V.

Variation einer Function, s. Variationsrechnung.

Variationen gegebener Dinge oder Elemente in der Combinationslehre sind alle mögliche Verbindungen derselben zugleich mit allen möglichen Versetzungen, also Combinationen mit Permutationen (S. diese Artt.). Alle, eine gleiche Anzahl Elemente enthaltenden, Variationen werden zu einerlei Klasse gerechnet; die gleiche Anfangselemente haben, bilden einerlei Ordnung. Man unterscheidet Variationen überhaupt ohne und mit Wiederholungen, jenachdem jedes Element nur ein oder mehrere Mal in jeder einzelnen Complexion vorkommen darf. Verbindet man eine Buchstabenreihe mit der natürlichen Zahlenreihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
a, b, c, d, e, f, ... ,

legt jedem Element einen bestimmten Zahlenwerth nach seiner Stelle, einen bestimmten Localwerth, bei, und bildet nun die Variationen nach dem Gesetze, daß in jeder Complexion die Summe der Stellenzahlen eine bestimmte Zahl ist; so hat man Variationen zu einer bestimmten Summe. Nach der Hindenburgschen Charakteristik werden die 1te, 2te, 3te, 4te Klasse u. s. f.

der Variationen ohne und mit Wiederholungen, und zur Summe n, durch A', B', C', D', ...; $'A$, $'B$, $'C$, $'D$, ...; ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ${}^nD$, ..., bezeichnet.

1. Hat man die mte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente; so leitet man daraus offenbar die (m + 1)te Klasse ab, wenn man jeder Complexion alle die Elemente nach der Reihe vorsetzt, welche sie nicht enthält, so daß also aus jeder Complexion der mten Klasse n — m Complexionen der (m + 1)ten Klasse entspringen. Bezeichnen wir also mit Hindenburg die Anzahl der Complexionen durch $n\int$(numerus specierum); so ist offenbar

$$n\int \overset{+1}{M'} = n\int M'.(n-m),$$

und, wenn man auf diese Art weiter schließt:

$$\begin{aligned} n\int \overset{+1}{M'} &= n\int M'.(n-m) \\ &= n\int \overset{-1}{M'}.(n-m+1)(n-m) \\ &= n\int \overset{-2}{M'}.(n-m+2)(n-m+1)(n-m) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= n\int A'.(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m); \end{aligned}$$

folglich, da, bei n Elementen, offenbar $n\int A' = n$ ist; wenn man zugleich m + 1 mit m vertauscht, bei n Elementen:

$$n\int M' = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

d. h. die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen der mten Klasse für n Elemente

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

welches sich auch leicht aus der Theorie der Combinationen in Verbindung mit den Permutationen, hätte finden lassen.

2. Die nte Klasse ist offenbar die letzte, und folglich die Gesammtzahl der Variationen ohne Wiederholungen in allen Klassen:

$$n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n(n-1)\ldots 1 .$$

Bezeichnen wir diese Anzahl bei n und $n - 1$ Elementen durch $[n]$ und $[n-1]$; so ist

$$[n] = n\{1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + (n-1)\ldots 1\},$$

d. i.

$$[n] = \{1 + [n-1]\}.n,$$

nach welcher Relation die Berechnung leicht successive für $n = 1, 2, 3, 4$, u. s. f. angestellt, und eine Tafel entworfen werden kann.

3. Für Variationen mit Wiederholungen erhält man aus $'M$ offenbar $'\overset{+1}{M}$, wenn man jede Complexion in $'M$ mit jedem der gegebenen n Elemente verbindet; so daß also

$$n\int'\overset{+1}{M} = n\int'M.n,$$

und, wenn man so weiter schließt:

$$n\int'\overset{+1}{M} = n\int'M.n = n\int'\overset{-1}{M}.n^2$$
$$= n\int'\overset{-2}{M}.n^3 = \ldots = n\int'A.n^m = n^{m+1},$$

weil auch hier offenbar $n\int'A = n$ ist. Also $n\int'M = n^m$, oder die Anzahl der Variationen der mten Klasse mit Wiederholungen für n Elemente $= n^m$. Die Anzahl dieser Variationen in den ersten m Klassen ist also

$$= n + n^2 + n^3 + \ldots + n^m = \frac{n(n^m - 1)}{n-1}.$$

4. Was nun ferner die Anzahl der Variationen zur Summe n der mten Klasse mit Wiederholungen betrifft; so lassen sich diese Variationen abtheilen, 1) in solche, die mit 1 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-1}\overset{-1}{M}$; 2) in solche, die mit 2 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-2}\overset{-1}{M}$; 3) in solche, die mit 3 anfan-

gen, deren so viele sind, als in ${}^{n-3}\overline{M}^{1}$, u. s. f. Endlich in solche, die mit $n-m+1$ anfangen, welches offenbar das höchste Element ist, das in der mten Klasse zur Summe n vorkommen kann, da dann die übrigen $m-1$ Elemente alle $=1$ sind. Dieser Variationen sind so viele, als in ${}^{m-1}\overline{M}^{1}$. Also ist

$$n\int^n M = n\int^{n-1}\overline{M}^{1} + n\int^{n-2}\overline{M}^{1} + n\int^{n-3}\overline{M}^{1} + \ldots + n\int^{m-1}\overline{M}^{1}.$$

Da nun offenbar $n\int^n A = 1$ ist; so ist

$$n\int^n B = n\int^{n-1}A + n\int^{n-2}A + n\int^{n-3}A + \ldots + n\int^1 A = n-1;$$

$$n\int^n C = n\int^{n-1}B + n\int^{n-2}B + n\int^{n-3}B + \ldots + n\int^2 B$$

$$= (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2};$$

$$n\int^n D = n\int^{n-1}C + n\int^{n-2}C + n\int^{n-3}C + \ldots + n\int^3 C$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots + \frac{2.1}{1.2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \text{ (Figurirte Zahlen)}.$$

Wie man auf diese Art mit Hülfe der Theorie der figurirten Zahlen oder arithmetischen Reihen höherer Ordnungen (S. diese Artt.) weiter gehen kann, erhellet leicht. Allgemein ist:

$$n\int^n M = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

oder, wie durch kreuzweise Multiplication leicht erhellet, auch

$$n\int^n M = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(n-1)}{1.2.3\ldots(n-m)}.$$

Die höchste Klasse ist offenbar die nte, in welcher also die Anzahl der Complexionen

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{1.2.3\ldots(n-1)} = 1$$

ist. Also ist die Anzahl der Variationen zur Summe n in allen Klassen überhaupt

$$= 1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{n-1}{1} + 1,$$

d. i. nach dem binomischen Lehrsatze

$$= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

5. Sollen die Variationen gegebener Elemente wirklich aufgestellt werden; so leitet man aus jeder Klasse die nächst folgende ab, indem man, wenn Wiederholungen verstattet sind, jeder Complexion jener Klasse jedes gegebene Element nach der Reihe vorschreibt; wenn aber keine Wiederholungen verstattet sind, so werden alle Elemente nach der Reihe nur den Complexionen der gegebenen Klasse vorgesetzt, in welchen sie noch nicht enthalten sind. Fängt man von der ersten Klasse an; so erhält man auf diese Art leicht alle übrigen nach der Reihe. Bei Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente ist die nte Klasse die letzte. Bei Variationen mit uneingeschränkten Wiederholungen gehen die Klassen ins Unendliche fort. Folgende Exempel beziehen sich auf vier Elemente a, b, c, d, und reichen bis zum Anfange der vierten Klasse.

6. Variationen mit Wiederholungen.

a	b	c	d
aa	ab	ca	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd
aaa	aab	aac	aad
aba	abb	abc	abd
aca	acb	acc	acd
ada	adb	adc	add
baa	bab	bac	bad
bba	bbb	bbc	bbd
bca	bcb	bcc	bcd
bda	bdb	bdc	bdd

caa	cab	cac	cad
cba	cbb	cbc	cbd
cca	ccb	ccc	ccd
cda	cdb	cdc	cdd
daa	dab	dac	dad
dba	dbb	dbc	dbd
dca	dcb	dcc	dcd
dda	ddb	ddc	ddd
aaaa	aaab	aaac	aaad
aaba	aabb	aabc	aabd

u. s. f. u. s. f.

7. Variationen ohne Wiederholungen.

a	b	c	d
	ab	ac	ad
	ba	bc	bd
	ca	cb	cd
	da	db	dc
		abc	abd
		acb	acd
		adb	adc
		bac	bad
		bca	bcd
		bda	bdc
		cab	cad
		cba	cbd
		cda	cdb
		dab	dac
		dba	dbc
		dca	dcb
			abcd
			abdc
			acbd
			acdb
			adbc
			adcb
			bacd

u. s. f.

8. Beziehen sich die Variationen auf mehrere Elementenreihen p, q, r, u. s. f., die auch rücksichtlich der Anzahl der Elemente verschieden seyn können; so werden die Variationen wie in (6.) entwickelt, nur mit dem Unterschiede, daß man in die letzte Stelle, als die erste, Elemente aus p, in die 2te Elemente aus q, in die 3te Elemente aus r setzt, u. s. f. wobei zu bemerken, daß hierbei auch die Anzahl der Klassen begränzt, nämlich der Anzahl der gegebenen Elementenreihen gleich ist, wie leicht erhellet. Für die Zeiger

$p(a, b, c, d)$
$q(A, B)$
$r(\alpha, \beta, \gamma)$

erhält man z. B.

a	b	c	d
Aa	Ab	Ac	Ad
Ba	Bb	Bc	Bd
αAa	αAb	αAc	αAd
αBa	αBb	αBc	αBd
βAa	βAb	βAc	βAd
βBa	βBb	βBc	βBd
γAa	γAb	γAc	γAd
γBa	γBb	γBc	γBd

Höhere Klassen giebt es in diesem Falle nicht. Bei der Entwickelung der Producte der Reihen kommen Variationen dieser Art immer vor. Sind die Reihen unendlich, so sind auch die obigen Elementenreihen unendlich, und die Anzahl der Klassen ist unbegränzt.

9. Soll eine Klasse außer der Ordnung dargestellt werden; so schreibe man bei verstatteten Wiederholungen alle gegebenen Elemente unter einander, setze allen a vor, vertausche das vorgesetzte a mit b, das vorgesetzte b mit c, u. s. f. bis zu Ende. Allen Complexionen setze man wieder a vor, verfahre übrigens wie vorher, und setze dies so lange fort, bis man die verlangte Klasse erreicht hat. Soll dagegen die mte Classe der Variationen ohne Wiederholungen entwickelt werden; so schreibe man die Elemente vom mten an unter einander, setze allen das $(m-1)$te Element vor, vertausche nun überall das $(m-1)$te und mte, mte und $(m+1)$te Element, u. s. f., gegen einander, schreibe allen Complexionen das $(m-2)$te Element vor, und verfahre weiter ganz auf ähnliche Art. Mit dem Vorsetzen des ersten Elements erreicht man die verlangte Klasse. Dies giebt folgende Darstellungen der 3ten Klasse für vier Elemente:

a a a	d a a	a b c
a a b	d a b	a b d
a a c	d a c	a c b
a a d	d a d	a c d
a b a	d b a	a d b
a b b	d b b	a d c
a b c	d b c	b a c
a b d	d b d	b a d
a c a	d c a	b c a
a c b	d c b	b c d
a c c	d c c	b d a
a c d	d c d	b d c
a d a	d d a	c a b
a d b	d d b	c a d
a d c	d d c	c b a
a d d	d d d	c b d
b a a		c d a
b a b		c d b
b a c		d a b
b a d		d a c
b b a		d b a
b b b		d b c
b b c		d c a
b b d		d c b
b c a		
b c b		
b c c		
b c d		
b d a		
b d b		
b d c		
b d d		
c a a		
c a b		
c a c		
c a d		
c b a		
c b b		
c b c		
c b d		
c c a		
c c b		
c c c		
c c d		
c d a		
c d b		
c d c		
c d d		

Beide Darstellungen sind involutorisch.

10. Diese Regeln finden bei dem Schreiben der Zahlen nach einem bestimmten Zahlensystem ihre Anwendung, wie z. B. folgende Darstellung für das Zahlensystem, dessen Grundzahl drei ist, zeigt:

0|0|0|0 (0)
0|0|0|1 (1)
0|0|0|2 (2)
0|0|1|0 (3)
0|0|1|1 (4)
0|0|1|2 (5)
0|0|2|0 (6)
0|0|2|1 (7)
0|0|2|2 (8)
0|1|0|0 (9)
0|1|0|1 (10)
0|1|0|2 (11)
0|1|1|0 (12)
–|–|–|–
0|1|2|2 (17)
0|2|0|0 (18)
0|2|0|1 (19)
0|2|0|2 (20)
–|–|–|–
0|2|2|2 (26)
1|0|0|0 (27)
1|0|0|1 (28)

u. s. f.

Die eingeschlossenen Zahlen sind die entsprechenden decadischen Zahlenausdrücke.

11. Bei Variationen zu bestimmten Summen leitet man entweder Klassen aus Klassen, oder Summen aus Summen ab. Im ersten Falle schreibt man die gegebene Summe n als Union in die erste Klasse. Die Binionen erhält man durch Zerlegung von n in zwei Theile auf alle mögliche Arten: 1, n—1; 2, n—2; 3, n—3; ...; n—2, 2; n—1, 1. Aus den Binionen erhält man die Ternionen, wenn man das letzte Element auf ähnliche Art in zwei Theile zerlegt, indem man die übrigen ungeändert läßt, und eben so ergeben sich aus den Ternionen die Quaternionen, u. s. f. Im zweiten Fall findet man aus den Variationen zur Summe n—1 die zur Summe n, wenn man jenen allen zuerst 1 oder a vorsetzt, und dann in allen Variationen zur Summe n—1 das erste Element auch mit dem nächst höhern vertauscht, indem die übrigen ungeändert bleiben. Dies giebt für die Summe 6 folgende Darstellungen:

6	1|1|1|1|1|1
15	1|1|1|1|2
24	1|1|1|2 1
33	1|1|1|3
42	1|1|2 1 1
51	1|1|2 2
114	1|1|3 1
123	1|1|4
132	1|2 1 1 1
141	1|2 1 2
213	1|2 2 1
222	1|2 3
231	1|3 1 1
312	1|3 2
321	1|4 1
411	1|5
1113	2 1 1 1 1
1122	2 1 1 2
1131	2 1 2 1
1212	2 1 3
1221	2 2 1 1
1311	2 2 2
2112	2 3 1
2121	2 4
2211	3 1 1 1
3111	3 1 2
11112	3 2 1
11121	3 3
11211	4 1 1
12111	4 2
21111	5 1
111111	6

Die zweite Darstellung ist involutorisch in Bezug auf die Summen. Wie man sich bey Buchstabenelementen zu verhalten hat, folgt hieraus unmittelbar.

12. Soll eine bestimmte Klasse, z. B. die mte, der Variationen zur Summe n außer der Ordnung dargestellt werden; so suche man zunächst das höchste Element x, welches in der verlangten Klasse vorkommen kann. Da offenbar, wenn $m - 1$ Elemente $= 1$ sind, $m - 1 + x = n$ seyn muß; so ist immer $x = n - m + 1$. Diesem höchsten Element setze man 1 vor, vertausche dann immer das vorgesetzte Element mit dem nächst höhern, und das letzte mit dem nächst niedrigen, bis dieses $= 1$ wird, setze sodann wieder allen erhaltenen Binionen 1 vor, und vertausche wieder immer das vorgesetzte Element mit dem nächst höhern, das letzte mit dem nächst niedrigern, ein Verfahren,

welches man so lange fortsetzt, als die gegebene Zahl m Einheiten enthält. Bei dem Vertauschen der Elemente werden alle die Complexionen übergangen, deren letztes Element = 1 ist. Für m = 4, n = 7 erhält man hiernach:

7D

1	1	1	4
1	1	2	3
1	1	3	2
1	1	4	1
1	2	1	3
1	2	2	2
1	2	3	1
1	3	1	2
1	3	2	1
1	4	1	1
2	1	1	3
2	1	2	2
2	1	3	1
2	2	1	2
2	2	2	1
2	3	1	1
3	1	1	2
3	1	2	1
3	2	1	1
4	1	1	1

Ueber die Anwendung der Variationen in der Analysis s. den Art. Combinatorische Analysis, und suche überhaupt weitere Belehrung in den am Ende dieses Artikels angeführten ausführlichen Werken über combinatorische Analysis.

Variationsrechnung ist der Theil der Analysis, welcher, ähnlich der Differential- und Integralrechnung die Variationen gegebener Functionen zu finden lehrt, eine auf der höchsten Abstraction beruhende mathematische Wissenschaft, welche zugleich sehr wichtiger Anwendungen, namentlich auf die Lehre vom Größten und Kleinsten, wovon späterhin die Rede seyn wird, fähig ist. Ihr Wesen kann nur dann erst vollständig erkannt werden, wenn der Begriff der Variation einer Function deutlich gemacht worden ist. Bis dahin muß man sich mit obiger vorläufigen Erklärung, welche allerdings nur geringen Aufschluß über die Natur des Gegenstandes giebt, begnügen.

I. Die Principien.

A. Functionen absolut-unabhängiger veränderlicher Größen.

1. Wenn V eine Function der Größen x, y, z, u, ...; p, q, r, s, ... ist, aber p, q, r, s, ... wieder als Functionen von x gedacht werden; so nennt man x, y, z, u, ... die absolut-unabhängigen veränderlichen, p, q, r, s, ... dagegen die relativ-unabhängigen veränderlichen Größen, V aber schlechthin die abhängige Größe oder die Function. Der Einfachheit wegen betrachten wir hier zunächst solche Functionen, welche bloß absolut-unabhängige veränderliche Größen enthalten.

2. Die Bestimmung der aus den Werthveränderungen ihrer veränderlichen Größen resultirenden Werthveränderungen der Functionen, ohne daß dabei der Zusammenhang der veränderlichen Größen unter einander, d. h. die Form der Function, sich ändert, ist bekanntlich der Gegenstand der Differenzen- und Differentialrechnunug, welche wir hier in ihrer ganzen Ausdehnung, vorzüglich den Taylor'schen Lehrsatz (s. diesen Artikel), vorauszusetzen berechtigt sind. Man kann sich aber auch denken, daß eine Veränderung einer Function herbeigeführt werde, nicht sowohl bloß durch die Werthveränderung ihrer veränderlichen Größen an sich, sondern auch zugleich durch die Veränderung des gegenseitigen Zusammenhangs derselben unter einander, d. h. der Form der Function, oder auch der letztern allein. Auf diese an sich völlig willkührlichen Formverwandlungen der Functionen läßt sich jedoch kein eigentlicher Algorithmus mit den daraus hervorgehenden Veränderungen der Functionen gründen, wenn jene nicht einigen bestimmten Gesetzen unterworfen werden.

3. In dieser Beziehung ist insonderheit Folgendes zu merken. So wie in der Differenzen- und Differentialrechnung aus der veränderten Function die primitive wieder erhalten wird, wenn in jener alle Incremente der veränderlichen Größen = o gesetzt werden; so ist es auch bei den

durch Formverwandlung hervorgegangenen Functionen, wenn die hieraus entspringenden Veränderungen derselben einem gewissen eigenthümlichen Algorithmus unterwerfbar seyn sollen, unbedingt nöthig, aus ihnen selbst ihren primitiven Zustand erkennen, und auf diesen zurückgehen zu können, indem sonst, wegen der übrigens völligen Willkührlichkeit der Formverwandlung, zwischen ihnen und den primitiven Functionen gar kein weiterer Zusammenhang statt finden würde. Um diesen Zweck zu erreichen, denke man sich, die gegebene Function durch V bezeichnend, bei jeder mit derselben vorgenommenen Verwandlung zugleich eine beliebige constante Größe i, welche in der Folge die Variirende genannt werden soll, eingeführt, und unterwerfe die durch die Verwandlung hervorgegangene Function V_i, wie sie von nun an immer bezeichnet werden soll, bei übrigens völliger Willkührlichkeit des Zusammenhanges der veränderlichen Größen und der Größe i unter einander, nur der einzigen Bedingung, daß sie für $i = o$ wieder in den primitiven Zustand V zurückkehrt. Für $V = (a + x)^2$ wäre z. B.

$$V_i = (a + x + i)^2 + \log\left\{1 + \frac{i}{a(x+i)}\right\} + (x+i)\sin i$$

eine solche durch Formverwandlung hervorgegangene Function, welche der so eben ausgesprochenen Bedingung genügt, da V_i, für $i = o$, $= (a + x)^2$ wird.

Die Differenz $V_i - V$ soll in der Folge überhaupt die Veränderung von V genannt, und durch DV bezeichnet werden, wenn diese Bezeichnung auch sonst nicht sehr gewöhnlich ist.

4. Betrachten wir nun einmal i als veränderlich, und bezeichnen die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial V_i}{\partial i}, \frac{\partial^2 V_i}{\partial i^2}, \frac{\partial^3 V_i}{\partial i^3}, \frac{\partial^4 V_i}{\partial i^4}, \ldots$$

für $i = o$ durch V', V'', V''', V'''', ...; so ist nach der Maclaurinschen Reihe (Taylors Lehrsatz. 12.)

$$V_i = V + V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$DV = V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so daß also die Veränderung einer jeden Function immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen der Variirenden fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Soll diese Entwickelung wirklich ausführbar seyn, so muß natürlich V_i selbst gegeben seyn. Immer aber unterliegt diese Function der Bedingung, daß sie $= V$ für $i = o$ werde.

5. Dem neuern Begriffe der Differentialien analog, nennt man die Coefficienten V', V'', V''', ... in obiger Reihe für die Veränderung $\mathfrak{D}V$, die erste, zweite, dritte, u. s. f. Variation von V, und bezeichnet sie durch δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, ..., so daß also immer

$$\mathfrak{D}V = \delta V . \frac{i}{1} + \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß diese Variationen gefunden werden, wenn man, in Bezug auf i als variabel, die successiven Differentialquotienten von V_i entwickelt, und nach der Differentiation $i = o$ setzt.

Hierbei erhellet, daß, wenn diese Rechnung wirklich ausführbar seyn soll, die Function V_i selbst als gegeben gedacht werden muß, so daß also dieselbe nur bei bestimmten Formen der Function V_i anwendbar seyn würde. Auf der andern Seite aber erfordern alle Anwendungen der Variationsrechnung, wie wir späterhin sehen werden, und die dadurch bedingte nöthige Allgemeinheit, unmittelbar, daß die Form der Function V_i als völlig unbestimmt und willkührlich gedacht werde, nur immer mit der einzigen Bedingung, daß $V_i = V$ für $i = o$. Und so schiene in der That unsere Untersuchung hier zu Ende zu seyn, wenn die Sache nicht noch einer andern modificirten, sehr fruchtbaren, Ansicht fähig wäre.

6. Sey nämlich

$$V = f(x, y, z, u, \ldots\ldots)$$

irgend eine Function der absolut-unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z, u, ...; so kann man sich eine jede Veränderung (im obigen Sinne) derselben herbeigeführt denken, wenn für x, y, z, u, ... die völlig unbestimmten Functionen $\varphi(x, i) = x_i$, $\varphi'(y, i) = y_i$, $\varphi''(z, i) = z_i$, $\varphi'''(u, i) = u_i$, ..., die für $i = o$

alle wieder in ihre primitiven Zustände $x, y, z, u, \ldots$ übergehen, gesetzt werden, wodurch man

$$V_i = f(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots.),$$

welches, wie es seyn muß (3.), wegen vorhergehender Bedingung in Bezug auf $x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots., = V$ für $i = o$. In der völligen Unbestimmtheit der für $x, y, z, u, \ldots$ gesetzten Functionen erscheint die Annahme, daß durch deren Substitution für $x, y, z, u, \ldots$ jede willkührliche Veränderung von V hervorgebracht werden könne, hinlänglich gerechtfertigt. Da nun aber (5.)

$$x_i = x + \delta x.\frac{i}{1} + \delta^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y_i = y + \delta y.\frac{i}{1} + \delta^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z_i = z + \delta z.\frac{i}{1} + \delta^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u_i = u + \delta u.\frac{i}{1} + \delta^2 u.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

so erhält man V_i, wenn diese Reihen für $x, y, z, u, \ldots$ in V gesetzt werden, und dann das Resultat nach Potenzen von i entwickelt wird, wo nun, wie vorher, die Coefficienten von $\frac{i}{1}, \frac{i^2}{1.2}, \frac{i^3}{1.2.3}, \ldots.$ die erste, zweite, dritte, vierte, u. s. f. Variation von V genannt werden. Eben so heißen $\delta x, \delta y, \delta z, \delta u, \ldots.$; $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z, \delta^2 u, \ldots.$; u. s. f. die ersten, zweiten, dritten, vierten, u. s. f. Variationen von $x, y, z, u, \ldots.$ Alle diese Functionen müssen aber wegen der völligen Unbestimmtheit der Functionen $x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots.$ als ganz willkührliche Functionen respective von $x, y, z, u, \ldots.$ gedacht werden.

7. Durch diese Ansicht der Sache ist jeden Falls viel gewonnen, und nur durch sie wird erst ein wirklicher Algorithmus möglich. Müssen nämlich auch die Variationen der absolut-unabhängigen veränderlichen Größen immer noch als völlig unbestimmte Functionen derselben gedacht werden; so ist doch nun eben von diesen Variationen die Variation der Function V abhängig gemacht, und muß sich also durch dieselben darstellen lassen. Darin besteht

denn auch, wie es uns scheint, das Geschäft der Variationsrechnung, als ein eigenthümlicher Algorithmus, ohne jede Beziehung auf irgend eine Anwendung derselben, einzig und allein, nämlich die Variation der Function V durch die unbestimmten Variationen ihrer veränderlichen Größen darzustellen. Was es mit den relativ-unabhängigen verlichen Größen, wenn deren vorkommen sollten, für eine Bewandtniß habe, werden wir weiter unten sehen.

