn aus der Gleichung

$$\frac{k'-z}{\alpha} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}$$

erhält man leicht:

$$z = \frac{k'-\alpha\delta}{\alpha+1}.$$

Aber $k + k' = \alpha$; also $k' < \alpha + 1$, und um so mehr $k' - \alpha\delta < \alpha + 1$, wenn $\alpha\delta < k'$ ist. Ist aber $\alpha\delta > k'$, so ist, weil $\delta < 1$ ist, doch $\alpha\delta < \alpha$, $\alpha\delta - k' < \alpha$, $< \alpha + 1$. Folglich, ohne Rücksicht auf das Zeichen, immer $z < 1$. Ferner ist

$$1 - p = 1 - \frac{k' - z}{\alpha} = \frac{\alpha - k' + z}{\alpha} = \frac{k + z}{\alpha};$$

$$\text{also } p^{k'-1}(1-p)^{k+1} = \frac{(k'-z)^{k'-1}.(k+z)^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left(1 - \frac{z}{k'}\right)^{k'-1}.\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 - \frac{k'-1}{1}.\frac{z}{k'}\right\}\left\{1 + \frac{k+1}{1}.\frac{z}{k}\right\}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 + \frac{(k+k')lz}{kk'}\right\} = \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\},$$

wenn man immer die z^2 enthaltenden Glieder vernachlässigt. Aus allem Vorhergehenden erhält man endlich

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)}.p^{k'-1}(1-p)^{k+1}$$

$$= \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}.\left\{1 + \frac{1}{12\alpha}\right\}$$

$$\times e^{l - \frac{l^2}{2k'}}.k'^{l-k'-\frac{1}{2}}.\left\{1 + \frac{l}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k'-l}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k'-1)}\right\}$$

$$\times e^{-l - \frac{l^2}{2k}}.k^{-l-k-\frac{1}{2}}.\left\{1 - \frac{l}{2k} + \frac{l^3}{6k^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k+l}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k+1)}\right\}$$

$$\times \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^{\alpha}}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\}.$$

Das Product der Factoren vor den Parenthesen ist, wie man leicht findet,

$$= \frac{\sqrt{\alpha}.e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2kk'}}.$$

Das Product der eingeschlossenen Größen ist, wenn man, mit Laplace, die Glieder $\frac{1}{12\alpha}$, $\frac{1}{12(k'-1)}$, $\frac{1}{12(k+1)}$ vernachlässigt,

$$= 1 + \frac{l}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2} - \frac{l}{2k} + \frac{l^3}{6k^2} + \frac{\alpha l z}{kk'}$$

$$= 1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{l(k-k')}{2kk'} - \frac{l^3}{6k'^2} + \frac{l^3}{6k^2},$$

ebenfalls mit Vernachlässigung der übrigen Glieder. Also

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)} \cdot p^{k'-1}.(1-p)^{k+1}$$

$$= \frac{\Gamma\alpha . e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'} . \left\{ 1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{l(k-k')}{2kk'} - \frac{l^3}{6k'^2} + \frac{l^3}{6k^2} \right\},$$

das lte Glied nach dem größten, und folglich das lte Glied vor dem größten

$$= \frac{\Gamma\alpha . e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'} . \left\{ 1 - \frac{\alpha l z}{kk1} - \frac{l(k-k')}{2kk'} + \frac{l^3}{6k'^2} - \frac{l^3}{6k^2} \right\}.$$

Also die Summe dieser beiden Glieder

$$= \frac{2\Gamma\alpha}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'} . e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}.$$

Also ist die Summe aller Glieder in der Entwickelung von $\{p + (1-p)\}^\alpha$ zwischen dem lten vor dem größten und dem lten nach dem größten, wie man sich leicht überzeugen wird, gleich dem endlichen Integral

$$\Sigma \frac{2\Gamma\alpha}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'} . e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}},$$

dieses Integral zwischen den Gränzen $l = o$ und $l = 1$ genommen, wobei jedoch zu bemerken, daß in dieser Summe das größte Glied zwei Mal enthalten ist, und demnach einmal abgezogen werden muß.

Setzen wir nun die Größe unter dem Integralzeichen $= y$; so ist, da hier das Increment von $l = 1$ ist (Taylors Lehrsatz. 23.):

$$\Sigma y = \left\{ \frac{\partial}{e^{\partial l} - 1} \right\}^{-1} y.$$

Also, nach Thl. IV. S. 647, wenn man das dortige $w = 1$, $x = 1$ setzt:

$$\Sigma y = \int y \partial l - \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{12} \frac{\partial y}{\partial l} - \ldots.$$

Da nun allgemein

$$\frac{\partial . me^{-nv^2}}{\partial v} = -2mnve^{-nv^2},$$

$$\frac{\partial^2 . me^{-nv^2}}{\partial v^2} = -2mne^{-nv^2} + 4mn^2v^2e^{-nv^2},$$

u. s. f. u. s. f.

ist; so erhellet, wenn man $n = \frac{\alpha}{2kk'}$, $nv = \frac{\alpha l}{2kk'}$ setzt, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial l}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial l^2}$, ... nur sehr klein seyn können, und man also berechtigt ist,

$$\Sigma y = \int y \partial l - \tfrac{1}{2} y$$

zu setzen, das Integral von $l = o$ bis $l = l$ genommen. Dies giebt

$$\Sigma^l_o y = \int^l_o y \partial l - \underset{(l=l)}{\tfrac{1}{2} y} + \underset{(l=o)}{\tfrac{1}{2} y}$$

$$= \int^l_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi} . \sqrt{2kk'}} .$$

Bezeichnet man das größte Glied durch Y; so erhält man aus dem obigen allgemeinen Ausdruck für das lte Glied nach dem größten, indem man $l = o$ setzt,

$$Y = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi} . \sqrt{2kk'}} .$$

Dies giebt

$$\Sigma^l_o y = \int^l_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y + Y .$$

Bezeichnen wir die Summe der Glieder zwischen dem lten vor und nach dem größten durch S; so ist nach dem Obigen

$$S = \Sigma^l_o y - Y; \text{ also } S = \int^l_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y .$$

Die Summe des lten Gliedes vor und des lten Gliedes nach dem größten ist nach dem Obigen $= y$. Demnach, wenn S′ die Summe der Glieder vom lten Gliede vor, bis zum lten Gliede nach dem größten bezeichnet,

$$S' = S + y = \int^l_o y \partial l + \tfrac{1}{2} y .$$

Setzt man nun

$$\frac{l\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2kk'}} = t ;$$

so erhält man leicht

$$S' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} \partial t + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi} . \sqrt{2kk'}} . e^{-t^2} ,$$

das Integral zwischen den Gränzen $l = o$, $l = l$, d. i. $t = o$, $t = t$, genommen.

Nach dem Obigen ist $k' = \alpha p + z$, $k = \alpha - k' = \alpha(1-p) - z$, woraus leicht

$$\sqrt{2kk'} = \alpha\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{\alpha}(1-p) - \frac{2z^2}{\alpha^2}}.$$

Auch erhält man leicht

$$\frac{k' \pm l}{\alpha} - p = \frac{\alpha p + z \pm l}{\alpha} - p$$

$$= \pm\frac{l}{\alpha} + \frac{z}{\alpha} = \pm\frac{t\sqrt{2kk'}}{\alpha\sqrt{\alpha}} + \frac{z}{\alpha}.$$

Nach dem ersten Falle der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) wird durch die Formel

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}\partial t + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2kk'}}\cdot e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß das Ereigniß, dessen einfache Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, in α Versuchen nicht weniger als $(k' - l)$mal, und nicht öfter als $(k' + l)$mal, eintrifft; oder die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz zwischen dem Verhältniß der Anzahl der Wiederholungen des Ereignisses, dessen Waheschein lichkeit $= p$ ist, zu der ganzen Anzahl der Versuche, und der Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses, zwischen den Gränzen

$$\pm\frac{t\sqrt{2kk'}}{\alpha\sqrt{\alpha}} + \frac{z}{\alpha}$$

enthalten ist.

75. Es ist nöthig, hier einige Bemerkungen über das Integral

$$\int e^{-t^2}\partial t$$

einzuschalten. Es ist allgemein

$$\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha}} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^{2\alpha+1}} - \frac{2\alpha+1}{2}\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha+2}},$$

wovon man sich durch Differentiation überzeugen kann. Durch successive Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int e^{-t^2}\partial t = -\frac{e^{-t^2}}{2t} + \frac{1.e^{-t^2}}{2^2 t^3} - \frac{1.3.e^{-t^2}}{2^3 t^5} + \cdots$$

$$\cdots \pm\frac{1.3.5..(2\alpha-1)e^{-t^2}}{2^{\alpha+1}t^{2\alpha+1}} \pm \frac{1.3..(2\alpha+1)}{2^{\alpha+1}}\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha+2}},$$

oder, wenn man diese Reihe in's Unendliche fortsetzt,

$$\int e^{-t^2}\partial t = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2 t^4} - \frac{1.3.5}{2^3 t^6} + \ldots\right\}.$$

Für $t = \infty$ verschwindet diese Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t = T$, $t = \infty$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2 T^4} - \frac{1.3.5}{2^3 T^6} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - 1.q + 1.3.q^2 - 1.3.5.q^3 + \ldots\right\}$$

für $\frac{1}{2T^2} = q$. Verwandelt man die eingeschlossene Reihe in einen Kettenbruch (Kettenbruch. 60.), so wird zwischen obigen Gränzen

$$\int e^{-t^2}\partial t = \frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}.$$

Entwickelt man e^{-t^2} in eine Reihe; so erhält man

$$\int e^{-t^2}\partial t = t - \frac{1}{1}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \ldots$$

eine für $t = o$ verschwindende Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t = o$, $t = T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = T - \frac{1}{1}\cdot\frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{T^7}{7} + \ldots.$$

Noch eine Reihe erhält man so. Es ist allgemein

$$\int e^{-t^2} t^{2\alpha}\partial t = \frac{e^{-t^2} t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{2}{2\alpha+1}\int e^{-t^2} t^{2\alpha+2}\partial t,$$

wovon man sich ebenfalls leicht durch Differentiation überzeugen wird. Durch successive Anwendung dieser Formel erhält man, wenn die Reihe in's Unendliche fortgesetzt wird,

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-t^2} t\left\{1 + \frac{2t^2}{1.3} + \frac{(2t^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right\};$$

folglich, zwischen den Gränzen $t = o$, $t = T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-T^2} T\left\{1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{(2T^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2T^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right\}.$$

Die beiden letzten Reihen convergiren immer; doch kann die Convergenz erst spät anfangen. Ist also T groß, so bedient man sich lieber des obigen Kettenbruchs, welcher aber den Gränzen $t = T$, $t = \infty$ entspricht. Um einen Ausdruck für die Gränzen $t = o$, $t = T$ durch einen Kettenbruch zu finden, suche man zuerst den Werth des Integrals zwischen den Gränzen $t = o$, $t = \infty$. Diesen findet man so:

Es ist allgemein

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugt. Also durch successive Anwendung dieser Formel:

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{3}x^2 + \frac{1.2}{1.3}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^4 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

u. s. w. u. s. w.

und auf ähnliche Art:

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right\}\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right\}\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

2c. 2c.

Da nun

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc}\sin x$$

ist; so erhält man zwischen den Gränzen $x = o$, $x = 1$ hieraus leicht:

$$\int \frac{x^{2r+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.2.4.6\ldots 2r}{1.3.5.7\ldots(2r+1)},$$

$$\int \frac{x^{2r}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1).\pi}{2.4.6\ldots 2r.2}.$$

Folglich zwischen denselben Gränzen

$$\int \frac{x^{2r}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} . \int \frac{x^{2r+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1}.\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man nun

$$x = e^{-qt^2} \text{ und } q(2r+1) = 1;$$

so erhält man hieraus leicht nach einigen einfachen Reductionen:

$$2\int\frac{e^{-t^2}t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\cdot\int\frac{e^{-t^2(1+q)}t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Aber durch Entwickelung in eine Reihe:

$$\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q} = t^2 - \frac{2q(t^2)^2}{1.2} + \ldots,$$

und folglich

$$\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q} = t^2$$

für $q = o$. Also, wenn man in obiger Gleichung $q = o$ setzt,

$$2\int\frac{e^{-t^2}t\partial t}{t}\cdot\int\frac{e^{-t^2}t\partial t}{t} = \frac{\pi}{2}, \int e^{-t^2}\partial t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

zwischen den Gränzen $x = o$, $x = 1$, d. i. $t = \infty$, $t = o$. Da nun dieses bestimmte Integral bekanntlich die Summe aller Werthe von e^{-t^2} ausdrückt, welche man erhält, wenn man dem t alle Werthe von $t = \infty$ bis $t = o$ beilegt; so ist, weil alle diese Werthe von e^{-t^2} offenbar positiv sind, das obere Zeichen zu nehmen, und

$$\int_o^\infty e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

zu setzen. Es ist aber augenscheinlich

$$\int_o^T e^{-t^2}\partial t = \int_o^\infty e^{-t^2}\partial t - \int_T^\infty e^{-t^2}\partial t.$$

Also nach dem Obigen

$$\int_o^T e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}$$

für $q = \frac{1}{2T^2}$.

Eine Tafel der Werthe dieses Integrals und seiner Logarithmen hat Kramp in seiner Analyse des réfractions astronomiques. Leips. 1798. p. 193—210. geliefert.

76. Also die Probabilität in (74.), wenn man die Gränze von $t = T$ setzt,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\ldots}}}}\right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2kk'}}\cdot e^{-T^2}$$

$$= 1 - \frac{e^{-T^2}}{T\sqrt{\pi}}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\ldots}}}}$$

$$+ \frac{e^{-T^2}}{\sqrt{2\alpha\pi\left\{p(1-p)+\frac{z}{\alpha}(1-2p)-\frac{z^2}{\alpha^2}\right\}}},$$

wo $q = \frac{1}{2T^2}$, $k' = \alpha p + z$, $z = k' - \alpha p$ ist.

Läßt man T wachsen, so ist klar, daß sowohl e^{-T^2}, als auch $\frac{e^{-T^2}}{T} = \frac{1}{Te^{T^2}}$ sehr schnell abnehmen, und obige Probabilität sich also immer mehr und mehr der Einheit, d. i. der Gewißheit, nähert, und daß, wenn $T = \infty$, die Wahrscheinlichkeit selbst zur Gewißheit werden muß.

Nimmt man die Gränzen

$$\pm\frac{t\sqrt{2kk'}}{\alpha\sqrt{\alpha}} + \frac{z}{\alpha}$$

als unveränderlich an; so erhellet, daß, wenn α wächst, auch t oder T wachsen muß. Daraus ergiebt sich folgender merkwürdige und wichtige Satz:

Die Anzahl der Versuche kann immer so sehr vervielfältigt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied zwischen dem Verhältniß der Anzahl der Wiederholungen eines Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, zu der Anzahl aller Versuche, und der Wahrschein-

lichkeit p dieses Ereignisses, gegebene Gränzen nicht überschreitet, der Gewißheit beliebig nahe gebracht wird (Vergl. 74.). Wir sind bei dem Beweise dieses wichtigen, zuerst von Jacob Bernoulli gefundenen, Theorems vorzüglich der Darstellung von Laplace gefolgt. Auch Moivre hat sich mit diesem Gegenstande beschäftigt.

Berechnung der wahrscheinlichsten Resultate aus gegebenen Beobachtungen. Methode der kleinsten Quadrate.

77. Wir beginnen diesen wichtigen Abschnitt, welcher die Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen der Natur enthält, größerer Deutlichkeit wegen mit einem Beispiele. Der Gegenstand dieses Abschnitts ist nach unserer Ansicht nicht sowohl selbst schon eine Anwendung der Probabilitätenrechnung, sondern er liefert vielmehr eine Theorie der wichtigsten Anwendungen derselben, und durfte daher, als unbedingt zur Theorie selbst gehörend, hier nicht fehlen.

Folgende, aus Bohnenbergers Astronomie. Tübingen. 1811. S. 450. entlehnte, Tabelle enthält eine Uebersicht der unter verschiedenen geographischen Breiten beobachteten Längen des Sexagesimalsecunden-Pendels. Die Länge des Sexagesimalsecunden-Pendels zu Paris, nach Bordas Bestimmung = 440,559 par. Linien, ist in derselben als Einheit angenommen.

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge.
Bouguer.	Peru.	0°. 0′	0,99669
—	Portobello.	9. 34	0,99689
Le Gentil.	Pondichery.	11. 56	0,99710
Campbell.	Jamaika.	18. 0	0,99745
Bouguer.	Klein Goava.	18. 27	0,99728
La Caille.	Cap.	33. 55	0,99877
	Formentera.	38. 40	0,99908
Darquier.	Toulouse.	43. 36	0,99950
Liesganig.	Wien.	48. 13	0,99987
Bouguer.	Paris.	48. 50	1,00000
v. Zach.	Gotha.	50. 56	1,00006
Graham.	London.	51. 31	1,00018
Grischow.	Arensberg.	58. 15	1,00074
Mallet.	Petersburg.	59. 56	1,00101
Maupertuis.	Pello.	66. 48	1,00137
Mallet.	Ponoi.	67. 5	1,00148

Der flüchtigste Blick auf diese Tabelle zeigt, daß die Pendellängen vom Aequator nach den Polen hin wachsen. Nur die Pendellängen von Jamaika und Klein Goava machen hiervon eine Ausnahme. Die Breiten sind aber hier auch so wenig von einander verschieden, daß diese Abweichung vom Gesetze offenbar Folge der Beobachtungsfehler ist, da der von dem Breitenunterschiede herrührende Unterschied der Pendellängen kleiner sein kann als der Beobachtungsfehler. Vergleicht man aber genauer die Zunahmen der Pendellängen mit den Breiten, so bemerkt man sehr bald, daß erstere, vom Aequator angerechnet, sehr nahe den Quadraten der Sinus der Breiten proportional sind, welches Gesetz wir hier nur als ein Resultat aus den Beobachtungen ansehen wollen, da wir uns natürlich auf die Bestätigung, welche es durch die Theorie der Attraction elliptischer Sphäroide in der Mechanik erhält, in diesem Werke nicht einlassen können. Bezeichnen wir also im Allgemeinen die der Breite L entsprechende Pendellänge durch l, so wird das bemerkte Gesetz offenbar durch folgende Formel dargestellt:

$$l = A + B \sin L^2 .$$

A und B sind zwei constante Größen. Für $L = 0$ erhält man $A = l$, und für $L = 90^0$ ergiebt sich leicht $B = l - A$, so daß also A die Pendellänge unter dem Aequator, B der Unterschied zwischen der Pendellänge unter dem Pol und der Pendellänge unter dem Aequator ist. Daß obige Gleichung auch für das Decimalsecunden-Pendel richtig bleibt, folgt leicht aus der bekannten mechanischen Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad l = \frac{2gt^2}{\pi^2}$$

wo t die Schwingungszeit bezeichnet. Ist t eine Sexagesimalsecunde, t_1 eine Decimalsecunde, l_1 die Länge des Decimalsecunden-Pendels, und $t_1 = \alpha t = 0{,}324 . t$ (Bohnenberger. a. a. O. S. 212.); so ist

$$l_1 = \frac{2gt_1^2}{\pi^2} = \frac{2g\alpha^2 t^2}{\pi^2} = \alpha^2 l ;$$

also offenbar auch

$$A_1 = \alpha^2 A, \; B_1 = \alpha^2 B .$$

Aus obiger Gleichung ergiebt sich aber durch Multiplication mit α^2 sogleich:

$$\alpha^2 l = \alpha^2 A + \alpha^2 B \sin L^2 ,$$

d. i. $l_1 = A_1 + B_1 \sin L^2$, so daß also die Gleichung

$$l = A + B \sin L^2$$

auch für das Decimalsecunden-Pendel gilt. Neuere Beobachtungen der Länge des Decimalsecunden-Pendels, welche wir im Folgenden gebrauchen werden, enthält folgende Tafel (Biot Astronomie. Paris. 1810. T. III. Add. p. 164.):

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge in Metern.
Arago, Chaix, Biot.	Formentera.	38°.39'.46"	0,7412517
Mathieu, Biot.	Figeac.	44. 36. 45	0,7416243
Mathieu, Biot.	Bordeaux.	44. 50. 25	0,7416151
Mathieu, Biot.	Clermont.	46. 48. 4	0,7417157
Bouvard, Mathieu, Biot.	Paris.	48. 50. 15	0,7419262
Mathieu, Biot.	Dunkerque.	51. 2. 8	0,7420865

Soll die Formel

$$l = A + B \sin L^2$$

praktisch brauchbar seyn, so kommt es vorzüglich auf die genaue Bestimmung der Constanten A, B an. Man überzeugt sich leicht, daß dazu zwei beobachtete Pendellängen hinreichen. Ist nämlich l' irgend eine andere Pendellänge, L' die entsprechende Breite, so hat man

$$l = A + B \sin L^2 , \; l' = A + B \sin L'^2 ;$$
$$l - l' = B \{ \sin L^2 - \sin L'^2 \}$$
$$= B \{ \sin L + \sin L' \} \{ \sin L - \sin L' \}$$
$$= B \sin (L + L') \sin (L - L') ;$$
$$B = \frac{l - l'}{\sin (L + L') \sin (L - L')} ,$$
$$A = l - B \sin L^2 = l' - B \sin L'^2 ;$$

woraus sich A, B bestimmen lassen. Gebraucht man zu dieser Bestimmung die Pendellängen von Dünkirchen und Formentera aus obiger Tafel, so findet man

$$A = 0^m, 7397310 , \; B = 0^m, 00389622 ;$$

folglich überhaupt die Pendellänge unter der Breite L =

$$l = 0^m, 7397310 + 0^m. 0038962 . \sin L^2 ,$$

immer in Bezug auf das Decimalsecunden-Pendel. Wie man hieraus die Formel für das Secunden-Pendel nach der gewöhnlichen Zeiteintheilung findet, ersieht man aus dem Obigen leicht.

Wären die Pendellängen von Formentera und Dünkirchen völlig genau, so würden mittelst obiger Rechnung auch die Constanten A, B mit völliger Genauigkeit bestimmt seyn. Jedes Resultat einer Beobachtung oder eines Versuchs ist aber mit Fehlern behaftet, so daß also auch die obigen numerischen Werthe von A, B nicht auf völlige Richtigkeit Anspruch machen können, welches sich noch deutlicher zeigen würde, wenn man zu der Bestimmung dieser Größen andere Beobachtungen als die obigen anwenden wollte, wodurch man nie dieselben Werthe von A, B, wie es doch bei völliger Genauigkeit der Beobachtungen nothwendig der Fall seyn müßte, sondern vielmehr immer einigermaßen von einander verschiedene Werthe dieser Größen erhalten würde. Hieraus entspringt, wie man nun leicht sehen wird, das Bedürfniß, im Besitz einer allgemeinen Methode zu seyn, welche in allen den Fällen, wo, wie in dem obigen Beispiele, aus gegebenen Beobachtungen mittelst einer ebenfalls gegebenen Relation oder Gleichung gewisse unbekannte Größen bestimmt werden sollen, sogleich die Werthe derselben liefert, welche mit der größten Wahrscheinlichkeit auf Richtigkeit Anspruch machen können. Wir setzen hierbei voraus, daß die Anzahl der gegebenen Beobachtungen größer sey, als die Anzahl der zu bestimmenden Größen, daß also, wie man sich auszudrücken pflegt, das Problem mehr als bestimmt sey. Wäre die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der unbekannten Größen gleich, oder kleiner als dieselbe, so wäre die Aufgabe im ersten Falle eine bestimmte, im letzten eine unbestimmte. In den Naturwissenschaften ist es aber ein Hauptgesetz, durch Vervielfältigung der Beobachtungen und Versuche sich der völligen Richtigkeit der aus ihnen abgeleiteten Resultate möglichst zu nähern, und nur auf diesem Wege ist eine solche Annäherung möglich. Man

sieht also, daß nur der oben supponirte Fall zulässig ist, wenn die aus den Beobachtungen abgeleiteten Resultate auch nur einiges Zutrauen verdienen sollen. Wir verlassen jetzt unser obiges Beispiel, jedoch in der Absicht, nachher wieder zu demselben zurückzukehren, und wenden uns nun zu der Aufsuchung einer allgemeinen Methode der Berechnung gegebener Beobachtungen, welche den oben an eine solche Methode gemachten Anforderungen entspricht.

78. Seyen daher überhaupt

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots$$

Functionen der unbekannten Größen $x, y, z, v, \ldots$ Die Anzahl jener sey $= n$, die Anzahl dieser $= m$, wo also nach der schon oben gemachten Voraussetzung immer $n > m$ ist. Durch unmittelbare Beobachtungen seyen respective die Werthe

$$A, A', A'', A''', A'''' \ldots$$

obiger Functionen gefunden. Die Fehler der einzelnen Beobachtungen seyen nach der Reihe

$$\begin{aligned} A - X &= \Delta, \\ A' - X' &= \Delta', \\ A'' - X'' &= \Delta'', \\ A''' - X''' &= \Delta''', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche also ebenfalls Functionen von $x, y, z, v, \ldots$ sind.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler bei der ersten Beobachtung in der That Δ sey, ist offenbar eine Function von Δ, und soll daher überhaupt durch $\varphi\Delta$ bezeichnet werden. Setzen wir nun zuerst voraus, daß die Beobachtungen alle gleich gut sind, und folglich kein Grund vorhanden ist, die eine für mehr oder weniger genau zu halten als eine andere, so wird auch bei allen Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, gleich große Fehler zu begehen, gleich groß seyn, welches uns berechtigt, bei allen obigen Beobachtungen nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten, die Fehler $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$ zu begehen, durch dasselbe Functionszeichen zu bezeichnen. Es sind also

$$\varphi\Delta, \varphi\Delta', \varphi\Delta'', \varphi\Delta''', \varphi\Delta'''', \ldots$$

die Wahrscheinlichkeiten, bei den obigen einzelnen Beobachtungen nach der Reihe die Fehler

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots,$$

zu begehen.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler aller einzelnen Beobachtungen respective Δ, Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', ... sind, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Fehler bei den einzelnen Beobachtungen wirklich begangen werden, wenn wir diese Wahrscheinlichkeit durch W bezeichnen, nach (9.) =

$$W = \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta''' . \varphi\Delta'''' \ldots$$

Wären die Größen x, y, z, v, ... so bestimmt, daß zwischen den Functionen

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots$$

und den durch unmittelbare Beobachtung gefundenen Werthen

$$A, A', A'', A''', A'''', \ldots,$$

derselben die Differenzen

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$$

wirklich statt fänden, so würden offenbar x, y, z, v, ... richtig bestimmt seyn. Die Unmöglichkeit einer solchen Bestimmung liegt aber, weil man ja die Fehler der Beobachtungen selbst nicht kennt, klar vor Augen, und es bleibt also nichts anderes übrig, als die Größen x, y, z, v, ... auf eine solche Weise zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, obige Fehler begangen zu haben, d. h. daß

$$W = \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta''' . \varphi\Delta'''' \ldots$$

ein Maximum wird.

Für das Maximum ist aber bekanntlich, wenn die partiellen Differentialquotienten, wie gewöhnlich, durch Einschließung in Parenthesen bezeichnet werden,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = \ldots = 0 .$$

Aber nach einer sehr bekannten Regel der Differentialrechnung, die sich leicht aus dem Artikel: Differentialformeln (4.) ergiebt:

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{1}{\varphi\Delta}\left(\frac{\partial\varphi\Delta}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{\varphi\Delta'}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{\varphi\Delta''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta''}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{\varphi\Delta'''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'''}{\partial x}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Folglich, wenn man

$$\frac{\partial\varphi\Delta}{\varphi\Delta} = \varphi'\Delta . \partial\Delta$$

setzt, zugleich in Bezug auf die übrigen partiellen Differentialquotienten von W, wie leicht erhellen wird:

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial y}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial y}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial z}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial z}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial v}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial v}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0$$

u. s. f. u. s. f.

wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der Form der Function φ', und somit auch der Function φ ankommt, wozu man auf folgende Weise gelangt.

Nach einem längst bekannten Grundsatze erhält man, wenn eine Größe aus mehrern gleich guten Beobachtungen zu bestimmen ist, den wahrscheinlichsten Werth derselben, indem man das arithmetische Mittel aller sich aus den Beobachtungen ergebenden Werthe nimmt, wozu die Annahme berechtigt, daß offenbar die bei den Beobachtungen begangenen Fehler bald positiv, bald negativ seyn werden, so daß also diese Fehler, wenn man nach dem obigen Grundsatze verfährt, sich gegenseitig aufheben oder compensiren werden. Wollte man annehmen, daß die Fehler immer nur mit demselben Zeichen behaftet wären, so würden sich einige Beobachtungen offenbar zu weit von der Wahrheit entfernen, und die Beobachtungen würden also

nicht den Namen gleich guter Beobachtungen verdienen, wie doch bei Anwendung des obigen Princips immer vorausgesetzt werden muß. Zugleich ist klar, daß das Resultat auf eine desto größere Wahrscheinlichkeit wird Anspruch machen können, je größer die Anzahl der zum Grunde gelegten Beobachtungen ist, so daß also auch hier wieder Vervielfältigung der Beobachtungen als unbedingtes Erforderniß zur Erreichung möglichster Genauigkeit hervortritt. Auf obiges Princip gestützt, gelangt man nun auf folgende Weise zur Bestimmung der Form der Function φ'. Sey einmal

$$X = X' = X'' = X''' = X'''' = \ldots = x,$$

so ist nach obigem Grundsatze, wenn wir den wahrscheinlichsten Werth von x durch p bezeichnen,

$$p = \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right),$$

da oben die Anzahl der in der Parenthese eingeschlossenen Größen $= n$ gesetzt worden ist. Also sind die wahrscheinlichsten Werthe der Fehler $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots$ nach der Reihe:

$$A - p,\ A' - p,\ A'' - p,\ A''' - p, \ldots.$$

Für diese Werthe der Fehler muß demnach die Wahrscheinlichkeit W ein Maximum werden, und es müssen folglich auch die oben für das Maximum entwickelten Bedingungsgleichungen statt finden, wenn man für die Fehler die obigen wahrscheinlichsten Werthe setzt. Die erste dieser Gleichungen wird, da wir hier

$$X = X' = X'' = X''' = X'''' = \ldots = x$$

gesetzt haben:

$$\left(\frac{\partial(A-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial(A'-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial(A''-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0;$$

also, wenn man differentiirt:

$$-\varphi'\Delta - \varphi'\Delta' - \varphi'\Delta'' - \varphi'\Delta''' - \ldots = 0,$$
$$\varphi'\Delta + \varphi'\Delta' + \varphi'\Delta'' + \varphi'\Delta''' + \ldots = 0;$$

d. i.

$$\varphi'(A-p) + \varphi'(A'-p) + \varphi'(A''-p) + \varphi'(A'''-p) + \ldots = 0.$$

Setzen wir nun ferner

$$A' = A'' = A''' = A'''' = \ldots = A - nB;$$

so ist

$$\begin{aligned} & A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots \\ &= A + (n-1)(A-nB) \\ &= nA - n(n-1)B\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right) \\ &= A - (n-1)B\,. \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} A \;\; - p &= A \qquad\quad - A + (n-1)B = (n-1)B \\ A' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A'' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A''' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Also nach dem Obigen

$$\varphi'(n-1)B + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \ldots = o\,,$$

d. i., da die Anzahl der Größen A', A'', A''', u. s. f. $= n-1$ ist:

$$\begin{aligned} &\varphi'(n-1)B + (n-1)\varphi'(-B) = o\,, \\ &\varphi'(1-n)(-B) - (1-n)\varphi'(-B) = o\,, \\ &\varphi'(1-n)(-B) = (1-n)\varphi'(-B)\,. \end{aligned}$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $(1-n)(-B)$ dividirt:

$$\frac{\varphi'(1-n)(-B)}{(1-n)(-B)} = \frac{\varphi'(-B)}{(-B)}\,.$$

Diese Relation gilt offenbar für jedes B, und jedes ganze positive n. Setzen wir also überhaupt $-B = \Theta$, so hat man für jedes ganze positive n und jedes Θ:

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}\,.$$

Für $n = 2$ erhält man

$$\frac{\varphi'(-\Theta)}{(-\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}\,.$$

Also

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'(n-1)\Theta}{(n-1)\Theta}\,,$$

und daher, wenn wir $n-1 = \mu$ setzen, für jedes ganze positive μ:

$$\frac{\varphi'\mu\Theta}{\mu\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}\,,$$

woraus, wenn man, welches offenbar verstattet ist, Θ für $\mu\Theta$, und also $\frac{\Theta}{\mu}$ für Θ schreibt, sogleich folgt, daß auch für jedes ganze positive μ:

$$\frac{\varphi'\Theta}{\Theta} = \frac{\varphi'\frac{\Theta}{\mu}}{\frac{\Theta}{\mu}}$$

seyn muß. Bezeichnet nun $\frac{\mu}{\nu}$ irgend einen positiven Bruch, so ist hiernach:

$$\frac{\varphi'\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\Theta}{\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\Theta\right)} = \frac{\varphi'\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)}{\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\mu\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}{\mu\left(\frac{\pm\Theta}{\nu}\right)}$$

$$= \frac{\varphi'\left(\frac{\pm\Theta}{\nu}\right)}{\left(\frac{\pm\Theta}{\nu}\right)} = \frac{\varphi'(\pm\Theta)}{(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

so daß also für jeden positiven oder negativen Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ immer

$$\frac{\varphi'\frac{\mu}{\nu}\Theta}{\frac{\mu}{\nu}\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}$$

ist. Da bei Irrationalgrößen statt derselben ihre Gränzen gesetzt werden können, so erhellet nun, daß für jedes λ

$$\frac{\varphi'\lambda\Theta}{\lambda\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

und folglich offenbar $\frac{\varphi'\Theta}{\Theta}$, also auch $\frac{\varphi'\Delta}{\Delta}$ eine constante Größe seyn muß. Setzen wir also überhaupt

$$\frac{\varphi'\Theta}{\Theta} = \mathrm{k}.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = \varphi'\Theta.\partial\Theta,\ \varphi'\Theta = \frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta.\partial\Theta};$$

also

$$\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta.\partial\Theta} = \mathrm{k}\Theta,\ \frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = \mathrm{k}\Theta\partial\Theta;$$

$$\int\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = \mathrm{k}\int\Theta\partial\Theta;$$

d. i. $\log n\, \varphi\Theta = \frac{1}{2} k\Theta^2 + \text{Const}$, oder, für $\text{Const} = \log n\, k'$:

$$\begin{aligned} \log n\, \varphi\Theta &= \tfrac{1}{2} k\Theta^2 + \log n\, k' \\ &= \log n\, e^{\frac{1}{2} k\Theta^2} + \log n\, k' \\ &= \log n\, (k' e^{\frac{1}{2} k\Theta^2}) . \end{aligned}$$

Also

$$\varphi\Theta = k' e^{\frac{1}{2} k\Theta^2} .$$

Also auch

$$\varphi\Delta = k' e^{\frac{1}{2} k\Delta^2} .$$

79. Setzen wir nun nach und nach $\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots$ für Θ, und multipliciren die einzelnen Functionen in einander, so wird nach dem Obigen

$$\begin{aligned} W &= \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta''' \ldots \\ &= k'^n . e^{\frac{1}{2} k (\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)} . \end{aligned}$$

Wäre k positiv, so würde, da

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

immer positiv ist, offenbar W mit

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

in's Unendliche zu- und abnehmen, also gar kein Maximum statt finden können, wobei nur zu bemerken, daß $e > 1$ ist. Also muß k negativ seyn, und man ist folglich berechtigt, $k = -2h^2$ zu setzen, so daß also

$$\varphi\Delta = k' e^{-h^2 \Delta^2} ,$$

wo es nun noch vorzüglich auf die Bestimmung der Constante k' ankommt. Zu dem Ende wollen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen suchen, daß der Fehler überhaupt zwischen den Gränzen δ und δ' enthalten ist. Zu dem Ende denke man sich das Intervall $\delta' - \delta$ in n gleiche Intervalle getheilt, deren jedes $= i$, und nehme an, daß in jedem dieser kleinen Intervalle für alle Punkte desselben die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in einen dieser Punkte falle, gleich groß sey, welches offenbar mit desto größerem Rechte verstattet ist, je kleiner die einzelnen durch i bezeichneten Intervalle sind. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler δ sey, ist überhaupt $= \varphi\delta$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\delta + i$,