8. Vor Entwickelung des Hauptsatzes der Variationsrechnung, in ihrem reinen Theile, dürfte es vielleicht nicht unzweckmäßig seyn, auf einen hier wichtigen Satz aus der Differentialrechnung, welcher in den Systemen häufig fehlt, besonders hinzuweisen. Ist nämlich

$$y = f(p, q, r, s, \ldots)$$

eine Function von $p, q, r, s, \ldots$, welche selbst alle von einer veränderlichen Größe x abhängig seyn sollen; so findet man ∂y in Bezug auf x, wenn man ∂y in Bezug auf $p, q, r, s, \ldots$, als von einander völlig unabhängige Größen angesehen, entwickelt, und dann die Differentiale von $p, q, r, s, \ldots$ alle in Bezug auf x als veränderliche Größe betrachtet. Denn denkt man sich x um Δx geändert; so wird

$$y' = f(p + \Delta p, q + \Delta q, r + \Delta r, s + \Delta s, \ldots)$$

und folglich nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere veränderliche Größen:

$$\begin{aligned} y' = y &+ \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\Delta p + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\Delta q + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\Delta r + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze für eine veränderliche Größe

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \ldots, \quad \Delta q = \frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \ldots, \quad \Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \ldots, \text{ u. s. f.}$$

Also

$$y' = y + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \Delta x + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \Delta x + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, in Bezug auf x als veränderlich:

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x =$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) \partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \partial s + \ldots,$$

wenn nur ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... alle in Bezug auf x genommen werden. Nach der ersten Reihe für y' ist aber, wenn p, q, r, s, ... als unabhängige veränderliche Größen gedacht werden,

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) \partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right) \partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \partial s + \ldots$$

Also folgt unser Satz.

Ferner ergiebt sich nun hieraus, daß, da das zweite Differential von y das erste vom ersten ist, $\partial^2 y$ in Bezug auf x gefunden wird, wenn man den gefundenen Ausdruck für ∂y in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... als unabhängige veränderliche Größen differentiirt, und die Differentiale wie vorher betrachtet. Eben so erhält man hieraus weiter $\partial^3 y$ in Bezug auf x, wenn der für $\partial^2 y$ erhaltene Ausdruck, in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ...; $\partial^2 p$, $\partial^2 q$, $\partial^2 r$, $\partial^2 s$, ... als unabhängige veränderliche Größen, differentiirt wird, und die Differentiale dann wie vorher betrachtet werden.

9. Durch folgenden, als Hauptsatz der ganzen eigentlichen Variationsrechnung zu betrachtenden Lehrsatz, wird dieselbe in unmittelbare Verbindung mit der Differential-

rechnung gesetzt. Man denke sich nämlich einmal x, y, z, u, ... alle als von einer veränderlichen Größe v abhängig, und lasse v sich um $i\Delta v$ ändern, wo bekanntlich auch ∂v für Δv gesetzt werden könnte, indem, wie aus der Differentialrechnung bekannt, ∂v mit Δv identisch ist. Durch diese Aenderung gehen nach dem Taylor'schen Lehrsatze für eine veränderliche Größe x, y, z, u, ... respective über in:

$$x + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

d. i., weil nach obiger Bemerkung $\partial v = \Delta v$ ist, in:

$$x + \partial x.\frac{i}{1} + \partial^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y + \partial y.\frac{i}{1} + \partial^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z + \partial z.\frac{i}{1} + \partial^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u + \partial u.\frac{i}{1} + \partial^2 u.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

Werden nun diese Reihen in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots)$$

für x, y, z, u, ... gesetzt; so geht V nach dem Taylor'schen Lehrsatze über in:

$$V + \frac{\partial V}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 V}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= V + \partial V.\frac{i}{1} + \partial^2 V.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo bei der Entwickelung der Differentialien von V nach (8.) zu verfahren ist. Setzen wir nun hierin überall δ für ∂; so erhält man natürlich das, was V wird, wenn für x, y, z, u, ... die Reihen

$$x + \delta x . \frac{i}{1} + \delta^2 x . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$y + \delta y . \frac{i}{1} + \delta^2 y . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$z + \delta z . \frac{i}{1} + \delta^2 z . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$u + \delta u . \frac{i}{1} + \delta^2 u . \frac{i^2}{1.3} + \delta^3 u . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

gesetzt werden, d. i. V_i (6.), so daß also

$$V_i = V + \partial V . \frac{i}{1} + \partial^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

nur überall δ für ∂ gesetzt. Da aber auch (5.)

$$V_i = V + \delta V . \frac{i}{1} + \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist; so ist $\delta V = \partial V$, $\delta^2 V = \partial^2 V$, $\delta^3 V = \partial^3 V$, $\delta^4 V = \partial^4 V$, u. s. f., wenn bei der Entwickelung der Differentialien von V alle $x, y, z, u, \ldots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \ldots$; $\partial^2 x, \partial^2 y, \partial^2 z, \partial^2 u, \ldots$; u. s. f. als von einander unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden, und nach, oder bei der Differentiation, überall δ für ∂ gesetzt wird. Am kürzesten bedient man sich bei der Differentiation sogleich des Zeichens δ statt ∂, oder differentiirt, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, unter oder mit dem Zeichen δ. Wir haben zwar vorher $x, y, z, u, \ldots$ als von einer gewissen Größe v abhängig betrachtet; es fällt aber in die Augen, daß obige Entwickelung ganz allgemein das geben muß, was man erhält, wenn in V die Reihen

$$x + \delta x . \frac{i}{1} + \delta^2 x . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$y + \delta y . \frac{i}{1} + \delta^2 y . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$z + \delta z . \frac{i}{1} + \delta^2 z . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$u + \delta u . \frac{i}{1} + \delta^2 u . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

überhaupt für $x, y, z, u, \ldots$ gesetzt werden, insofern es nur nicht auf eine gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen ankommt, so wie denn in diesem Abschnitte dieselben als ganz unabhängig von einander betrachtet werden.

Das Variiren bei Functionen mit absolut- unabhängigen Größen ist also hiernach nichts anders als eine bloße Differentiation unter dem Zeichen δ. Auch erhalten hiernach Ausdrücke wie $\delta^{m+n} = \delta^m(\delta^n V)$ einen leicht zu begreifenden Sinn, indem sich dieselben offenbar nur auf eben diese Entwickelungsmethode der Variationen mittelst der Differentialrechnung beziehen können.

Für die erste und zweite Variation erhält man:

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta u + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = &\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta^2 u \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\delta x \delta z + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\delta y \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\delta y \delta z + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\delta z \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}\delta z \delta y + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right)\delta u^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial x}\delta u \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial y}\delta u \delta y + \ldots \\ &\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

oder, da die Ordnung der Differentiation keinen Einfluß auf das Resultat hat:

$$\begin{aligned}\delta^2 V = &\\ &\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta^2 u + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x \delta y + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\delta x \delta z + \ldots \\ &\qquad + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\delta y \delta z + \ldots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2 + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Das Gesetz fällt in die Augen, und man könnte eben so leicht die höhern Variationen nach der gegebenen Regel entwickeln.

10. Die bekannten Grundregeln der Differentialrechnung gelten, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar

folgt, auch für Variationen, und können auch noch besonders auf folgende Art leicht bewiesen werden.

a. Für $V = v + v' + v'' + v''' + \ldots$ ist $V_i = v_i + v'_i + v''_i + v'''_i + \ldots$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{\partial v'_i}{\partial i} + \frac{\partial v''_i}{\partial i} + \frac{\partial v'''_i}{\partial i} + \ldots$$

Folglich für $i = o$ (4.)

$$\delta V = \delta v + \delta v' + \delta v'' + \delta v''' + \ldots$$

b. Für $V = vv'$ ist eben so $V_i = v_i v'_i$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = v \frac{\partial v'_i}{\partial i} + v'_i \frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = v\delta v' + v'\delta v,$$

wenn nach der Differentiation wieder $i = o$ gesetzt wird.

c. Für $V = \frac{v}{v'}$ ist $V_i = \frac{v_i}{v'_i}$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{v'_i \frac{\partial v_i}{\partial i} - v_i \frac{\partial v'_i}{\partial i}}{v'_i v'_i}, \quad \delta V = \frac{v'\delta v - v\delta v'}{v'v'}.$$

d. Für $V = v^n$ ist $V_i = (v_i)^n$; also

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = n(v_i)^{n-1} . \frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = nv^{n-1}\delta v.$$

e. Für $V = av$ ist $V_i = a_i v$; also

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = a \frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = a\delta v.$$

Zuweilen können diese Regeln von Nutzen seyn; indeß erscheinen sie hier bei Weitem nicht so wichtig, wie in der Differentialrechnung.

11. Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Variationsrechnung ist folgender Satz.

Man bezeichne der Kürze wegen irgend einen, z. B. den kten, Differentialquotienten von V in Bezug auf seine veränderlichen Größen, bloß durch $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$, wo also einige Mal nach x, dann einige Mal nach y, einige Mal nach z, u. s. f., überhaupt k Mal differentiirt ist, und es bekanntlich nicht auf die Ordnung, wohl aber auf die Anzahl der einzelnen Differentiationen nach jeder einzelnen veränderlichen Größe ankommt. Da dieser Differentialquotient offenbar auch eine gewisse Function von x, y, z, u, ... ist, so setze man

$$\frac{\partial^k V}{\partial^k} = f'(x, y, z, u, \ldots).$$

Setzen wir nun in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots)$$

$x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots$ für $x, y, z, u, \ldots$; so wird

$$V_i = f(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

und folglich auch

$$\frac{\partial^k V_i}{\partial^k} = f'(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

wo bei der Differentiation offenbar alle Variationen der absolut unabhängigen veränderlichen Größen als constant zu betrachten sind, weil hier natürlich vorausgesetzt werden muß, daß $x, y, z, u, \ldots$ in der Function f und auch in f' auf völlig gleiche Art variirt worden sind, welches nicht der Fall seyn würde, wenn die Differentiale der Variationen nicht $= 0$ gesetzt würden. Nun ist aber (5.):

$$V_i = V + \delta V . \frac{i}{1} + \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

also, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^k V_i}{\partial^k} = \frac{\partial^k V}{\partial^k} + \frac{\partial^k (\delta V)}{\partial^k} . \frac{i}{1} + \frac{\partial^k (\delta^2 V)}{\partial^k} . \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$

in welche Reihe also $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$ durch die Variation von $x, y, z, u, \ldots$ übergeht, so daß also (5.) die Coefficienten von $\frac{i}{1}, \frac{i^2}{1.2}, \frac{i^3}{1.2.3}, \ldots$ in dieser Reihe die Variationen von $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$ sind, und folglich

$$\delta\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k (\delta V)}{\partial^k}, \quad \delta^2\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^2 V)}{\partial^k};$$

$$\delta^3\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^3 V)}{\partial^k}, \ldots\ldots;$$

überhaupt

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^n V)}{\partial^k}$$

ist; man also die nte Variation eines kten Differentialquotienten einer Function absolut-unabhängiger veränderlicher Größen erhält, wenn man den kten Differentialquotienten der nten Variation dieser Function nimmt, bei der Differentiation alle Variationen von $x, y, z, u, \ldots$ als constant

betrachtet, nur die Differentialquotienten beide Mal ganz auf einerlei Art nach $x, y, z, u, \ldots$ genommen.

12. Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf folgende Art aus dem Taylor'schen Lehrsatze (s. d. Art.) unmittelbar ableiten, welcher Beweis zwar weitläufiger ist, aber, wie es uns scheint, eine sehr deutliche Einsicht in die Natur der Sache gewährt. Der Kürze wegen setze man

$$X = \delta x . \frac{i}{1} + \delta^2 x . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Y = \delta y . \frac{i}{1} + \delta^2 y . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Z = \delta z . \frac{i}{1} + \delta^2 z . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$U = \delta u . \frac{i}{1} + \delta^2 u . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots;$$

u. s. f. u. s. f.

und bezeichne den Inbegriff aller, zugleich mit ihren Permutationszahlen multiplicirten Combinationen mit Wiederholungen der ersten, zweiten, dritten Klasse, u. s. f., für den Zeiger

$$\left\{ \frac{X}{\partial x}, \frac{Y}{\partial y}, \frac{Z}{\partial z}, \frac{U}{\partial u}, \ldots \right\}$$

hier bloß durch $C_1, C_2, C_3, \ldots$; so ist, wie im Art. Taylors Lehrsatz (10.), wo aber eine etwas verschiedene Bezeichnung der Combinationsklassen gebraucht ist, gezeigt worden,

$$V_i = V + \frac{\partial V}{1} C_1 + \frac{\partial^2 V}{1.2} C_2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} C_3 + \ldots,$$

ein Ausdruck, dessen combinatorische Bedeutung wohl aufzufassen ist, worüber der a. Art. nachzusehen. Da aber weder V, noch irgend ein Differentialquotient von V, i enthält; so kann man, nach i differentiirend, setzen:

$$\frac{\partial^n V_i}{\partial i^n} = \frac{\partial V}{1} \frac{\partial^n C_1}{\partial i^n} + \frac{\partial^2 V}{1.2} \frac{\partial^n C_2}{\partial i^n} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} \frac{\partial^n C_3}{\partial i^n} + \ldots,$$

immer nur die combinatorische Bedeutung dieser Ausdrücke gehörig festgehalten. Hieraus erhält man $\delta^n V$ (4.), wenn man $i = 0$ setzt, so daß also, wenn die Werthe der

Differentiale der Combinationsklassen für $i = o$ durch Einschließung in Parenthesen unterschieden werden,

$$\delta^n V = \frac{\partial V}{1}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^2 V}{1.2}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^3 V}{1.2.3}\left(\frac{\partial^n C_3}{\partial i^n}\right) + \ldots.$$

Das allgemeine Glied von C_k hat offenbar die Form

$$A.\frac{X^\alpha Y^\beta Z^\gamma U^\delta \ldots.}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial u^\delta \ldots.},$$

wo $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = k$ ist. Ordnet man also C_k nach Potenzen von i; so enthält das erste Glied i^k, alle übrigen Glieder höherer Potenzen von i, und es ist folglich, wenn $k > n$ ist, $\left(\frac{\partial^n C_k}{\partial i^n}\right) = o$, so daß obige Reihe mit dem Gliede

$$\frac{\partial^n V}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\partial^n C_n}{\partial i^n}\right)$$

abbricht. Setzt man nun, welches offenbar verstattet, $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$ für V; so wird

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) =$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)}{1}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)}{1.2}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.,$$

wofür, wenn nur immer die combinatorische Natur dieses Ausdrucks gehörig in's Auge gefaßt wird, sich offenbar schreiben läßt:

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) =$$

$$\frac{\partial^{k+1} V}{1.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^{k+2} V}{1.2\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.$$

Nimmt man aber, alle Variationen der absolut-unabhängigen veränderlichen Größen als constant betrachtend, von dem oben entwickelten $\delta^n V$ den kten Differentialquotienten, indem man kmal ganz in derselben Art wie bei $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$ differentiirt; so erhält man:

$$\frac{\partial^k(\delta^n V)}{\partial^k} =$$

$$\frac{\partial^{k+1} V}{1.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^{k+2} V}{1.2.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.,$$

wo die Differentialquotienten von V offenbar ganz auf dieselbe Art wie vorher in der Reihe für $\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)$ genommen sind, da die Ordnung der Differentiation bekanntlich willkührlich ist. Es ist also

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k(\delta^n V)}{\partial^k},$$

wo, was insbesondere deutlich aus diesem Beweise zu erhellen scheint, alle Variationen der absolut-unabhängigen veränderlichen Größen bei der Differentiation als constant zu betrachten sind.

13. Sei, um diesen Satz an ein Paar Beispielen zu erläutern,

$$V = ax + 2bx^2y^2 + 3cy^3;$$

also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a + 4bxy^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 8bxy;$$

$$\partial V = a\partial x + 4bxy^2\partial x + 4bx^2y\partial y + 9cy^2\partial y;$$

$$\delta V = a\delta x + 4bxy^2\delta x + 4bx^2y\delta y + 9cy^2\delta y.$$

$$\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\partial x + 8bxy\partial y, \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y; \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x},$$

wie es seyn soll. Ferner ist auch

$$\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\partial y + y\partial x),$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\delta y + y\delta x).$$

Aber

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y} = 8b(y\delta x + x\delta y);$$

also

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y},$$

wie es seyn soll. Immer sind δx, δy bei der Differentiation als constant betrachtet. Sei ferner, um auch ein Beispiel mit transcendenten Größen zu geben,

$$V = 4a\log n\, x \sin y + 3bx;$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{4a \sin y}{x} + 3b, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{4a \cos y}{x};$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\partial x \cos y}{x} + \partial y \sin y\right\},$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\delta x \cos y}{x} + \delta y \sin y\right\}.$$

Ferner ist

$$\partial V = \frac{4a \partial x \sin y}{x} + 3b \partial x + 4a \partial y \log n x \cos y,$$

$$\delta V = \frac{4a \delta x \sin y}{x} + 3b \delta x + 4a \delta y \log n x \cos y,$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = -\frac{4a \delta x \sin y}{x^2} + \frac{4a \delta y \cos y}{x},$$

$$\frac{\partial^2(\delta V)}{\partial x \partial y} = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\delta x \cos y}{x} + \delta y \sin y\right\},$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2(\delta V)}{\partial x \partial y},$$

wie es seyn soll.

14. Sey jetzt V irgend eine Function der einen absolut-unabhängigen veränderlichen Größe x; so ist

$$\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x} = V, \quad \delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \delta^n V;$$

aber auch

$$\frac{\partial \int (\delta^n V) \partial x}{\partial x} = \delta^n V;$$

also

$$\delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial \int (\delta^n V) \partial x}{\partial x}.$$

Werden nun alle Variationen der absolut-unabhängigen veränderlichen Größe als constant betrachtet; so ist (11.)

$$\delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta^n \int V \partial x)}{\partial x};$$

also

$$\frac{\partial(\delta^n \int V \partial x)}{\partial x} = \frac{\partial \int (\delta^n V) \partial x}{\partial x},$$

und folglich

$$\delta^n \int V \partial x = \int (\delta^n V) \partial x + C.$$

Sey z. B.

$$V = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

so ist

$$\int V\partial x = \tfrac{1}{4}ax^4 + \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}cx^2 + dx + \text{Const};$$
$$\delta\int V\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x.$$

Ferner ist

$$\delta V = (3ax^2 + 2bx + c)\delta x,$$

und, δx als constant betrachtet:

$$\int(\delta V)\,\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx)\delta x + C.$$

Nun wird $\delta\int V\partial x = d\delta x$ für $x = o$; also ist $C = d\delta x$, und

$$\int(\delta V)\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x$$

zu setzen, damit

$$\delta\int V\partial x = \int(\delta V)\partial x.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\delta^2\int V\partial x = (3ax^2 + 2bx + c)\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta^2 x;$$
$$\delta^2 V = (6ax + 2b)\delta x^2 + (3ax^2 + 2bx + c)\delta^2 x,$$
$$\int(\delta^2 V)\partial x = (3ax^2 + 2bx)\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx)\delta^2 x + C.$$

Für $x = o$ ist aber

$$\delta^2\int V\partial x = c\delta x^2 + d\delta^2 x,$$

so daß also $C = c\delta x^2 + d\delta^2 x$ zu setzen ist, damit

$$\delta^2\int V\partial x = \int(\delta^2 V)\partial x.$$

15. In Bezug auf Integrale zweier absolut-unabhängigen veränderlichen Größen geben wir hier einige Erläuterungen, die für das Folgende wichtig, und in diesem Wörterbuche noch nirgends mit gehöriger Deutlichkeit vorgetragen sind. Sei also V eine Function der beiden absolut-unabhängigen Größen x, y; so versteht man unter

$$\int\int V\partial x\partial y$$

den Integralausdruck, welchen man erhält, wenn zuerst $\int V\partial x$ bloß in Bezug auf x als veränderlich, und dann

$$\int\partial y\int V\partial x,$$

bloß in Bezug auf y als veränderlich, oder zuerst $\int V\partial y$ bloß in Bezug auf y als veränderlich, und dann

$$\int\partial x\int V\partial y,$$

bloß in Bezug auf x als veränderlich, genommen wird, indem sich aus dem Satze, daß die Ordnung der Differentiation einer Function zweier veränderlichen Größen nach diesen veränderlichen Größen umgekehrt werden kann (Taylors Lehrsatz. 8.) leicht ergiebt, daß beide Operationen

zu gleichen, nur in gewissen Größen, die bloß von x und bloß von y abhängen, unterschiedenen Resultaten führen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 \int \partial y \int V \partial x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \int V \partial x}{\partial x} = V,$$

$$\frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \int V \partial y}{\partial y} = V,$$

$$\frac{\partial^2 \int \partial y \int V \partial x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial x \partial y},$$

und folglich, wenn $f(x)$, $f'(y)$ zwei willkührliche Functionen, die erste bloß von x, die zweite bloß von y bezeichnen,

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V \partial y + f(x) + f'(y).$$

Soll $\int \partial y \int V \partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$ genommen werden: so nimmt man, y als constant betrachtend, $\int V \partial x$ zwischen den erstern, und, x als constant betrachtend, $\int \partial y \int V \partial x$ zwischen den letztern Gränzen. Hat man aber für dieses Integral überhaupt irgend einen Werth, den wir durch

$$\int \partial y \int V \partial x = \varphi(x, y)$$

bezeichnen wollen, gefunden; so kann man den zwischen den obigen Gränzen genommenen Werth desselben auch

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b)$$

setzen. Denn man setze

$$\int V \partial x = \varphi'(x, y);$$

so ist, y als constant betrachtet, der zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a'$ genommene Werth dieses Integrals

$$= \varphi'(a', y) - \varphi'(a, y);$$

also

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \varphi'(a', y) \partial y - \int \varphi'(a, y) \partial y,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$\int \varphi'(x, y) \partial y = \varphi''(x, y)$$

setzen,

$$\int \partial y \int V \partial x = \varphi''(a', y) - \varphi''(a, y),$$

und folglich dieses Integral von $y = b$ bis $y = b'$ genommen,

$$= \varphi''(a', b') - \varphi''(a, b') - \{\varphi''(a', b) - \varphi''(a, b)\}$$
$$= \varphi''(a', b') - \varphi''(a', b) - \varphi''(a, b') + \varphi''(a, b).$$

Nun kann aber bloß

$$\varphi''(x, y) = \varphi(x, y) + f_1 x + f'_1 y$$

seyn; also ist obiger Werth unsers Integrals

$$= \varphi(a', b') + f_1(a') + f'_1(b') - \varphi(a', b) - f_1(a') - f'_1(b)$$
$$- \varphi(a, b') - f_1(a) - f'_1(b') + \varphi(a, b) + f_1(a) + f'_1(b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

wie behauptet wurde. Nimmt man $\int \partial x \int V \partial y$ zwischen denselben Gränzen; so erhält man, da dieses Integral

$$= \varphi(x, y) + f(x) + f'(y)$$

seyn muß, auf ganz ähnliche Art wie vorher seinen Werth zwischen besagten Gränzen

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a, b') - \varphi(a', b) + \varphi(a, b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

so daß also immer

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V \partial y,$$

wenn nur beide Integrale zwischen einerlei Gränzen genommen werden.

16. Auf ähnliche Art wie in (15.) ist nun

$$\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = V, \quad \delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \delta^n V;$$

aber auch $\frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \delta^n V$; also

$$\delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y}.$$

Werden aber alle Varationen von x, y als constant betrachtet; so ist (11.)

$$\delta^n \left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

so daß also

$$\frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

woraus

$$\delta^n \int\int V \partial x \partial y = \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y + f(x) + f'(y).$$

Um ein Beispiel zu geben; so sey

$$V = ax^2 + bxy + cy^2 + d;$$
$$\int V \partial x = \tfrac{1}{3} ax^3 + \tfrac{1}{2} bx^2 y + cxy^2 + dx,$$
$$\int\int V \partial x \partial y = \tfrac{1}{3} ax^3 y + \tfrac{1}{4} bx^2 y^2 + \tfrac{1}{3} cxy^3 + dxy,$$
$$\delta \int\int V \partial x \partial y =$$
$$(ax^2 y + \tfrac{1}{2} bxy^2 + \tfrac{1}{3} cy^3 + dy) \delta x$$
$$+ (\tfrac{1}{3} ax^3 + \tfrac{1}{2} bx^2 y + cxy^2 + dx) \delta y.$$

Dagegen ist

$$\delta V = (2ax + by)\delta x + (bx + 2cy)\delta y\,,$$

$$\int(\delta V)\partial x =$$

$$(ax^2 + bxy)\delta x + (\tfrac{1}{2}bx^2 + 2cxy)\delta y\,,$$

$$\iint(\delta V)\partial x\partial y =$$

$$(ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2)\delta x + (\tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2)\delta y\,.$$

Nun wird aber, wenn man zuerst $x = o$, dann $y = o$ setzt, im ersten Falle

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\delta x\,,$$

im andern

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}ax^3 + dx)\delta y\,.$$

Bestimmt man also $\iint(\delta V)\partial x\partial y$ auf dieselbe Art; so wird dieses Integral

$$= (ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2 + \tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\delta x$$
$$+ (\tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2 + dx)\delta y\,,$$

und folglich

$$\delta\iint V\partial x\partial y = \iint(\delta V)\partial x\partial y\,,$$

wie es seyn soll.

Die Erweiterung vorhergehender Betrachtungen auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen würde keinen Schwierigkeiten unterworfen seyn; indeß ist das Obige zu unserm gegenwärtigen Zwecke hinreichend.