$\delta + 2i$, $\delta + 3i$, ... $\delta + ni = \delta'$ sey, $= \varphi(\delta + i)$, $\varphi(\delta + 2i)$, $\varphi(\delta + 3i)$, ... $\varphi(\delta + ni)$. Da nun für alle einzelnen Intervalle die Wahrscheinlichkeit als gleich groß angenommen wird, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze die Wahrscheinlichkeit im 1ten, 2ten, 3ten, ... nten Intervalle nach der Reihe:

$$\varphi(\delta + i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\varphi(\delta + 2i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{2i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{2^2i^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\varphi(\delta + 3i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{3i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{3^2i^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(\delta + ni) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{ni}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{n^2i^2}{1.2} + \ldots.$$

Wir haben hier nämlich die Wahrscheinlichkeit am Ende eines jeden Intervalls für die in dem ganzen entsprechenden Intervalle herrschende Wahrscheinlichkeit genommen. Die Wahrscheinlichkeiten, daß der Fehler überhaupt in das 1te, 2te, 3te, ... nte Intervall falle, sind, da jedes i Punkte enthält, nach dem in (8.) bewiesenen Satze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, welcher hier offenbar seine Anwendung findet:

$$\varphi(\delta + i).i,\ \varphi(\delta + 2i).i,\ \varphi(\delta + 3i).i,\ \ldots\ \varphi(\delta + ni).i$$

und folglich nach demselben Satze die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler überhaupt in irgend eins dieser Intervalle, d. h. überhaupt zwischen die Gränzen δ und δ' falle,

$$= \varphi(\delta + i).i + \varphi(\delta + 2i).i + \varphi(\delta + 3i).i + \ldots + \varphi(\delta + ni).i$$

d. i., wenn man die oben gefundenen Reihen substituirt,

$$\begin{aligned} = \quad & \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2} + \ldots \\ & + \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{2i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{2^2i^3}{1.2} + \ldots \\ & + \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{3i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{3^2i^3}{1.2} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{ni^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{n^2i^3}{1,2} + \ldots \end{aligned}$$

$$= \varphi\delta . ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} \cdot \frac{i^2}{1}(1 + 2 + 3 + .. + n)$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2} \cdot \frac{i^3}{1.2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3} \cdot \frac{i^4}{1.2.3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + .. + n^3)$$
$$+ \ldots\ldots$$

d. i., wenn man nach dem Art. Potenz. (39.) die dort gefundenen Summen der Potenzen substituirt, wobei hier nur alle Coefficienten, auf deren Werth es weiter nicht ankommt, durch (.) bezeichnet werden,

$$= \varphi\delta . ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} \cdot \frac{i^2}{1}\left\{\tfrac{1}{2}n^2 + (.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2} \cdot \frac{i^3}{1.2}\left\{\tfrac{1}{3}n^3 + (.)n^2 + (.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3}\left\{\tfrac{1}{4}n^4 + (.)n^3 + (.)n^2 + (.)n\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$= \varphi\delta . ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}(ni)^2 + (.)ni . i\right\} . \frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}(ni)^3 + (.)(ni)^2 . i + (.)ni . i^2\right\} . \frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}(ni)^4 + (.)(ni)^3 . i + .. + (.)ni . i^3\right\} . \frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

also, wenn wir

$$ni = \delta' - \delta = \alpha$$

setzen,

$$= \varphi\delta . \alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (.)\alpha i\right\} . \frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}\alpha^3 + (.)\alpha^2 i + (.)\alpha i^2\right\} . \frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}\alpha^4 + (.)\alpha^3 i + (.)\alpha^2 i^2 + (.)\alpha i^3\right\} . \frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

und demnach, wenn I überhaupt eine Function von i bezeichnet, welche für $i = o$ verschwindet, obige Wahrscheinlichkeit

$$= \varphi\delta . \alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} \cdot \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2} \cdot \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots + I.$$

Je kleiner i ist, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck unbedingter Richtigkeit. Um selbige aber wirklich zu errei-

chen, muß man $i = o$ setzen, wodurch auch I verschwindet, und sich folglich für die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt, die Reihe

$$\varphi\delta . \alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} . \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2} . \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$= \varphi\delta . \frac{\delta' - \delta}{1} + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} . \frac{(\delta' - \delta)^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2} . \frac{(\delta' - \delta)^3}{1.2.3} + \ldots$$

ergiebt. Setzen wir nun ferner

$$\Phi = \int \varphi\Theta . \partial\Theta ;$$

so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} = \varphi\Theta, \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2} = \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta}, \frac{\partial^3\Phi}{\partial\Theta^3} = \frac{\partial^2\varphi\Theta}{\partial\Theta^2}, \ldots ;$$

also, wenn man

$$\delta' = \Theta + (\delta' - \Theta)$$

für Θ setzt, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} = \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} . \frac{\delta' - \Theta}{1} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2} . \frac{(\delta' - \Theta)^2}{1.2} + \ldots$$
$$= \Phi + \varphi\Theta . \frac{\delta' - \Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta} . \frac{(\delta' - \Theta)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \Phi = \varphi\Theta . \frac{\delta' - \Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta} . \frac{(\delta' - \Theta)^2}{1.2} + \ldots$$

Also, wenn man jetzt δ für Θ setzt:

$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \underset{(\Theta=\delta)}{\Phi} = \varphi\delta . \frac{\delta' - \delta}{1} + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta} . \frac{(\delta' - \delta)^2}{1.2} + \ldots .$$

Da nun aber

$$\Phi = \int \varphi\Theta . \partial\Theta$$

ist, so ist nach der gewöhnlichen Bezeichnung der bestimmten Integrale:

$$\int_\delta^{\delta'} \varphi\Theta . \partial\Theta = \underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \underset{(\Theta=\delta)}{\Phi}$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt,

$$= \int_\delta^{\delta'} \varphi\Theta . \partial\Theta ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$= \int_\delta^{\delta'} \varphi A . \partial A .$$

Nach den gewöhnlichen Begriffen der Integralrechnung schließt man hier ganz kurz so. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in das unendlich kleine Intervall $\partial\Delta$ fällt, ist nach (8.) $= \varphi\Delta . \partial\Delta$. Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen o und δ' enthalten ist,

$$= \int \varphi\Delta . \partial\Delta$$

das Integral so bestimmt, daß es für $\Delta = o$ verschwindet, und dann $\Delta = \delta'$ gesetzt, woraus denn weiter leicht folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' enthalten ist, durch das obige bestimmte Integral ausgedrückt wird. Obige Darstellung schien mir jedoch den Vorzug der größern Strenge und Deutlichkeit zu haben, wenn sie sich auch nicht eben so sehr durch Kürze empfiehlt. Sie würde sich auch leicht ganz allgemein machen lassen. Die große Wichtigkeit des Gegenstandes mag diese Weitläufigkeit, mit der vielleicht Einigen gedient ist, entschuldigen.

Also ist nach dem Obigen die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt,

$$= k' \int_{\delta}^{\delta'} e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta .$$

In (75.) haben wir aber gefunden:

$$\int_{o}^{\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Folglich auch nach bekannten Sätzen der Integralrechnung

$$\int_{-\infty}^{o} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} ;$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \sqrt{\pi} .$$

Für $h\Delta = \Delta_1$ ist

$$\int e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta = \int \frac{e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1}{h} = \frac{1}{h} \int e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1 .$$

Ist $\Delta = \infty$, so ist auch $\Delta_1 = \infty$. Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, nach dem Obigen

$$= k' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta = \frac{k'\sqrt{\pi}}{h}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber offenbar Gewißheit, indem der Fehler nothwendig zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muß, d. i. $= 1$. Also

$$1 = \frac{k'\sqrt{\pi}}{h}, \quad k' = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

und folglich endlich:

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

$$W = h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}.$$

Nach dem Obigen müssen x, y, z, v, ... so bestimmt werden, daß W ein Maximum wird. Dem Maximum von W entspricht aber offenbar das Minimum von

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots.$$

Also müssen x, y, z, v, ... so bestimmt werden, daß die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum wird.

Man nennt dieses Princip aus leicht begreiflichen Gründen das Princip der kleinsten Quadrate, und die darauf gegründete Methode der Bestimmung der unbekannten Größen die Methode der kleinsten Quadrate.

80. Dieses Princip, weiter verfolgt, führt nun zu folgender analytischen Methode zur Bestimmung der unbekannten Größen, wenn wir zunächst, welches in der That auch der am häufigsten vorkommende Fall ist, nur Gleichungen des ersten Grades voraussetzen. Die gegebenen Gleichungen seyen

$$\begin{aligned}
X &= \alpha - bx - cy - dz - ev - \ldots \\
X' &= \alpha' - b'x - c'y - d'z - e'v - \ldots \\
X'' &= \alpha'' - b''x - c''y - d''z - e''v - \ldots \\
X''' &= \alpha''' - b'''x - c'''y - d'''z - e'''v - \ldots \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

so erhält man für die Fehler (§. 78.) leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= A - \alpha + bx + cy + dz + ev + \ldots \\
\Delta' &= A' - \alpha' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots \\
\Delta'' &= A'' - \alpha'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots \\
\Delta''' &= A''' - \alpha''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$A - \alpha = a,\ A' - \alpha' = a',\ A'' - \alpha'' = a'',\ A''' - \alpha''' = a''' \ldots$$

setzen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots \\
\Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots \\
\Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots \\
\Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Es muß aber

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

ein Minimum, und folglich

$$2\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \ldots = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \Delta'''\left(\frac{\partial\Delta'''}{\partial x}\right) + \ldots = 0$$

seyn, wo die eingeschlossenen Differentialquotienten wieder partielle Differentiale sind. Aber

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) = b,\ \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) = b',\ \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) = b'', \ldots$$

Also

$$b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots = 0.$$

Verfährt man in Bezug auf die übrigen unbekannten Größen eben so, so erhält man:

$$\begin{aligned}
b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots &= 0 \\
c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots &= 0 \\
d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots &= 0 \\
e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots &= 0 \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

eben so viele Gleichungen des ersten Grades als unbekannte Größen, welche also aus derselben durch Elimination nach bekannten algebraischen Methoden gefunden werden kön-

nen. Setzt man in der ersten Gleichung für die Fehler ihre obigen Ausdrücke, so erhält man

$$
\begin{aligned}
o = \; & b\,(a + bx + cy + dz + ev + \ldots) \\
& + b'(a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots) \\
& + b''(a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots) \\
& + b'''(a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots) \\
& + \ldots\ldots \\
= \; & + ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots \\
& + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots)x \\
& + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots)y \\
& + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots)z \\
& + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder, nach einer leicht zu verstehenden abkürzenden Bezeichnung mittelst des Summenzeichens $\int$, zugleich in Bezug auf die übrigen obigen Gleichungen, die sich natürlich eben so wie die erste behandeln lassen:

$$
\begin{aligned}
& \int ab + x\int bb + y\int bc + z\int bd + \ldots = o \\
& \int ac + x\int bc + y\int cc + z\int cd + \ldots = o \\
& \int ad + x\int bd + y\int cd + z\int dd + \ldots = o \\
& \int ae + x\int be + y\int ce + z\int de + \ldots = o \\
& \quad \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}
$$

welches nun die völlig entwickelten Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen sind.

Sey z. B.

$$
\begin{aligned}
X &= x - y + 2z \\
X' &= 3x + 2y - 5z \\
X'' &= 4x + y + 4z \\
X''' &= -x + 3y + 3z
\end{aligned}
$$

und durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 14;$$

so erhält man leicht nach dem Obigen die Gleichungen für die Fehler:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta'' &= 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= 14 + x - 3y - 3z.
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
a &= 3,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -2 \\
a' &= 5,\ b' = -3,\ c' = -2,\ d' = 5 \\
a'' &= 21,\ b'' = -4,\ c'' = -1,\ d'' = -4 \\
a''' &= 14,\ b''' = 1,\ c''' = -3,\ d''' = -3.
\end{aligned}
$$

Bildet man nun die durch $\int$ bezeichneten Summen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 88 + 27x + 6y \quad &= 0 \\ -\ 70 + 6x + 15y + z &= 0 \\ -\ 107 \quad + y + 54z &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = 2{,}470\,;\ y = 3{,}551\,;\ z = 1{,}916\,.$$

81. Kehren wir nun wieder zu dem obigen Beispiel vom Pendel (77.) zurück. Sey das Dortige

$$l = X,\ A = x,\ B = y\,;$$

also die gegebene Gleichung:

$$X = x + y \sin L^2\,.$$

Die zweiten a. a. O. mitgetheilten sechs Beobachtungen geben die durch Beobachtung gefundenen Werthe:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}7412517 \\ A' &= 0{,}7416243 \\ A'' &= 0{,}7416151 \\ A''' &= 0{,}7417157 \\ A^{\text{IV}} &= 0{,}7419262 \\ A^{\text{V}} &= 0{,}7420865\,. \end{aligned}$$

Folglich sind, wenn man die Sinus der entsprechenden Breiten gehörig substituirt:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0{,}7412517 - x - 0{,}3903417\,.\,y \\ \Delta' &= 0{,}7416243 - x - 0{,}4942370\,.\,y \\ \Delta'' &= 0{,}7416151 - x - 0{,}4972122\,.\,y \\ \Delta''' &= 0{,}7417157 - x - 0{,}5136117\,.\,y \\ \Delta^{\text{IV}} &= 0{,}7419262 - x - 0{,}5667721\,.\,y \\ \Delta^{\text{V}} &= 0{,}7420865 - x - 0{,}6045628\,.\,y\,. \end{aligned}$$

Wendet man nun auf diese Gleichungen die obige allgemeine Methode an, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 4{,}4502195 + 6x + 3{,}0657375\,.\,y &= 0 \\ -\ 2{,}27397288 + 3{,}0657375\,.\,x + 1{,}59339312\,.\,y &= 0\,. \end{aligned}$$

Also, wenn man mit 6 dividirt:

$$\begin{aligned} -\ 0{,}74170325 + \quad x + 0{,}51095625\,.\,y &= 0 \\ -\ 0{,}37899548 + 0{,}51095625\,.\,x + 0{,}26556552\,.\,y &= 0\,. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen nach be-

kannten Methoden der Algebra x, y; so erhält man, da nach (78.) Alles in Metern ausgedrückt ist:

$$x = A = 0^m,739703526$$
$$y = B = 0^m,003913689\ ;$$

also, wegen

$$l = A + B \sin L^2\ ,$$

die Länge des Decimalsecunden-Pendels unter der Breite L:

$$l = 0^m,739703526 + 0^m,003913689 . \sin L^2\ ,$$

A ist die Länge des Decimalsecunden-Pendels unter dem Aequator, B der Unterschied zwischen dieser Pendellänge und der Pendellänge unter dem Pol. Wir haben dieses lehrreiche Beispiel aus Biot Traité d'Astronomie phys. T. III. p. 164 — 169. entlehnt. Die Rechnungen sind von Mathieu gemacht, hier aber noch mehr den oben entwickelten allgemeinen Formeln gemäß zu führen gesucht worden.

Die ersten in (77.) mitgetheilten Beobachtungen, mit Ausnahme der Pendellänge von Formentera, hat Puissant (Traité de Géodésie. T. II. p. 341.) berechnet. Er findet als Resultat, welches ich noch hieher setzen will:

$$l = 0^m,7395752 + 0^m,00407830 . \sin L^2\ .$$

82. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Δ zwischen die Gränzen $-\delta$, $+\delta$ falle, ist nach dem Vorhergehenden

$$= \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \frac{d.h\Delta}{h}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2} \partial . h\Delta\ ,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$\int e^{-h^2\Delta^2} \partial . h\Delta = \psi(h\Delta)$$

setzen, obige Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \psi(+h\delta) - \psi(-h\delta) \right\} .$$

Für eine andere Reihe von Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen die Gränzen $-\delta'$ und $+\delta'$ falle,

$$= \int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} \partial\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \psi(+h'\delta') - \psi(-h'\delta') \right\} .$$

Ist also $h\delta = h'\delta'$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei den ersten Beobachtungen der Fehler zwischen die Grenzen $-\delta$, $+\delta$, bei den zweiten zwischen die Grenzen $-\delta'$, $+\delta'$ falle, gleich groß. Ist also bei den ersten Beobachtungen für eine gewisse Wahrscheinlichkeit das Intervall, in welchem der Fehler liegt, $-\delta$, $+\delta$, oder der Fehler selbst $= \delta$, entweder positiv oder negativ genommen, so ist bei den zweiten Beobachtungen für dieselbe Wahrscheinlichkeit der Fehler $= \delta' = \frac{h\delta}{h'}$. Setzen wir nun

$$h : h' = 1 : n,\ h' = nh;$$

$$\text{so ist } \delta' = \frac{h\delta}{nh} = \frac{1}{n}\delta,\ \delta = n\delta',$$

und es kann also bei den ersten Beobachtungen eben so leicht (d. i. mit derselben Wahrscheinlichkeit) ein nfacher Fehler begangen werden, wie bei den zweiten ein einfacher. Man legt daher nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche den zweiten Beobachtungen eine nfache Genauigkeit oder Präcision, einen nfachen Werth, ein nfaches Gewicht bei, oder es verhalten sich überhaupt rücksichtlich der Güte, des Werths oder Gewichts die ersten Beobachtungen zu den zweiten $= 1 : n = h : h'$, so daß also überhaupt durch $h : h'$ der verhältnißmäßige Werth, die verhältnißmäßige Präcision der Beobachtungen dargestellt wird. Man nennt daher die Größe h selbst die Präcision, den Werth oder das Gewicht der entsprechenden Beobachtungen.

83. Das in (79.) entwickelte Princip setzt alle in Rechnung zu nehmenden Beobachtungen als gleich gut voraus. Haben aber die Beobachtungen ungleiches Gewicht, so seyen, wie gewöhnlich,

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$$

die Fehler, und

$$h, h', h'', h''', h'''', \ldots$$

die respectiven Gewichte der gegebenen Beobachtungen. Unter der Voraussetzung, daß alle Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit gemacht wären, setze man das Gewicht $= 1$, und bezeichne die Fehler der Beobachtungen nach der Reihe durch

$$\Delta_1, \Delta'_1, \Delta''_1, \Delta'''_1, \Delta''''_1, \ldots;$$

so erhellet, weil sich offenbar die Fehler umgekehrt wie die Gewichte verhalten, augenblicklich die Richtigkeit der folgenden Proportionen und Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1:h &= \Delta : \Delta_1 ; & \Delta_1 &= h\Delta \\ 1:h' &= \Delta' : \Delta'_1 ; & \Delta'_1 &= h'\Delta' \\ 1:h'' &= \Delta'' : \Delta''_1 ; & \Delta''_1 &= h''\Delta'' \\ 1:\Delta''' &= \Delta''' : \Delta'''_1 ; & \Delta'''_1 &= h'''\Delta''' \\ &\text{u. s. f.} & &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Da nun nach dem Princip der kleinsten Quadrate die unbekannten Größen so bestimmt werden müssen, daß

$$\Delta_1^2 + \Delta'^2_1 + \Delta''^2_1 + \Delta'''^2_1 + \ldots$$

ein Minimum wird, so muß auch jetzt diese Bestimmung so vorgenommen werden, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots$$

ein Minimum wird. Es ist also hiermit vorliegender Fall auf den ersten Fall zurückgeführt, indem man nur statt der Fehler selbst die mit den respectiven Gewichten der entsprechenden Beobachtungen multiplicirten Fehler setzt. Ist daher, wie in (80.),

$$\begin{aligned} \Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots \\ \Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots \\ \Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots \\ \Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} h\Delta &= ah + bhx + chy + dhz + \ldots \\ h'\Delta' &= a'h' + b'h'x + c'h'y + d'h'z + \ldots \\ h''\Delta'' &= a''h'' + b''h''x + c''h''y + d''h''z + \ldots \\ h'''\Delta''' &= a'''h''' + b'''h'''x + c'''h'''y + d'''h'''z + \ldots \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

und die unbekannten Größen sind also so zu bestimmen, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots$$

ein Minimum wird, welches natürlich auf dieselben Gleichungen zwischen den unbekannten Größen wie in (80.) führt, wenn nur respective

$$\begin{array}{llll} ah\ , & bh\ , & ch\ , & dh\ , \ldots \\ a'h\ , & b'h'\ , & c'h'\ , & d'h'\ , \ldots \\ a''h''\ , & b''h''\ , & c''h''\ , & d''h''\ , \ldots \\ a'''h'''\ , & b'''h'''\ , & c'''h'''\ , & d'''h'''\ , \ldots \\ \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} & \end{array}$$

statt der dortigen

$$\begin{array}{llll} a\ , & b\ , & c\ , & d\ , \ldots \\ a\ , & b'\ , & c'\ , & d'\ , \ldots \\ a''\ , & b''\ , & c''\ , & d''\ , \ldots \\ a'''\ , & b'''\ , & c'''\ , & d'''\ , \ldots \\ \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} & \end{array}$$

gesetzt werden.

84. Das Vorhergehende bezieht sich auf Gleichungen des ersten Grades, oder sogenannte lineare Gleichungen. Es läßt sich aber jeder andere Fall auf diesen zurückführen. Da nämlich die Anzahl der unbekannten Größen $= m$, die Anzahl der gegebenen Gleichungen $= n$, und $n > m$ ist, so berechne man mittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethoden aus m der gegebenen Gleichungen die genäherten Werthe

$$x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1\ ,\ v_1\ ,\ \ldots$$

der m unbekannten Größen, setze nun

$$x = x_1 + x'\ ,\ y = y_1 + y'\ ,\ z = z_1 + z'\ ,\ v = v_1 + v'\ ,\ \ldots$$

und führe diese Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen für $x, y, z, v, \ldots$ ein. Da nun bei Beobachtungen welche im Allgemeinen den Namen guter Beobachtungen verdienen, bei denen nämlich nicht augenscheinliche Fehler vorgefallen sind — und solche dürfen ja überhaupt nur in Rechnung genommen werden, wenn das Resultat brauchbar seyn soll — offenbar $x', y', z', v', \ldots$ immer nur sehr klein seyn werden, so kann man alle die erste übersteigenden Dimensionen dieser Unterschiede vernachlässigen, wodurch die gegebenen Gleichungen sogleich auf den Fall linearer Gleichungen zurückgeführt werden.

85. Nach diesen Bemerkungen kehren wir zu dem ersten Falle, wo die gegebenen Gleichungen linear, und die Gewichte der Beobachtungen nicht von einander verschieden sind, wieder zurück. Vorzüglich ist nun noch die Bestim-

mung der relativen Gewichte der durch die obige Methode gefundenen Werthe der einzelnen unbekannten Größen übrig. Wir gehen dabei von einer nähern Betrachtung der Function

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots,$$

welche im Folgenden immer durch V bezeichnet werden soll, aus, schicken jedoch noch folgenden allgemeinen Satz von den Functionen voraus.

Wenn die Function

$$F = f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots)$$

von einer der in ihr enthaltenen veränderlichen Größen, z. B. x, unabhängig ist, so erhält man den von x unabhängigen Ausdruck dieser Function, wenn man x aus der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$$

bestimmt, und den erhaltenen Ausdruck für x in die gegebene Function setzt.

Da die gegebene Function von x unabhängig ist, so müssen alle mit x behafteten Glieder sich gegenseitig aufheben, und es muß also allgemein

$$f(x, y, z, \ldots) = \psi(x, y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots)$$
$$\varphi(x, y, z, \ldots) = \psi(x, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots);$$

folglich

$$F = f'(y, z, \ldots) - \varphi'(y, z, \ldots)$$

seyn. Bestimmt man nun x aus der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0,$$
$$\text{d. i. } \psi(x, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots) = 0;$$

so erhält man für x einen Ausdruck, welcher eine Function von y, z, ... ist, und durch X bezeichnet werden soll. Setzt man denselben für x, so erhält man aus obiger Gleichung

$$\psi(X, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots) = 0,$$
$$\psi(X, y, z, \ldots) = -\varphi'(y, z, \ldots).$$

Folglich, wenn man den gefundenen Werth von x auch in die gegebene Function setzt, nach dieser Substitution

$$\begin{aligned} F &= f(X, y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots) \\ &= \psi(X, y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots) \\ &= -\varphi'(y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots). \end{aligned}$$

Aber nach dem Obigen

$$\varphi(X, y, z, \ldots) = o;$$

also

$$F = f'(y, z, \ldots) - \varphi'(y, z, \ldots)$$

der schon oben gefundene von x befrei'te Ausdruck der Function F.

86. Setzen wir nun

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = V,$$

und (vergl. 80.)

$$\begin{aligned}
P &= b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots \\
Q &= c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots \\
R &= d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots \\
S &= e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

wobei immer

$$\begin{aligned}
\Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots, \\
\Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots. \\
\Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots. \\
\Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots. \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

ist. Differentiirt man V nach x, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2\Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) &= \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots \\
&= (a + bx + cy + dz + ev + \ldots).b \\
&\quad + (a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots).b' \\
&\quad + (a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots).b'' \\
&\quad + (a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''y + \ldots).b''' \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots. \\
&\quad + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots.)x \\
&\quad + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots.)y \\
&\quad + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots.)z \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Man kann folglich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

setzen, wo immer α eine Summe von Quadraten, und folglich positiv ist. Setzt man der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots = \Omega\,;$$

so läßt sich leicht zeigen, daß

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V'\,;$$

von x unabhängig ist. Differentiirt man nämlich nach x, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{2\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$

$$= 2\Omega - \frac{2\Omega}{\alpha}\cdot\alpha = 2\Omega - 2\Omega = 0\,,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Ferner ergiebt sich auch aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

unmittelbar, daß

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots\,;$$

d. i. daß

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = P\,, \text{ und eben so}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = R\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = S\,,$$

u. s. f. u. s. f.

ist, wovon wir späterhin Gebrauch machen werden.

Da nun

$$V' = V - \frac{\Omega^2}{\alpha}$$

von x unabhängig ist, so erhält man den von x befrei'ten Ausdruck für V′, wenn man x aus der Gleichung

$$\Omega = 0$$

bestimmt, und den gefundenen Ausdruck für x setzt (85.). Nach dieser Substitution wird, wegen $\Omega = 0$,

$$V' = V,$$

so daß also V', eben so wie V, eine Summe von Quadraten ist, die aber von x unabhängig ist. Auch ist klar, daß in den Größen, aus deren Quadraten V' besteht, alle unbekannte Größen nur in der ersten Dimension vorkommen, eben so wie in V. Also ist ganz wie vorher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right) = \lambda' + \beta' y + \gamma' z + \delta' v + \ldots = \Omega\,;$$

β' ist, wie vorher α, positiv, und

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'',$$

welches nach dem Obigen natürlich kein x mehr enthält, ist auch von y unabhängig. Man erhält daher wieder den von y befreiten Ausdruck von V'', wenn man y aus der Gleichung

$$\Omega' = 0$$

bestimmt, und den gefundenen Werth substituirt, wodurch man

$$V'' = V'$$

erhält, so daß also V'' wieder eine Function von ganz ähnlicher Beschaffenheit wie V' und V ist, auf welche sich also wieder ganz dieselben Schlüsse wie vorher anwenden lassen, wie sogleich erhellen wird.

Man hat also nach dem Bisherigen:

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V',\ V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V'\,;$$

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'',\ V' = \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V''\,;$$

$$V'' - \frac{\Omega''^2}{\gamma''} = V''',\ V'' = \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V'''\,;$$

$$V''' - \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} = V'''',\ V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V''''\,;$$

u. s. f. u. s. f.

wo jede der Functionen

$$V,\ V',\ V'',\ V''',\ V'''',\ \ldots$$

eine unbekannte Größe weniger enthält als die nächst vor-

hergehende, und α, β', γ'', δ''', ... alle positiv sind. Durch successive Substitution erhält man hieraus leicht

$$\begin{aligned} V &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + V' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V'' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V''' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''' \\ &\quad \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

d. i. endlich,

$$\begin{aligned} V &= \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + \ldots + \text{Const} \end{aligned}$$

wo alle Nenner positiv sind.

87. Man denke sich jetzt irgend ein System

$$l, l', l'', l''', \ldots$$

bestimmter Werthe von

$$x, y, z, v, \ldots,$$

und bezeichne die Fehler, d. i. die Unterschiede von den wahren Werthen, durch

$$x', y', z', v', \ldots,$$

so daß die wahren Werthe selbst

$$x = l + x',\ y = l' + y',\ z = l'' + z',\ v = l''' + v', \ldots$$

sind; so ist nach (79.) die Wahrscheinlichkeit dieses Systems, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler wirklich die obigen, an sich natürlich unbekannten, Werthe haben,

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}$$

oder, nach der in (86.) gebrauchten Bezeichnung,

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2 V},$$

und folglich der Größe

$$e^{-h^2 V}$$

proportional. Läßt man nun x um ∂x sich ändern, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den Grenzen x, $x + \partial x$ enthalten sey, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert bleiben, wenn man ∂x als unendlich

klein annimmt, nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.), offenbar der Größe

$$e^{-h^2 V} \partial x$$

proportional. Folglich überhaupt die Wahrscheinlichkeit, daß, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert bleiben, der Werth von x zwischen den endlichen Gränzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sey, dem bestimmten Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 V} \partial x$$

proportional, wovon man sich nach einer strengen Methode ganz auf dieselbe Weise wie in (79.) bei einem ganz ähnlichen Fall überzeugen kann, indem die Allgemeinheit der dortigen Schlüsse leicht in die Augen fällt. Läßt man nun x völlig unbestimmt, so sind $-\infty$ und $+\infty$ die Gränzen, zwischen welche sein Werth überhaupt fallen kann, und demnach, wenn x unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des in Rede stehenden Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 V} \partial x$$

proportional. Nach (79.) ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

und nach (86.)

$$e^{-h^2 V} \partial x = e^{-h^2 \left\{ \frac{1}{\alpha} \Omega^2 + V' \right\}} \partial x$$

$$= e^{-h^2 V'} . e^{-\frac{1}{\alpha} h^2 \Omega^2} \partial x,$$

wo V′ kein x mehr enthält, so daß also

$$\int e^{-h^2 V} \partial x = e^{-h^2 V'} \int e^{-\frac{1}{\alpha} h^2 \Omega^2} \partial x.$$

Da nun ferner (86.)

$$\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \cdots$$

ist, so ist, da hier bloß x als veränderlich betrachtet wird:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial \Omega} = \frac{1}{\alpha}.$$

Folglich

$$e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial x = e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega\,.\frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega\,,$$

$$\int e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega\,.$$

Da

$$\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots,$$

und α positiv ist (86.), die Größen $y, z, v, \ldots$ aber als constant betrachtet werden, so ist offenbar gleichzeitig $x = \pm\infty$, $\Omega = \pm\infty$, wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}.\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} = h^{-1}\alpha^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V'}$$

wo V' nur $y, z, v, \ldots$ enthält.

Also ist, indem x unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen der Größe

$$e^{-h^2V'}$$

proportional. Betrachtet man nun ferner auch y als unbestimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen ganz eben so dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V'}\partial y = h^{-1}\beta'^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V''},$$

d. i. der Größe

$$e^{-h^2V''}$$

proportional, woraus ferner folgt, daß, wenn auch z unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V''}\partial z = h^{-1}\gamma''^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V'''},$$

d. i. der Größe

$$e^{-h^2 V'''}$$

proportional ist, u. s. f.

Obgleich wir die folgenden Betrachtungen auf den Fall beschränken werden, wenn nur vier unbekannte Größen x, y, z, v zu bestimmen sind, so wird dies doch der Allgemeinheit nicht schaden. Die Wahrscheinlichkeit des Werthes von v ist nach dem Vorhergehenden der Größe

$$e^{-h^2 V''}$$

proportional. Aber nach (86.)

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''',$$

wo V'''' kein v mehr enthält, und demnach eine constante Größe ist, so daß also

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C,$$

obige Wahrscheinlichkeit folglich der Größe

$$e^{-h^2\left\{\frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C\right\}} = e^{-h^2 C} . e^{-h^2 \frac{\Omega'''^2}{\delta'''}},$$

d. i. der Größe

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

proportional ist. Die Wahrscheinlichkeit wird also am größten, wenn

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

ein Maximum wird. Differentiirt man nun diese bloß von v abhängende Function, und setzt den Differentialquotienten $= o$, so erhält man:

$$-\frac{h^2}{\delta'''} e^{-\frac{h^2 \Omega''^2}{\delta'''}} . 2\Omega''' . \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = o.$$

Aber (86.)

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta''' v, \quad \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = \delta'''.$$

Folglich

$$-2h^2\,\Omega'''\,e^{-\frac{h^2\,\Omega'''^2}{\delta'''}} = o\,,$$

woraus sogleich:

$$\Omega''' = o,\ \lambda''' + \delta'''v = o,\ v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''}$$

welches also der wahrscheinlichste Werth von v ist. Wir hätten zu demselben Resultat auch auf anderm Wege mittelst unserer frühern Formeln gelangen können, und werden nachher auf die Uebereinstimmung der Resultate besonders aufmerksam machen. Der wahre Werth von v ist also für diese Bestimmung, wenn wir, wie oben, den Fehler durch v′ bezeichnen:

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v',$$

welches, für v in Ω''' gesetzt, giebt:

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''\left\{-\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v'\right\} = \delta'''v',$$

so daß also die Wahrscheinlichkeit, den Fehler v′ zu begehen, der Größe

$$e^{-\frac{h^2\,\delta'''^2\,v'^2}{\delta'''}} = e^{-h^2\,\delta'''\,v'^2}$$

proportional ist. Die Wahrscheinlichkeit, bei den unmittelbaren Beobachtungen den Fehler Δ zu begehen, ist nach (78. 79.) der Größe

$$e^{-h^2\,\Delta^2}$$

proportional, und h ist die Präcision oder das Gewicht der Beobachtungen. Dächte man sich nun den obigen Werth von v durch directe Beobachtung gefunden, so würde das Gewicht oder die Präcision dieser Beobachtung $= \sqrt{h^2\delta'''} = h\sqrt{\delta'''}$ seyn, so daß sich also das Gewicht der obigen Bestimmung von v zu dem Gewichte der Beobachtungen verhält wie $h\sqrt{\delta'''} : h = \sqrt{\delta'''} : 1$, oder es ist das Gewicht der wahrscheinlichsten Bestimmung von $v = \sqrt{\delta'''}$, wenn man das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ setzt.

Es ist nun nach (86.)

$$P = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Omega$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$$

$$= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\,\Omega\,,$$

da $\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \delta z + \ldots$,

also das partielle Differential

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = \beta$$

ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial z}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

Endlich

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega''}{\gamma''}\left(\frac{\partial \Omega''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega . \end{aligned}$$

Man hat also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \Omega \\ Q &= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\Omega \\ R &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega \\ S &= \Omega''' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega \end{aligned}$$

oder auch, wie leicht erhellet:

$$\begin{aligned} \Omega &= P \\ \Omega' &= Q + \mathfrak{A}P \\ \Omega'' &= R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P \\ \Omega''' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P \end{aligned}$$

wo alle Coefficienten von P, Q, R, S, bekannte Größen sind. Aber

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''v, \; v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\Omega'''}{\delta'''} .$$

Also allgemein

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''}P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''}Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''}R + \frac{1}{\delta'''}S .$$

Drückt man also v durch eine Gleichung von der Form

$$v = L''' + A_1'''P + B_1''Q + C_1'''R + D_1'''S$$

aus, so ist, wie aus dem Obigen erhellet, L''' der wahrscheinlichste Werth von v, und, da

$$\frac{1}{\delta'''} = D_1''', \quad \delta''' = \frac{1}{D_1'''}$$

ist, $\sqrt{\delta'''} = \frac{1}{\sqrt{D_1'''}}$ dessen Gewicht, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt.