B. Functionen absolut- und relativ-unabhängiger veränderlicher Größen.

17. Die relativ-unabhängigen veränderlichen Größen kann man sich offenbar auf eine dreifache Art variirt denken. Betrachten wir, um dies näher zu zeigen, zuerst bloß eine relativ-unabhängige veränderliche Größe, zwischen welcher und den absolut-unabhängigen Größen also eine Gleichung statt finden muß, welche durch

$$\varphi(p, x, y, z, \ldots) = o$$

bezeichnet werde. Die relativ-unabhängige Größe p kann nun zuerst dadurch variirt werden, daß statt der absolut-unabhängigen Größen x, y, z, ... die Reihen

$$x_i = x + \delta x . \frac{i}{1} + \delta^2 x . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$y_i = y + \delta y . \frac{i}{1} + \delta^2 y . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z_i = z + \delta z . \frac{i}{1} + \delta^2 z . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

gesetzt werden, wodurch p in

$$p_i = p + \delta p . \frac{i}{1} + \delta^2 p . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

übergeht. Dies stimmt offenbar ganz mit dem in (A.) behandelten Falle überein. Die Variationen von x, y, z,... müssen als ganz willkührliche Functionen dieser Größen, und die Variationen von p als durch jene herbeigeführt gedacht werden, so daß sie von denselben abhängen, und durch sie ausgedrückt werden können (A.). Ferner kann man aber auch in obige Gleichung, die absolut-unabhängigen Größen ungeändert lassend, für p die Reihe

$$p_i = p + \delta p . \frac{i}{1} + \delta^2 p . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 p$,... ganz willkührliche Functionen von p sind, die also jetzt nicht durch die Variationen von x, y, z,... bestimmt werden, setzen, und endlich kann man sich p auch auf diese beiden Arten zu gleicher Zeit variirt denken, in welchem Falle aber die Variationen von x, y, z,... nicht bloß auf p allein, sondern auch auf dessen willkührliche Variationen eine Wirkung ausüben. Wir wollen, um die Begriffe zu fixiren, diese drei Arten der Variationen von p von einander unterscheiden, indem wir die erste Art secundäre Variationen nennen und durch δ_1 bezeichnen, die zweite und dritte Art dagegen primitive und zusammengesetzte Variationen nennen, und durch δ, δ_{11} bezeichnen wollen.

18. Die in (A.) ausführlich betrachteten Variationen von V waren hiernach secundäre Variationen, und der in (11.) bewiesene wichtige Satz scheint nach der dortigen Darstellung nur auf solche Variationen anwendbar zu seyn, da er lediglich die Zurückführung der Variationen von V auf die Variationen der absolut-unabhängigen Größen voraus-

setzt. Indeß ist derselbe, richtig verstanden, auch auf primitive und zusammengesetzte Variationen anwendbar.

Da nämlich zwischen p und den absolut-unabhängigen veränderlichen Größen die Gleichung

$$\varphi(p, x, y, z, \ldots) = 0$$

statt findet; so muß offenbar auch zwischen einem willkührlichen Differentialquotitienten $\frac{\partial^k p}{\partial^k}$ von p, in Bezug auf x, y, z, ... und letzteren Größen, eine gewisse Gleichung

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right) = 0$$

statt finden. Wird nun, indem x, y, z, ... an sich ganz ungeändert bleiben, für p in die erste Gleichung die Reihe

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo alle Variationen ganz willkührliche Functionen von p sind, gesetzt; so geht diese Gleichung in

$$\varphi(p_i, x, y, z, \ldots) = 0.$$

und folglich dadurch die zweite offenbar in

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p_i}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right)$$

über, indem diese Gleichung in beiden Fällen offenbar auf ganz gleiche Weise aus der ersten abgeleitet wird. Da nun aber

$$\frac{\partial^k p_i}{\partial^k} =$$

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist; so erhellet, daß durch die Variation von p der Differentialquotient $\frac{\partial^k p}{\partial^k}$ in diese Reihe übergeht, und daß folglich die Coefficienten von $\frac{i}{1}$, $\frac{i^2}{1.2}$, $\frac{i^3}{1.2.3}$.... in dieser Reihe die successiven Variationen dieses Differentialquotienten sind (5.), so daß also

$$\delta\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}, \quad \delta^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k},$$

$$\delta^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}, \ldots, \delta^n\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^n p}{\partial^k},$$

wie in (11.). Zugleich erhellt hieraus, daß die primitiven Variationen der relativ-unabhängigen veränderlichen Größen nicht, wie dies bei den Variationen der absolut-unabhängigen Größen der Fall ist (12.), als constant zu betrachten sind, sondern immer als ganz willkührliche Functionen von p betrachtet werden müssen.

19. Auch in Bezug auf zusammengesetzte Variationen läßt sich dieser Satz auf folgende Art rechtfertigen. Zuerst setze man p_i für p; so werden die beiden obigen Gleichungen:

$$\varphi(p_i, x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right) = 0,$$

ganz wie vorher. Werden nun aber x_i, y_i, z_i, ... für x, y, z, ... gesetzt; so gehen, wie wir in (A.) gesehen haben, mit Anwendung der eingeführten Zeichen (17.), p, δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 q$, ... über in:

$$p + \delta_1 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\delta p + \delta_1 \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\delta^2 p + \delta_1 \delta^2 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta^2 p \cdot \frac{i^3}{1.23} + \ldots,$$

$$\delta^3 p + \delta_1 \delta^3 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta^3 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

so daß also, wenn dies in die Reihe p_i (18.) für p, δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 p$, ... gesetzt, und nach i geordnet wird, diese Reihe in

$$\begin{aligned} & p \\ & + (\delta p + \delta_1 p) \cdot \frac{i}{1} \\ & + (\delta^2 p + 2\delta_1 \delta p + \delta_1{}^2 p) \cdot \frac{i^2}{1.2} \\ & + (\delta^3 p + 3\delta_1 \delta^2 p + 3\delta_1{}^2 \delta p + \delta_1{}^3 p.) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

übergeht, und folglich

$$\delta_{\text{II}} p = \delta p + \delta_1 p,$$
$$\delta_{\text{II}}{}^2 p = \delta^2 p + 2\delta_1 \delta p + \delta_1{}^2 p,$$
$$\delta_{\text{II}}{}^3 p = \delta^3 p + 3\delta_1 \delta^2 p + 3\delta_1{}^2 \delta p + \delta_1{}^3 p,$$
$$\delta_{\text{II}}{}^4 p = \delta^4 p + 4\delta_1 \delta^3 p + 6\delta_1{}^2 \delta^2 p + 4\delta_1{}^3 \delta p + \delta_1{}^4 p$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Ferner ist

$$\frac{\partial^k p_i}{\partial^k} =$$
$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und durch die Substitution der durch x_i, y_i, z_i, ... bezeichneten Reihen für x, y, z, ... gehen $\frac{\partial^k p}{\partial^k}$ und die Coefficienten von $\frac{i}{1}$, $\frac{i^2}{1.2}$, $\frac{i^3}{1.2.3}$, ..., wie vorher, über in:

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} + \delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

und folglich $\frac{\partial^k p_i}{\partial^k}$ in:

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k}$$
$$+ \left\{ \delta_1 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \right\} \cdot \frac{i}{1}$$
$$+ \left\{ \delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) + 2\delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right) + \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} \right\} \cdot \frac{i^2}{1.2}$$
$$+ \left\{ \delta_1{}^3 \left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) + 3\delta_1{}^2 \left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right) + 3\delta_1 \left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right) + \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} \right\} \cdot \frac{i^3}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

so daß also

$$\delta_{\text{II}}\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}+\delta_{\text{I}}\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

$$\delta_{\text{II}}^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}+2\delta_{\text{I}}\left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right)+\delta_{\text{I}}^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

$$\delta_{\text{II}}^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}+3\delta_{\text{I}}\left(\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}\right)+3\delta_{\text{I}}^2\left(\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}\right)+\delta_{\text{I}}^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich nach (11.)

$$\delta_{\text{II}}\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_{\text{I}} p}{\partial^k}=\frac{\partial^k(\delta p+\delta_{\text{I}} p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{\text{II}} p}{\partial^k},$$

$$\delta_{\text{II}}^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k}+2\cdot\frac{\partial^k \delta_{\text{I}}\delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_{\text{I}}^2 p}{\partial^k}=\frac{\partial^k(\delta^2 p+2\delta_{\text{I}}\delta p+\delta_{\text{I}}^2 p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{\text{II}}^2 p}{\partial^k},$$

$$\delta_{\text{II}}^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=$$

$$\frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}+3\cdot\frac{\partial^k \delta_{\text{I}}\delta^2 p}{\partial^k}+3\cdot\frac{\partial^k \delta_{\text{I}}^2\delta p}{\partial^k}+\frac{\partial^k \delta_{\text{I}}^3 p}{\partial^k}$$

$$=\frac{\partial^k(\delta^3 p+3\delta_{\text{I}}\delta^2 p+3\delta_{\text{I}}^2\delta p+\delta_{\text{I}}^3 p)}{\partial^k}=\frac{\partial^k \delta_{\text{II}}^3 p}{\partial^k},$$

u. s. f. u. s. f.

so daß also auch hier

$$\delta_{\text{II}}^n\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right)=\frac{\partial^k \delta_{\text{II}}^n p}{\partial^k}.$$

20. Sey nun

$$V=f(x, y, z, u, \ldots; p, q, r, s, \ldots),$$

wo $x, y, z, u, \ldots$ als absolut-, $p, q, r, s, \ldots$ dagegen als relativ-unabhängig betrachtet werden; so kann man sich V zuerst auf die Weise variirt denken, daß bloß die relativ-unabhängigen Größen variiren, und folglich von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen völlig abstrahirt wird. In diesem Falle erleiden also die relativ-unabhängigen Größen bloß primitive Variationen, und die Variationen von V sind offenbar ganz wie in (A.) zu entwickeln, die relativ-unabhängigen Größen als absolut-unabhängig, die absolut-unab-

hängigen dagegen als constant betrachtet. In dieser Beziehung verdient folgender Fall wegen seiner vielfachen Anwendung besonders betrachtet zu werden.

21. Sey nämlich

$$V = f(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots),$$

wo x als absolut-unabhängig, y dagegen als Function von x betrachtet wird, und y_1, y_2, y_3, ... die successiven Differentialquotienten von y in Bezug auf x bezeichnen. Wird also von der Variation von x abstrahirt; so ist (9.)

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\delta y_2 + \ldots$$

Aber allgemein

$$\delta y_k = \delta\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^k \delta y}{\partial x^k} \quad (18.).$$

Also

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots$$

Ferner ist

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta^2 y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\delta^2 y_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_3}\right)\delta^2 y_3 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_1}\delta y\,\delta y_1 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_2}\delta y\,\delta y_2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\delta y_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1\,\partial y_2}\delta y_1\,\delta y_2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\delta y_2^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aber

$$\delta^n y_k = \delta^n\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^n y}{\partial x^k} \quad (18.).$$

Also

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für die Anwendung der Variationsrechnung ist bloß die zweite Variation noch von Wichtigkeit, daher wir auch immer bei derselben stehen bleiben.

22. Sey ferner

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots.; z, z_1, z_2, \ldots.);$$

wo y, z Functionen von x sind, und die Differentialquotienten von y und z wie vorher bezeichnet werden. Ganz auf ähnliche Art wie vorher erhält man

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z+\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\delta^2 z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2\delta^2 z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z_1}\delta z\,\frac{\partial\delta z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z_2}\delta z.\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_1{}^2}\right)\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial z_1\partial z_2}.\frac{\partial\delta z}{\partial x}\,\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_2{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\right)^2+\ldots.$$

. . . . . .

wo das Gesetz sogleich in die Augen fällt, und leicht auf mehrere relativ-unabhängige veränderliche Größen ausgedehnt werden kann.

23. Variiren aber auch die absolut-unabhängigen veränderlichen Größen; so müssen diese Entwickelungen natürlich weitläufiger ausfallen. Eine vollständige Auseinandersetzung dieses Gegenstandes gestattet hier der Raum nicht, und es müssen folgende Bemerkungen genügen. Werden die Variationen von V bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen genommen; so sollen sie durch δ_ϱ bezeichnet werden. Alle Variationen dagegen, welche in Bezug auf die absolut-unabhängigen Größen genommen werden, wollen wir durch δ_α andeuten. Setzt man zunächst bloß p_i, q_i, r_i, s_i, ... für p, q, r, s, ...; so wird $V =$

$$f(x, y, z, u, \ldots; p_i, q_i, r_i, s_i, \ldots.)$$

$$= V+\delta_\varrho V.\frac{i}{1}+\delta_\varrho^2 V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\varrho^3 V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\varrho{}^k V.\frac{i^k}{1.2.3\ldots k}+\ldots.$$

Werden nun ferner x_i, y_i, z_i, u_i, ... für x, y, z, u, ... gesetzt; so gehen V, $\delta_\varrho V$, $\delta_\varrho{}^2 V$, $\delta_\varrho{}^3 V$, ... $\delta_\varrho{}^k V$, ... über in:

$$V+\delta_\alpha V.\frac{i}{1}+\delta_\alpha{}^2 V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\alpha{}^3 V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\alpha{}^n V.\frac{i^n}{1.2\ldots.n}+\ldots;$$

$$\delta_\varrho V+\delta_\alpha\delta_\varrho V.\frac{i}{1}+\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\alpha{}^3\delta_\varrho V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\alpha{}^n\delta_\varrho V.\frac{i^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

$$\delta_\varrho{}^2V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta\ {}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$
$$\delta_\varrho{}^3V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^3V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^3V.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots.;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_\varrho{}^kV + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^kV.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^kV.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots.;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und folglich, wenn man dies in obige Gleichung substituirt und nach Potenzen von i ordnet:

$$V_i =$$
$$V + \delta_\alpha V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$+ \delta_\varrho V.\frac{i}{1} + \delta_\alpha\delta_\varrho V.\frac{i^2}{1.1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V.\frac{i^3}{1.2.1} + \ldots.$$
$$+ \delta_\varrho{}^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V.\frac{i^3}{1.1.2} + \ldots.$$
$$+ \delta_\varrho{}^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$= V + \delta V.\frac{i}{1} + \delta^2V.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, wenn man den Coefficienten von $\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ entwickelt,

$$\delta^nV =$$
$$\delta^n{}_\alpha V + \frac{n}{1}\delta_\alpha{}^{n-1}\delta_\varrho V + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^{n-2}\delta_\varrho{}^2V + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^{n-2}V + \frac{n}{1}\delta_\alpha\delta_\varrho{}^{n-1}V + \delta_\varrho{}^nV.$$

Also z. B.

$$\delta V = \delta_\alpha V + \delta_\varrho V,$$
$$\delta^2V = \delta_\alpha{}^2V + 2\delta_\alpha\delta_\varrho V + \delta_\varrho{}^2V,$$
$$\delta^3V = \delta_\alpha{}^3V + 3\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V + 3\delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V + \delta_\varrho{}^3V,$$

u. s. f. u. s. f.

Werden also bei den in (21) und (22.) entwickelten ersten Variationen auch die Variationen der absolut-unab-

hängigen Größen berücksichtigt; so ist beide Mal noch $\delta_\alpha V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x$ beizufügen. Will man sich obiger Formeln zur wirklichen Entwickelung der Variationen bedienen; so hat man wohl zu merken, daß, wenn man unter dem Zeichen δ_α variirt, alle Variationen secundär sind, und man sich also zur Vermeidung jeder Irrung des Zeichens δ_1 bedienen muß, indem man sonst z. B. leicht verleitet werden könnte, statt $\delta\delta p$ (eigentlich $\delta_1 \delta p$) $\delta^2 p$ zu setzen. Alle Differentialquotienten, so wie alle primitive Variationen der relativ-unabhängigen Größen sind als neue Functionen zu behandeln, z. B. δp von p, δq von q; δr von r, u. s. f., welches wohl zu beachten ist. Die in (10.) bewiesenen Sätze finden hierbei ihre Anwendung und der Satz in (11. 18. 19.) dient, wie gewöhnlich, zu weiterer Reduction. Mehr Ausführlichkeit gestattet hier der Raum nicht.

C. Variationen unbestimmter Integralformeln, zwischen bestimmten Gränzen genommen.

24. Sey v eine Function der einen absolut-unabhängigen Größe x, und relativ-unabhängiger Größen.

$$V = \int v \partial x ,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Denkt man sich nun v auf irgend eine Art variirt; so geht v in v_i, und V in

$$V_i = \int (v + \delta v \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 v \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x$$

$$= \int v \partial x + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x + \ldots$$

über, alle Integrale zwischen denselben Gränzen genommen wie vorher. Da nun bekanntlich die Coefficienten von $\frac{i}{1}, \frac{i^2}{1.2}, \frac{i^3}{1.2.3}, \ldots$ in der Reihe für V_i die Variationen von V genannt werden; so ist

$$\delta V = \delta \int v \partial x = \int (\delta v) \partial x ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v) \partial x ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x = \int (\delta^3 v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x = \int (\delta^n v) \partial x ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, da sich die Variationen auf den zwischen diesen Gränzen genommenen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ beziehen.

Ist eben so v eine Function der beiden absolut-unabhängigen Größen x, y, und relativ-unabhängiger Größen, und

$$V = \int v \partial x \partial y ,$$

das Integral zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$; $y = a'$, $y = b'$ genommen; so ist auf ähnliche Art wie vorher:

$$V_i = \int (v + \delta v . \frac{i}{1} + \delta^2 v . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x \partial y$$
$$= \int v \partial x \partial y + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x \partial y + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x \partial y + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x \partial y + \ldots$$

Also

$$\delta V = \delta \int v \partial x \partial y = \int (\delta v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^2 v) \partial x \partial y ,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^3 v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x \partial y = \int (\delta^n v) \partial x \partial y ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

alle Integrale zwischen den gegebenen Gränzen genommen. Wie sich dies auf mehrere absolut-unabhängige Größen erweitern läßt, fällt in die Augen. Noch ist hier ausdrücklich zu bemerken, daß bei der allgemeinen Entwickelung der Integrale in der letzten Reihe, ohne Bezug auf einen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ zwischen gegebenen Gränzen die Variationen der absolut-unabhängigen Größen als constant zu betrachten sind (14. 16.). Werden aber alle Variationen auf einen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ bezogen, wie hier; so müssen die Integrale in der letzten Reihe, oder die Variationen der gegebenen Integrale zwischen gegebenen Gränzen, zwischen

denselben Gränzen genommen werden, und dann ist natürlich δx z. B., als eine willkührliche Function von x, $= \delta a$ für $x = a$, $= \delta b$ für $x = b$ zu setzen.

Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Anwendung der Variationsrechnung auf die Lehre von dem Größten und Kleinsten ist die Entwickelung der ersten Variation unbestimmter Integralformeln zwischen gegebenen Gränzen, wozu wir jetzt übergehen.

25. Seyen p, q Functionen von x; so ist nach der Reductionsformel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x .$$

Folglich, durch successive Zerlegung mittelst dieser Formel:

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x =$$

$$p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \int \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \int \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} \partial x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \cdots$$

$$\cdots \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x$$

$$= \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x + p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \cdots \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q + C.$$

26. Sey nun

$$V = \int v \partial x ,$$

$$v = f(x, y, y_1, \ldots y_\alpha, z, z_1, \ldots z_\beta, u, u_1, \ldots u_\gamma, \ldots)$$

wo x absolut-unabhängig, x, y, u, ... dagegen relativ-unabhängig sind, und

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},\ z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta},\ u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}, \ldots$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\alpha;$$
$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\beta;$$
$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_\gamma;$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

sollen der Kürze wegen durch

$$Y,\ \overset{1}{Y},\ \overset{2}{Y},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Y};$$
$$Z,\ \overset{1}{Z},\ \overset{2}{Z},\ \ldots\ \overset{\beta}{Z};$$
$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \ldots\ \overset{\gamma}{U};$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

bezeichnet werden. Man sucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

Das mit δx behaftete Glied, wenn zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen berücksichtigt werden, ist (23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\delta x = v\delta x.$$

Wird von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen abstrahirt; so ist dieses Glied $= 0$ zu setzen, wie aus dem Obigen sogleich erhellet. Nach Bestimmung dieses Gliedes haben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen, als absolut-unabhängige betrachtet, zu entwickeln (23.). Es ist aber in dieser Beziehung (9.):

$$\begin{aligned} \delta v = \ & Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder, weil überhaupt (18. 19.)

$$\delta y_\alpha = \delta\left(\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha},$$

$$\delta z_\beta = \delta\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta},$$

$$\delta u_\gamma = \delta\left(\frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}\right) = \frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma},$$

u. s. f. u. s. f.

ist,

$$\begin{aligned}\delta v = \; & Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha} \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta} \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \overset{2}{U}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Es ist aber $\delta \int v \partial x = \int (\delta v)\, \partial x$ (24.). Integrirt man also, und fügt, um auch δx zu berücksichtigen, das schon oben bestimmte Glied $v\delta x$ bey; so erhält man:

$$\begin{aligned}\delta V = \; & v\delta x + \int Y\delta y\, \partial x + \int Z\delta z\, \partial x + \int U\delta u\, \partial x \ldots \\ & + \int \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha}\partial x \\ & + \int \overset{1}{Z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Z}\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta}\partial x \\ & + \int \overset{1}{U}\frac{\partial \delta u}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{U}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma}\partial x \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Folglich nach (25.) $\delta V =$

$$\begin{aligned} & v\delta x + \int Y\delta y\, \partial x + \int Z\delta z\, \partial x + \int \delta u\, \partial x + \ldots \\ & - \int \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x}\delta y\, \partial x + \overset{1}{Y}\delta y \\ & + \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2}\delta y\, \partial x + \overset{2}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x}\delta y \\ & - \int \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3}\delta y\, \partial x + \overset{3}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2}\delta y \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \int \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}\delta y\, \partial x + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}} - \frac{\partial \overset{\alpha}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{\alpha-2}\delta y}{\partial x^{\alpha-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-1}}\delta y\end{aligned}$$

$$-\int \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial x}\delta z\,\partial x + \overset{1}{Z}\delta z$$

$$+\int \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2}\delta z\,\partial x + \overset{2}{Z}\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x}\delta z$$

$$-\int \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^3}\delta z\,\partial x + \overset{3}{Z}\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{Z}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial x^2}\delta z$$

. . . . . .

$$\pm\int \frac{\partial^\beta \overset{\beta}{Z}}{\partial x^\beta}\delta z\,\partial x + \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}} - \frac{\partial \overset{\beta}{Z}}{\partial x}\,\frac{\partial^{\beta-2}\delta z}{\partial x^{\beta-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\beta-1}\overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-1}}\delta z$$

$$-\int \frac{\partial \overset{1}{U}}{\partial x}\delta u\,\partial x + \overset{1}{U}\delta u$$

$$+\int \frac{\partial^2 \overset{2}{U}}{\partial x^2}\delta u\,\partial x + \overset{2}{U}\frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{U}}{\partial x}\delta x$$

$$-\int \frac{\partial^3 \overset{3}{U}}{\partial x^3}\delta u\,\partial x + \overset{3}{U}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{U}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{U}}{\partial x^2}\delta u$$

. . . . . .

$$\pm\int \frac{\partial^\gamma \overset{\gamma}{U}}{\partial x^\gamma}\delta u\,\partial x + \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}} - \frac{\partial \overset{\gamma}{U}}{\partial x}\,\frac{\partial^{\gamma-2}\delta u}{\partial x^{\gamma-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\gamma-1}\overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-1}}\delta u$$

. . . . . .

$$= v\delta x$$

$$+\int \delta y\left\{Y - \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}\right\}\partial x$$

$$+\int \delta z\left\{Z - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\beta \overset{\beta}{Z}}{\partial x^\beta}\right\}\partial x$$

$$+\int \delta u\left\{U - \frac{\partial \overset{1}{U}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{U}}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\gamma \overset{\gamma}{U}}{\partial x^\gamma}\right\}\partial x$$

. . . . . .

$$+\ \delta y\left\{\overset{1}{Y} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial \delta y}{\partial x}\left\{\overset{2}{Y} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\alpha-2}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\left\{\overset{3}{Y} - \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-3}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-3}}\right\}$$

. . . . . .

$$+\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\overset{\alpha}{Y}$$

$$+ \delta z \left\{ \overset{1}{Z} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^{\beta-1} \overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \delta z}{\partial x} \left\{ \overset{2}{Z} - \frac{\partial \overset{3}{Z}}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\beta-2} \overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-2}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} \left\{ \overset{3}{Z} - \ldots \mp \frac{\partial^{\beta-3} \overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-3}} \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial^{\beta-1} \delta z}{\partial x^{\beta-1}} \overset{\beta}{Z}$$

$$+ \delta u \left\{ \overset{1}{U} - \frac{\partial \overset{2}{U}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{U}}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\gamma-1} \overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left\{ \overset{2}{U} - \frac{\partial \overset{3}{U}}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\gamma-2} \overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-2}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \left\{ \overset{2}{U} - \ldots \mp \frac{\partial^{\gamma-3} \overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-3}} \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial^{\gamma-1} \delta u}{\partial x^{\gamma-1}} \overset{\gamma}{U}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist zwischen denselben Gränzen wie das gegebene Integral zu nehmen (24.).

27. Am häufigsten kommt der Fall vor, wo

$$v = f(x, y, y_1, y_2, \ldots).$$

In diesem Falle hat man also

$$\delta V = \delta \int v \partial x =$$

$$v \delta x + \left\{ \overset{1}{Y} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{4}{Y}}{\partial x^4} + \ldots\ldots \right\} \delta y$$

$$+ \left\{ \overset{2}{Y} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{4}{Y}}{\partial x^2} - \ldots\ldots \right\} \frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

$$+ \left\{ \overset{3}{Y} - \frac{\partial \overset{4}{Y}}{\partial x} + \ldots \right\} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$

$$+ \left\{ \overset{4}{Y} - \ldots \right\} \frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \int \left\{ Y - \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 \overset{4}{Y}}{\partial x^4} - \ldots\ldots \right\} \delta y \, \partial x$$

Euler bedient sich hierbei folgender Bezeichnung, welche wir wegen ihrer Einfachheit künftig öfters gebrauchen werden. Sey

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x, \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, s, \ldots);$$

so ist

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\delta V = \delta\int v\partial x =$$
$$v\delta x + \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial\delta y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3\delta y}{\partial x^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+\int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$

indem

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = Y,\ \frac{\partial y}{\partial x} = p = y_1;$$
$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \overset{1}{Y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = y_2;$$
$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \overset{2}{Y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = y^3;$$
$$R = \left(\frac{\partial v}{\partial y_3}\right) = \overset{3}{Y},\ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = s = y_4;$$

u. s. f. u. s. f.