Hieraus ergiebt sich nun, da die Allgemeinheit der obigen Schlüsse sogleich in die Augen fällt, unmittelbar Folgendes. Es ist nach dem Obigen überhaupt

$$\begin{aligned} P &= b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots \\ Q &= c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots \\ R &= d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots \\ S &= e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

m Gleichungen zwischen den m unbekannten Größen x, y, z, v, ..., welche in Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... alle nur in der ersten Dimension vorkommen. Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen x, y, z, v, ... nach bekannten algebraischen Methoden, so wird man die Werthe dieser unbekannten Größen offenbar immer durch Ausdrücke von folgender Form darstellen können:

$$\begin{aligned} x &= L + A_1P + B_1Q + C_1R + D_1S + \ldots. \\ y &= L' + A_1'P + B_1'Q + C_1'R + D_1'S + \ldots. \\ z &= L'' + A_1''P + B_1''Q + C_1''R + D_1''S + \ldots. \\ v &= L''' + A_1'''P + B_1'''Q + C_1'''R + D_1'''S + \ldots. \\ &\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Hat man diese Ausdrücke entwickelt, so sind

$$L, L', L'', L''', \ldots.$$

die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Größen x, y, z, v, ..., und

$$\frac{1}{\sqrt{A_1}}, \frac{1}{\sqrt{B_1'}}, \frac{1}{\sqrt{C_1''}}, \frac{1}{\sqrt{D_1'''}}, \ldots.$$

die Gewichte dieser Bestimmungen, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt, so daß also dieses elegante analytische Verfahren mit einem Male zu der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe und deren Gewichte führt.

Ist nur eine unbekannte Größe x zu bestimmen, und man hat folgende Gleichungen für die Fehler:

$$\Delta = a + bx,\ \Delta' = a' + b'x,\ \Delta'' = a'' + b''x, \ldots$$

so erhält man leicht:

$$P = ab + a'b' + a''b'' + \ldots + (b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots)x$$

$$x = -\frac{ab + a'b' + a''b'' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots} + \frac{1}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots} P.$$

Also der wahrscheinlichste Werth von x

$$= -\frac{ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots}$$

und sein Gewicht

$$= \sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots)}.$$

Sind die Gleichungen für die Fehler

$$\Delta = a - x,\ \Delta = a' - x,\ \Delta'' = a'' - x, \ldots$$

und die Anzahl der Beobachtungen $= n$, so ist der wahrscheinlichste Werth

$$= \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{n}$$

und das Gewicht $= \sqrt{n}$, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt. Ist also das Gewicht der Beobachtungen $= h$, so ist das Gewicht des Resultats $= h\sqrt{n}$. Ist daher der wahrscheinlichste Fehler der Beobachtungen $= \Delta$, so ist der wahrscheinlichste Fehler des Resultates offenbar nur $= \frac{\Delta}{\sqrt{n}}$, da dessen Gewicht $\sqrt{n}$ Mal größer ist.

Sey jetzt, um noch einmal zu dem schon in (80.) behandelten Beispiel, wenn auch hier in noch etwas anderer Beziehung zurückzukehren:

$$\begin{aligned} X &= x - y + 2z \\ X' &= 3x + 2y - 5z \\ X'' &= 4x + y + 4z \\ X' &= -2x + 6y + 6z \end{aligned}$$

und durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 28.$$

Die Gewichte der drei ersten Beobachtungen seyen einander gleich, der letzten aber sey nur das halbe Gewicht von jenem beizulegen. Die Fehler sind

$$\begin{aligned}
\Delta &= A - X = 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= A' - X' = 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta'' &= A'' - X'' = 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= A'' - X''' = 28 + 2x - 6y - 6z .
\end{aligned}$$

Da aber der vierten Beobachtung bloß das halbe Gewicht beizulegen ist, so muß man nach (83.) bloß $\frac{1}{2}\Delta'''$ als Fehler in die Rechnung einführen, und erhält demnach folgende Ausdrücke für die Fehler:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta' &= 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= 14 + x - 3y - 3z
\end{aligned}$$

wo also a, b, c, u. s. f. dieselben Werthe haben wie in (80.). Es ist nun z. B.

$$\begin{aligned}
P &= b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' \\
&= \left\{\begin{array}{l} -3 + x - y + 2z \\ -15 + 9x + 6y - 15z \\ -84 + 16x + 4y + 16z \\ 14 + x - 3y - 3z \end{array}\right. \\
&= -88 + 27x + 6y .
\end{aligned}$$

Führt man diese Rechnung nun auch für Q, R aus, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P &= -88 + 27x + 6y \\
Q &= -70 + 6x + 15y + z \\
R &= -107 + y + 54z .
\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen bestimme man x, y, z. Für y z. B. würde die Rechnung so stehen:

$$\begin{array}{rl}
54\,Q = & -3780 + 324x + 810y + 54z \\
R = & -107 + y + 54z \\
\hline
54\,Q - R = & -3673 + 324x + 809y \\
12\,P = & -1056 + 324x + 72y \\
\hline
-12\,P + 54\,Q - R = & -2617 + 737y .
\end{array}$$

Durch diese Elimination erhält man:

$$\begin{aligned}
19899x &= 49154 + 809P - 324Q + 6R \\
737y &= 2617 - 12P + 54Q - R \\
6633z &= 12707 + 2P - 9Q + 123R
\end{aligned}$$

und folglich nach dem Obigen, wenn man nur noch durch die Coefficienten von x, y, z dividirt, die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = \frac{49154}{19899} = 2{,}470$$
$$y = \frac{2617}{737} = 3{,}551$$
$$z = \frac{12707}{6633} = 1{,}916\,.$$

Die Gewichte dieser Bestimmungen sind, das Gewicht der Beobachtnngen = 1 gesetzt:

$$\text{für } x \ldots = \sqrt{\tfrac{19899}{809}} = 4{,}96$$
$$\text{für } y \ldots = \sqrt{\tfrac{737}{54}} = 3{,}69$$
$$\text{für } z \ldots = \sqrt{\tfrac{6633}{123}} = 7{,}34\,.$$

Also ist z von allen am schärfsten bestimmt, y am wenigsten genau, so daß y nur halb so sicher ist als z.

88. Weder bei Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Größen, noch bei Bestimmung der relativen Gewichte derselben, brauchte man, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, den Werth der Größe h zu kennen. Indeß ist eine Kenntniß dieser Größe immer an sich interessant und lehrreich, und wir wollen daher jetzt noch einige Bemerkungen über die Art und Weise hinzufügen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntniß gelangen kann. Den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-t^2}\partial t}{\sqrt{\pi}},$$

von $t = o$ an gerechnet, wollen wir bei dieser Untersuchung durch Θt bezeichnen. Mittelst der in (75.) gegebenen Formeln findet man leicht folgende von Gauß berechnete Werthe dieser Function:

$$\begin{aligned}
0{,}5000000 &= \Theta 0{,}4769363 = \Theta\varrho \\
0{,}6000000 &= \Theta 0{,}5951161 = \Theta 1{,}247790\varrho \\
0{,}7000000 &= \Theta 0{,}7328691 = \Theta 1{,}536618\varrho \\
0{,}8000000 &= \Theta 0{,}9061939 = \Theta 1{,}900032\varrho \\
0{,}8427008 &= \Theta 1 = \Theta 2{,}096716\varrho \\
0{,}9000000 &= \Theta 1{,}1630872 = \Theta 2{,}438664\varrho \\
0{,}9900000 &= \Theta 1{,}8213864 = \Theta 3{,}818930\varrho \\
0{,}9990000 &= \Theta 2{,}3276754 = \Theta 4{,}880475\varrho \\
0{,}9999000 &= \Theta 2{,}7510654 = \Theta 5{,}768204\varrho \\
1 &= \Theta\infty = \Theta\infty\,.
\end{aligned}$$

Diese Werthe werden von dem Gange unserer Function eine hinlängliche Uebersicht geben.

89. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Δ einer Beobachtung zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht größer als δ sey, ist nach (79.)

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 \Delta^2} \partial \Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{-h^2 \Delta^2} \partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

$$= 2 \int_{0}^{\delta} \frac{e^{-h^2 \Delta^2} \partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}} = \int_{0}^{\delta} \frac{2e^{-h^2 \Delta^2} \partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

wo sich immer die Grenzen bloß auf die veränderliche Größe Δ beziehen, wie sich von selbst versteht. Setzen wir nun $h\Delta = t$, so ist, für $\Delta = 0$, auch $t = 0$, für $\Delta = \delta$ aber $t = h\delta$, und folglich obige Wahrscheinlichkeit

$$= \int_{0}^{h\delta} \frac{2e^{-t^2} \partial t}{\sqrt{\pi}} = \Theta h\delta ,$$

wo sich nun natürlich die Grenzen auf die veränderliche Größe t beziehen. Setzen wir $h\delta = \varrho$, $\delta = \frac{\varrho}{h}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{\varrho}{h}$, $+\frac{\varrho}{h}$ enthalten, d. i., ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht größer als $\frac{\varrho}{h}$ sey, nach (88.) $= \frac{1}{2}$, folglich der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich, so daß es also eben so wahrscheinlich ist, einen Fehler zu begehen, welcher $< \frac{\varrho}{h}$, als einen Fehler zu begehen, welcher $> \frac{\varrho}{h}$ ist. Man nennt daher die Größe

$$\frac{\varrho}{h} = \frac{0{,}4769363}{h}$$

den wahrscheinlichen Fehler, und bezeichnet denselben nach Gauß mit r.

Für

$$\delta = 2{,}438664 . \frac{\varrho}{h} , \delta = 3{,}818930 . \frac{\varrho}{h}$$

z. B. ist

$$\delta h = 2{,}438664\varrho , \delta h = 3{,}818930\varrho .$$

Also die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $2{,}438664\varrho$ oder $3{,}818930\varrho$ nicht übersteige, respective $= \frac{9}{10}$, $=$

$\frac{99}{100}$, und folglich die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß der Fehler über $2{,}438664\varrho$ oder $3{,}818930\varrho$ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$, $= \frac{1}{100}$, u. s. w.

90. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... seyen, war nach (79.)

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}$$

wo h als gegeben oder beständig, die Fehler dagegen als veränderlich angesehen werden. Betrachtet man aber jetzt umgekehrt die Fehler als gegeben oder beständig, das Gewicht h der Beobachtungen dagegen als unbekannt oder veränderlich, so wird der richtige Werth von h offenbar derjenige seyn, welcher den Fehlern Δ, Δ', Δ'', Δ''', entspricht, und es wird folglich offenbar durch obige Größe, wenn die Fehler als gegeben oder constant betrachtet werden, auch die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß h der wahre Werth des Gewichts der Beobachtungen sey, so daß also diese Wahrscheinlichkeit der Größe

$$h^n e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}$$

proportional ist. Der wahrscheinlichste Werth von h wird also derjenige seyn, für welchen diese Größe ein Maximum wird. Differentiirt man nun, indem man die Fehler als constant betrachtet, und

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = S$$

setzt, nach h, und setzt das Differential $= o$, so erhält man:

$$nh^{n-1} e^{-h^2 S} - 2h^{n+1} S e^{-h^2 S} = o,$$

$$n - 2h^2 S = o,$$

$$h = \sqrt{\frac{n}{2S}} = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}}$$

welches also der wahrscheinlichste Werth von h seyn wird. Hieraus erhält man unmittelbar den wahrscheinlichsten Werth von r, d. h. den wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers =

$$\varrho\sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}{n}}$$
$$= 0{,}4769363\sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}{n}}$$
$$= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}},$$

Der wahrscheinlichste Werth von h soll der Kürze wegen im Folgenden durch H bezeichnet werden, so daß also

$$H = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta^2+\ldots)}}$$

ist. Eben so soll der obige wahrscheinlichste Werth von r durch R bezeichnet werden, so daß also

$$R = 0{,}6744897\sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}}$$

ist. Man sieht hieraus, daß immer

$$HR = \frac{0{,}6744897}{\sqrt{2}} = 0{,}47693631 = \varrho$$

ist.

91. Man begreift leicht, daß man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner n ist. Entwickeln wir daher den Grad der Genauigkeit, welchen man derselben beizulegen hat, für den Fall, wo n eine große Zahl ist. Nach (91.) verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß H der wahre Werth von h ist, zu der Wahrscheinlichkeit, daß diese Bestimmung von der Wahrheit abweicht, und z. B. $H + \lambda$ der wahre Werth von h ist,

$$= H^n e^{-H^2 S} : (H+\lambda)^n e^{-(H+\lambda)^2 S}.$$

Aber

$$H = \sqrt{\frac{n}{2S}},\ S = \frac{n}{2H^2}.$$

Folglich das Verhältniß obiger Wahrscheinlichkeiten

$$= H^n e^{-\frac{n}{2}} : (H+\lambda)^n e^{-\frac{n(H+\lambda)^2}{2H^2}}$$
$$= 1 : \left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}^n e^{-\frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2}}$$
$$= 1 : e^{\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}^n} \cdot e^{-\frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2}}$$
$$= 1 : e^{-\frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2} + n\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}}.$$

Aber (Logarithmus. 42.)

$$-\frac{2H\lambda+\lambda^2}{2H^2}+\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}$$

$$=-\frac{\lambda}{H}-\frac{\lambda^2}{2H^2}+\frac{\lambda}{H}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^4}{H^4}+\ldots$$

$$=-\frac{\lambda^2}{H^2}\left\{1-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\ldots\right\}$$

und folglich das Verhältniß obiger Wahrscheinlichkeiten

$$=1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\ldots\right\}}.$$

Wegen des negativen Exponenten und der beträchtlichen Größe von n wird das zweite Glied dieses Verhältnisses nur dann gegen das erste noch merklich seyn, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein sehr kleiner Bruch ist, d. h. es wird nur dann noch einige Wahrscheinlichkeit vorhanden seyn, daß nicht H, sondern $H+\lambda$ der wahre Werth von h ist, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein sehr kleiner Bruch ist, welches uns berechtigt, statt des obigen Verhältnisses kürzer dieses zu gebrauchen:

$$1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

so daß also die Wahrscheinlichkeit, daß $H+\lambda$ der wahre Werth von h ist,

$$=Ke^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

gesetzt werden muß, wo K eine constante Größe bezeichnet. Also ist, nach einer früher schon öfter gebrauchten Schlußart, die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth von h zwischen den Gränzen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ enthalten ist,

$$=K\int_{-\lambda}^{+\lambda}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda.$$

Da nun der Werth von h gewiß zwischen den Gränzen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ enthalten ist, wenn man für λ den größten überhaupt zulässigen Werth λ' setzt, so ist klar, daß man die Constante K so bestimmen muß, daß

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda=1$$

wird, weil für diese Grenzen obige Wahrscheinlichkeit offenbar Gewißheit, d. i. $= 1$ ist. Sobald aber $\frac{\lambda}{H}$ aufhört ein sehr kleiner Bruch zu seyn, wird wegen der Größe von n offenbar $e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}$, also auch der Werth des obigen bestimmten Integrals unmerklich, so daß also

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda \text{ und } K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

nicht merklich von einander verschieden seyn können, und demnach verstattet ist, K so zu bestimmen, daß

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda = 1$$

wird. Es ist aber, für

$$\frac{n\lambda^2}{H^2} = t^2,\ \frac{\lambda\sqrt{n}}{H} = t,\ \partial\lambda = \frac{H\partial t}{\sqrt{n}},$$

weil offenbar für $\lambda = \pm\infty$ auch $t = \pm\infty$ ist, nach (79.)

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda = \frac{KH}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \frac{KH\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}.$$

Also

$$\frac{KH\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} = 1,\ K = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß h zwischen den Grenzen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ enthalten sey,

$$= \frac{1}{H}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\cdot\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

$$= \frac{1}{H}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\cdot\int_{0}^{\lambda} 2e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

$$= \int_{0}^{\lambda} \frac{2e^{-\left(\frac{\lambda\sqrt{n}}{H}\right)^2}\partial\left(\frac{\lambda\sqrt{n}}{H}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

so daß also nach der in (88.) eingeführten Bezeichnung offenbar die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit

$$= \Theta\left(\frac{\lambda\sqrt{n}}{H}\right)$$

ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist also $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{H} = \varrho,\ \lambda = H\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

ist, und folglich 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von h zwischen den Grenzen

$$H\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right),\ H\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

liege. Da ferner $\varrho = rh$, $\varrho = RH$ ist (89. 90.); so ist $rh = RH$, $r = \frac{RH}{h}$; und folglich auch 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von r zwischen den Grenzen

$$\frac{RH}{H\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)},\ \frac{RH}{H\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)};\ \text{d. i.}\ \frac{R}{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}},\ \frac{R}{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}}$$

oder, wenn man diese Brüche in Reihen entwickelt, wegen der Kleinheit von $\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$ zwischen den Grenzen

$$R\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right),\ R\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

liege.

Wir haben also folgende Formeln

$$S = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

Wahrscheinlichster Fehler der Beobachtungen =

$$R = 0{,}6744897\sqrt{\frac{S}{n}} \quad (90.).$$

Wahrscheinlichster Fehler des aus den Beobachtungen nach dem arithmetischen Mittel gezogenen Resultats $= \frac{R}{\sqrt{n}}$ (87.).

Wahrscheinlichste Grenze des Beobachtungsfehlers

$$= R\left\{1 \pm \frac{0{,}4769363}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Wahrscheinlichste Unsicherheit von R also

$$= \frac{0{,}4769363\,R}{\sqrt{n}}.$$

Littrow (Theoret. u. pract. Astron. I. Wien. 1821. S. 266.) fand für die Breite der Ofener Sternwarte folgende 10 Resultate:

47° 29′	11″, 5
	12 , 2
	12 , 8
	11 , 2
	11 , 7
	12 , 3
	11 , 5
	11 , 9
	12 , 4
	12 , 5
Mittel 47° 29′	12″, 00 .

Die Fehler Δ, Δ', Δ'', ... jeder einzelnen Beobachtung kann man gleich der Differenz jeder Beobachtung von diesem Mittel annehmen. Dies giebt

$$S = 2{,}42;\ n = 10;$$

$$R = 0{,}67449\sqrt{\frac{2{,}42}{10}} = 0'',33;\ \frac{R}{\sqrt{n}} = 0'',104;$$

$$0{,}47694\frac{R}{\sqrt{10}} = 0'',016.$$

92. Eine weitere Ausführung dieses wichtigen Gegenstandes verstattet hier der Raum nicht. Gauß hat sich durch Entwickelung der obigen Theorie, welche die Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaft enthält, unsterblich verdient gemacht. Die eigentlichen Quellen, woraus man dieselbe studiren muß, sind die Theoria motus corporum coelestium. Hamburgi. 1809. p. 205. sqq., zwei Abhandlungen von Gauß in der Monatl. Corresp. Thl. XXIV. und der Zeitschrift für Astron. Thl. I. S. 185. ff. Auf die neuesten hierher gehörenden Schriften von Gauß: Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gott. 1823. und Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gott. 1828. konnte hier keine Rücksicht genommen werden, sie verdienen aber ebenfalls in jeder Beziehung eifrigst studirt zu werden. In diesem Artikel, der keine weitere Ausführung gestattete, konnten bloß die ältern Arbeiten von Gauß berücksichtigt werden. Ferner s. m. noch vorzüglich: Gauss Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Comm. Gott. 1811. Bessel Fundamenta Astronomiae. p. 18. 116. Paucker: über die Anw. der Methode der kleinsten Quadratsumme auf physikal.

Beobachtungen. Mitau. 1819. Zwei Abhandlungen von Plana in den Mém. de Turin. 1811. p. 355. und der Zeitschrift für Astron. Thl. VI. S. 250. Phil. Transact. 1819. p. 77. Annales d. Math. T. XII. p. 181. Eine Abhandlung von Svanberg in den Kongl. Vetensk. Academiens Handlingar. 1821. p. 388. Der Art. Milieu in der franz. Enc. Gehlers phys. Wörterb. Neue Aufl. Art. Beobachtung v. Muncke. Thl. I. S. 901. Eine Recension von v. Riese in den Jahrb. für wiss. Kritik. Febr. 1830. S. 269. Vorzüglich auch Laplace Théorie anal. d. prob. Suppl. Zu bemerken ist noch, daß noch ehe Gauß seine Methode (deren er sich schon seit 1795 bei der Berechnung der Planetenbahnen bedient hat) in der Theoria motus etc. l. c. bekannt machte, Legendre auf das Princip der kleinsten Quadratsummen aufmerksam gemacht hat (Nouv. methodes pour la determination des orbites des cometes etc. Paris. 1806.). Durch die weitere Entwickelung und die innige Verbindung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie aber ganz das Eigenthum von Gauß geworden, der sie übrigens auch, wie oben erwähnt, schon seit 1795 angewandt hat.

Literatur.

93. Aus dem folgenden Verzeichniß der wichtigsten über Wahrscheinlichkeitsrechnung erschienenen Schriften wird man zugleich die Männer erkennen, welche sich um dieselbe am meisten verdient gemacht haben.

Die ersten Aufgaben über die Glücksspiele haben Pascal und Fermat gegen die Mitte des 17ten Jahrhunderts aufgelöst, und dadurch den Grund zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt. Dabei machte sich auch der Ritter Méré bekannt, welcher Pascal einige Aufgaben dieser Art vorlegte. Besonders wichtig in dieser Zeit ist

Hugenii Tractatus de ratiociniis in ludo aleae, zuerst bekannt gemacht von Schooten im Jahre 1658 in seinen Exercitationes mathematicae.

Auch ist zu bemerken:

Of the Laws of chance. London. 1692. Von einem Ungenannten.

Den ersten vollständigern Lehrbegriff verfaßte Jacob Bernoulli, welcher aber erst nach seinem Tode von Nicolas Bernoulli, dem Neffen, herausgegeben ward, unter dem Titel:

Jac. Bernoulli Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis et epistola de ludo pilae reticularis. Basil. 1713. Dieses Werk enthält auch die obige Schrift von Huygens mit Anmerkungen. Bernoulli ward an der Vollendung desselben durch den Tod gehindert, es wird aber noch jetzt mit Recht sehr geschätzt.

Die Theorie der Glücksspiele behandelte Montmort ausführlich in einem ebenfalls noch jetzt mit Recht sehr geschätzten Werke:

Essay d'Analyse sur les jeux de hazard. Sec. éd. Paris. 1713. mit Briefen von Johann und Nicolas Bernoulli.

Auch ist über diesen Gegenstand zu merken: Uytrekening der Kanssen in het speelen door de Arithmetica en Algebra, beneevens een Verhandeling van Lotteryen en Interest door N. S. Amst. 1716. S. eine Recension hiervon in den Act. Erud. Suppl. T. VII. p. 268.

Sehr wichtig ist: The doctrine of chances by Moivre. London. 1718. und eine frühere kleinere Schrift desselben Verfassers: de mensura sortis, vom Jahre 1711. Moivre's Werke: Annuities on lives. 1724. 1756. betrifft die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Leibrenten, Anwartschaften u. s. f. und gehört daher nicht hierher. Es ist in's Italiänische übersetzt von Greg. Fontana unter dem Titel: Dottrina degli Azzardi etc. Milano. 1776.

Durch mehrere Schriften, welche aber größtentheils der Anwendung angehören, hat sich auch Condorcet ausgezeichnet. Er ist auch Verfasser des Artikels Probabilité in der französischen Encyclopädie. Lacroix führt

von ihm an: Elemens du calcul des Probabilités, vorzüglich aber Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des decisions. Auch von Prevost führt Lacroix Leçons sur le calcul des probabilités an.

Bei Weitem das wichtigste und vollständigste Werk über diesen Gegenstand ist aber

Théorie analytique des probabilités par De Laplace. Trois éd. Paris. 1820.,

eins der tiefsinnigsten Werke in der Mathematik überhaupt, welches auch viele wichtige rein analytische Untersuchungen, vorzüglich über Annäherungsmethoden, enthält. Wer es studiren will, muß schon gute Vorkenntnisse in der Analysis mitbringen. Wir haben Einiges aus diesem scharfsinnigen Werke in diesem Artikel mitgetheilt. Die dritte Ausgabe enthält unter dem Titel Introduction den von Laplace besonders herausgegebenen, und von Tönnies ins Deutsche übersetzten, Essai philosophique sur les probabilités, nach dessen vierter Ausgabe, und drei Supplemente, vorzüglich über die Anwendung auf geodätische Messungen.

Für den ersten Unterricht sind bestimmt:

Bicquilley Rechnung des Wahrscheinlichen, übers. v. Rüdiger. Lpzg. 1788.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Lacroix, übers. von Unger. Erfurt. 1818.

Von den Verdiensten anderer Mathematiker: Euler, D'Alembert, Johann und Daniel Bernoulli, vorzüglich aber Gauß, ist schon oben die Rede gewesen. Durch Auflösung mehrerer Probleme haben sich auch besonders Lagrange, Trembley, L'Huilier verdient gemacht. Ihre und Anderer akademische Abhandlungen findet man vollständig verzeichnet in Reuss Repertorium commentationum a societatibus literariis editorum. Gott. 1808. T. VII. p. 22 — 29. Die Anwendungen auf Lebensdauer, Leibrenten, Anwartschaften, Zeugnisse u. dergl., politische Arithmetik überhaupt, gehören nicht hierher, da dieser Artikel nur die Gründe der Anwendun-

gen enthalten durfte. Das wichtigste deutsche Werk über diese Gegenstände ist noch immer:

Tetens Einleitung in die Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen. Lpzg. 1785. Nicht nach Verdienst scheint jedoch bekannt zu seyn: Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Von J. G. Meyer. 2 Bnde. Kopenhagen. 1822. 1823. Andere Werke über die Anwendungen gehören nicht hierher.

Walze. Gerader Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche.

Wälzung. Wälzende Bewegungen nennt man in der Geometrie solche wie die, wodurch z. B. die Cykloiden und Epicykloiden beschrieben werden. M. s. diese Artt.

Wechselschnitt, s. Kegel (9.). Cylinder Thl. I. S. 700.

Wechselswinkel, s. Parallelen (1.).

Wegschaffen, s. Elimination.

Weite des Bogens einer krummen Linie, s. Amplitudo arcus.

Wendungspunkt (punctum flexus contrarii, point d'inflexion). Wenn eine Curve auf beiden Seiten eines Punktes P (Fig. 156.) liegt, und in diesem Punkte ein Wechsel des Concaven und Convexen statt findet, so daß nämlich auf der einen Seite desselben in seiner Nähe die Curve concav, auf der andern Seite convex gegen die Abscissenaxe ist, so heißt der Punkt P aus leicht zu begreifenden Gründen ein Wendungspunkt, woraus auch zugleich erhellen wird, wodurch sich ein solcher Punkt von einer Spitze (Fig. 157.) unterscheidet (s. Rückkehrpunkt). Denkt man sich durch P (Fig. 156.) eine Berührende gezogen, so ist klar, daß die Curve links und rechts von P auf verschiedenen Seiten der Berühren-

den liegt, eine Bemerkung, welche für das Folgende von großer Wichtigkeit ist.

1. Die Abscisse des Punctes P sey $= x$, die Ordinate $PQ = y$, die Subtangente $TQ = \frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie. 12.). Aendere sich nun x um das sehr kleine $i = Qq$, und sey $pq = y'$, $p'q = z$; so ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Aber offenbar

$$\frac{y\partial x}{\partial y} : y = \frac{y\partial x}{\partial y} + i : z,$$

$$z = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1}.$$

Folglich

$$y' = z + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{1..4} + \ldots.$$

Weil es hier offenbar überhaupt nur auf die in der Nähe von P liegenden Punkte der Curve ankommt, so ist es verstattet, i sich als sehr klein zu denken, und es haben folglich z und y' mit y immer einerlei Vorzeichen.

2. Ist nun zuerst $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht $= 0$, und mit z, also auch mit y, von einerlei Vorzeichen, so ist, weil wegen der Kleinheit von i das Zeichen der zu z addirten Reihe bloß von ihrem ersten Gliede abhängt, der absolute Werth von y' für positive und negative i größer als der absolute Werth von z, folglich offenbar die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe convex. Hat aber $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit z und y entgegengesetztes Vorzeichen, so ist der absolute Werth von y' für positive und negative i kleiner als der absolute Werth von z, und demnach die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe concav. In keinem dieser beiden Fälle findet also ein Wendungspunkt statt, sondern es muß vielmehr, wenn P ein solcher Punkt ist, ein Uebergang der Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ von dem Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, statt finden.

Die Werthe einer Function gehen aber entweder durch o oder durch $\frac{1}{o}$ vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über. Um dies deutlich zu übersehen, sey zunächst indem α, β, γ, δ, ... bloß positive Größen bezeichnen, eine beliebige Function =

$$y = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma} + \ldots ;$$

so ist klar, daß die Werthe dieser Function stetig wachsen und abnehmen, ein Uebergang von dem Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, also bloß durch o statt finden kann. Ist aber

$$y = \frac{A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma} + \ldots}{A' + B'x^{\alpha'} + Cx'^{\beta'} + D'x^{\gamma'} + \ldots} = \frac{\varphi x}{\varphi' x},$$

wo auch α', β', γ', δ', ... nur positive Größen bezeichnen; so sind, indem y vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht, zwei Fälle denkbar. Entweder behält nämlich bei diesem Uebergange der Nenner $\varphi' x$ sein Zeichen und der Zähler φx wechselt dasselbe, oder der Zähler behält das Zeichen, und der Nenner wechselt dasselbe. Im ersten Falle geht offenbar nach dem Vorigen der Zähler, also auch die Function y selbst, durch o vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über. Im zweiten Falle dagegen geht nach dem Obigen der Nenner durch o, die Function y selbst also durch $\frac{1}{o}$, vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über.

Hieraus erhellet nun, daß, wenn P ein Wendungspunkt ist, immer entweder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$, oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{o}$ sey. Man darf dies aber nicht umkehren, da für eine Spitze auch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$ ist (Rückkehrpunkt. 2.). Vielmehr muß man immer untersuchen, ob der Punkt, an welchem $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$ ist, ein Wendungspunkt oder eine Spitze sey. Zu dem Ende muß untersucht werden, ob in diesem Punkte für negative und positive Incremente der Abscisse die Ordinate reelle, oder in einem Falle imaginäre Werthe erhält, immer bloß in der Nähe des in Rede stehenden Punktes. Findet das Erste statt, so ist derselbe ein Wen-

dungspunkt; im letztern Falle dagegen eine Spitze, wie leicht erhellet. Man kann, um diese Untersuchung zu erleichtern, den Anfang der Coordinaten auch in den Punkt Q verlegen, und die Ordinate nach steigenden Potenzen der neuen Abscisse entwickeln, wo denn die kleinen positiven und negativen Abscissen selbst die Stelle der obigen Incremente vertreten. M. vergl. Rückkehrpunkt (12.).

3. Sey z. B.

$$y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

die Gleichung der gegebenen Curve, so erhält man leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^5 - 6a^3x^2}{(a^2 + x^2)^3}.$$

Setzte man den zweiten Differentialquotienten $= \frac{1}{0}$, so wäre $x^2 + a^2 = 0$, $x = a\sqrt{-1}$, d. i. imaginär, woraus sich also kein Wendungspunkt ergiebt. Setzt man aber diesen Differentialquotienten $= 0$, so ist $2a^5 - 6a^3x^2 = 0$, $3x^2 = a^2$, $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, welchen beiden Abscissen also Wendungspunkte oder Spitzen entsprechen. Setzt man nun nach der in (2.) angegebenen Vorschrift $x = x' \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, so ist klar, daß, indem man dem x' positive und negative Werthe beilegt, y nie imaginär wird, und folglich der bestimmte Punkt in der That ein Wendungspunkt ist.

Ueber den Wendungspunkt der Conchoide s. m. diesen Art. Thl. I. S. 535. ff.

4. Bei polaren Coordinaten φ, z ist, wenn wir den Anfangsradius als Axe, den Pol als Anfang der Abscissen annehmen:

$$x = z\cos\varphi,\ y = z\sin\varphi;$$

$$\partial x = \cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi,\ \partial y = \sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} + z\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi}.$$

Differentiirt man nun nach φ, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} = \frac{z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi\right)^2}.$$

Ferner ist auch nach dem Obigen

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi}.$$

Folglich, weil

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi\right)^3}.$$

Da nun für den Wendungspunkt der zweite Differentialquotient $= o$, oder $= \infty$; so muß man

$$z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = o,$$

$$z^2\partial\varphi^2 - z\partial^2 z + 2\partial z^2 = o$$

oder

$$\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi = o,\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\partial z}{z\partial\varphi}$$

setzen. Im letzten Falle ist nach dem Obigen offenbar $\frac{\partial x}{\partial y} = o$, also auch $y\frac{\partial x}{\partial y} = o$, d. h. (Berührende Linie. 13.) die Subtangente $= o$, und die Berührende folglich auf dem Anfangsradius oder der Abscissenaxe senkrecht. In diesem Falle muß nun immer besonders untersucht werden, ob die Curve in dem bestimmten Punkte auf beiden Seiten oder nur auf einer Seite der Berührenden liegt, indem nur im ersten Falle dieser Punkt ein Wendungspunkt seyn wird.

Wolf findet in den Elem. Anal. Infin. §. 309. die Gleichung

$$\partial y^2 + \partial x^2 = y\partial^2 y,$$

wo nach unserer Bezeichnung $y = z$, $\partial x = z\partial\varphi$, obige Gleichung also

$$z^2\partial\varphi^2 - z\partial^2 z + \partial z^2 = o$$

ist. Er nimmt das Differential ∂x constant, welches nicht angeht, da es von zwei veränderlichen Größen abhängt.

5. Jacob Bernoulli beschäftigt sich in den Act. Erud. 1691. p. 13. Opp. T. I. p. 436. mit dem Wendungspunkte der parabolischen Spirale. Die Gleichung dieser Curve ist (Spirale. 78.)

$$ar\varphi = (r - z)^2,$$

wenn nur hier z statt des dortigen y gesetzt wird. Also

$$ar = -2(r-z)\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{ar}{2(r-z)};$$

$$o = -2(r-z)\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r-z}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{a^2 r^2}{4(r-z)^3},$$

Folglich

$$z^2 - \frac{a^2 r^2 z}{4(r-z)^3} + \frac{a^2 r^2}{2(r-z)^2} = o,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - a^2 r^2 z + 2a^2 r^2 (r-z) = o,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - 3a^2 r^2 z + 2a^2 r^3 = o,$$

$$4z^5 - 12rz^4 + 12r^2 z^3 - 4r^3 z^2 + 3a^2 r^2 z - 2a^2 r^3 = o,$$

oder, wenn man $r - z' = z$ setzt:

$$4z'^5 - 8rz'^4 + 4r^2 z'^3 + 3a^2 r^2 z' - a^2 r^3 = o.$$

Dieselbe Gleichung findet Jacob Bernoulli a. a. O. (Opp. T. I. p. 437.). Ihre möglichen Wurzeln geben die Ordinaten, bei welchen ein Wendungspunkt oder etwa eine Spitze (s. 2.) statt findet. Für die Punkte, wo die Berührende auf dem Anfangsradius senkrecht ist, erhält man aus der Gleichung $\tang \varphi = \frac{\partial z}{z \partial \varphi}$ leicht

$$\tang \varphi = -\frac{ar}{2z(r-z)},$$

woraus in Verbindung mit der Gleichung $ar\varphi = (r-z)^2$, durch Elimination die entsprechenden φ und z bestimmt werden müssen. Aus der Thl. IV. Tab. XXVII. Fig. 40. gezeichneten Gestalt der Curve erhellet aber leicht, daß bei den auf dem Anfangsradius senkrechten Berührenden die Curve nicht auf beiden Seiten dieser Berührenden liegt, und die entsprechenden Punkte folglich keine Inflexionspunkte sind.