28. Ist hier

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0,$$

so ist $\delta\int v\partial x$ ohne Integrationszeichen ausgedrückt, und es läßt sich also, da $\delta\int v\partial x = \int(\delta v)\,\partial x$ ist (24.), die Function $(\delta v)\,\partial x$ vollständig integriren, oder $(\delta v)\,\partial x$ ist ein vollständiges Differential irgend einer gewissen Function. Man setze daher $(\delta v)\,\partial x = \partial v'$, und betrachte v'

als Variation irgend einer gewissen Function v'', welches wegen der Willkührlichkeit und Allgemeinheit des Variirens offenbar verstattet ist; so ist,

$$\delta v = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \delta v''}{\partial x} = \delta\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right),$$

also $v = \frac{\partial v''}{\partial x}$, $v\partial x = \partial v''$, und demnach $v\partial x$ ein vollständiges Differential, also integrabel. Ist also v irgend eine Function von x, y und, indem man y als von x abhängig betrachtet, p der Differentialquotient von y, und es ist, wenn wir $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = M$ setzen,

$$\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = M + N\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + R\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots;$$

so ist $v\partial x$ integrabel, oder ein vollständiges Differential einer gewissen Function, wenn

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0$$

ist, weshalb diese Gleichung die Bedingungsgleichung der Integrabilität genannt wird. Dies dient zugleich zur Ergänzung von Thl. I. S. 906. Thl. III. S. 771.

29. Sey jetzt

$$V = \int\int v\partial x\partial y,$$
$$v = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \ldots\right),$$

wo x, y absolut-unabhängige Größen sind, z dagegen eine relativ-unabhängige ist.

Berücksichtigen wir zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen; so sind die δx und δy enthaltenden Glieder von δV auf ähnliche Art wie vorher

$$= \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \left(\frac{\partial \int\partial x \int v\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int\partial y \int v\partial x}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \delta x.\int v\partial y + \delta y.\int v\partial x.$$

Bezeichnen wir nun allgemein den partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$ durch $\overset{m}{\underset{n}{Z}}$; so ist, wenn wir nun auf δx und δy nicht Rücksicht nehmen, und

zugleich die Variationen der Differentialquotienten wie gewöhnlich umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta v = & \overset{0}{\underset{0}{Z}}\delta z \\ & + \overset{1}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{0}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial y} \\ & + \overset{2}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{1}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} \\ & + \overset{3}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \overset{2}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \overset{1}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \overset{0}{\underset{3}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit $\partial x\,\partial y$ multiplicirt, integrirt, und die in δx und δy multiplicirten Glieder wieder beigefügt; so ist (24.)

$$\delta V = \delta\int\int v\partial x\,\partial y =$$

$$\begin{aligned}& \delta x\,.\int v\partial y + \delta y\,.\int v\partial x \\ & + \int\int\partial x\,\partial y\Big\{\overset{0}{\underset{0}{Z}}\delta z + \overset{1}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{3}{\underset{0}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \ldots \\ & \qquad + \overset{0}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \overset{1}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{2}{\underset{1}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} + \overset{1}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad + \overset{0}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\end{aligned}$$

Die doppelten Integrale können nun auch hier nach (25.) entwickelt werden, welches wir indeß blos an einem Beispiele zeigen wollen, woraus jedoch das allgemeine Verfahren leicht erhellen wird. Es ist also z. B.

$$\int\int\overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial x\,\partial y = \int\partial x\int\overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\,\partial y^2}\partial y$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial y + \overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\Big\}\partial x$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^4\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2\partial y^2}\delta z\,\partial x + \frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y^2}\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^3\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x\,\partial y^2}\delta z\Big\}\partial y$$

$$+ \int\frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2}\frac{\partial\delta z}{\partial y}\partial x + \overset{2}{\underset{2}{Z}}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x}\frac{\partial\delta z}{\partial y}$$

$$- \int\frac{\partial^3\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x^2\,\partial y}\delta z\,\partial x - \frac{\partial\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial y}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2\overset{2}{\underset{2}{Z}}}{\partial x\partial y}\delta z$$

$$= \iint \frac{\partial^4 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y^2} \delta z \, \partial x \, \partial y$$

$$- \int \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y^2} \delta z \, \partial y - \int \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y} \delta z \, \partial x$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial y^2} \frac{\partial \delta z}{\partial x} \partial y + \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2} \frac{\partial \delta z}{\partial y} \partial x$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y} \delta z - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial y} \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x} \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \overset{2}{Z} \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y}.$$

Entwickelt man auf diese Weise alle doppelte Integrale in obiger Reihe; so erhält man nach gehöriger Substitution:

$$\delta V = \delta \iint v \partial x \partial y =$$

$$\delta x : \int v \partial y + \delta y . \int v \partial x$$

$$+ \iint \partial x \partial y \, \delta z \left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{Z}_0 - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial x}_0 + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2}_0 - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^3}_0 + \ldots \\ \quad - \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial y}_1 + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial x \partial y}_1 - \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y}_1 + \ldots \\ \quad\quad + \frac{\partial^2 \overset{0}{Z}}{\partial y^2}_2 - \frac{\partial^3 \overset{1}{Z}}{\partial x \partial y^2}_2 + \ldots \\ \quad\quad\quad - \frac{\partial^3 \overset{0}{Z}}{\partial y^3}_3 + \ldots \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$+ \int \partial y \, \delta z \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{Z}_0 - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x}_0 + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial x^2}_0 - \frac{\partial^3 \overset{4}{Z}}{\partial x^3}_0 + \ldots \\ \quad - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial y}_1 + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y}_1 - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^2 \partial y}_1 + \ldots \\ \quad\quad + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial y^2}_2 - \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y^2}_2 + \ldots \\ \quad\quad\quad - \frac{\partial^3 \overset{1}{Z}}{\partial y^3}_3 + \ldots \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$+ \int \partial x\, \delta z \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} Z \right. - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial \overset{1}{x}} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial \overset{1}{x}^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial \overset{1}{x}^3} + \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial \overset{2}{y}} + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial \overset{2}{x} \partial \overset{2}{y}} - \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial \overset{2}{x}^2 \partial \overset{2}{y}} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{Z}}{\partial \overset{3}{y}^2} - \frac{\partial^3 \overset{1}{Z}}{\partial \overset{3}{x} \partial \overset{3}{y}^2} + \ldots$$

$$- \frac{\partial^3 \overset{0}{Z}}{\partial \overset{4}{y}^3} + \ldots$$

$$+ \int \partial y \frac{\partial \delta z}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} Z \right. - \frac{\partial \overset{3}{Z}}{\partial \overset{0}{x}} + \frac{\partial^2 \overset{4}{Z}}{\partial \overset{0}{x}^2} - \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial \overset{1}{y}} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial \overset{1}{x} \partial \overset{1}{y}} - \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial \overset{2}{y}^2} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int \partial x \frac{\partial \delta z}{\partial y} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} Z \right. - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial \overset{2}{x}} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial \overset{2}{x}^2} - \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial \overset{3}{y}} + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial \overset{3}{y} \partial \overset{3}{x}} - \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{Z}}{\partial \overset{4}{y}^2} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int \partial y \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} Z \right. - \frac{\partial \overset{4}{Z}}{\partial \overset{0}{x}} + \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{3}{Z}}{\partial \overset{1}{y}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int \partial x \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Z \end{matrix} \right. - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial \overset{3}{x}} + \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial \overset{4}{y}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

2c. 2c.

$$+ \delta z \left\{ \overset{1}{\underset{1}{Z}} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial \overset{1}{x}} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial \overset{1}{x}{}^2} - \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial \overset{2}{y}} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial \overset{1}{x} \partial \overset{2}{y}} - \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial \overset{3}{y}{}^2} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial \delta z}{\partial y} \left\{ \overset{1}{\underset{2}{Z}} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial \overset{2}{x}} + \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial \overset{3}{y}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial \delta z}{\partial x} \left\{ \overset{2}{\underset{1}{Z}} - \frac{\partial \overset{3}{Z}}{\partial \overset{1}{x}} + \ldots \right.$$

$$- \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial \overset{2}{y}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} \left\{ \overset{1}{\underset{3}{Z}} - \ldots \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y} \left\{ \overset{2}{\underset{2}{Z}} - \ldots \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} \left\{ \overset{3}{\underset{1}{Z}} - \ldots \right\}$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Dieser Ausdruck besteht aus drei verschiedenartigen Theilen, von denen der eine mit doppelten Integralzeichen, der andere mit dem einfachen behaftet, der letzte aber von dem Integralzeichen befreit ist. Weitere Belehrung suche man in besondern, unten anzuführenden, Werken über die Variationsrechnung.

30. Sey jetzt, um noch ein Paar zusammengesetztere Fälle zu betrachten,

$$v' = f'(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\mu),$$

$$V' = \int v' \partial x;$$

$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$
$$V = \int v \partial x;$$

man soll δV finden. Das δx enthaltende Glied ist wie immer =

$$\left(\frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\right) \delta x = v \delta x,$$

so daß nun die Variation bloß in Bezug auf y, y_1, y_2, ..., wie absolut-unabhängige Größen betrachtet, zu entwickeln ist. Da aber v auch von V' abhängt; so ist zugleich nach der gewöhnlichen Transformation der Variationen der Differentialquotienten:

$$\delta v =$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \delta V' + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial v \delta y}{\partial x^\nu}.$$

Aber $\delta V' = \delta \int v' \partial x = \int \delta v' \partial x$, $\delta V = \delta \int v \partial x = \int \delta v \partial x$. Folglich, wenn man zugleich δx berücksichtigt:

$$\delta V =$$
$$v \delta x + \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \int \delta v' \partial x \right\} \partial x$$
$$+ \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$
$$= v \delta x + \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x - \int \left\{ \delta v' \partial x \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \right\}$$
$$+ \int \left\{ Y \delta y + \overset{1}{Y} \frac{\partial \delta y}{\partial} + \overset{2}{Y} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\nu}{Y} \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$

alle Integrale zwischen denselben gegebenen Gränzen genommen. Setzen wir nun den zwischen denselben Gränzen genommenen Werth von $\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = \mathfrak{J}$; so ist klar, daß, da $\int \delta v' \partial x$ zwischen denselben Gränzen genommen werden muß,

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x = \int \mathfrak{J} \delta v' \partial x$$

ist, letzteres Integral zwischen denselben Gränzen genommen. Folglich ist, für

$$\mathfrak{J} - \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = I,$$

$$\delta V =$$

$$v\delta x + \int I\,\delta v'\,\partial x$$

$$+ \int \left\{ Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\nu}{Y}\frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x \,.$$

Aber

$$\delta v' =$$

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v'}{\partial y_\mu}\right)\frac{\partial^\mu \delta y}{\partial x}$$

$$= Y'\delta y + \overset{1}{Y'}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y'}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\mu}{Y'}\frac{\partial^\mu \delta y}{\partial x} \,.$$

Also

$$\delta V =$$

$$v\delta x + \int \left\{ Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\nu}{Y}\frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$

$$+ \int I \left\{ Y'\delta y + \overset{1}{Y'}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y'}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\mu}{Y'}\frac{\partial^\mu \delta y}{\partial x^\mu} \right\} \partial x$$

$$= v\delta x$$

$$+ \int Y\delta y\,\partial x$$

$$- \int \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x}\delta y\,\partial x + \overset{1}{Y}\delta y$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + \overset{2}{Y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x}\delta y$$

$$- \int \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + \overset{3}{Y}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2}\delta y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \int \frac{\partial^\nu \overset{\nu}{Y}}{\partial x^\nu}\delta y\,\partial x + \overset{\nu}{Y}\frac{\partial^{\nu-1}\delta y}{\partial x^{\nu-1}} - \frac{\partial \overset{\nu}{Y}}{\partial x}\frac{\partial^{\nu-2}\delta y}{\partial x^{\nu-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-1}\overset{\nu}{Y}}{\partial x^{\nu-1}}\delta y$$

$$+ \int IY'\delta y\,\partial x$$

$$- \int \frac{\partial . I\overset{1}{Y'}}{\partial x}\delta y\,\partial x + I\overset{1}{Y'}\delta y$$

$$+ \int \frac{\partial^2 . I\overset{2}{Y'}}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + I\overset{2}{Y'}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial . I\overset{2}{Y'}}{\partial x}\delta y$$

$$- \int \frac{\partial^3 . I\overset{3}{Y'}}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + I\overset{3}{Y'}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial . I\overset{3}{Y'}}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 . I\overset{3}{Y'}}{\partial x^2}\delta y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \int \frac{\partial^\mu . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x^\mu}\delta y\,\partial x + I\overset{\mu}{Y'}\frac{\partial^{\mu-1}\delta y}{\partial x^{\mu-1}} - \frac{\partial . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x}\frac{\partial^{\mu-2}\delta y}{\partial x^{\mu-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\mu-1} . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x^{\mu-1}}\delta y$$

$$= v\delta x$$

$$+ \int \delta y \left\{ Y - \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\nu \overset{\nu}{Y}}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$

$$+ \delta y \left\{ \overset{1}{Y} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-1} \overset{\nu}{Y}}{\partial x^{\nu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \delta y}{\partial x} \left\{ \overset{2}{Y} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\nu-2} \overset{\nu}{Y}}{\partial x^{\nu-2}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} \left\{ \overset{3}{Y} - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-3} \overset{\nu}{Y}}{\partial x^{\nu-3}} \right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{\partial^{\nu-1} \delta y}{\partial x^{\nu-1}} \overset{\nu}{Y}$$

$$+ \int \delta y \left\{ IY' - \frac{\partial . I\overset{1}{Y'}}{\partial x} + \frac{\partial^2 . I\overset{2}{Y'}}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^\mu . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x^\mu} \right\} \partial x$$

$$+ \delta y \left\{ I\overset{1}{Y'} - \frac{\partial . I\overset{2}{Y'}}{\partial x} + \ldots \mp \frac{\partial^{\mu-1} . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x^{\mu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \delta y}{\partial x} \left\{ I\overset{2}{Y'} - \ldots \pm \frac{\partial^{\mu-2} . I\overset{\mu}{Y'}}{\partial x^{\mu-2}} \right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{\partial^{\mu-1} \delta y}{\partial x^{\mu-1}} I\overset{\mu}{Y'} .$$

31. Wäre

$$v'' = f''(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\lambda),$$
$$V'' = \int v'' \partial x ;$$
$$v' = f'(V'', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\mu),$$
$$V' = \int v' \partial x ;$$
$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$
$$V = \int v \partial x ;$$

und δV zu entwickeln; so würde nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie vorher zu der vorigen Entwickelung noch ein dem zweiten Haupttheile derselben ganz ähnlicher Theil hinzutreten, wenn man nur überall λ statt μ setzt, I' statt I, und Y'' statt Y' schreibt, wo

$$\mathfrak{I}' = \int I \left(\frac{\partial v'}{\partial V''} \right) \partial x$$

zwischen den gegebenen Gränzen, und

$$\mathrm{I}' = \mathfrak{J}' - \int \mathrm{I}\left(\frac{\partial v'}{\partial v''}\right)\partial x$$

gesetzt ist, woraus denn auch leicht das allgemeine Gesetz erhellen wird.

II. Anwendung der Variationsrechnung auf die Lehre von dem Größten und Kleinsten.

32. Die Lehre von dem Größten und Kleinsten enthält mehrere Theile, welche man wohl von einander trennen muß.

Der erste und leichteste beschäftigt sich mit der Frage, in einer Gleichung zwischen x und y die Werthe von x zu finden, für welche die zugehörigen Werthe von y Größte oder Kleinste werden, d. h. größer oder kleiner sind als alle unmittelbar vorhergehenden oder nachfolgenden Werthe von y. Die Beantwortung dieser Frage gehört ganz in das Gebiet der Differentialrechnung, und ist in diesem Wörterbuche in dem Art. Größtes und Kleinstes gegeben.

Zweitens aber kann man, wenn irgend ein unbestimmter Integralausdruck gegeben ist, unter allen möglichen Relationen, welche zwischen den veränderlichen Größen desselben statt finden können, diejenigen aufzufinden verlangen, für welche der gegebene Integralausdruck, zwischen denselben Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Sollte z. B. die Curve gefunden werden, welche, zwei gegebene Punkte mit einander verbindend, bei der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt; so würde (Complanation. Thl. I. S. 514.) diese Frage darauf zurück kommen, die Relation oder die Gleichung zwischen x und y zu finden, für welche der unbestimmte Integralausdruck

$$2\pi \int y\,\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

zwischen den durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten Gränzen genommen, ein Kleinstes wird. Solche

Größte oder Kleinste nennt man nach Eulers Vorgange absolute Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum absoluta docet, inter omnes curvas, ad eandem abscissam relatas, determinare eam, in qua proposita quaedam variabilis maximum minimumve obtineat valorem (Euleri Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Laus. et Genèv. 1744. p. 4.), welches offenbar mit dem obigen rein analytischen Begriff übereinkommt.

Drittens kann man endlich auch unter allen Relationen der veränderlichen Größen, welche für einen oder mehrere gegebene unbestimmte Integralausdrücke, zwischen denselben Gränzen genommen, dieselben bestimmten Werthe geben, diejenigen aufzufinden verlangen, für welche ein anderer, ebenfalls gegebener Integralausdruck, zwischen denselben Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Sollte z. B. unter allen den Curven, welche zwischen zwei gegebenen Punkten einerley Länge haben, diejenige gefunden werden, welche bei der Umdrehung um die Abcissenaxe die kleinste Oberfläche erzeugt; so würde diese Aufgabe offenbar darauf zurückkommen, die Relation oder Gleichung zwischen x und y zu finden, für welche zwischen den gegebenen, durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten, Gränzen

$$\int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \text{Const},$$

und $2\pi \int y \, \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ ein Minimum wird. Solche Größte und Kleinste heißen relative Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum relativa docet, non inter omnes omnino curvas eidem abscissae respondentes, sed inter eas tantum, quae praesciptam quandam proprietatem communem habeant, eam determinare, quae maximi minimive proprietate gaudeat (l. c. p. 5.)

Zu dieser letzten Klasse von Aufgaben gehört auch das so berühmte isoperimetrische Problem, welches un-

ter allen Curven von einerlei Länge zwischen gegebenen Gränzen diejenige zu finden lehrt, durch welche eine gegebene Bedingung des Größten oder Kleinsten erfüllt wird, worüber unter den historischen Notizen am Ende ein Mehreres.

A. Absolute Maxima und Minima.

33. Sey nun, wenn y als Function von x betrachtet wird,

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots\right),$$

oder auch, wenn auch z als Function von x betrachtet wird,

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots; z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right),$$

und $V = \int v \partial x$, dieses Integral zwischen bestimmten Gränzen genommen. Man soll die Relation zwischen x und y so bestimmen, daß der zwischen den gegebenen Gränzen genommene Werth dieses Integrals ein Maximum oder Minimum werde, d. h. so, daß, wenn man sich die Relation zwischen x und y allmählig, oder stetig, geändert denkt, woraus auch eine stetige Aenderung besagten Werthes unsers Integrals hervorgehen wird, derselbe größer oder kleiner werde als alle unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Nachbarwerthe, so daß aber die Aenderung des Werthes immer als durch die Aenderung der zwischen x und y statt findenden Relation hervorgebracht gedacht wird. Man denke sich nun die gesuchte Relation zwischen x und y gefunden, und dann auf irgend eine Art geändert; so geht V über in

$$V_i = V + \delta V . \frac{i}{1} + \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots;$$

woraus

$$V_i - V = \delta V . \frac{i}{1} + \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Soll nun der zwischen den gegebenen Gränzen genommene Werth von $V = \int v \partial x$ ein Maximum oder Minimum werden; so muß zwischen diesen Gränzen für jede noch so

kleine Aenderung der Relation zwischen x und y, d. i. für jedes noch so kleine i, für das Maximum $V_i - V < o$, für das Minimum $V_i - V > o$ seyn. Da man sich aber i so klein genommen denken kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem ersten Gliede $\delta V . \frac{i}{1}$ (Vergl. Taylors Lehrsatz. 29. — 32.), welches, da i von einer ungeraden Potenz ist, sowohl positiv als negativ seyn kann, abhängt; so kann offenbar keine der beiden obigen Bedingungen für alle noch so kleine i statt finden, wenn nicht dieses Glied, unabhängig von i, zwischen den gegebenen Gränzen $= o$ ist, woraus sich als gemeinschaftliche Bedingung das Maximum und Minimum

$$\delta V = o$$

ergiebt, die Variation zwischen den gegebenen Gränzen genommen.

Also ist

$$V_i - V = \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \delta^4 V . \frac{i^4}{1 \ldots 4} + \ldots$$

wo man aber i wieder so klein nehmen kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem ersten Gliede $\delta^2 V . \frac{i^2}{1.2}$, d. i., da i^2 immer positiv ist, bloß von $\delta^2 V$ abhängt, woraus als Bedingung des Maximum

$$\delta^2 V < o ,$$

als Bedingung des Minimum

$$\delta^2 V > o ,$$

immer zwischen den gegebenen Gränzen genommen, folgt.

Setzt man $\int v \partial x$ für V; so erhält man als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum:

$$\delta \int v \partial x = o , \quad \int (\delta v) \partial x = o ;$$

als Bedingung des Maximum:

$$\delta^2 \int v \partial x < o , \quad \int (\delta^2 v) \partial x < o ,$$

und als Bedingung des Minimum:

$$\delta^2 \int v \partial x > o , \quad \int (\delta^2 v) x > o ,$$

immer zwischen den gegebenen Gränzen genommen.

34. Wenn, wie wir hier voraussetzen, die Gränzen, zwischen denen das Integral in Bezug auf x zu nehmen ist,

völlig bestimmt und gegeben sind; so wird man offenbar von den Variationen von x völlig zu abstrahiren, und bloß y sich als variirt zu denken haben, obgleich auch, wie wir weiter unten sehen werden, unter gewissen Bedingungen auch die Variationen von x zu berücksichtigen seyn können. Um dieser Bemerkung mehr Anschaulichkeit zu geben, setze man z. B. es sey die Curve zu finden, welche zwischen zwey gegebenen Punkten P, P′ (Fig. 95.) bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt, und nehme an, PP′ sey die gesuchte Curve; so kann offenbar zwischen denselben, durch die beiden gegebenen Gränzen von x völlig bestimmten, Ordinaten PQ, P′Q′ jede andere willkührliche Curve pp′ bloß durch Variation von y hervorbringen, indem die Abscisse x ganz ungeändert bleibt. Abstrahiren wir also, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, von den Variationen von x zunächst gänzlich, und setzen daher $\delta x = 0$.

35. Mit Anwendung der von Euler eingeführten Bezeichnung (27.), nach welcher

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x, \ldots;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = N,\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = P,\ \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) = Q,\ \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = R, \ldots;$$

$$v = f(x, y, p, q, r, \ldots.$$

gesetzt wird, ist (27.):

$$\begin{aligned}\delta V = &\left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\\ &+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\\ &+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\\ &+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x\,.\end{aligned}$$

Diese Variation muß, als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum, zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$, für jedes willkührliche δy, d. h. unabhängig von jeder besondern Form dieser Varia-

tion, als Function von y oder x gedacht, $= o$ seyn. Bezeichnen wir also, indem die Anzahl der Glieder der Reihe unter dem Integralzeichen $= \alpha + 1$, die Anzahl der Glieder des von dem Integralzeichen befrei'ten Theils also $= \alpha$ gesetzt wird, die einzelnen Glieder dieses Theils durch

$$\overset{1}{K}\delta y,\ \overset{2}{K}\frac{\partial\delta y}{\partial x},\ \overset{3}{K}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2},\ \ldots,\ \overset{\alpha}{K}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}},$$

und die Werthe derselben für $x = a$ und $x = b$ durch Beifügung von a und b unten zur rechten Hand; so ist für das Maximum und Minimum:

$$\begin{aligned} o = \ & \overset{1}{K}_b(\delta y)_b - \overset{1}{K}_a(\delta y)_a \\ & + \overset{2}{K}_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b - \overset{2}{K}_a\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right) \\ & + \overset{3}{K}_b\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b - \overset{3}{K}_a\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{\alpha}{K}_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b - \overset{\alpha}{K}_a\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a \\ & + \int_a^b\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x \end{aligned}$$

für jedes beliebige δy. Man denke sich nun für δy eine beliebige Function mit $2\alpha + 1$ willkührlichen Constanten gesetzt; so wird man 2α dieser Constanten sich immer so bestimmt denken können, daß

$$o = \int_a^b\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{{}_a\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x,$$

$$o = (\delta y)_a = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_a = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a,$$

$$o = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b,$$

und die letzte noch übrige willkührliche Constante wird man dazu benutzen können, $(\delta y)_b$ so zu bestimmen, daß es nicht $= o$ ist. Unsere obige für jedes δy statt findende Gleichung reducirt sich hiernach, da $(\delta y)_b$ nicht $= o$ ist auf,

$$\overset{1}{K}_b(\delta y)_b = o,\quad \overset{1}{K}_b = o.$$

Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß

$$o = \overset{1}{K} = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots \overset{\alpha}{K}_a ;$$
$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots \overset{\alpha}{K}_b ;$$

woraus nun ferner unmittelbar folgt, daß für jedes δy

$$\int_a^b \left\{ N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots \right\} \delta y \, \partial x = o$$

seyn muß, woraus ferner sogleich folgt, daß identisch

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots = o$$

seyn muß. Denn, wäre dies nicht der Fall; so setze man, vorhergehende Reihe durch φx bezeichnend, einmal $\delta y = \frac{fx}{\varphi x}$, wo fx eine ganz willkührliche Function von x bezeichnet. Dann wäre

$$\int_a^b \varphi x \frac{fx}{\varphi x} \partial x = \int_a^b fx . \partial x = o ,$$

d. h. für jede willkührliche Function fx das Integral $\int fx \partial x$, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen, $= o$, welches offenbar ungereimt ist. Also muß φx identisch $= o$ seyn, so daß also

$$o = \overset{1}{K}_a = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots = \overset{\alpha}{K}_a ;$$
$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots = \overset{\alpha}{K}_b ;$$
$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = o$$

ist. Die ersten 2α Gleichungen heißen die Gränzgleichungen, die letzte heißt die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, die also mit der Bedingungsgleichung der Integrabilität (28.) einerlei ist

36. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum läßt sich für

$$v = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\alpha)$$

mittelst der in (26.) gebrauchten Bezeichnung auch so darstellen:

$$Y - \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha} = o .$$

Dies ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung vom

Grade 2α. Denn $\overset{\alpha}{Y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y_\alpha}\right)$ kann offenbar den Differentialquotienten $y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}$, folglich $\frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\alpha} y}{\partial x^{2\alpha}}$ enthalten. Durch die Integration dieser Gleichung, welche auf die gesuchte Relation zwischen x und y führt, werden also 2α willkührliche Constanten in die Rechnung eingeführt, zu deren Bestimmung die 2α Gränzgleichungen dienen, nachdem nämlich die gesuchte Relation schon im Allgemeinen gefunden. In einigen besondern Fällen, wovon wir jetzt einige der wichtigsten durchgehen wollen, läßt sich indeß der Grad der allgemeinen Bedingungsgleichung des Maximum und Minimum erniedrigen.

37. α. Enthielte v die Größe y nicht; so wäre $N = o$ zu setzen; also die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots = o,$$

$$\partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots = o,$$

$$\partial P - \partial \frac{\partial Q}{\partial x} + \partial \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \partial \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = o,$$

woraus durch Integration:

$$P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = C,$$

offenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$.

β. Wäre in v weder y, noch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ enthalten; so wäre auch $P = o$ zu setzen, und folglich

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \ldots = C,$$

$$-\partial Q + \frac{\partial^2 R}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^3} - \ldots = C\partial x,$$

$$-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

γ. Enthielte v ferner auch $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht; so wäre auch $Q = o$,

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

$$\partial R - \frac{\partial^2 S}{\partial x} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx\partial x + C'\partial x,$$

$$R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx^2 + C'x + C'',$$

wenn nur C statt $\frac{1}{2}$ C gesetzt wird. Diese Differentialgleichung ist nur vom Grade $2\alpha - 3$. Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht.

δ. Wäre ferner x nicht unmittelbar in v enthalten; so wäre (27.)

$$\partial v = N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots.$$

Aber, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum:

$$N = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots,$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$\begin{aligned}
\partial v &= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial x}\partial y - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial y + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial y - \ldots \\
&= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots \\
&\quad + p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x - p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x + p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x - \ldots \\
v &= \int P\partial p + \int Q\partial q + \int R\partial r + \int S\partial s + \ldots \\
&\quad + \int p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x - \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x + \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x - \ldots.
\end{aligned}$$

Aber (Thl. II. S. 783.):

$$\int P\partial p = \int P\frac{\partial p}{\partial x}\partial x = Pp - \int p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x;$$

$$\begin{aligned}
\int Q\partial q &= \int Q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\partial x \\
&= Q\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}p + \int\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}p\partial x \\
&= Qq - p\frac{\partial Q}{\partial x} + \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int R\partial r &= \int R\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\partial x \\
&= R\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}p - \int\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}p\,\partial x \\
&= Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x;
\end{aligned}$$

$$\int S\partial s = \int S \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \partial x$$
$$= S\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} p + \int \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} p\, \partial x$$
$$= Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} \partial x\,;$$

u. s. f. u. s. f.

Substituirt man dies in obigen Ausdruck für v; so erhellet, daß die mit dem Integralzeichen behafteten Theile sich aufheben, und daß

$$\begin{aligned} v = {} & p\left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\} \\ & + q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\} \\ & + r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\} \\ & + s\left\{S - \ldots\right\} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + C \end{aligned}$$

offenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$ (S. das Vorhergehende).

ε. Wäre weder x noch y in v enthalten; so wäre

$$\partial v = P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots,$$
$$o = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots$$
$$= \partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$C = P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \ldots + C,$$

und folglich, dies in obigen Ausdruck für ∂v gesetzt,

$$\begin{aligned} \partial v = {} & Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots \\ & + \frac{\partial Q}{\partial x}\partial p - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial p + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial p - \ldots + C\partial p \\ = {} & Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots \\ & + q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots + C\partial p, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v &= \int Q\partial q + \int R\partial r + \int S\partial s + \int T\partial t + \ldots \\
&\quad + \int q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - \int q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + \int q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots + Cp + C' \\
&= Qq - p\frac{\partial Q}{\partial x} + \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x \\
&\quad + Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x \\
&\quad + Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \int q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - \int q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + \int q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots \\
&\quad + Cp + C' \\
&= q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \ldots\right\} \\
&\quad + r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots\right\} \\
&\quad + s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \ldots\right\} \\
&\quad + t\left\{T - \ldots\right\} \\
&\quad \ldots\ldots \\
&\quad - p\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \ldots\right\} \\
&\quad + \int\left\{p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}\partial x \\
&\quad - \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right\}\partial x \\
&\quad + \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\right\}\partial x \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots \\
&\quad + Cp + C'.
\end{aligned}
$$

Aber

$$
p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x} = p.\frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}.\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(p\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x},
$$

und eben so für die übrigen mit dem Integralzeichen behafteten Theile, so daß also die Summe dieser Integrale

$$
= p\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \ldots\right\}
$$

welches sich gegen die letzte vom Integralzeichen freie Reihe aufhebt. Also

$$
\begin{aligned}
v = \; & q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \cdots\right\} \\
& + r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \cdots\right\} \\
& + s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right\} \\
& + t\left\{T - \cdots\right\} + \cdots + Cp + C'
\end{aligned}
$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

ζ. Wäre auch p nicht in v enthalten, also $P = o$; so wäre (β.):

$$
\begin{aligned}
-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \cdots &= Cx + C', \\
Q = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \cdots &- Cx - C'.
\end{aligned}
$$

Aber

$$
\begin{aligned}
\partial v &= Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \cdots \\
&= R\partial r + S\partial s + T\partial t + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial t - \cdots - Cx\partial q - C'\partial q.
\end{aligned}
$$

Aber $\int x\partial q = xq - \int q\partial x = xq - \int \partial p = xq - p$.
Folglich

$$
\begin{aligned}
v &= \int R\partial r + \int S\partial s + \int T\partial t + \cdots \\
&\quad + \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \cdots \\
&\quad + pC - q(Cx + C') + C'' \\
&= Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\,\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x \\
&\quad + Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x \\
&\quad + Tt - s\frac{\partial T}{\partial x} + r\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + p\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \int p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\partial x \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \cdots \\
&\quad + pC - q(Cx + C') + C'' \\
&= r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \cdots\right\} \\
&\quad + s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right\} \\
&\quad + t\left\{T - \cdots\right\} \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \ldots\right\} \\
&- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots\right\} \\
&- \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - r\frac{\partial R}{\partial x}\right\}\partial x \\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - r\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}\partial x \\
&- \int\left\{p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} - r\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right\}\partial x \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ pC - q(Cx + C') + C'' \\
= \quad & r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots\right\} \\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \ldots\right\} \\
&+ t\left\{T - \ldots\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \ldots\right\} \\
&- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots\right\} \\
&- p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x} - \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial R}{\partial x}\partial x + \int r\frac{\partial R}{\partial x}\partial x \\
&+ p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial x - \int r\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial x \\
&- p\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial x + \int r\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial x \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ pC - q(Cx + C') + C''.
\end{aligned}
$$

Da nun aber $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, $r = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ ist; so ist

$$
\begin{aligned}
v = \; & r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots\right\} \\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \ldots\right\} \\
&+ t\left\{T - \ldots\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&+ pC - q(Cx + C') + C'',
\end{aligned}
$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 3$. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen.

38. Seyen nun y, z Functionen von x. Die vorige Bezeichnung beibehaltend, setze man

$$\partial z = p'\partial x,\ \partial p' = q'\partial x,\ \partial q' = r'\partial x,\ \partial r' = s'\partial x, \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, \ldots z, p', q', r', \ldots.),$$
$$V = \int v\partial x,$$

und es sey dieses Integral, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Sey nun nach einer ähnlichen Bezeichnung wie vorher

$$\begin{aligned}
\partial v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x \\
&+ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\partial r + \ldots \\
&+ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right)\partial p' + \left(\frac{\partial v}{\partial q'}\right)\partial q' + \left(\frac{\partial v}{\partial r'}\right)\partial r' + \ldots \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x \\
&+ N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots \\
&+ N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' + \ldots.
\end{aligned}$$

Wird also zur Bestimmung des Maximum oder Minimum $\delta V = 0$ gesetzt; so erhält man (26.):

$$\begin{aligned}
0 = &\left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y \\
&+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x} \\
&+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} \\
&+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ \left\{P' - \frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial^2 R'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta z \\
&+ \left\{Q' - \frac{\partial R'}{\partial x} + \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} + \ldots\right\}\frac{\partial \delta z}{\partial x} \\
&+ \left\{R' - \frac{\partial S'}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} \\
&+ \left\{S' - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x \\
&+ \int\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta z\,\partial x
\end{aligned}$$

$$= \overset{1}{K}\delta y + \overset{2}{K}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \overset{3}{K}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots \overset{\alpha}{K}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

$$+ \overset{1}{K'}\delta z + \overset{2}{K'}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{3}{K'}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \ldots \overset{\beta}{K'}\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}$$

$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$

$$+ \int\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta z\,\partial x$$

zwischen den gegebenen Gränzen genommen, für jedes δy und δz. Also

$$\begin{aligned}
o = \; & \overset{1}{K}_b(\delta y)_b - \overset{1}{K}_a(\delta y)_a \\
& + \overset{2}{K}_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b - \overset{2}{K}_a\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_a \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \overset{\alpha}{K}_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b - \overset{\alpha}{K}_a\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a \\
& + \overset{1}{K'}_b(\delta z)_b - \overset{1}{K'}_a(\delta z)_a \\
& + \overset{2}{K'}_b\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)_b - \overset{2}{K'}_a\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)_a \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \overset{\beta}{K'}_b\left(\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\right)_b - \overset{\beta}{K'}_a\left(\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\right)_a \\
& + \int_a^b\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x \\
& + \int_a^b\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta z\,\partial x
\end{aligned}$$

Hier sind nun zwey Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich y und z von einander ganz unabhängig, oder selbst durch eine Gleichung mit einander verbunden sind. Im ersten Falle denke man sich für δz irgend eine Function mit $2\beta + 1$ willkührlichen Constanten gesetzt, und diese Constanten so bestimmt, daß alle mit δz und dessen Differentialquotienten behafteten Glieder (deren Anzahl $= 2\beta + 1$) verschwinden; so reducirt sich die obige Gleichung auf die Gleichung in (35.), und man kann nun ferner hier, wie dort, für δy jede willkührliche Function setzen, da y von z ganz unabhängig ist. Man kann aber dies auch umkehren, und sich zuerst für δy eine willkührliche Function mit

$2\alpha + 1$ unbestimmten Constanten gesetzt, und diese Constanten sich so bestimmt denken, daß alle mit δy und dessen Differentialquotienten behafteten Glieder (deren Anzahl $= 2\alpha + 1$) verschwinden, wodurch sich die Gleichung auf eine ganz ähnliche Gleichung, in Bezug auf z, wie in (35.) reducirt, in welcher man, da y und z von einander ganz unabhängig sind, nun ferner für δz jede beliebige Function setzen kann. Folglich erhält man in diesem Falle nach (35.):

$$o = \overset{1}{K}_a = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots = \overset{\alpha}{K}_a ,$$

$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots = \overset{\alpha}{K}_b ;$$

$$o = \overset{1}{K'}_a = \overset{2}{K'}_a = \overset{3}{K'}_a = \ldots = \overset{\beta}{K'}_a ,$$

$$o = \overset{1}{K'}_b = \overset{2}{K'}_b = \overset{3}{K'}_b = \ldots = \overset{\beta}{K'}_b ;$$

$$o = N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots ,$$

$$o = N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots .$$

Die beiden letzten Gleichungen heißen auch hier die allgemeinen Bedingungen des Maximum und Minimum, die erstern, im Allgemeinen an der Zahl $= 2(\alpha + \beta)$, die Gränzgleichungen, welche, wie oben, zur Bestimmung der bey der Integration einzuführenden willkührlichen Constanten dienen.

Sind aber y, z selbst von einander abhängig, und folglich zwischen diesen Größen eine Gleichung

$$u = \psi(x, y, z) = o$$

gegeben, wie z. B., wenn eine, einer gewissen Bedingung des Maximum oder Minimum entsprechende, Curve gesucht werden soll, welche auf einer gegebenen, durch obige Gleichung characterisirten Fläche liegt; so müssen offenbar y, z, unter welchen Zuständen man sie sich auch denken mag, doch immer der obigen Gleichung entsprechen, so daß also selbige auch noch gelten muß, wenn man statt y, z die variirten y_i, z_i setzt, wodurch man erhält:

$$u_i = \psi(x, y_i, z_i) = o ,$$

also $u_i - u = o$, $\delta u = o$, oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = o\,.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man δz, und folglich auch alle Differentialquotienten von δz, durch δy und dessen Differentialquotienten ausdrücken, wodurch dieser Fall also, wenn man sich die erhaltenen Ausdrücke in die obige allgemeine Gleichung für die entsprechenden Größen gesetzt denkt, ganz auf (35.) reducirt wird, und man folglich ganz wie dort für jedes δy, und das davon abhängende δz, erhält:

$$o = \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$
$$+ \int_a^b \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta z\,\partial x$$
$$= \int_a^b \varphi x\,\delta y\,\partial x + \int_a^b \varphi' x\,\delta z\,\partial x\,,$$

woraus sich leicht ergiebt, daß identisch

$$\varphi x\,\delta y + \varphi' x\,\delta z = o$$

seyn muß. Denn, wäre dies nicht; so sey $\delta y = fx$, eine willkührliche Function von x, und das davon abhängende $\delta z = F(fx)$. Dann müßte also für jedes fx

$$o = \int_a^b \left\{\varphi x\,.\,fx + \varphi' x\,.\,F(fx)\right\}\partial x$$

seyn, welches offenbar ungereimt ist. Also hat man als allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum in diesem Falle:

$$o = \varphi x\,\delta y + \varphi' x\,\delta z$$
$$= N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots$$
$$+ \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\frac{\delta z}{\delta y}\,,$$

woraus, in Verbindung mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\delta z}{\delta y} = o\,,$$

$\frac{\delta z}{\delta y}$ eliminirt werden kann. Dies giebt:

$$\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$= \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

als allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum.

In Bezug auf die Gränzgleichungen müßte man, wie schon erinnert,

$$\delta z, \frac{\partial \delta z}{\partial x}, \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \delta z}{\partial x^3}, \ldots$$

mittelst der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

durch δy ausdrücken, die Resultate in den allgemeinen Ausdruck der Variation δV für die entsprechenden Größen substituiren, und dann die Variation zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$, unabhängig von der Variation von y, $= 0$ setzen. Die vollständige Ausführung kann füglich hier übergangen werden.

Ein Beispiel der hier betrachteten allgemeinen Aufgabe liefert die wichtige Aufgabe, zwischen zwey auf einer krummen Fläche gegebenen Punkten die kürzeste Linie auf dieser krummen Fläche zu finden, wovon bey Gelegenheit der sphäroidischen Trigonometrie im Art. Trigonometrie (152. ff.) ausführlich gehandelt worden ist. Die zwischen y und z statt findende Relation liefert in diesem Falle die Gleichung der gegebenen Fläche. Noch einige hierher gehörende Beispiele, an denen sich noch Verschiedenes wird erläutern lassen, sollen weiter unten vorkommen.

39. Was nun ferner die Unterscheidung des Maximum und Minimum betrifft; so wird es hinreichend seyn, nur an ein Paar besondern Fällen zu zeigen, wie diese Untersuchung zu führen ist. Zunächst sind die Bedingungen fest zu stellen, unter welchen ein homogener Ausdruck von der Form $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2Dpr + 2Eqr + Fr^2$, wo A, B, C, D, E, F gegebene Größen bezeichnen, für alle reellen Werthe von p, q, r stets positiv oder stets negativ ist. Die Art der Darstellung wird zeigen, wie man sich bey complicirtern homogenen Ausdrücken des zweiten Grades mit mehreren veränderlichen Größen $p, q, r, s, \ldots$ zu verhalten hat. Man denke sich obigen Ausdruck auf die Form

$$\mathfrak{A}(p + \alpha q + \alpha' r)^2 + \mathfrak{B}(q + \beta r)^2 + \mathfrak{C} r^2$$

gebracht, so wird diese Größe durch Entwickelung der Quadrate:

$$\mathfrak{A} p^2 + 2\mathfrak{A}\alpha pq + (\mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}) q^2 + 2\mathfrak{A}\alpha' pr$$
$$+ 2(\mathfrak{A}\alpha\alpha' + \mathfrak{B}\beta) qr + (\mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}) r^2,$$

welches, mit dem gegebenen Ausdrucke verglichen, folgende Gleichungen giebt:

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{A}\alpha = B,\ \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B} = C,$$
$$\mathfrak{A}\alpha' = D,\ \mathfrak{A}\alpha\alpha' + \mathfrak{B}\beta = E,\ \mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C} = F;$$

woraus:

$$\mathfrak{A} = A,\ \alpha = \frac{B}{A},\ \alpha' = \frac{D}{A},$$
$$\mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A},\ \beta = \frac{E - A\alpha\alpha'}{\mathfrak{B}},$$
$$\mathfrak{C} = F - \frac{D^2}{A} - \frac{(E - A\alpha\alpha')^2}{\mathfrak{B}},$$

wo für α, α', $\mathfrak{B}$ leicht ihre entwickelten Werthe gesetzt werden können. Ist also A nicht $= 0$; so lassen sich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α, α', β immer bestimmen. Hierunter ist auch der einfachere Fall, wenn die gegebene homogene Function von der Form

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$$

ist, enthalten, da man im Obigen bloß $D = E = F = 0$ zu setzen braucht. Setzt man nämlich diesen Ausdruck

$$= \mathfrak{A}(p + \alpha q)^2 + \mathfrak{B} q^2;$$

so wird,

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A},\ \alpha = \frac{B}{A}.$$

Die Erweiterung dieses Verfahrens auf complicirtere homogene Functionen des zweiten Grades ist keinen Schwierigkeiten unterworfen. Wäre $A = 0$; so erhellet leicht, daß die hier betrachteten homogenen Functionen des zweiten Grades nie für alle reelle Werthe von p, q, r einerley Zeichen behalten können, wenn nicht auch die Coefficienten aller mit p behafteten Glieder $= 0$ sind, wodurch sie sich auf die einfachern Functionen $Cq^2 + 2Eqr + Fr^2$, und Cq^2 reduciren.

Ist nun A nicht $= 0$; so leuchtet ein, daß die gegebenen homogenen Functionen für alle reellen Werthe von

p, q, r oder p, q positiv oder negativ seyn werden, wenn $A > o$ oder $A < o$ ist, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{B}$ dagegen im ersten Falle nicht $< o$, im letzten nicht $> o$ sind.

Wäre im letzten einfachern Falle $AC - B^2 = o$; so würde offenbar das Zeichen von $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ bloß von $\mathfrak{A} = A$ abhängen. Sollte im ersten Falle auch das Zeichen bloß von A abhängen; so setze man

$$\begin{aligned} & Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2Dpr + 2Eqr + Fr^2 \\ &= \mathfrak{A}(p + \alpha q + \alpha' r)^2 \\ &= \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{A}\alpha pq + \mathfrak{A}\alpha^2 q^2 + 2\mathfrak{A}\alpha' pr + 2\mathfrak{A}\alpha\alpha' qr + \mathfrak{A}\alpha'^2 r^2 , \end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung:

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{A}\alpha = B,\ \mathfrak{A}\alpha^2 = C,\ \mathfrak{A}\alpha' = D,\ \mathfrak{A}\alpha\alpha' = E,\ \mathfrak{A}\alpha'^2 = F;$$

folglich, wenn α und α' eliminirt werden:

$$AC - B^2 = o,\ AF - D^2 = o,\ BD - AE = o,$$

welche Gleichungen also erfüllt seyn müssen, wenn das Zeichen des obigen homogenen Ausdruckes bloß von A abhängen soll.

40. Sey nun, um mit dem einfachsten Falle anzufangen, $v = f(x, y)$, und $\int v\partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum ist in diesem Falle (35.)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o,$$

und nach (21.) ist

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 .$$

Folglich, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, bloß zu setzen:

$$\delta^2 \int v\partial x = \int(\delta^2 v)\partial x = \int\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 \partial x ,$$

zwischen den gegebenen Gränzen. Nun ist aber

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 \partial x ,$$

als die Summe aller Werthe des Differentialquotienten $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2$ zwischen den gegebenen Gränzen, offenbar positiv oder negativ, wenn dieser Differentialquotient zwischen

den gegebenen Gränzen selbst immer positiv oder negativ ist, so daß also, da δy^2 keinen Einfluß auf das Zeichen hat, $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ ist, d. h. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen entweder immer positiv, oder immer negativ ist.

41. Sey ferner $v = f(x, y, y_1)$, und wieder $\int v \partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum und die Gränzgleichungen (35.) sind:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o, \; P = o, \; P_b = o.$$

Ferner ist (21.):

$$\delta^2 v =$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2.$$

Integrirt man die beiden ersten Glieder theilweise; so wird,

$$\int\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right\}\partial x = \int N\delta^2 y \partial x + \int P \partial \delta^2 y$$
$$= \int N\delta^2 y \partial x + P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y \partial x$$
$$= \int\left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^2 y \partial x + P\delta^2 y,$$

woraus nach dem Obigen erhellet, daß man zwischen den gegebenen Gränzen bloß

$$\delta^2 \int v \partial x = \int(\delta^2 v)\partial x =$$
$$\int\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}\partial x$$
$$= \int\left\{N'\delta y^2 + 2P'\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}\partial x$$

zu setzen braucht. Man setze nun, wenn φ eine willkührliche Function von x bedeutet, dieses Integral =

$$\varphi\delta y^2 + \int\left\{A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + C\delta y^2\right\}\partial x.$$

Differentiirt man nach x; so erhält man:

$$N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 =$$

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2(B+\varphi)\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \left(C+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta y^2,$$

woraus durch Vergleichung:

$$A = Q',\ B = P' - \varphi,\ C = N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

für eine beliebige Function φ von x, so daß man sich also φ so bestimmt denken kann, daß

$$AC - B^2 = o,\ \text{d. i. } Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = o$$

ist. Dann hängt aber, wie aus (39.) augenblicklich folgt, das Zeichen von

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2$$

für jedes δy bloß von A ab, und es ist also, wenn $A = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1{}^2}$ zwischen den gegebenen Gränzen immer positiv oder negativ ist, nach einem ähnlichen Raisonnement wie in (40.) auch

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

positiv oder negativ. Der zwischen den Gränzen $x = a$ $x = b$ genommenen Werth von $\delta^2\int v\partial x$ ist $=$

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2$$

$$+\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x.$$

Da aber φ durch die Differentialgleichung

$$Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = o$$

bestimmt wird; so läßt sich allemal eine willkührliche Constante einführen, welche, offenbar in

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2,$$

eingehend, für jedes δy zwar anders, aber doch immer so bestimmt gedacht werden kann, daß diese Differenz mit

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

einerley Zeichen hat, so daß also auch $\delta^2 \int v \partial x$, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, positiv oder negativ ist, d. i. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $A = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Wäre A für jeden Werth von x, wenigstens zwischen den gegebenen Gränzen, $= o$; so müßte, wenn $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen diesen Gränzen immer einerley Zeichen behalten sollte, da $A = Q' = o$ ist, auch $P' = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1} = o$ seyn (39.), und dann wäre offenbar $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ, wenn $N' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ wäre, wodurch in diesem Falle das Minimum und Maximum bedingt werden würde.

42. Weiter sey $v = f(x, y, y_1, y_2)$; so ist die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum nebst den Gränzgleichungen:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o;$$

$$\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_a = o, \quad \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_b = o; \; Q_a = o, \; Q_b = o.$$

Die zweite Variation ist (21.):

$$\delta^2 v =$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial \delta y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2.$$

Durch theilweise Integration der drey ersten Glieder erhält man:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} \right\} \partial x$$

$$= \int \left\{ N \delta^2 y + P \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} \right\} \partial x$$

$$= \int N\delta^2 y\,\partial x + P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y\,\partial x$$
$$+ Q\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\delta^2 y + \int \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\delta^2 y\,\partial x$$
$$= \int \left\{ N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right\} \delta^2 y\,\partial y$$
$$+ \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \delta^2 y + Q\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x},$$

woraus, in Verbindung mit der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum und den Gränzgleichungen, erhellet, daß man zwischen den gegebenen Gränzen nur

$$\delta^2 \int v\,\partial x = \int (\delta^2 v)\,\partial x =$$
$$\int \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y_1}\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1{}^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y^2}\delta y\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 \end{array} \right\} \partial x$$
$$= \int \left\{ \begin{array}{l} N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2R'\delta y\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + 2S'\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + T'\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 \end{array} \right\} \partial x.$$

Man setze nun, wenn φ, φ', φ'' willkührliche Functionen von x bezeichnen:

$$\delta^2 \int v\,\partial x =$$
$$\varphi\delta y^2 + 2\varphi'\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ \int \left\{ \begin{array}{l} A\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + 2B\frac{\partial \delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + C\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2D\delta y\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + 2E\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + F\delta y^2 \end{array} \right\} \partial x,$$

und differentiire nach x; so wird:

$$N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ 2R'\delta y\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + 2S'\frac{\partial \delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + T'\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$= A\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + 2(B + \varphi'')\frac{\partial \delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left(C + 2\varphi' + \frac{\partial \varphi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2(D + \varphi')\delta y\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$
$$+ 2\left(E + \varphi + \frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)\delta y\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(F + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\delta y^2,$$

woraus durch Vergleichung:

$$A = T', B = S' - \varphi'', C = Q' - 2\varphi' - \frac{\partial \varphi''}{\partial x},$$

$$D = R' - \varphi', E = P' - \varphi - \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, F = N' - \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

φ, φ', φ'' sind willkührliche Functionen von x. Daher kann man diese Functionen sich so genommen denken, daß

$$AC - B^2 = o, AF - D^2 = o, BD - AE = o$$

ist. Dann hängt das Zeichen der Größe unter dem Integralzeichen in $\delta^2 \int v \partial x$ bloß von $A = T' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right)$ ab (39.), und das entsprechende Integral selbst wird daher, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, positiv oder negativ seyn, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Zur Bestimmung von φ, φ', φ'' erhält man aber aus dem Obigen folgende Differentialgleichungen:

$$T'\left(Q' - 2\varphi' - \frac{\partial \varphi''}{\partial x}\right) - (S' - \varphi'')^2 = o,$$

$$T'\left(N' - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - (R' - \varphi')^2 = o,$$

$$(S' - \varphi'')(R' - \varphi') - T'\left(P' - \varphi - \frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) = o;$$

so daß also die Bestimmung von φ, φ', φ'' drey willkührliche Constanten herbeiführt, welche man sich so genommen denken kann, daß

$$\left\{\varphi \delta y^2 + 2\varphi' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}_b$$
$$- \left\{\varphi \delta y^2 + 2\varphi' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}_a$$

mit dem bestimmten Integrale in $\delta^2 \int v \partial x$ einerley Zeichen hat, so daß also auch $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ ist, d. i. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Wäre $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right)$ für

alle Werthe von x zwischen den gegebenen Gränzen $= o$; so kann, weil $A = T' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2{}^2}\right) = o$ ist, $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen nicht immer einerlei Zeichen behalten, wenn nicht auch $R' = S' = o$ ist, für jeden Werth von x zwischen diesen Gränzen (39.). Dann wird $\delta^2 \int v \partial x =$

$$N' \delta y^2 + 2P' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q' \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2,$$

und es tritt nun der in (41.) betrachtete Fall ein.