In dem Art. Spirale (83.) ist wegen des Wendungspunktes der Parabola helicoides auf diesen Artikel verwiesen worden.

Wesentliche Wurzeln einer Gleichung, s. Gleichung (171.).

Wiederholung in der combinatorischen Analysis, s. Combination (1. I. II. III.); Combinatorische Analysis (25.).

Wiederholungs-Exponent, s. Combination (4.).

Wiederkehrende Reihe, s. Rücklaufende Reihe.

Wiederkehrpunkt, s. Rückkehrpunkt.

Willkührliche Functionen, s. den Art. Partielle Differentialgleichungen. Zur Geschichte Nr. 59. ff.

Willkührlicher Satz, s. Wahlsatz.

Wilsons Theorem, s. Zahl (III. 2. 3.).

Winkel. Wenn zwei gerade Linien AB und AC (Fig. 158.) in einem Punkte A zusammenstoßen, so sind sie offenbar rücksichtlich ihrer Lage verschieden, und die Größe dieser Verschiedenheit, die Größe ihrer Abweichung von einander wird durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt, welchen man zu näherer Bestimmung gewöhnlich einen ebenen Winkel nennt. Betrachtet man aber die Abweichung der Linie AC von der Linie AB in Bezug auf die gegenseitige Lage näher, so ist klar, daß man dieselbe entweder nach der Richtung $\alpha\beta$ oder nach der Richtung $\alpha'\beta'$ betrachten kann, und daß also zwei in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien eigentlich jederzeit zwei Winkel mit einander einschließen, die auch beim neuern Vortrage der Geometrie gewöhnlich von einander unterschieden werden. Denkt man sich die Linie AC zuerst auf der Linie AB liegend, und dann aufwärts bewegt, so wird AC offenbar immer einmal in eine solche Lage kommen, daß beide Linien in einer geraden Linie liegen, und es erhellet leicht, daß auch in diesem Falle die beiden Linien rücksichtlich ihrer Lage eine gewisse Abweichung von einan-

der haben, oder einen gewissen Winkel mit einander einschließen werden. Solche Winkel nennt man gestreckte oder gerade Winkel. Jeder Winkel, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein concaver, jeder Winkel dagegen, welcher größer als ein gestreckter ist, ein convexer Winkel. Zwei in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien schließen demnach immer entweder zwei gestreckte, oder einen concaven und einen convexen Winkel mit einander ein. Alle gestreckte Winkel sind offenbar einander gleich, indem die Linie AC augenscheinlich in jedem Falle, wo sie einen gestreckten Winkel beschrieben hat, einen gleichen Weg zu durchlaufen hat. Die Hälfte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel, so daß also offenbar auch alle rechte Winkel einander gleich sind. Der rechte Winkel wird in der Geometrie durch R bezeichnet. Ein gestreckter Winkel ist also $= 2R$, jeder concave Winkel $<$, jeder convexe Winkel $> 2R$. Die Summe der beiden von zwei in einem Punkte zusammenstoßenden geraden Linien eingeschlossenen Winkel ist demnach immer $= 4R$.

Die beiden geraden Linien, welche einen ebenen Winkel einschließen, heißen seine Schenkel, der Punkt, in welchem sie zusammenstoßen, sein Scheitel oder seine Spitze. Die Größe eines Winkels hängt offenbar nicht von der Länge seiner Schenkel ab, sondern bloß von deren Oeffnung oder Abweichung von einander. Bezeichnet wird ein Winkel durch die drei Buchstaben an der Spitze und an den Schenkeln, so daß ersterer in der Mitte steht; durch einen kleinen in die Oeffnung des Winkels gesetzten Buchstaben; oder, wenn an derselben Spitze nicht mehrere Winkel liegen, auch bloß durch den Buchstaben an der Spitze. Zu wünschen wäre die Einführung einer Bezeichnung, durch welche unterschieden würde, ob man den von zwei Linien eingeschlossenen concaven oder convexen Winkel meint. Vielleicht könnte man im letztern Falle einen kleinen Bogen über das Zeichen des Winkels, und im Fall eines gestreckten Winkels einen geraden Strich darüber setzen.

Das euclidische System kennt bloß concave Winkel. Die neuere Geometrie kann aber wegen Verallgemeinerung mancher Sätze und Beweise, in den Elementen z. B. schon in der Lehre vom Kreise, der convexen und gestreckten Winkel nicht wohl mehr entbehren. Ein concaver Winkel heißt spitz oder stumpf, jenachdem er kleiner oder größer als ein rechter Winkel ist. Alle concaven Winkel, welche keine rechten Winkel sind, heißen schiefe Winkel. Zwei concave Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und deren beide andere Schenkel von der Spitze aus entgegengesetzt in gerader Linie liegen, heißen Nebenwinkel. Jede zwei Nebenwinkel betragen zusammen offenbar immer einen gestreckten Winkel, und sind also = 2R. Winkel am Mittelpunkte oder Centriwinkel heißen in der Lehre vom Kreise alle solche Winkel, deren Spitzen im Centro des Kreises liegen; Winkel an der Peripherie oder Peripheriewinkel sind solche, deren Spitzen in der Peripherie liegen, und deren Schenkel Sehnen des Kreises sind. Die Erklärungen der übrigen ebenen Winkel s. m. an ihren Orten.

Die Einheit des Winkelmaaßes ist wegen seiner unveränderlichen Größe der rechte Winkel. Um aber Brüche möglichst zu vermeiden, theilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile, welche man Grade nennt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, diese wieder in 60 Tertien, u. s. f., und bezeichnet diese Maaßtheile durch, ^{0}, $'$, $''$, $'''$, wonach Ausdrücke wie z. B. $45^{0}\ 6'\ 17''\ 25'''$ leicht werden gelesen werden können. Bei der neuen französischen Maaßeinrichtung theilte man den rechten Winkel in 100 Grade, den Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden, u. s. f. Man theilt auch den Kreisquadranten in 90 gleiche Theile, die man ebenfalls Grade nennt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden u. s. f., wie vorher. Denkt man man sich zwischen den Schenkeln eines Winkels aus seiner Spitze als Mittelpunkt einen Kreisbogen beschrieben, so enthält derselbe, wie groß oder klein man auch den Halbmesser annehmen mag, offenbar eben so viele Bogen-Grade,

=Minuten, =Secunden u. s. f. als der Winkel Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. s. f. enthält. Hierauf beruht die Messung der Winkel durch Bogen. Die Bogen=Grade, =Minuten, =Secunden, u. s. f. dienen eigentlich bloß, die in dem entsprechenden Winkel enthaltenen Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. s. f. zu zählen. Ein rechter Winkel ist also $= 90^0$, ein gestreckter $= 180^0$, jeder concave Winkel $< 180^0$, jeder gestreckte $> 180^0$, jeder spitze Winkel $< 90^0$, jeder stumpfe $> 90^0$; zwei Nebenwinkel sind $= 180^0$.

Stoßen zwei krumme Linien in einer Ebene oder im Raume in einem Punkte zusammen, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel kein anderer, als der von den durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt an die beiden Curven gezogenen Berührenden eingeschlossene ebene Winkel. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks z. B. sind die drei ebenen Winkel, welche von den sechs durch die Spitzen des Dreiecks an seine Seiten gezogenen Berührenden an den drei Spitzen eingeschlossen werden.

Die Größe der Abweichung zweier in einer geraden Linie zusammenstoßenden Ebenen von einander, rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage, heißt bei französischen Schriftstellern angle dièdre, welches man etwa durch Flächenwinkel übersetzen mag. Der Neigungswinkel zweier Ebenen gegeneinander ist nach Euclid der ebene Winkel, welchen zwei auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt der beiden Ebenen durch einen willkührlichen Punkt desselben in den beiden Ebenen errichtete Perpendikel mit einander einschließen. Den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene findet man, wenn man von einem willkührlichen Punkte in jener auf die Ebene ein Perpendikel fällt, und dessen Fußpunkt mit dem Durchschnittspunkte der geraden Linie mit der Ebene durch eine gerade Linie verbindet; es ist der Winkel, welchen diese gerade Linie mit der gegebenen einschließt.

Stoßen mehrere Ebenen in einem Punkte zusammen, so heißt der zwischen ihnen enthaltene, auf der einen Seite unbegränzte, Raum ein körperlicher Winkel. Seine

Seitenzahl bestimmt sich nach der Anzahl der einschließenden Ebenen. Drei Ebenen sind mindestens zur Bildung eines körperlichen Winkels erforderlich. Als Maaß eines solchen Winkels kann man das zwischen ihm enthaltene Stück einer Kugelfläche betrachten, welche aus seiner Spitze mit einem bestimmten Halbmesser, etwa mit dem Radius 1, beschrieben worden ist. Der sphärische Octant kann dann hierbei wieder als Maaßeinheit dienen. M. s. eine zum Theil sich hierauf beziehende Abhandlung von mir in Crelles Journal d. r. u. a. Math. V. 1. S. 37. Auch vergl. man die Bestimmung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke und Vielecke, denen immer ein bestimmter körperlicher Winkel am Mittelpunkte der Kugel entspricht, dessen Maaß das sphärische Vieleck ist, im Art. Trigonometrie (86. ff.). Euclid zeigt XI. 21. geometrisch, daß die Summe der ebenen Winkel, welche einen körperlichen Winkel einschließen, immer $< 4R$ ist.

Zu vergleichen sind hier die Artt. Berührungswinkel und Trisection des Winkels.

Winkelmaaß, s. Winkel.

Winkelmessung. Auf dem Papier wird ein Winkel am einfachsten und genauesten gemessen, wenn man aus seiner Spitze mit einem beliebigen Radius einen Bogen beschreibt, und dessen Sehne, so wie den Radius, mit einem tausendtheiligen Maaßstabe so genau als möglich mißt. Für den Radius kann man auch größerer Genauigkeit wegen eine beliebige ganze Zahl von Theilen des Maaßstabes annehmen. Ist nun der zu messende Winkel $= \varphi$, der gemessene Radius $= r$, die Sehne $= s$, so erhellet aus einfachen trigonometrischen Gründen sogleich die Richtigkeit der Formel

$$\tfrac{1}{2}s = r \sin \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{s}{2r},$$

wodurch φ mittelst der trigonometrischen Tafeln gefunden wird. Eine besondere Chordentafel hat Francoeur zu diesem Zwecke in einer kleinen Schrift (La Goniométrie, ou l'art de tracer sur le papier des angles etc.

Paris. 1820.) geliefert. Das umgekehrte Verfahren dient, Winkel, deren Größe in Graden, Minuten, Secunden, u. s. f. gegeben ist, auf dem Papiere zu verzeichnen.

Der Transporteur ist ein in seine 180 Grade, auch wohl halbe Grade, eingetheilter Halbkreis von Messing zur Messung und Zeichnung der Winkel auf dem Papier, ein sehr unvollkommnes Instrument, wenn nicht vielleicht ein Vernier damit verbunden ist (s. Theilung. 19.), wodurch aber der Preis sehr erhöhet wird. Die Beschreibung anderer Instrumente zur Winkelmessung gehört nicht in diese Abtheilung unsers Wörterbuchs.

Winkeltheilung. Zur Theilung eines Winkels in gleiche Theile durch Rechnung dienen die im Art. Goniometrie (102.) entwickelten Formeln für $\sin\frac{m}{n}\varphi$ und $\cos\frac{m}{n}\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Ueber die geometrische Natur solcher Theilungen s. m. den Art. Trisection des Winkels. Auch vergl. man Opp. Joh. Bern. T. I. p. 386. p. 511. Opp. Jac. Bern. T. II. p. 921. Ferner gehört hierher ein Programm von Kästner: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus, auch abgedruckt in dessen Dissertt. math. et phys. Altenb. 1771. p. 150. Geometrische Abhandlungen. II. S. 241. ff.

Würfel, s. Vieleckige Körper, und Delische Aufgabe.

Wurzel, heißt überhaupt jeder Werth der unbekannten Größe in einer Gleichung. Jeder Werth von x, welcher der Gleichung des nten Grades

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + .. + Mx + N = 0$$

Genüge leistet, heißt eine Wurzel derselben. In dem Art. Unmögliche Größen (32. ff.) ist gezeigt worden, daß jede Gleichung des nten Grades n Wurzeln hat, und nicht mehr. Einige derselben können imaginär seyn; die imaginären Wurzeln sind aber immer paarweise vorhanden (a.

a. O. 34.). Methoden, die Wurzeln der Gleichungen zu finden, d. h. die Gleichungen aufzulösen, enthält der Art. Gleichung.

1. Vorzüglich wichtig ist der Fall, wenn die gegebene Gleichung eine reine, d. h. von der Form

$$x^n - N = o$$

ist. Ueber die allgemeine Auflösung solcher Gleichungen s. m. die Artt. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV. und Unmögliche Größen (24. ff.), auch Cotesischer Lehrsatz. Die Wurzeln obiger Gleichung, oder auch der Gleichung $x^n = N$, sind alle Werthe von x, welche, auf die nte Potenz erhoben, die Größe N hervorbringen. Dies führt auf den einfachern Begriff der Wurzeln aus Potenzen. Es ist nämlich überhaupt die Wurzel des nten Grades aus N eine Größe, welche, auf die nte Potenz erhoben, N giebt, und wird durch $\sqrt[n]{N}$ bezeichnet. Wurzeln des 2ten, 3ten, 4ten Grades heißen auch Quadrat-, Cubik- und Biquadratwurzeln, und werden durch $\sqrt{N}$, $\sqrt[3]{N}$, $\sqrt[4]{N}$ bezeichnet. Elementare Methoden, dieselben zu finden, s. m. in den besondern Artikeln.

2. Jede mögliche Größe kann durch $1 + x$ dargestellt werden, wie leicht erhellet. Setzen wir nun, die Hindenburgische Bezeichnung der Binomial-Coefficienten (s. diesen Art. 1.) beibehaltend, für jedes willkührliche n und m:

$$^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + {}^n\mathfrak{C}x^3 + {}^n\mathfrak{D}x^4 + \ldots$$
$$^mS = 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + {}^m\mathfrak{C}x^3 + {}^m\mathfrak{D}x^4 + \ldots;$$

so erhält man, wenn man multiplicirt, leicht:

$$^nS \,.\, {}^mS = 1 + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{A} \\ + {}^m\mathfrak{A} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{B} \\ + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{A} \\ + {}^m\mathfrak{B} \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{C} \\ + {}^n\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{A} \\ + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{B} \\ + {}^m\mathfrak{C} \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

d. i. nach dem a. a. O. (22.) ganz allgemein bewiesenen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$^nS \,.\, {}^mS = 1 + {}^{n+m}\mathfrak{A}x + {}^{n+m}\mathfrak{B}x^2 + {}^{n+m}\mathfrak{C}x^3 + \ldots;$$

oder für jedes n und m:

$$^nS \,.\, {}^mS = {}^{n+m}S\,.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten, welcher bekanntlich sehr leicht durch bloße Multiplication bewiesen werden kann, ist, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$^{n}S = (1 + x)^{n}.$$

Setzen wir nun, unter derselben Voraussetzung, $m = -n$, so ist

$$^{n}S . {}^{-n}S = {}^{n-n}S = {}^{0}S = 1, \; {}^{-n}S = \frac{1}{^{n}S} = \frac{1}{(1+x)^{n}}.$$

^{-n}S wird aus ^{n}S erhalten, wenn man $-n$ für n setzt; also muß auch, nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\frac{1}{(1+x)^{n}}$ aus $(1+x)^{n}$ erhalten werden, wenn man $-n$ für n setzt. Dies hat auf die sogenannten Potenzen mit negativen Exponenten geleitet. $(1+x)^{-n}$ ist nichts anders, als eine neue Bezeichnung für den Bruch $\frac{1}{(1+x)^{n}}$.

Nach der obigen allgemeinen Relation erhält man leicht:

$$^{n}S . {}^{n}S = (^{n}S)^{2} = {}^{n+n}S = {}^{2n}S,$$
$$^{2n}S . {}^{n}S = (^{n}S)^{3} = {}^{2n+n}S = {}^{3n}S,$$
$$^{3n}S . {}^{n}S = (^{n}S)^{4} = {}^{3n+n}S = {}^{4n}S,$$

u. s. f. u. s. f.

Also für jedes n und jedes ganze positive m:

$$(^{n}S)^{m} = {}^{mn}S.$$

Sey nun $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α eine willkührliche positive oder negative ganze Zahl, γ aber eine positive ganze Zahl seyn soll; so ist

$$(^{n}S)^{\gamma} = (^{\frac{\alpha}{\gamma}}S)^{\gamma} = {}^{\frac{\alpha\gamma}{\gamma}}S = {}^{\alpha}S,$$

und folglich offenbar $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{^{\alpha}S}$. Aber nach dem Obigen $^{\alpha}S = (1+x)^{\alpha}$. Also $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$. Es wird aber $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ aus ^{n}S erhalten, wenn man $\frac{\alpha}{\gamma}$ für n setzt; also muß auch, immer nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$ aus $(1+x)^{n}$ er-

halten werden, wenn man $\frac{\alpha}{\gamma}$ für n setzt. Dies hat auf eine neue Bezeichnung der Wurzeln geführt, indem hiernach

$$\sqrt[\gamma]{(1+x)^\alpha} \text{ und } (1+x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

identische Ausdrücke sind.