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, erhellet leicht. Indeß wird das Obige für die folgenden Anwendungen hinreichend seyn, und auch genugsam den Weg andeuten, welcher bey dieser Untersuchung einzuschlagen ist, wenn in v, außer y und seinen Differentialquotienten auch noch die von x abhängige Größe z nebst ihren Differentialquotienten vorkommt.

43. Die wichtigsten und lehrreichsten Anwendungen der hier entwickelten Sätze bietet in der reinen Mathematik die höhere Geometrie dar. Gewöhnlich sind aber bey den hierher gehörenden Aufgaben noch besondere Bedingungen in Bezug auf die Gränzen zu berücksichtigen, wodurch noch einige Erläuterungen nöthig gemacht werden, indem wir größerer Deutlichkeit wegen immer die geometrische Beziehung solcher Aufgaben ins Auge fassen.

44. Sey zunächst eine durch zwey gegebene Punkte gehende Curve zu finden, für welche ein gewisses unbestimmtes Integral $\int v \partial x$ ein Maximum oder Minimum wird, und seyen $x = a$, $x = b$ die Abscissen der beiden gegebenen Punkte; so ist $\int v \partial x$ zwischen diesen beiden Gränzen im Allgemeinen zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Da nun aber an den Gränzen auch $y = a'$, $y = b'$, und, bey Punkten im Raume, auch $z = a''$, $z = b''$ gegeben ist; so soll man nicht unter allen Relationen zwischen x, y, oder x, y, z, diejenige finden, für welche $\int v \partial x$, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, ein Maximum oder Minimum wird, sondern nur unter allen den Relationen zwischen x, y, oder x, y, z, für welche

zugleich, wenn $x = a$, $x = b$ gesetzt wird, $y = a'$, $y = b'$, oder $y = a'$, $y = b'$; $z = a''$, $z = b''$ ist, so daß also auch δy, δz in diesem Falle nicht ganz willkührlich, sondern, da y, z an den Gränzen nicht variiren dürfen, der Bedingung unterworfen sind, daß $\delta y_a = \delta y_b = o$, $\delta z_a = \delta z_b = o$, und daher bloß

$$\delta y = (x-a)^m (x-b)^n . fx, \quad \delta z = (x-a)^p (x-b)^q . f'x$$

gesetzt werden kann. Zugleich läßt sich annehmen, daß die, übrigens völlig willkührlichen, Functionen fx und $f'x$ die Größen $x - a$ und $x - b$ nicht mehr als Factoren enthalten, und daß die Exponenten m, n; p, q groß genug sind, daß auch alle Differentialquotienten von δy und δz bis zu irgend einer gewissen Gränze für $x = a$, $x = b$ ebenfalls verschwinden. In diesem Falle sind also in (35.) und (38 am Ende.) die von dem Integralzeichen befreiten Theile der Variation zwischen den gegebenen Gränzen an sich $= o$, so daß also hier die dortige Entwickelung in Bezug auf die Gränzgleichungen natürlich keine Anwendung findet, aber für

$$\varphi x = N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots,$$

$$\varphi' x = N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots,$$

doch immer als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum sich ergiebt:

$$o = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \varphi x fx \partial x$$

und

$$o = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \varphi x fx \partial x$$
$$+ \int_a^b (x-a)^p (x-b)^q \varphi' x f'x \partial x,$$

für jedes willkührliche, nicht mehr $x - a$, $x - b$ als Factor enthaltende, fx und $f'x$. Wäre nun, in Bezug auf das erste Integral, φx nicht identisch $= o$; so könnte man $fx = \frac{1}{\varphi x}$ setzen, und es wäre also

$$o = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \partial x,$$

welches ungereimt ist, wie auch auf folgende Art gezeigt werden kann. Durch theilweise Integration erhält man nämlich leicht

$$\int (x-a)^m (x-b)^n \partial x =$$
$$(x-a)^m \int (x-b)^n \partial x$$
$$- m(x-a)^{m-1} \int \partial x \int (x-b)^n \partial x$$
$$+ m(m-1)(x-a)^{m-2} \int \partial x \int \partial x \int (x-b)^n \partial x$$
$$- m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3} \int \partial x \int \partial x \int \partial x \int (x-b)^n \partial x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm m(m-1)(m-2)\ldots 2.1 \int \partial x \int \partial x \ldots \int \partial x \int (x-b)^n \partial x$$
$$= \frac{(x-a)^m (x-b)^{n+1}}{n+1} - \frac{m(x-a)^{m-1}(x-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$+ \frac{m(m-1)(x-a)^{m-2}(x-b)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1.(x-b)^{n+m+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}.$$

Also $\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \partial x$
$$= \mp \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1.(a-b)^{n+m+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}$$

und folglich nicht $= 0$. Also muß φx identisch $= 0$ seyn, und die gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum ist also dieselbe, wie in (35.). Ganz auf ähnliche Art überzeugt man sich, daß auch im zweiten Falle, wo v noch z enthält, die gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum mit der in (38.) bewiesenen übereinstimmt. Da die oben entwickelten Gränzgleichungen hier nicht statt finden; so müssen die Constanten allein aus den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden, so daß also dieselbe nur dann völlig bestimmt seyn wird, wenn die Bedingungen zur Bestimmung der einzuführenden willkührlichen Constanten hinreichen.

45. Soll ferner die gesuchte Curve nur durch einen gegebenen Punkt gehen; so wird man sich auf ähnliche Art, mit Zuziehung von (35.) und (38.), überzeugen, daß auch in diesem Falle dieselben allgemeinen Bedingungen des Maximum und Minimum gelten, wie früher, und daß zugleich die eine Reihe der Gränzgleichungen statt findet, nämlich die, welche der Gränze entspricht, für welche keine bestimmten Werthe von y und z gegeben sind.

Daß alles dies auch statt findet, wenn zwischen x, y, z eine Gleichung gegeben ist (38.), erhellet eben so leicht.

46. Was die Kriterien des Maximum und Minimum in (40. 41. 42.) betrifft; so hat man für die beiden hier betrachteten Fälle nur zu setzen, in (40.): $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o$ für beide Fälle; in (41.):

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \delta^2 y_b = o$$

für den ersten, und

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ P_b = o$$

für den zweiten Fall; in (42.) dagegen

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\delta^2 y_b = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_b = o$$

für den ersten, und

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_b = o,\ Q_b = o$$

für den zweiten Fall, ganz den Bedingungen der Aufgaben (44. 45.) gemäß. Dann werden alle Betrachtungen aa. aa. OO., und folglich dieselben Kriterien des Maximum und Minimum, mit Rücksicht auf die besondern Bedingungen der Aufgabe, auch hier gelten.

47. Sey zunächst zwischen irgend zwey durch ihre Coordinaten a, a′, a″; b, b′, b″ gegebenen Punkten im Raume die kürzeste Linie zu finden; so ist, wenn wir die Länge der gesuchten Linie = s setzen,

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

(Krumme Linie von gedoppelter Krümmung. 9.), und vorstehendes Integral soll also ein Minimum werden. Da y in v nicht enthalten; so ist

$$N = Q = R = \ldots = o,\ N' = Q' = R' = \ldots = o;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \frac{\partial P'}{\partial x} = o;\ P = A,\ P' = A';$$

wo A, A′ zwey willkührliche Constanten bezeichnen. Also

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A,$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A';$$

$$\frac{A}{p} = \frac{A'}{p'}, \quad p'A = pA';$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{A'}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{A}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Setzt man nun den Werth von $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$ in den obigen Ausdruck für A, den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ in den Ausdruck für A′, und entwickelt im ersten Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, im andern $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$; so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B';$$

$$\partial y = B\partial x, \quad \partial z = B'\partial x;$$

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

wo C, C′ zwey neue willkührliche Constanten sind. Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie im Raume. Die Constanten B, B′, C, C′ müssen aus der Bedingung, daß die Curve durch zwey gegebene Punkte gehen soll, bestimmt werden. Aus dieser Bedingung erhält man:

$$a' = Ba + C, \quad b' = Bb + C;$$

$$a'' = B'a + C', \quad b'' = B'b + C';$$

vier Gleichungen mit vier unbekannten Größen. Also

$$y = \frac{a'-b'}{a-b}x + \frac{ab'-a'b}{a-b},$$

$$z = \frac{a''-b''}{a-b}x + \frac{ab''-a''b}{a-b}.$$

48. Sollte die gesuchte Linie nur durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten a, a′, a″ sind, gehen; so würde, da das Integral zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen werden soll, der Sinn der Aufgabe kein anderer seyn, als unter allen durch den gegebenen Punkt gehenden, und zwischen zwey auf der Axe der x

senkrechten, den Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden, Ebenen liegenden Linien die kürzeste zu finden. Wie vorher erhält man:

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

und zur Bestimmung der Constanten (45. 38.):

$$a' = Ba + C, \; a'' = B'a + C, \; P_b = o, \; P'_b = o.$$

Aber

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B}{\sqrt{1+B^2+B'^2}},$$

$$P' = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B'}{\sqrt{1+B^2+B'^2}}.$$

Folglich müssen p und p' für $x = b$ verschwinden. Da aber p und p' constant, $= B$ und $= B'$ sind, also immer, und demnach auch für $x = b$, einerley Werth behalten, so erhellet, daß $B = B' = o$, und folglich $C = a'$, $C' = a''$; also

$$y = a', \; z = a''$$

ist. Aus diesen Gleichungen erhellet, daß die gesuchte Curve eine durch den gegebenen Punkt gehende, mit der Axe der x parallele, gerade Linie ist, ganz der Natur der Sache gemäß.

49. Wäre gar kein Punkt gegeben, und die Frage also überhaupt nach der Linie, welche unter allen zwischen den beiden auf der Axe der x senkrechten, der Abscissen $x = a$, $x = b$ entsprechenden, Ebenen liegenden Linien die kürzeste ist; so wäre, da hier die allgemeine Aufgabe in (38.) ihre Anwendung findet,

$$P_a = o, \; P'_a = o, \; P_b = o, \; P'_b = o;$$

woraus man wie vorher schließt, daß $B = B' = o$, und folglich

$$y = C, \; z = C'$$

ist. Also ist die gesuchte Linie wieder eine der Axe der x parallele gerade Linie. C und C' bleiben unbestimmt, indem alle der Axe der x parallele gerade Linien zwischen den genannten Ebenen einander gleich sind.

50. Zur Unterscheidung des Maximum und Minimum hat man nach (22.)

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$+ \int \left(\frac{\partial v}{\partial q'}\right) \frac{\partial \delta^2 z}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$= P \delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta^2 y \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x$$

$$+ P' \delta^2 z - \int \frac{\partial P'}{\partial x} \delta^2 z \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) (\delta p')^2 \partial x .$$

Nun ist im ersten der drey vorher betrachteten Fälle:

$$\delta^2 y_a = o, \ \delta^2 z_a = o, \ \delta^2 y_b = o, \ \delta^2 z_b = o;$$

im zweiten dagegen:

$$\delta^2 y_a = o, \ \delta^2 z_a = o, \ P_b = o, \ P'_b = o;$$

und im dritten

$$P_a = o, \ P'_a = o, \ P_b = o, \ P'_b = o;$$

in allen dreyen aber, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, identisch

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o, \ \frac{\partial P'}{\partial x} = o;$$

so daß also, wenn $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen wird, bloß

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) (\delta p')^2 \partial x$$

zu setzen ist. Die Summe der Größen unter dem Integralzeichen erhält man leicht

$$= \frac{1 + p'^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p)^2 + \frac{1 + p^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p'^2),$$

welches offenbar immer positiv ist, da die Quadratwurzel natürlich positiv zu nehmen ist, indem hier von keiner Entgegensetzung die Rede seyn kann, und auch in

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

die Quadratwurzel als positiv angesehen worden. Folglich ist auch $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

51. Das erste Problem aus der Klasse der absoluten Maxima und Minima ward von Joh. Bernoulli in

den Act. Erud. 1696. den Geometern seiner Zeit vorgelegt. Es verlangte zwischen zwey gegebenen Punkten A, B die Curve zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt. Gehört das Problem auch eigentlich der Mechanik an; so darf es doch hier nicht fehlen, indem sich demselben auch leicht eine rein theoretische Ansicht abgewinnen läßt, und es ein gutes Beispiel darbietet, für die Auffindung der Bedingungen, unter welchen ein gegebenes Integral zwischen gegebenen Gränzen ein Minimum wird.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte A, B im Raume seyen wieder a, a', a''; b, b', b'', und t die Zeit des Falls von A bis B, der Bogen $AB = s$; so ist für $AP = x - a$ (Fig. 96.) nach Principien der Mechanik:

$$\partial t = \frac{\partial s}{2\sqrt{g(x-a)}},$$

wo g, wie gewöhnlich, den Fallraum (nämlich beym freien Falle) in der ersten Zeiteinheit bezeichnet. Aber, wie vorher,

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+p^2+p'^2};$$

so daß also

$$t = \frac{\partial x \sqrt{1+p^2+p'^2}}{2\sqrt{g(x-a)}}$$

zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ ein Minimum werden soll. Da in diesem Falle

$$v = \frac{\sqrt{1+p^2+p'^2}}{2\sqrt{g(x-a)}}$$

bloß p und p' enthält; so ist

$$N = Q = R = \ldots = o,\ N' = Q' = R' = \ldots = o;$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \frac{\partial P'}{\partial x} = o;\ P = \alpha,\ P' = \alpha';$$

wo α, α' zwey willkührliche Constanten. Also

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2+p'^2)}} = \alpha,$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2+p'^2)}} = \alpha';$$

woraus unmittelbar:

$$\alpha p' - \alpha' p = 0, \ \alpha \partial z - \alpha' \partial y = 0,$$

und folglich, wenn man integrirt:

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha'',$$

wo α'' eine neue willkührliche Constante. Da nun die Gleichung der Ebene der yz offenbar

$$x + 0.y + 0.z = 0$$

ist; so ist (Linie und Ebene. 48.) vorhergehende Gleichung

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha''$$

die Gleichung einer auf der Ebene der yz senkrechten Ebene, in welcher also die gesuchte Curve liegen muß; also, da nach mechanischen Principien AP als vertikal angenommen werden muß, eine durch A und B gehende Vertikalebene. Da demnach die gesuchte Curve eine Curve von einfacher Krümmung ist; so haben wir bloß zu setzen:

$$\frac{p}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2)}} = \alpha,$$

oder, wenn wir A als Anfang der Abscissen annehmen, also $a = 0$, und, der Kürze wegen, $\frac{1}{4\alpha^2 g} = \gamma$ setzen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

woraus durch Zerlegung leicht:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}} - \frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

und, für $\frac{2x}{\gamma} = u$, $\gamma x - x^2 = w$:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial u}{2\sqrt{2u - u^2}} - \tfrac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} \partial w,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers}\, u - \sqrt{w} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers} \frac{2x}{\gamma} - \sqrt{\gamma x - x^2} + C:$$

Da nun A als Anfang der Abscissen angenommen; so ist $y = 0$ für $x = 0$. Also $C = 0$, und, für $\gamma = 2r$:

$$y = r \operatorname{Arc\,sin\,vers} \frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}.$$

Setzt man im Art. Cycloide. I. r für a, und vertauscht x, y gegen einander; so ist

$$x = r(1 - \cos\varphi), \ y = r(\varphi - \sin\varphi);$$

und folglich, wenn man φ eliminirt:

$$x = r \sin \text{vers}\, \varphi,\ \varphi = \text{Arc} \sin \text{vers} \frac{x}{r};$$

$$\cos \varphi = \frac{r - x}{r},\ \sin \varphi = \frac{1}{r} \sqrt{2rx - x^2},$$

woraus, dieses in die Formel $y = r(\varphi - \sin \varphi)$ für φ und $\sin \varphi$ gesetzt, die obige Gleichung hervorgeht, so daß also unsere Curve eine Cycloide ist, deren Anfang A, und Basis eine durch A auf AP senkrechte Linie ist. Den Radius r des erzeugenden Kreises findet man aus der Bedingung, daß $y = b'$ für $x = a'$, mittelst der gefundenen Gleichung.

Wäre nur der Punkt A gegeben; so würde der Sinn der Frage kein anderer seyn, als die Curve zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit durch den Fall von A bis zu der auf AP durch P senkrechten Linie PB, welche der Abscisse $x = b$, als zweiten Gränze des Integrals entspricht, gelangt. Für diesen Fall erhält man wieder die obige Gleichung, nur muß r aus der Gleichung

$$P_b = o$$

bestimmt werden, woraus sich leicht

$$o = \frac{b : \sqrt{\gamma b - b^2}}{2\sqrt{gb\left(1 + \frac{b^2}{\gamma b - b^2}\right)}} = \frac{b}{2\sqrt{g\gamma b^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g\gamma}} = \frac{1}{4g\gamma} = \frac{1}{8gr} = \frac{1}{r},$$

also $r = \frac{1}{o} = \infty$ ergiebt. Für diesen Werth geben aber die Gleichungen

$$x = r(1 - \cos \varphi),\ y = r(\varphi - \sin \varphi):$$
$$\cos \varphi = 1,\ \sin \varphi = \varphi,\ \text{d. i. } \varphi = o;$$

so daß also dieser Winkel immer $= o$, woraus (Vergl. Cycloide. I.) sogleich folgt, daß in diesem Falle die Cycloide mit der geraden Linie AP zusammenfällt, auf welcher also, da sie vertikal ist, der schwere Punkt freyfallend in der kürzesten Zeit von A bis zur Linie PB gelangt, ganz der Natur der Sache gemäß.

Ein ganz ähnliches Resultat würde man erhalten, wenn man keinen Punkt als gegeben annähme (Vergl. 49.).

52. Zur Unterscheidung des Maximum und Minimum hat man (21.), da v kein y enthält:

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2,$$

und durch theilweise Integration des ersten Theils, für $\frac{\partial v}{\partial p} = P$:

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x,$$

woraus man ganz wie in (50.) schließt, daß, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, bloß gesetzt zu werden braucht:

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)(\delta p)^2 \partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2,$$

das Integral zwischen $x = a$, $x = b$ oder $x = o$, $x = b$ genommen, da oben $a = o$ gesetzt worden. Da nun

$$\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2$$

unabhängig von δp immer positiv ist, indem, wie vorher immer, die Quadratwurzel natürlich als positiv zu betrachten ist; so ist auch vorhergehendes Integral, als die Summe aller Werthe dieses Differentialquotienten zwischen obigen Gränzen, immer positiv, und folglich die Bedingung des Minimum erfüllt.

Wegen der hier entwickelten Eigenschaft der Cycloide heißt sie die Linie des schnellsten Falls, oder die Brachystochrone.

53. Die Curve zu finden, welche, zwey gegebene Punkte mit einander verbindend, bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Sey s die erzeugte Fläche; so ist (Thl. I. S. 514.)

$$s = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1+p^2},$$

und dieses Integral soll also, wenn a, a′; b, b′ die Coordinaten der gegebenen Punkte sind, zwischen $x = a$, $x = b$ ein Minimum werden. Es ist hier

$$v = y\sqrt{1+p^2},\ N = \sqrt{1+p^2},\ P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$Q = R = S = \ldots, = o.$$

Da x in v nicht unmittelbar enthalten; so ist (37. δ.) die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum:

$$v = pP + C = \frac{p^2y}{\sqrt{1+p^2}} + C,$$

und folglich, wenn für v sein obiger Werth gesetzt wird,

$$p^2 = \frac{y^2 - C^2}{C^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial x}{C} = \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^3}};$$

$$\frac{x}{C} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\,\partial y}{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\sqrt{y^2 - C^2}}$$

$$= \int \frac{\partial y + \frac{1}{2}(y^2 - C^2)^{-\frac{1}{2}} . 2y\,\partial y}{y + \sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{\partial(y + \sqrt{y^2 - C^2})}{y + \sqrt{y^2 - C^2}}.$$

Folglich (Integralformel. 3.):

$$\frac{x}{C} = \log n(y + \sqrt{y^2 - C^2}) + C'.$$

Die Constanten C, C′ ergeben sich aus der Bedingung, daß die gesuchte Curve durch die beiden gegebenen Punkte gehen soll. Die möglichst kleinste Ordinate ist = C, weil für $y < C$ die Radikalgröße imaginär wird. Um die Natur unserer Curve näher zu bestimmen, nehme man diese Ordinate als Axe der y an, so daß also das Coordinatensystem jetzt ein solches ist, daß $y = C$ für $x = o$. Dies giebt $o = \log n\, C + C'$, $C' = -\log n\, C$,

$$\frac{x}{C} = \log n \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C},$$

$$-\frac{x}{C} = -\log n \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C} = \log n \frac{C}{y + \sqrt{y^2 - C^2}},$$

woraus, wenn man Zähler und Nenner des letztern Bruchs mit $y - \sqrt{y^2 - C^2}$ multiplicirt,

$$-\frac{x}{C} = \log n \frac{y - \sqrt{y^2 - C^2}}{C}.$$

Bezeichnet also, wie gewöhnlich, e die Basis der natürlichen Logarithmen; so ist

$$e^{\frac{x}{C}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C},\ e^{-\frac{x}{C}} = \frac{y - \sqrt{y^2 - C^2}}{C};$$

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\},$$

oder, durch Verwechslung der Abscissen und Ordinaten,

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}}\right\},$$

und, wenn man, die Ordinaten ungeändert lassend, die Abscissen von einem Anfangspuncte an rechnet, dessen Abscisse $= C$ ist, wo $C + x$ statt x in obiger Gleichung gesetzt werden muß:

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}} - 2\right\};$$

so daß also die gesuchte Curve die gemeine Kettenlinie (S. dsn. Art. 5.) ist, welche folglich die merkwürdige Eigenschaft hat, daß sie unter allen durch zwey gegebene Punkte gehenden Curven bei der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Denn daß in diesem Falle wirklich ein Minimum statt findet, erhellet sogleich, wenn man (41.) $\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{\partial P}{\partial p}$ entwickelt, wodurch man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

erhält. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\}$$

erhellet aber, daß y entweder immer positiv oder immer negativ ist, d. h. daß die Curve ganz auf einer Seite der Abscissenlinie liegt, und demnach hier an keine Entgegensetzung zu denken ist, y also immer als positiv angenommen werden kann. Daher ist $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)$ positiv, und es findet folglich ein Minimum statt.

54. Die Curve zu finden, bey welcher der von dem Bogen AB (Fig. 97.), den beiden Krümmungshalbmessern AC, BD der Endpunkte desselben, welche als gegeben angesehen werden, und dem Bogen CD der Evolute eingeschlossene Raum ABCD ein Minimum ist.

Der in Rede stehende Raum sey $= S$, der Bogen AB $= s$, und der Krümmungshalbmesser, ohne Rücksicht

auf sein Zeichen, $= r$: so erhellet leicht, daß $\partial S = \frac{1}{2} r \partial s$. Aber

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+p^2},\ r = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q};$$

folglich

$$S = \pm \tfrac{1}{2} \int \frac{(1+p^2)^2 \partial x}{q},\ v = \pm \frac{(1+p^2)^2}{q};$$

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o,\ P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \pm \frac{4p(1+p^2)}{q},$$

$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) = \mp \frac{(1+p^2)^2}{q^2},\ R = S = T = \ldots = o.$$

Folglich (37. ε.)

$$v = qQ + Cp + C',\ \pm \frac{2(1+p^2)^2}{q} = Cp + C';$$

$$\pm \frac{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} . \sqrt{1+p^2} = Cp + C';$$

$$2r\sqrt{1+p^2} = Cp + C',\ r = \frac{Cp + C'}{2\sqrt{1+p^2}};$$

$$r\partial r = \frac{(C - C'p)\partial p}{2q} = \tfrac{1}{2}(C\partial x - C'\partial y);$$

$$\tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}(Cx - C'y + C''),\ r^2 = cx + c'y + c'',$$

für $C = c$, $-C' = c'$, $C'' = c''$. Um die Natur der durch die gefundene Gleichung dargestellten Curve näher zu bestimmen, nehme man den Punkt, in welchem der Krümmungshalbmesser $= o$ ist, als Anfang der Coordinaten an, und bezeichne den Winkel, welchen die willkührlich angenommene neue Abscissenaxe mit der primitiven Abscissenaxe einschließt, durch λ, die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das primitive System durch α, β, und die Coordinaten in Bezug auf das neue System überhaupt durch x', y'; so ist, (Vergl. d. Art. Coordinate).

$$x = \alpha + x'\cos\lambda - y'\sin\lambda,\ y = \beta + x'\sin\lambda + y'\cos\lambda;$$
$$r^2 = c\alpha + c'\beta + c'' + c(x'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + c'(x'\sin\lambda + y'\cos\lambda)$$
$$= c(x'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + c'(x'\sin\lambda + y'\cos\lambda),$$

da, wegen der Bedingung, welcher das neue System in Bezug auf seinen Anfangspunkt unterworfen worden, $c\alpha + c'\beta + c'' = o$ ist. Weil nun λ willkührlich ist; so denke man sich dasselbe so genommen, daß die Gleichung

$$c\cos\lambda + c'\sin\lambda = o$$

erfüllt wird; so ist

$$\cos\lambda = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'}},\ \sin\lambda = -\frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2}};$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$r^2 = \frac{c^2 + c'^2}{\sqrt{c^2 + c'^2}} \cdot y' = y'\sqrt{c^2 + c'^2} = 8ay',$$

für $8a = \sqrt{c^2 + c'^2}$. Der Gleichung $r^2 = 8ay'$ muß also die gesuchte Curve genügen. Dies führt sogleich auf die gemeine Cycloide, indem (Thl. I. S. 604. 601.) bey derselben $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$, $r^2 = 16a^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = 8a^2(1 - \cos\varphi) = 8a.a(1 - \cos\varphi) = 8ay'$ ist. Die Axe der x' ist dann die Basis der Cycloide, y' also immer positiv zu setzen, und, weil die Cycloide gegen die Basis, d. i. hier die Axe der x', concav ist, $\frac{\partial^2 y'^2}{\partial x'^2} = q'$ immer negativ (Concav und Convex. 10.). Daher ist, damit der Krümmungshalbmesser, wie oben angenommen worden, positiv sey:

$$r = -\frac{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'},\ v = -\frac{(1 + p'^2)}{q'},$$

zu setzen. Also

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q'^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right) = -\frac{2(1 + p'^2)^2}{q'^3},$$

und folglich, da q'^3 nach dem Obigen immer negativ ist, $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right)$ immer positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

Aus den beiden Gleichungen

$$r = \frac{Cp + C'}{2\sqrt{1 + p^2}},\ r^2 = Cx - C'y + C''$$

ergiebt sich

$$\frac{(Cp + C')^2}{1 + p^2} = 4(Cx - C'y + C'')^2,$$

woraus erhellet, daß, wegen $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, bey der Integration noch eine vierte willkührliche Constante eingeführt wird, so daß also, wenn die gesuchte Curve völlig bestimmt seyn soll, überhaupt vier Bedingungen gegeben seyn müssen,

denen man zu genügen hat. Es werden also, nebst den zwey schon gegebenen Punkten, noch zwey andere Punkte gegeben seyn, durch welche die gesuchte Curve hindurch gehen soll, und die, diesen Bedingungen gemäß bestimmte, Cycloide, wird unter allen durch die vier gegebenen Punkte hindurch gehenden Curven der obigen Bedingung des Minimum genügen.

55. Die Curve zu finden, bey welcher

$$\int \frac{y\partial y^3}{\partial x^2 + \partial y^2} = \int \frac{p^3 y \partial x}{1 + p^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Es ist hier

$$v = \frac{p^3 y}{1 + p^2},\ N = \frac{p^3}{1 + p^2},\ P = \frac{p^2(3 + p^2)y}{(1 + p^2)^2}.$$

Folglich (37. δ.):

$$v = pP + C,\ \frac{p^3 y}{1 + p^2} = \frac{p^3(3 + p^2)y}{(1 + p^2)^2} + C;$$

$$y = -\frac{C(1 + p^2)^2}{2p^3} = \frac{c(1 + p^2)^2}{2p^3}$$

für $-C = c$. Aber $\partial y = p\partial x$,

$$\partial x = \frac{\partial y}{p},\ x = \int \frac{\partial y}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\partial p}{p^2},$$

und folglich, wenn man hierin den gefundenen Werth von y substituirt:

$$x = \frac{c(1 + p^2)^2}{2p^4} + c\int \frac{(1 + p^2)^2 \partial p}{2p^5}$$

$$= \frac{c}{2}\left\{\frac{(1 + p^2)^2}{p^4} - \frac{1}{4p^4} - \frac{1}{p^2} + \operatorname{logn} p\right\} + c'$$

$$= \frac{c}{2}\left\{\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \operatorname{logn} p\right\} + c'.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$y = \frac{c(1 + p^2)^2}{2p^3};$$

so läßt sich durch Elimination von p eine Gleichung bloß zwischen x und y mit zwey willkührlichen Constanten, die aus den besondern Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen sind, finden.

Diese Aufgabe stimmt mit der hydrodynamischen Aufgabe, den Körper des kleinsten Widerstandes, d. h. die Curve zu finden, welche, bey der Umdrehung um die Axe

der x, eine Fläche erzeugt, die nach der Richtung der Axe der x in einer Flüssigkeit bewegt, von der Flüssigkeit den kleinsten Widerstand erleidet, überein.

56. Zwischen zwey gegebenen Punkten auf der Oberfläche einer Kugel die kürzeste Linie zu finden.

Die Gleichung der Kugel ist, wenn r den Radius bezeichnet:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

wo der Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Also (38.):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z, y\delta y + z\delta z = 0,$$

und, da

$$\int v\partial x = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

zu einem Minimo zu machen:

$$N = 0, P = \frac{\partial y}{\partial s}, P' = \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta y + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta z = 0;$$

Eliminirt man nun $\frac{\delta z}{\delta y}$ aus den beiden gefundenenen Gleichungen; so erhält man:

$$y\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) - z\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0,$$

und, wenn man integrirt:

$$y\frac{\partial z}{\partial s} - \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s} + \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} = c.$$

Also, zugleich durch bloße Vertauschung der Buchstaben:

$$y\partial z - z\partial y = c\partial s,\ z\partial x - x\partial z = c'\partial s,\ x\partial y - y\partial x = c''\partial s.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch x, die zweite durch y, die dritte durch z, und addirt die erhaltenen Gleichungen; so ergiebt sich:

$$cx + c'y + c''z = 0,$$

die Gleichung einer Ebene, in welcher also die gesuchte Curve liegen muß. Für $x = y = 0$ ist auch $z = 0$, so daß also diese Ebene durch den Anfang der Coordinaten, d. i. durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und folglich die

suchte Curve der Bogen eines durch die beiden gegebenen Punkte gehenden größten Kreises ist.

57. Zwischen zwey Punkten auf der Oberfläche eines geraden Cylinders die kürzeste Linie zu finden. Die Axe des Cylinders nehme man als Axe der y an; so ist, wenn r den Radius des Cylinders bezeichnet:

$$u = x^2 + z^2 - r^2 = o$$

die Gleichung der Cylinderfläche. Also

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z,\ z\delta z = o,\ \delta z = o.$$

Aber in diesem Falle wieder

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

so daß v kein y enthält. Folglich (38.)

$$\frac{\partial P}{\partial x}\delta y + \frac{\partial P'}{\partial x}\delta z = o,\ \frac{\partial P}{\partial x}\delta y = o,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ P = C.$$

Nun ist

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \frac{r^2}{r^2 - x^2}}},$$

da $p' = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ ist. Also, wenn p aus der Gleichung $P = C$ entwickelt wird:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{r\partial x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{Cr}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{\partial . \frac{x}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}},$$

$$y = \frac{Cr}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{r} + C',$$

(Integralformel. 49.). Die willkührlichen Constanten C, C′ sind aus der Bedingung zu bestimmen, daß die gesuchte Curve durch zwey gegebene Punkte gehen soll.

Wird die Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt; so ist klar, daß unsre Curve auch jetzt noch unter allen Curven in der Ebene zwischen den gegebenen Punkten die kür-

zeste, und folglich eine gerade, die Curve auf der Cylinderfläche selbst also eine Schraubenlinie seyn muß.

Daß in den beiden vorher betrachteten Fällen wirklich ein Minimum statt findet, zeigt man wie in (50.). Ausführliche Untersuchungen über die kürzeste Linie auf dem Sphäorid s. im Art. Trigonometrie (152. ff.).

58. Es ist nun noch die Betrachtung eines sehr wichtigen und merkwürdigen Falls der absoluten Maxima und Minima zurück, dessen Natur und Behandlungsweise aus folgenden Beispielen erhellen wird.

In einer Ebene seyen zwey Curven durch die Gleichungen

$$y' = fx, \; y'' = f''x$$

gegeben; man soll unter allen sich an diesen beiden Curven endigenden Linien in der Ebene die kürzeste finden.

Dieser Fall unterscheidet sich von den bisher behandelten Aufgaben vorzüglich darin, daß bey jenen die Gränzen a, b, zwischen denen das Integral zu nehmen war, als bestimmt und gegeben angenommen wurden, in vorliegendem Falle dagegen selbst als fraglich anzusehen sind, weil mit der Variation der gesuchten Curve natürlich auch eine Veränderung der Gränzen a, b, d. h. der Abscissen der Endpunkte der gesuchten Curve, verbunden ist, und man also in diesem Falle, wie dies früher verstattet war, offenbar nicht von der Variation von x abstrahiren darf. Setzen wir nun

$$V = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int \partial x \sqrt{1 + p^2};$$

so ist, für $v = \sqrt{1 + p^2}$, mit Rücksicht auf die Variation von x

$$\delta V = v\delta x + P\delta y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \, \partial x,$$

wobey zu bemerken, daß, wie aus (23.) sogleich erhellet, δy nur die primitive Variation von y (17.) ist, auf welche also δx keinen Einfluß ausgeübt hat, und die also als ganz willkührlich, von δx ganz unabhängig, betrachtet werden muß. Bezeichnen wir nun die, übrigens noch fraglichen,

Gränzen durch a, b; so ergiebt sich als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum:

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a$$
$$- \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \partial x ,$$

für jedes δx und δy, woraus, wie früher, leicht geschlossen wird, daß für sich

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P \ \delta y_a ,$$

und identisch $\frac{\partial P}{\partial x} = o$, also, ganz wie in (47.), die gesuchte Curve eine gerade Linie ist, deren Gleichung

$$y = Bx + C .$$

Hauptsächlich kommt es nun auf die Bestimmung der Lage dieser Geraden, d. h. der willkührlichen Constanten B, C, und der Gränzen a, b an, wozu man auf folgende Art gelangt, wenn wir der Kürze wegen $y = fx$ setzen. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhellet augenblicklich, daß an den Gränzen

$$fa = f'a, \ fb = f'b$$

seyn muß, und zugleich ist klar, daß an den Gränzen auch die variirten Werthe von y den variirten Werthen von y' und y'', folglich auch an den Gränzen die Variationen von y den Variationen von y' und y'' gleich seyn müssen. Nun bemerke man aber, daß y eine doppelte Variation, eine primitive und eine secundäre, d. i. von δx herrührende, y' und y'' dagegen, weil die Gränzcurven an sich als völlig unveränderlich anzusehen sind, nur eine secundäre Variation erleiden. Bedienen wir uns also der in (17.) eingeführten Bezeichnung; so ist die gesammte Variation von y (a. a. O. zusammengesetzte Variation genannt) $= \delta y + \delta_1 \ y$, dagegen die Variation von y' nur $= \delta_1 \ y'$, die von y'' nur $= \delta_1 \ y''$. Demnach ist nach dem Obigen an den Gränzen:

$$\delta y_a + \delta_1 y_a = \delta_1 y'_a , \ \delta y_b + \delta_1 y_b = \delta_1 y''_b ;$$
$$\delta y_a = \delta_1 y'_a - \delta_1 y_a , \ \delta y_b = \delta_1 y''_b - \delta_1 y_b .$$

Nach (I. A.), wo ausführlich von der Bestimmung der secundären Variationen (Vergl. 17.) gehandelt worden, ist aber:

$$\delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y' = \frac{\partial y'}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y'' = \frac{\partial y''}{\partial x}\delta x;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\delta y_a = \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\}\delta x_a,\ \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\}\delta x_b;$$

und folglich, wenn dies in die obige Gränzgleichung für δy_a, δy_b gesetzt wird:

$$0 = \left\{v + P_b\left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right]\right\}\delta x_b$$
$$- \left\{v_a + P_a\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right]\right\}\delta x_a$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von δx, woraus sich auf ähnliche Art, wie früher, leicht ergiebt, daß

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = 0,$$
$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = 0.$$

Im vorliegenden speciellen Falle ist aber:

$$v = \sqrt{1+p^2},\ P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Also

$$\frac{1}{\sqrt{1+p_a^2}} + \frac{p_a}{\sqrt{1+p_a^2}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0;$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+p_b^2}} + \frac{p_b}{\sqrt{1+p_b^2}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

woraus sogleich geschlossen wird, daß

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0.$$

Bezeichnen wir nun an den Durchschnittspunkten der gesuchten Curve mit den Gränzcurven die Winkel der Berührenden an jener und an diesen mit der Abscissenaxe durch α, α' und durch γ und γ'; so ist (Berührende Linie. 14.)

$$\operatorname{tang}\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a, \ \operatorname{tang}\alpha' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b;$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a, \ \operatorname{tang}\gamma' = \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b;$$

$$1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\gamma = 0, \ 1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\gamma' = 0.$$

Die Winkel der Berührenden der gesuchten Curve mit den entsprechenden Berührenden der Gränzcurven sind aber offenbar $= \alpha - \gamma$ und $= \alpha' - \gamma'$, und (Goniometrie. 33.)

$$\operatorname{tang}(\alpha-\gamma) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\gamma}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\gamma}, \operatorname{tang}(\alpha'-\gamma') = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\gamma'}{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\gamma'};$$

d. i. $\operatorname{tang}(\alpha - \gamma) = \infty$, $\operatorname{tang}(\alpha' - \gamma') = \infty$, $\alpha - \gamma = 90^0$, $\alpha' - \gamma' = 90^0$, so daß also die gesuchte Curve, wie wir oben gesehen haben, eine gerade Linie, und auf den beiden gegebenen Curven senkrecht seyn muß, wenn sie die kürzeste zwischen denselben seyn soll. Zugleich hat man nun vier Gleichungen:

$$fa = f'a, \ fb = f''b;$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0, \ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0;$$

welche zur Bestimmung von a, b, B, C hinreichend sind.

59. Wären die beiden gegebenen Curven von doppelter Krümmung, deren Gleichungen

$$y' = f'x, \ z' = \varphi'x; \ y'' = f''x, \ z'' = \varphi''x;$$

so ist

$$V = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

und für $v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$:

$$\delta V = v\delta x + P\delta y + P'\delta z$$
$$- \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \, \partial x - \int \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z \, \partial x.$$

Also die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum:

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b + P'_b \delta z_b$$
$$- v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - P'_a \delta z_a$$
$$- \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \, \partial x - \int_a^b \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z \, \partial x$$

woraus, da $\delta y, \delta z$ ganz unabhängig von einander, übrigens auch nur primitive Variationen (23.) sind, wie schon öfter geschlossen wird:

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b + P'_b \delta z_b ,$$
$$- v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - P'_a \delta z_a ;$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial P'}{\partial x} = o; \; P = A, \; P' = A' ;$$

woraus sich wie in (47.) ergiebt, daß die gesuchte Linie eine gerade ist, deren Gleichungen

$$y = Bx + C, \; z = B'x + C' ;$$

welche wir durch $y = fx$, $z = \varphi x$ bezeichnen wollen. Ganz wie vorher überzeugt man sich nun, daß

$$\delta y_a = \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \; \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$
$$\delta z_a = \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \; \delta z_b = \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$

welches, in die Gränzgleichung gesetzt, giebt:

$$o = \left\{v_b + P_b \left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right] + P'_b \left[\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right]\right\} \delta x_b$$
$$- \left\{v_a + P_a \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right] + P'_a \left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right]\right\} \delta x_a ;$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von δx. Also

$$o = v_a + P_a \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} + P'_a \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\},$$
$$o = v_b + P_b \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} + P'_b \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\}.$$

Aber

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}, \; P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} ,$$
$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} ;$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} - P'\frac{\partial z}{\partial x} = v - Pp - P'p' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} .$$

Setzt man nun dies in die vorhergehenden Gleichungen, und multiplicirt auf beiden Seiten mit $\sqrt{1 + p^2 + p'^2}$, so erhält man leicht:

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit

$$fa = f'a,\ fb = f''a;\ \varphi a = \varphi' a,\ \varphi b = \varphi' b$$

leiten zur Bestimmung der sechs Größen a, b, B, C, B′, C′. Aus (Krumme Linie von gedoppelter Krümmung. 7.) und (Linie, gerade. 32.) ergiebt sich mittelst der beiden obigen Gleichungen leicht, daß die Cosinus der von den Berührenden der gesuchten Linie und der Gränzcurven in den gegenseitigen Durchschnittspunkten eingeschlossenen Winkel $= 0$, diese Winkel selbst also $= 90^0$, und die Gränzcurven folglich auf der gesuchten Linie senkrecht sind, wenn letztere die kürzeste zwischen jenen ist.

60. Wäre ein Punkt, für welchen $x = a$, und eine Curve, deren Gleichungen $y'' = f''x$, $z'' = \varphi''x$, gegeben; so hat man, $\delta x_a = \delta y_a = \delta z_a = 0$ setzend, übrigens ganz wie vorher zu verfahren. Man findet, daß die gesuchte kürzeste Linie eine gerade ist, und erhält die Gleichung

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

woraus erhellet, daß die kürzeste Linie auf der gegebenen Curve senkrecht ist, auf ganz ähnliche Weise, wie vorher. Bezeichnen wir die Coordinaten des gegebenen Punktes durch a, a′, a″; so werden die fünf Größen b, B, C, B′, C′ aus obiger Gleichung, und den Gleichungen

$$a' = fa,\ a'' = \varphi a,\ fb = f''b,\ \varphi b = \varphi'' b$$

bestimmt.

Auf ganz ähnliche Weise wie hier könnte man auch die kürzeste Linie zwischen zwei krummen Flächen, zwischen einem Punkte oder einer Linie und einer krummen Fläche bestimmen, und würde ähnliche Resultate erhalten.

61. Seyen wieder zwei Curven in einer Ebene durch die Gleichungen

$$y' = fx,\ y'' = f''x$$

gegeben; man soll eine Curve finden, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von der einen jener Curven bis zur andern gelangt, wobei es verstattet seyn mag, diese Aufgabe auf Curven in einer Ebene einzuschränken, indem sich die Auflösung leicht auf Curven von doppelter Krümmung ausdehnen lassen wird. Es ist hier (51.)

$$V = \int \frac{\partial x \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{gx}}, \quad v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}};$$

$$\delta V = v\delta x + P\delta y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta y\,\partial x;$$

$$o = v_b\delta x_b + P_b\delta y_b - v_a\delta x_a - P_a\delta y_a - \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x}\delta y\,\partial x;$$

$$o = v_b\delta x_b + P_b\delta y_b - v_a\delta x - P\,\delta y_a,$$

und identisch $\frac{\partial P}{\partial x} = o$, woraus sich, wie a. a. O., die Cycloide ergiebt, indem man die Gleichung

$$y = r \operatorname{Arc\,sin\,vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2} + C,$$

oder, der Kürze wegen, $y = fx$, erhält. Ganz wie in (58.) erhält man auch hier:

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = o,$$

$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = o.$$

Aber

$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}}, \quad P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+p^2)}};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)}},$$

und folglich, wenn man dies in obige Gleichungen substituirt:

$$\frac{1}{2\sqrt{ga(1+p_a^2)}} + \frac{p_a}{2\sqrt{ga(1+p_a^2)}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gb(1+p_b^2)}} + \frac{p_b}{2\sqrt{gb(1+p_b^2)}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o,$$

woraus

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

so daß also die Cycloide wieder auf den beiden gegebenen Curven senkrecht seyn muß (58). Zur Bestimmung von a, b, r, C dienen die beiden obigen Gleichungen, nebst $fa = f'a$, $fb = f''b$.

Wäre ein Punkt, dessen Coordinaten a, a′, und die Curve, deren Gleichung $y'' = f''x$ ist, gegeben; so erhielte man

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

welche Gleichung zeigt, daß auch hier die Cycloide auf der gegebenen Curve senkrecht ist, und nebst $a' = fa$, $fb = f''b$ zur Bestimmung von b, r, C dient.

62. Zwischen zwei gleichseitigen Hyperbeln, deren Gleichungen

$$y' = \frac{\alpha^2}{x},\ y'' = -\frac{\alpha'^2}{x}$$

seyen, die Curve zu finden, welche, bei ihrer Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Der Inhalt der erzeugten Fläche ist (Complanation. Thl. I. S. 514) $= 2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + p^2}$, und folglich

$$V = \int y \partial x \sqrt{1 + p^2}$$

zu einem Minimo zu machen. Auf ganz ähnliche Art wie in (53.) erhält man

$$\frac{x}{c} = \log n\,(y + \sqrt{y^2 - c^2}) + c',$$

da in diesem Falle

$$\delta V = v\delta x + P\delta y + \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \delta y \partial x,$$

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a + \int_a^b \left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \delta y \partial x,$$

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a,$$

und identisch $0 = N - \frac{\partial P}{\partial x}$, also dieselbe allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, wie a. a. O., die dann durch (37. δ.) weiter vereinfacht wird. Wie in (58.) erhält man auch hier wieder

$$v + P_a \left\{ \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \right\} = o,$$

$$v_b + P_b \left\{ \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \right\} = o.$$

Aber

$$v = y\sqrt{1+p^2},\ P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{y}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$\frac{y_a}{\sqrt{1+p_a^2}} + \frac{p_a y_a}{\sqrt{1+p_a^2}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\frac{y_b}{\sqrt{1+p_b^2}} + \frac{p_b y_b}{\sqrt{1+p_b^2}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o;$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o;$$

so daß also die gesuchte Curve auf den beiden gegebenen Hyperbeln senkrecht seyn muß. Die Gränzen a, b und die zwey willkührlichen Constanten erhalten ihre Bestimmung mittelst der Gleichungen $fa = f'a$, $fb = f''b$, und der beiden vorhergehenden. Setzt man $\log n\, c'$ statt c'; so hat man aus der gefundenen Gleichung:

$$\frac{x}{c} = \log n\, c'(y + \sqrt{y^2 - c^2}),$$

$$-\frac{x}{c} = \log n \frac{1}{c'(y+\sqrt{y^2-c^2})} = \log n \frac{y - \sqrt{y^2-c^2}}{c^2 c'}$$

$$e^{+\frac{x}{c}} = c'(y + \sqrt{y^2-c^2}),\ c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}} = c'(y - \sqrt{y^2-c^2});$$

$$y = \frac{1}{2c'}\left\{ e^{+\frac{x}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}} \right\};$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2cc'}\left\{ e^{+\frac{x}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{x}{c}} \right\},\ \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\alpha^2}{x^2},\ \frac{\partial y''}{\partial x} = \frac{\alpha'^2}{x^2}.$$

Setzt man nun vorschriftmäßig $x = a$ und $x = b$; so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$2\alpha^2 c' - a\left\{ e^{+\frac{a}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{a}{c}} \right\} = o,$$

$$2\alpha'^2 c' + b\left\{ e^{+\frac{b}{c}} + c^2 c'^2 e^{-\frac{b}{c}} \right\} = o,$$

$$2a^2 cc' - \alpha^2\left\{ e^{+\frac{a}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{a}{c}} \right\} = o,$$

$$2b^2 cc' + \alpha'^2\left\{ e^{+\frac{b}{c}} - c^2 c'^2 e^{-\frac{b}{c}} \right\} = o,$$

zur Bestimmung von a, b, c, c′. Hat man diese Größen, so ergeben sich auch leicht die Ordinaten der Gränzpunkte mittelst

$$y' = \frac{\alpha^2}{a},\ y'' = -\frac{\alpha'^2}{b}.$$

Diese Beispiele werden hinlänglich zeigen, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat.

B. Relative Maxima und Minima.

63. Die Aufgabe der relativen Maxima und Minima läßt sich im Allgemeinen so aussprechen:

Den unbestimmten Integralausdruck $V = \int v\partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen, so daß zugleich eine willkührliche Anzahl ebenfalls gegebener Integralausdrücke

$$V' = \int v'\partial x,\ V'' = \int v''\partial x,\ V''' = \int v'''\partial x,\ V'''' = \int v''''\partial x,\ \ldots,$$

zwischen denselben Gränzen genommen, die constanten gegebenen Werthe l', l'', l''', l'''', ... erhalten. (Vergl. 32.)

Diese Aufgabe läßt sich immer auf die Aufgabe der absoluten Maxima und Minima zurückführen. Bezeichnen nämlich c', c'', c''', c'''', ... willkührliche Constanten; so mache man bloß den Ausdruck

$$\int v\partial x + c'\int v'\partial x + c''\int v''\partial x + c'''\int v'''\partial x + \ldots,$$

nach den vorher gelehrten Methoden zwischen den gegebenen Gränzen zu einem Maximo oder Minimo, und bestimme die durch die Integration der gemeinschaftlichen Bedingungsgleichung des Maximum und Minimum eingeführten, so wie die willkührlichen Constanten c', c'', c''', c'''', ... mittelst der erhaltenen Gränzgleichungen und der gegebenen Gleichungen:

$$\int v'\partial x = l',\ \int v''\partial x = l'',\ \int v'''\partial x = l''',\ \ldots,$$

deren Anzahl offenbar immer der Anzahl der Größen c', c'', c''', ... gleich seyn wird.

Von der Richtigkeit dieser Methode überzeugt man sich leicht auf folgende Art.