Auch ist nun hiernach für jedes n:

$$(1+x)^n = {}^nS\,,$$

wo aber natürlich in dem Falle, wo n keine ganze Zahl ist, durch ${}^nS$ nur ein bestimmter Werth von $(1+x)^n$ gegeben wird. Daß die vorstehende Gleichung auch dann gilt, wenn n irrational wäre, versteht sich von selbst, da jede irrationale Größe eine rationale Grenze hat. Es ist also für alle n und m:

$$(1+x)^n = {}^nS,\ (1+x)^m = {}^mS\,;$$
$$(1+x)^n.(1+x)^m = {}^nS.{}^mS = {}^{n+m}S\,;$$

aber auch

$$(1+x)^{n+m} = {}^{n+m}S\,;$$

also

$$(1+x)^n.(1+x)^m = (1+x)^{n+m}\,;$$

oder für $1+x = a$, überhaupt:

$$a^n : a^m = a^{n+m}\,,$$

für jedes n und m. Auf dieser Relation beruht bekanntlich die ganze sogenannte Potenzen- und Wurzelrechnung. Man sieht, daß nach dem obigen Beweise diese Relation in dem Falle, wo nicht beide Exponenten ganze Zahlen sind, natürlich nur für die Werthe der Wurzeln gilt, welche die durch S bezeichneten Reihen liefern, d. i. für die Werthe, welche durch den binomischen Lehrsatz gegeben werden. Die folgenden Betrachtungen sollen zeigen, ob und inwiefern obige Relation eine weitere Ausdehnung gestattet.

3. Bezeichnen wir der Kürze wegen auch hier $\sqrt{-1}$ durch i, so folgt durch successive Multiplication aus ganz einfachen trigonometrischen Gründen leicht, daß für jedes $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots$ immer

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'')\ldots$$
$$= \cos(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots) + i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots$$

ist. Also offenbar auch für jedes ganze positive n:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Eben so ist

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))$$
$$= \cos(n-n)\varphi + i\sin(n-n)\varphi = 1 ,$$

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n},$$

d. i. nach der Bezeichnung, welche wir in (2.) kennen gelernt haben,

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} ,$$

so daß also für jedes ganze positive oder negative n:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

ist.

4. Wir betrachten nun im Allgemeinen die Größe $\alpha + \beta i$, unter welcher auch für $\beta = 0$ jede reelle Größe enthalten ist. Daß auf diese Form auch jede imaginäre Größe gebracht werden kann, ist in dem Art. Unmögliche Größen ausführlich gezeigt worden, worauf wir uns hier der Kürze wegen beziehen müssen. Ist $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$, so ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, weil aus dieser Gleichung

$$\alpha - \alpha' = (\beta - \beta')i, \ \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = i$$

folgt, so daß also, wenn nicht zugleich $\alpha - \alpha' = 0$, $\beta - \beta' = 0$ wäre, eine reelle Größe einer imaginären Größe gleich wäre, welches ungereimt ist. Die Größe $\alpha + \beta i$ läßt sich immer auf die Form

$$\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bringen. Aus dieser Gleichung folgt nämlich, wie wir so eben gesehen haben,

$$\alpha = \varrho\cos\varphi, \ \beta = \varrho\sin\varphi ;$$

und, wenn man quadrirt:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \varrho^2 ;$$

also $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, wo für alle Wurzelgrößen immer die durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werthe sollen gesetzt gedacht werden. Also

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

wodurch φ gegeben ist.

5. Den Inbegriff aller Werthe von

$$\sqrt[n]{(\alpha+\beta i)^m} \text{ oder } (\alpha+\beta i)^{\frac{m}{n}}$$

wollen wir durch

$$\sqrt[n]{((\alpha+\beta i))^m} \text{ oder } ((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}$$

bezeichnen. Fassen wir aber nur einen bestimmten Werth in's Auge, so soll nur eine einfache Parenthese gebraucht werden, wie im Art. Unmögliche Größen (24.). Sey

$$\alpha+\beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und irgend ein Werth von $(\alpha+\beta i)^{\frac{m}{n}} = x$. Man setze

$$x = r(\cos\psi + i\sin\psi);$$

so ist also

$$\sqrt[n]{(\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi))^m} = r(\cos\psi+i\sin\psi),$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten auf die nte Potenz erhebt, augenblicklich:

$$\varrho^m(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m = r^n(\cos\psi+i\sin\psi)^n;$$

d. i., weil m, n ganze Zahlen sind, nach (3.):

$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Also (4.)

$$\varrho^m\cos m\varphi = r^n\cos n\psi,\ \varrho^m\sin m\varphi = r^n\sin n\psi.$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, dann addirt:

$$\varrho^{2m} = r^{2n},\ \varrho^m = r^n.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man

$$r = \sqrt[n]{\varrho^m} = \varrho^{\frac{m}{n}}$$

setzt, wo wir wieder den durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werth dieser Wurzelgröße uns genommen denken wollen, welches offenbar verstattet ist. Es ist also auch

$$\cos m\varphi = \cos n\psi,\ \sin m\varphi = \sin n\psi;$$

woraus nach einfachen trigonometrischen Gründen:

$$n\psi = m\varphi + 2k\pi,\ \psi = \frac{m\varphi + 2k\pi}{n}$$

für jedes ganze positive oder negative k. Folglich

$$x = \varrho^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\right\}$$

und folglich für jedes ganze positive oder negative k:

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (3.).$$

Ganz eben so ist

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu} + i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right).$$

Folglich, wenn man multiplicirt:

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} . ((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} . \varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu} + i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)$$

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu}\right).$$

Aber, weil $\varrho^{\frac{m}{n}}$, $\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}$ die durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werthe dieser Wurzelgrößen sind, nach (2.)

$$\varrho^{\frac{m}{n}} . \varrho^{\frac{\mu}{\nu}} = \varrho^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}}.$$

Also nach (3.), wenn wir der Kürze wegen $k\nu + \varkappa n = k'$ setzen:

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}} . \left\{\cos\left(\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}\right)\varphi + i\sin\left(\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$

$$\times\left(\cos\frac{2k'\pi}{n\nu} + i\sin\frac{2k'\pi}{n\nu}\right).$$

Aber nach dem Obigen

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}} . \left\{\cos\left(\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}\right)\varphi + i\sin\left(\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$

$$\times\left(\cos\frac{2k''\pi}{n\nu} + i\sin\frac{2k''\pi}{n\nu}\right),$$

da der Nenner von $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} = \frac{m\nu + \mu n}{n\nu}$ dem Product $n\nu$ gleich ist. Da letztere Gleichung für jedes ganze positive oder negative k'' gilt, so ist obiges Product offenbar ein Werth von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}}$, und folglich

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} . ((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} = ((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}}$$

welche Gleichung man aber nur so zu verstehen hat, daß immer, wenn irgend zwei Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$ und $((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}}$ in einander multiplicirt werden, ein Werth von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}}$ erhalten wird; in dieser Beziehung ist also die Relation

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

allgemein, und gilt für jedes m und n.

6. Aus diesen Gleichungen folgen alle übrigen Formeln, auf denen die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln beruhet, leicht. Nur hat man dieselben immer in einem ähnlichen Sinne wie vorhergehende zu nehmen. Wir geben nur die Beweise der Hauptsächlichsten. Setzen wir $-n$ für n, so wird

$$a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = a^{m-n},$$

eine ebenfalls sehr bekannte Formel.

Ist nun m eine beliebige, n eine positive ganze Zahl, so ist

$$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m .. a^m = a^{m+m+..+m} = a^{mn} .$$

Folglich auch

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)} .$$

Ist $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α positiv oder negativ seyn kann, γ aber positiv genommen wird, so ist

$$(a^m)^{\frac{\alpha}{\gamma}} = \sqrt[\gamma]{(a^m)^\alpha} = \sqrt[\gamma]{a^{m\alpha}} = a^{\frac{m\alpha}{\gamma}} = a^{m\frac{\alpha}{\gamma}} .$$

Also ist für jedes m und n:

$$(a^m)^n = a^{mn} .$$

Ist m eine beliebige, n eine positive ganze Zahl, und $m = n\alpha$, so ist immer $\sqrt[n]{a^m} = a^\alpha$, weil $(a^\alpha)^n$ nach dem so eben Bewiesenen $= a^{n\alpha} = a^m$ ist.

Diese Bemerkungen über die allgemeinen Formeln der Potenzen- und Wurzelrechnung mögen hinreichen, und wir geben nur noch einige Formeln zur annähernden Berechnung irrationaler Wurzeln. In den hier bewiesenen Sätzen sind auch die allgemeinen Regeln der in den Elementen sogenannten Rechnung mit Wurzelgrößen vollständig enthalten.

7. Zur annähernden Berechnung irrationaler Wurzeln dienen u. A. die in den Artt. Binomischer Lehrsatz (13—19.) und Kettenbruch (53—59.) mitgetheilten Formeln, oder auch die im Art. Umformung der Reihen (27.) bewiesene Gleichung:

$$\sqrt[m]{x} = \left\{1 - \frac{1}{mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right) - \frac{mn-1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2 - \cdots\right\}$$
$$\left\{1 + \frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) + \frac{mn+1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \cdots\right\}$$

wo n eine ganz willkührliche Zahl ist, die beliebig angenommen werden kann.

Man kann, um $\sqrt[n]{a}$ zu finden, auch auf folgende Weise verfahren. Man wähle eine Zahl k so, daß $k^n a$ der nten Potenz einer andern Größe α möglichst nahe komme, und setze

$$k^n a = \alpha^n - x,\ \sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n - x}\,.$$

Soll dieses Verfahren mit Leichtigkeit angewandt werden, so muß man im Besitz ziemlich ausgedehnter Tabellen der Potenzen der Zahlen seyn. Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man nun leicht

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)} = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\alpha}{k}\left\{1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\alpha^n} - \frac{n-1}{n\,.\,2n}\cdot\frac{x^2}{\alpha^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\cdot\frac{x^n}{\alpha^{3n}}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}\cdot\frac{x^4}{\alpha^{4n}} - \cdots\right\}$$

Diese Reihe wird, weil x nach der Annahme gegen α^n

sehr klein ist, immer stark convergiren, und daher zur Berechnung bequem seyn. M. s. v. Ettinghausen comb. Anal. Wien. 1826. §. 95—100.

Lambert (Beiträge zur Mathematik. II. S. 152.) giebt folgendes Verfahren. Sey

$$x = (a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots .$$

Man multiplicire auf beiden Seiten mit $1 + \frac{by}{a}$, so erhält man

$$x\left(1 + \frac{by}{a}\right) = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$+ ya^{n-1}b + nya^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)}{2} ya^{n-3}b^3 + \ldots$$

Nun wird y so bestimmt, daß die b^2 enthaltenden Glieder verschwinden, oder daß

$$\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + nya^{n-2}b^2 = 0$$

wird. Dieß giebt $y = -\frac{n-1}{2}$, und nach gehöriger Substitution:

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n+1)}{2} a^{n-3}b^3 - \ldots$$

$$x = \left\{\frac{2a + (n+1)b}{2a - (n-1)b}\right\} a^n - \frac{n(n-1)(n+1)a^{n-2}b^3}{6(2a - (n-1)b)} - \ldots .$$

Das erste Glied dient zur Berechnung der Wurzel, das zweite zur Prüfung des Grades der Genauigkeit. Für $n = \frac{1}{3}$ wird,

$$\sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b} \sqrt[3]{a} + \frac{2b^3 \sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27a^2 b} + \ldots .$$

Lambert berechnet a. a. O. nach dieser Formel $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$ bis auf 18 Decimalstellen. Hier Exempel beizubringen ist unnöthig.

8. Wurzeln aus Binomien von der Form $A \pm \sqrt{B}$, wo $\sqrt{B}$ irrational ist, auszuziehen, kommt oft vor, so daß einige Bemerkungen über diesen Gegenstand hier nicht am unrechten Orte seyn werden. Sey

$$\sqrt[n]{(A + \sqrt{B})} = x + \sqrt{y}, \quad A + \sqrt{B} = (x + \sqrt{y})^n ;$$

so erhält man nach dem binomischen Lehrsatze mit Anwendung der Hindenburgischen Bezeichnung der Binomial-Coefficienten:

$$A + \sqrt{B} =$$
$$x^n + {}^n\mathfrak{B}x^{n-2}y + {}^n\mathfrak{D}x^{n-4}y^2 + \ldots.$$
$$+ \left\{ {}^n\mathfrak{A}x^{n-1} + {}^n\mathfrak{C}x^{n-3}y + {}^n\mathfrak{E}x^{n-5}y^2 + \ldots \right\} \sqrt{y}\,.$$

Also, wenn man das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich setzt:

$$A = x^n + {}^n\mathfrak{B}x^{n-2}y + {}^n\mathfrak{D}x^{n-4}y^2 + \ldots$$
$$\sqrt{B} = \left\{ {}^n\mathfrak{A}x^{n-1} + {}^n\mathfrak{C}x^{n-3}y + {}^n\mathfrak{E}x^{n-5}y^2 + \ldots \right\} \sqrt{y}$$

welches zwei Gleichungen mit den zwei unbekannten Größen x und y sind, durch deren Auflösung diese Größen erhalten werden. Die Elimination führt man am leichtesten auf folgende Art aus. Durch Subtraction erhält man:

$$A - \sqrt{B} =$$
$$x^n - {}^n\mathfrak{A}x^{n-1}\sqrt{y} + {}^n\mathfrak{B}x^{n-2}y - {}^n\mathfrak{C}x^{n-3}y\sqrt{y}$$
$$+ {}^n\mathfrak{D}x^{n-4}y^2 - \ldots = (x - \sqrt{y})^n;$$

woraus auch zugleich erhellet, daß immer zu gleicher Zeit

$$\sqrt[n]{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm \sqrt{y}$$

ist. Also

$$(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n;$$
$$A^2 - B = (x^2 - y)^n, \sqrt[n]{(A^2 - B)} = x^2 - y;$$
$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)}\,.$$

Diesen Werth von y setze man in die rationale Gleichung

$$A = x^n + {}^n\mathfrak{B}x^{n-2}y + {}^n\mathfrak{D}x^{n-4}y^2 + \ldots,$$

wodurch man eine rationale Gleichung des nten Grades erhält, durch deren Auflösung x, und folglich mittelst

$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)}$$

auch y bestimmt wird.

9. Ist das gegebene Binomium von der Form

$$\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'},$$

so wähle man Θ so, daß $\sqrt{A'}.\sqrt{\Theta} = \sqrt{A'\Theta}$ rational, und $\sqrt{B'}.\sqrt{\Theta} = \sqrt{B'\Theta} = \sqrt{B}$ ist; so ist

$$\sqrt[n]{(\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'})} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{\Theta}} = \sqrt[n]{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm \sqrt{y} \quad (8.);$$

$$\sqrt[n]{(\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'})} = \frac{x \pm \sqrt{y}}{\sqrt[n]{\sqrt{\Theta}}} = \sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{\Theta}} \pm \sqrt[2n]{\frac{y^n}{\Theta}}.$$

10. Sey z. B. $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$ zu entwickeln, so ist nach (8.)

$$A = x^2 + y,\ y = x^2 - \sqrt{(A^2 - B)};$$
$$A = 2x^2 - \sqrt{(A^2 - B)};$$
$$x = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}},\ \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}};$$
$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}.$$

So ist z. B., für

$$A + \sqrt{B} = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48},$$
$$A = 7,\ B = 48,\ A^2 - B = 1;$$
$$\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

Für

$$\sqrt{A'} - \sqrt{B'} = \sqrt{32} - \sqrt{24}$$

ist $A' = 32$, $B' = 24$, $\sqrt{32} . \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$, $\Theta = 2$, $A = 8$, $B = B'\Theta = 48$. Also $A^2 - B = 16$, $x = \sqrt{6}$, $y = 2$; $\sqrt{(\sqrt{32} - \sqrt{24})} = \sqrt[4]{\frac{36}{2}} - \sqrt[4]{\frac{4}{2}} = \sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$.

11. Soll man $\sqrt[4]{(A \pm \sqrt{B})}$ entwickeln, so hat man nach (8.) die Gleichungen

$$A = x^4 + 6x^2y + y^2,\ y = x^2 - \mathfrak{A},$$

wenn wir der Kürze wegen $\sqrt[4]{(A^2 - \sqrt{B})} = \mathfrak{A}$ setzen. Also

$$A = 8x^4 - 8x^2\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2,\ 8x^4 - 8x^2\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 - A = 0.$$

Löset man diese Gleichung wie eine quadratische auf, so erhält man

$$x = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}},\ \sqrt{y} = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}};$$
$$\sqrt[4]{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}} \pm \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}}.$$

Sey z. B. $\sqrt[4]{(113 + 72\sqrt{2})}$ zu finden. Hier ist $A = 113$, $B = 72^2 . 2 = 10368$, $A^2 - B = 2401$, $\sqrt{2401}$

$= 49$, $\sqrt[4]{2401} = 7 = \mathfrak{A}$, $A^2 + \mathfrak{A}^2 = 162$, $\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8} = \frac{81}{4}$, $\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} = \frac{9}{2}$. Also

$$\sqrt[4]{(113 + 72\sqrt{2})} = \sqrt{(\tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2})} + \sqrt{(\tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2})} = 1 + \sqrt{8} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

12. Für $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})}$ müßte man nach (8.) die Gleichungen

$$A = x^3 + 3xy,\ y = x^2 - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(A^2 - B)},$$

d. i. nach der Elimination von y die Gleichung des dritten Grades

$$4x^3 - 3x\sqrt[3]{(A^2 - B)} - A = 0$$

auflösen, und y aus obiger Formel bestimmen. Die Wurzeln höherer Grade führen eben so auf die Auflösung höherer Gleichungen, in welchem Verhältnisse natürlich auch die Schwierigkeit wächst.

M. s. über diesen Gegenstand Neutoni Arithmetica universalis. §. 84. und Castillons Commentar p. 78. Eulers Algebra. Thl. I. Cap. 8.; besonders einen Aufsatz von Hennert in Hindenburgs Archiv der reinen und angew. Math. Neuntes Heft. S. 50.

Wurzelgrößen, s. Wurzel (6.).

Wurzelzeichen, s. Wurzel und Zeichen, mathematische.

Z.

Zähler eines Bruchs, s. Bruch.

Zahl (Numerus). Der Begriff der Zahl entsteht überhaupt durch die Vorstellung des Neben- oder Beieinanderseyns mehrerer Dinge, welche entweder wirklich völlig gleich und gleichartig sind, oder auf deren Verschiedenheit, insofern sie zu einer Zahl vereinigt werden sollen, wenigstens keine Rücksicht genommen wird; also auch, was dasselbe ist, durch die Vorstellung der Wiederholung oder Vervielfachung eines und desselben Dinges, welches im Allge-