Man denke sich die Relation zwischen x und den relativ-unabhängigen Größen, für welche

$$\int v\partial x + c'\int v'\partial x + c''\int v''\partial x + c'''\int v'''\partial x + \ldots,$$

zwischen den gegebenen Gränzen, unabhängig von besondern Werthen der Constanten c', c'', c''', ..., deren Anzahl $= n$ sey, ein Maximum oder Minimum wird, wirklich gefunden, und bezeichne die dieser Relation entsprechende Form des obigen Ausdrucks durch

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots.$$

Nun stelle man sich vor, daß diese Relation irgend eine Aenderung erleide, und dadurch (V) in $(V)_i$ übergehe, die zwischen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

aber, wie die Aufgabe verlangt, ungeändert bleiben, welches man erreichen wird, wenn man, wie, unbeschadet der völligen Willkührlichkeit der Aenderung der Relation zwischen x und den relativ-unabhängigen Größen an sich, offenbar verstattet ist, bey dieser Aenderung sich n neue Constanten γ', γ'', γ''', γ'''', ... eingeführt, und dieselben so bestimmt denkt, daß die zwischen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V'''), \ldots$$

selbst keine Aenderung erleiden. Auf diese Art geht also

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

über in

$$(V)_i + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

und es ist, weil nach der Voraussetzung

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

ein Maximum oder ein Minimum bezeichnet, jenachdem das erste oder das zweite statt findet,

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots.$$
$$\gtrless (V)_i + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

also auch immer $(V) \gtrless (V)_i$, so daß folglich (V) selbst ein Maximum oder Minimum bezeichnet, unter der Voraussetzung, daß

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

ungeändert bleiben, zwischen den gegebenen Gränzen, und unabhängig von allen besondern Werthen der Constanten $c', c'', c''', c'''', \ldots$. Bestimmt man nun diese Constanten, nebst den durch die Integration einzuführenden, mittelst der Gränzgleichungen und

$$\int v'\partial x = l, \int v''\partial x = l'', \int v'''\partial x = l''', \ldots;$$

oder vielmehr

$$(V') = l', (V'') = l'', (V''') = l''', \ldots;$$

so wird offenbar der zweiten Bedingung der Aufgabe, daß

$$\int v'\partial x, \int v''\partial x, \int v'''\partial x, \ldots$$

zwischen den gegebenen Gränzen den bestimmten Werthen $l', l'', l''', \ldots$ entsprechen sollen, unmittelbar genügt.

64. Betrifft die Frage eine geometrische Aufgabe, und soll, wie dies in der That gewöhnlich der Fall ist, die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte gehen; so treten die hierdurch gegebenen Bedingungen anstatt der Gränzgleichungen ein, und man hat sich hierbei überhaupt ganz wie in (44.) und (45.) zu verhalten.

65. Unter allen durch zwei gegebene Punkte gehenden gleich langen (isoperimetrischen) Curven diejenige zu finden welcher der größte oder kleinste (nämlich zwischen der Curve, der Axe der x, und den beiden äußersten Ordinaten enthaltene) Flächenraum entspricht.

In diesem Falle ist, der in (63.) gebrauchten Bezeichnung gemäß,

$$V = \int y\partial x, \; V' = \int \partial x \sqrt{1+p^2} = l';$$

also $\int y\partial x + c\int \partial x \sqrt{1+p^2}$ zu einem absoluten Maximo oder Minimo zu machen. Nun ist

$$N = 1, \; P = \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}, \; Q = R = \ldots = o.$$

Folglich nach (37. δ.)

$$y + c\sqrt{1+p^2} = \frac{cp^2}{\sqrt{1+p^2}} + C,$$

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{c^2-(y-C)^2}}{y-C}, \; \partial x = \frac{(y-C)\partial y}{\sqrt{c^2-(y-C)^2}};$$

$$y - C = z,\ \partial y = \partial z,\ \partial x = \frac{z\partial z}{\sqrt{c^2 - z^2}};$$
$$c^2 - z^2 = u^2,\ -2z\partial z = 2u\partial u,\ z\partial z = -u\partial u;$$
$$\partial x = -\partial u,\ x = -u + C',\ x - C' = -u;$$
$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = c^2.$$

Also ist die gesuchte Curve ein Kreis, dessen Halbmesser c ist. Sind a, a'; b, b' die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte; so hat man zur Bestimmung der drei Constanten C, C', c die Gleichungen:

$$(a - C')^2 + (a' - C)^2 = c^2,\ (b - C')^2 + (b' - C)^2 = c^2,$$
$$\int_a^b \partial x \sqrt{1 + p^2} = l'.$$

Letztere Gleichung ist eine transcendente. Es ist

$$\int \partial x \sqrt{1 + p^2} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{1 - \left(\frac{y - C}{c}\right)^2}} = c \int \frac{\partial \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}},$$

für $\frac{y - C}{c} = \omega$. Also (Integralformel. 49.)

$$\int \partial x \sqrt{1 + p^2} = c \operatorname{Arc\,sin} \frac{y - C}{c} + \text{Const.},$$
$$l' = c \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \frac{b' - C}{c} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{a' - C}{c} \right\}.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet, daß C, C', c doppelte Werthe haben, und daß namentlich c, der Radius des Kreises, bey einerley absoluten Größe, sowohl positiv als negativ genommen werden kann, d. h. daß der Kreis sowohl concav als convex gegen die Abscissenaxe seyn kann.

Entwickelt man $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)$; so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) = \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}},$$

wenn wir $v = y + c\sqrt{1 + p^2}$ setzen. Hieraus erhellet, daß im vorliegenden Falle sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum statt finden kann, jenachdem c negativ oder positiv ist. Aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung geht aber sogleich hervor, daß das Maximum statt finden muß, wenn der Kreis gegen die Abscissenaxe concav, das Minimum, wenn er gegen dieselbe convex ist, und daß folglich im ersten Falle c als negativ, im an-

dern als positiv anzusehen ist, vorausgesetzt, daß $\sqrt{1+p^2}$ immer positiv genommen wird.

Die obige transcendente Gleichung läßt sich nach einer leichten trigonometrischen Transformation auch so ausdrücken:

$$\sin\left(\frac{l'}{c}\right) = \frac{(a-C')(b'-C) - (a'-C)(b-C')}{c^2}$$
$$= \frac{ab'-a'b-(a-b)C+(a'-b')C'}{c^2}.$$

66. Unter allen isoperimetrischen Curven zwischen zwei gegebenen Punkten diejenige zu finden, welche bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste oder größte Oberfläche erzeugt. Hier ist

$$V = \int 2\pi y \partial x \sqrt{1+p^2},\ V' = \int \partial x \sqrt{1+p^2} = l'.$$

Man setze also

$$v = (y+c)\sqrt{1+p^2} = y'\sqrt{1+p'^2},$$

für $y + c = y'$, $p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x} = p'$. Hieraus erhält man ganz wie in (53.) die Catenaria, und es wird wieder ein Maximum oder ein Minimum statt finden, jenachdem die Curve gegen die Axe der x concav oder convex ist.

67. Soll unter allen isoperimetrischen Curven zwischen zwei gegebenen Punkten, welchen zugleich eine und dieselbe Area entspricht, diejenige gefunden werden, welche bei der Umdrehung um die Axe der x den größten oder kleinsten Körper erzeugt; so hat man

$$V = \int \pi y^2 \partial x,\ V' = \int \partial x \sqrt{1+p^2} = l',\ V'' = \int y \partial x = l'';$$

und, für $v = y^2 + cy + c'\sqrt{1+p^2}$,

$$N = 2y + c,\ P = \frac{c'p}{\sqrt{1+p^2}},\ Q = R = \ldots = o.$$

Also (37. δ.)

$$y^2 + cy + c'\sqrt{1+p^2} = \frac{c'p^2}{\sqrt{1+p^2}} + C,$$

$$\partial x = \frac{(y^2+cy-C)\partial y}{\sqrt{c'^2-(y^2+cy-C)^2}},$$

welches die Differentialgleichung einer Elastica ist, deren nähere Betrachtung in die Mechanik gehört. M. s. z. B. mein Lehrb. d. Statik fester Körper. Halle. 1826. S. 552. Euler a. a. O. Additamentum I.

C. Noch einige besondere Anwendungen der Variationsrechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten.

68. Die in (33.) angewendeten Principien führen auch auf ganz ähnliche Art zur Bestimmung von Curven, welche in allen ihren Punkten einer gewissen Bedingung des Maximum oder Minimum genügen, wie Lagrange (Théorie des fonctions. 1813. p. 268.) an folgendem interessanten Beispiele gezeigt hat.

69. Man denke sich zwei den Abscissen a, b, welche wir, wie offenbar verstattet, als positiv, und $b > a$ annehmen können, entsprechende Ordinaten; so wird von denselben jede durch irgend einen Punkt einer Curve gezogene Berührende von der Axe der x aus zwei gewisse Stücke abschneiden, deren Product wir $= V$ setzen wollen. Es soll nun die Curve gefunden werden, bei welcher dieses Product in jedem Punkte größer oder kleiner ist als das entsprechende Product an jeder andern durch denselben Punkt gehenden Curve.

Die Coordinaten irgend eines Punktes der gesuchten Curve seyen x, y; so ist die Gleichung der Berührenden durch denselben:

$$z - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x),$$

und folglich die den Abscissen $u = a$, $u = b$ entsprechenden Ordinaten, d. h. die oben erwähnten Abschnitte:

$$y + (a - x)\frac{\partial y}{\partial x},\ y + (b - x)\frac{\partial y}{\partial x};$$

folglich, für $p = \frac{\partial y}{\partial x}$:

$$V = \{y + (a - x)p\}\{y + (b - x)p\}.$$

Diese Größe soll für jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, ein Maximum oder Minimum, d. h. größer oder

kleiner werden, als die entsprechende Größe bei jeder durch denselben Punkt gehenden Curve. Man denke sich nun die gesuchte Curve gefunden, und auf irgend eine Art variirt, d. h. den Zusammenhang zwischen x und y geändert; so wird natürlich auch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ variiren, die Variationen von x und y sind aber $= o$ zu setzen, da alle Curven durch den Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, gehen sollen. Dies giebt:

$$\delta V = (b-x)\{y+(a-x)p\}\delta p + (a-x)\{y+(b-x)p\}\delta p\,,$$

und ganz auf dieselbe Art, wie in (33.), überzeugt man sich, daß, als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum $\delta V = o$, für das Maximum $\delta^2 V < o$, für das Minimum $\delta^2 V > o$ seyn muß. Also hat man

$$(b-x)\{y+(a-x)p\} + (a-x)\{y+(b-x)p\} = o\,,$$

woraus nach leichter Reduction

$$(a+b-2x)y + 2(a-x)(b-x)p = o\,,$$

$$\frac{p}{y} = \frac{2x-a-b}{2(a-x)(b-x)} = \frac{2x-a-b}{2(x-a)(x-b)}\,,$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{(2x-a-b)\partial x}{2(x-a)(x-b)} = \frac{\partial x}{2(x-a)} + \frac{\partial x}{2(x-b)}\,,$$

$$\operatorname{logn} y = \tfrac{1}{2}\operatorname{logn}(x-a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{logn}(x-b) + \text{Const.}\,,$$

$$\operatorname{logn} y^2 = \operatorname{logn} C(x-a)(x-b)\,,$$

für 2. Const $=$ logn C. Also

$$y^2 = C(x-a)(x-b)$$

die Gleichung der gesuchten Curven.

Ferner ist

$$\delta^2 V = \{(b-x)[y+(a-x)p] + (a-x)[y+(b-x)p]\}\delta^2 p + 2(a-x)(b-x)(\delta p)^2\,,$$

d. i. wegen der gemeinschaftlichen Bedingung des Maximum und Minimum:

$$\delta^2 V = 2(a-x)(b-x)(\delta p)^2\,.$$

Man nehme nun den Punkt, dessen Abscisse $= a$, Ordinate $= o$ ist, als Anfang der Coordinaten x', y', und setze also $x = a + x'$; so ist

$$y'^2 = -Cx'\{(b-a) - x'\}\,,$$

$$\delta^2 V = -2x'\{(b-a) - x'\}(\delta p)^2\,;$$

und man hat jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Ist die willkührliche Constante C negativ, also — C positiv; so wird die Gleichung der Curve

$$y'^2 = (-C(b-a))x' - \frac{(-C(b-a))x'^2}{b-a},$$

die Curve also eine Ellipse, deren Hauptaxe $= b - a$, Parameter $= -C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{-C}$ ist. Ihre Scheitel sind die beiden gegebenen Punkte deren Abscissen a, b, und ersterer ist der Anfang der Coordinaten. Folglich sind in diesem Falle x', $(b-a)-x'$ positiv, also $\delta^2 V$ immer negativ, und es findet demnach ein Maximum statt.

Nimmt man dagegen die willkührliche Constante C positiv, also — C negativ: so ist die Gleichung der Curve

$$y'^2 = \frac{C(b-a)x'^2}{b-a} - C(b-a)x',$$

die Curve also ein Hyperbel, deren Hauptaxe $= b - a$, Parameter $= C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{C}$ ist. Die Scheitel sind wieder die Punkte, deren Abscissen a, b sind, und ersterer der Anfangspunkt. Bei der Hyperbel haben x', $(b-a)-x'$ offenbar immer entgegengesetzte Zeichen, $\delta^2 V$ ist positiv, und es findet also ein Minimum statt.

Hierin ist zugleich eine merkwürdige Eigenschaft der Linien der zweiten Ordnung enthalten. Errichtet man nämlich auf die Axe eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Endpunkte Perpendikel, und zieht durch irgend einen Punkt eine Berührende; so ist das Product der von derselben auf jenen Perpendikeln abgeschnittenen Stücke bey der Ellipse größer, bey der Hyperbel kleiner, als das entsprechende Product bey jeder andern durch denselben Punkt gehenden Curve.

Auch hat man nach dem Obigen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(2x-a-b)y}{2(x-a)(x-b)},$$

$$y + (a-x)p = -\frac{(b-a)y}{2(x-b)},$$

$$y + (b-x)p = \frac{(b-a)y}{2(x-a)},$$

woraus leicht

$$V = -\tfrac{1}{4}C(b-a)^2,$$

so daß also das in Rede stehende Product eine constante Größe ist, und zwar immer = dem Quadrate der halben kleinen Axe, bei der Hyperbel nur negativ genommen, ganz der Natur der Sache gemäß, wie leicht erhellet.

70. Sollte die Curve gefunden werden, bei welcher für jeden Punkt das Quadrat der um die Abscisse vermehrten Subnormale ein Maximum oder Minimum ist; so würde man leicht erhalten:

$$V = (y\frac{\partial y}{\partial x} + x)^2 = (py + x)^2;$$

$$\delta V = 2(py + x)y\delta p = o,\ py + x = o;$$

$$y\partial y = -x\partial x,\ \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

oder $x^2 + y^2 = r^2$ für $2C = r^2$. Die gesuchte Curve also ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten ist. Ferner ist

$$\delta^2 V = 2(py + x)y\delta^2 p + 2y^2(\delta p)^2,$$

d. i., wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, $\delta^2 V = 2y^2(\delta p)^2$, so daß also, weil diese Variation immer positiv ist, ein Minimum statt findet.

III. Geschichte.

71. Schon Newton hatte im zweiten Buche der Principien (Prop. 34. Schol.) die Aufgabe von dem Körper des kleinsten Widerstandes (55.) durch eine Proportion aufgelöst, welche zur Construction der gesuchten Curve mittelst der Tangenten hinreicht, ohne jedoch die Analysis seiner Auflösung mitzutheilen. Die Aufmerksamkeit der Geometer ward aber erst auf diese neue Gattung von Problemen über die Maxima und Minima gelenkt, als Joh. Bernoulli in den Act. Erud. Jun. 1696. p. 269. die Aufgabe von der Brachystochrone (51.) vorlegte, und in einem Programm (Groningae. 1697.) „eorum in gratiam, ad quorum manus Acta Lipsiensia non perveniunt" wiederholte, indem er zugleich bekannt machte, daß (sechs Monate nach der ersten Bekanntmachung) noch

keine Auflösung erschienen sey. Leibnitz habe ihm geschrieben: se jam feliciter dissoluisse nodum pulcherrimi huius, uti vocabat, et inauditi antea problematis, und gebeten, die Frist bis auf nächste Ostern zu verlängern, damit auch Franzosen und Italiener ihre Kräfte versuchen könnten. Seine eigene Auflösung gab Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1697. Mai. p. 206. In den Philosophical Transact. 1697. No. 224. p. 384. erschien eine Construction, aber ohne Analysis und Beweis, deren Verfasser sich nicht nannte. Aber Joh. Bernoulli (Opp. T. I. p. 196.) rieth, wie er sagt, ut ex ungue leonem, daß es Newton sey. Tschirnhausen glaubte, daß es mehrere Curven geben könnte, die der Aufgabe genügten (Act. Erud. 1697. Mai. p 221.). Der Marquis de l'Hospital gab seine Auflösung (Ibid. p. 217.) ebenfalls ohne Analysis, schrieb aber an Bernoulli, daß sie auf denselben Principien beruhe, welche er ihm früher zur allgemeinen Untersuchung der Kettenlinie mitgetheilt habe. Noch eine Auflösung zu den vieren, welche die drei großen Nationen, Deutschland, England und Frankreich (Joh. Bern. Opp. T. I. p. 200.) geliefert hatten, fügte Jacob Bernoulli hinzu (Act. Erud. l. c. Jac. Bern. Opp. T. II. n. 75.). Alle fanden dasselbe Resultat (51.), und stimmten auch in den Principien meist überein, obgleich jede Auflösung natürlich auch ihre Eigenthümlichkeiten hatte. Um einen Begriff von jenen ältern Methoden zu geben, wird es gut seyn, das Hauptsächlichste aus Jac. Bernoullis Auflösung hier beyzubringen, welche zu diesem Zwecke am geeignetsten scheint.

AB (Fig. 98.) sey die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt. Daher muß auch jeder Theil ab von AB mit der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in a ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen werden, weil, wenn mit dieser Geschwindigkeit acb in einer kürzern Zeit durchlaufen würde, auch AacbB in einer kürzern Zeit wie AabB durchlaufen werden müßte, indem die in b erlangte Geschwindigkeit nach mechanischen Pricipien bloß von der Höhe abhängt,

und folglich in beiden Fällen dieselbe ist. Nun stelle man sich die Curve als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten vor, und sehe die Bewegung in jeder Seite als gleichförmig an. M und N (Fig. 99.) seyen irgend zwei Spitzen dieses Polygons, zwischen denen noch eine andere K liegt, und RS sey eine horizontale Linie. Man soll nun die Lage des Punktes K in RS, d. h. die Lage der beiden auf einander folgenden Elemente MK, KN der gesuchten Curve, so bestimmen, daß ein sich in MK mit der Geschwindigkeit a, in KN mit der Geschwindigkeit b gleichförmig bewegender Punkt, in der kürzesten Zeit von M bis N gelangt. Die Betrachtung zweier solchen Elemente, wie MK, KN ist bei allen Aufgaben von der Classe der absoluten Maxima und Minima wesentlich, welches man wohl zu bemerken hat. Man setze nun $MK = x$, $KN = y$; so ist die Zeit der Bewegung von M bis $N = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, und es muß nun x, y so bestimmt werden, daß diese Größe ein Minimum wird, wodurch die Aufgabe auf die gewöhnliche Lehre von den Maximis und Minimis zurückgeführt ist. Sey $ML = \alpha$, $HN = \beta$, $HL = \gamma$, $KL = z$; so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + z^2}}{a} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - z)^2}}{b}.$$

Differentiirt man, und setzt das Differential $= 0$; so wird

$$\frac{z}{a\sqrt{\alpha^2 + z^2}} = \frac{\gamma - z}{b\sqrt{\beta^2 + (\gamma - z)^2}}$$

für das Minimum, d. i.

$$\frac{LK}{a \cdot KM} = \frac{KH}{b \cdot KN}, \quad \text{oder } \frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\beta'}{b},$$

so daß sich also die Geschwindigkeiten in M und K wie die Cosinus der Winkel MKL, NKH verhalten müssen. Die in A, b, b′, b″, b‴, ... (Fig. 100.) erlangten Geschwindigkeiten sind nach einfachen mechanischen Principien:

$$0,\ 2\sqrt{ab\ g},\ 2\sqrt{a'b' \cdot g},\ 2\sqrt{a''b'' \cdot g},\ 2\sqrt{a'''b''' \cdot g}, \ldots$$

und es ist folglich, wenn man die von Ab, bb′, b′b″, b″b‴, ..., d. i. von den Berührenden der Curve, mit den durch A, b, b′, b″, b‴, ... gezogenen Horizontalen,

d. i. mit AC, die wir als Axe der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winkel durch α, α', α'', α''', ... bezeichnet, nach dem Obigen:

$$\cos\alpha : \cos\alpha' = o : 2\sqrt{ab.g} = o : \sqrt{ab},$$
$$\cos\alpha' : \cos\alpha'' = 2\sqrt{ab.g} : 2\sqrt{a'b'.g} = \sqrt{ab} : \sqrt{a'b'},$$
$$\cos\alpha'' : \cos\alpha''' = 2\sqrt{a'b'.g} : 2\sqrt{a''b''.g} = \sqrt{a'b'} : \sqrt{a''b''},$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

woraus unmittelbar folgt, daß bey der gesuchten Curve die Cosinus der von irgend zwei Berührenden mit der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel sich wie die Quadratwurzeln aus den Ordinaten der Berührungspunkte verhalten müssen, oder daß, wenn Θ irgend einen solchen Winkel bezeichnet, $\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}$ eine constante Größe seyn muß. Setzt man nun $\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \sqrt{a}$; so erhält man leicht:

$$\tang\Theta = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}.$$

Aber $\tang\Theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. Also

$$\partial x = \frac{\partial y\sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}},$$

die Differentialgleichung der gesuchten Curve, welche, integrirt, zur Gleichung der Cycloide führt, wie leicht aus diesem Art. erhellen wird.

Man wird sich aus der hier mitgetheilten Auflösung einen Begriff von der bey Aufgaben dieser Art überhaupt angewandten Methode zu machen im Stande seyn.

Schon seit längerer Zeit, besonders seit dem Jahre 1695, wo Johann Professor der Mathematik zu Gröningen geworden war, trennte die Eifersucht des Ruhmes die Brüder Bernoulli. Johann hatte sich schon manche Ausfälle gegen den ältern Bruder, der ihn in die Mathematik eingeweiht hatte, erlaubt, und mehrere von ihm vorgelegte Aufgaben schienen eigens gegen denselben gerichtet. Nur einmal (Act. Erud. 1695. p. 537.) hatte Jacob Bernoulli schon früher geantwortet, indem er seinen Bruder erinnerte, weniger Wichtigkeit auf Entdekkungen zu legen, welche das Instrument, womit sie beide

ausgerüstet wären, leicht mache, und zu erkennen, daß, gleichwie die Größen in der Geometrie stufenweise wachsen, auch jeder Andere, der mit demselben Instrument versehen wäre, stufenweise zu denselben Resultaten gelangt seyn würde. (Bossut G. d. M. II. S. 161.). In der Abhandlung über die Brachystochrone aber legt er, sich eigens an seinen Bruder wendend, demselben folgende Aufgabe vor, die ich hier, etwas allgemeiner als von Bernoulli selbst, mit Bossuts Worten (a. a. O. S. 170.) gebe:

Unter allen isoperimetrischen Curven zwischen gegebenen Gränzen eine Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man eine zweite Curve construirt, deren Ordinaten beliebige Functionen der Ordinaten oder der Bogen jener sind, der Flächeninhalt der zweiten Curve ein Größtes oder Kleinstes bildet. Dann fügt Bernoulli noch hinzu: Huic ne detrectare possit (frater), adjungimus alterum (problema), quod majorem cum suo affinitatem habet, ubi quaeritur, quaenam ex infinitis Cycloidibus idem initium habentibus, ac super eadem basi horizontali constitutis, illa sit, per quam descendens grave, minimo tempore, ex initio communi ad datum perpendiculum appellat (61.). Et quum iniquum sit, ut quis ex labore in alterius gratiam, et cum proprii temporis dispendio, rerumque suarum damno suscepto, nihil emolumenti percipiat, prodit Nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium 50 imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab huius publicatione mensem se suscepturum promittat, ipsasque solutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapso, si nemo dederit, meas exhibebo. In einem Briefe an den Doctor Basnage (Histoire des ouvrages des savans. Juin. 1697. p. 452.) antwortete Joh. Bernoulli auf diese Herausforderung. Er beurtheilt zuerst Leibnitzens, Newtons und de L'Hospitals Auflösungen der Aufgabe von der Brachystochrone, setzt auch hinzu, daß sein Bruder dieselbe

wohl aufgelöst habe, wirft ihm aber vor, daß er zu der Auflösung dieser sehr leichten Aufgabe, für welche er selbst, Newton und Leibnitz, in derselben Stunde, wo sie sich die Aufgabe vorgelegt, auch die Auflösung gefunden hätten, zu viel Zeit gebraucht, und, wie Galilei, lange in der Meinung gestanden hätte, daß die gesuchte Curve ein Kreis seyn müsse. Dann fügt er in Bezug auf die vorgelegten Aufgaben hinzu: Quelques difficiles que ces problèmes paroissent, je n'ai pas manqué, de m'y attacher à l'instant même, que je les ai lu; mais voyez avec quel succès: au lieu de trois mois qu'on me donne pour sonder le gué, et au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer, et achever d'approfondir tout le mystére; et bien au dela: Car je donnerai les résolutions mille fois plus generales que ne sont les problèmes. In diesem Tone fährt er noch weiter fort, sagt, daß er seine Auflösungen an Leibnitz geschickt, und denselben zum Richter aufgefordert habe; der versprochene Preis solle in Leibnitzens Hände gelegt werden, indem er denselben für die Armen bestimmt habe. Die Auflösungen selbst erfolgten in einem Briefe an Varignon in dem Journal des Savans. Decembre. 1697, und er forderte den versprochenen Preis. Jac. Bernoulli antwortete (das. Fevr. 1698.), daß die Auflösungen seines Bruders nicht ganz der Wahrheit gemäß seyen, und verpflichtete sich zu drei Dingen: à déviner au juste l'Analyse, qui a conduit son frére à la solution, qui se voit dans ce journal; quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier; à donner la véritable solution du problème dans toutes ses parties. Hiezu fügte er noch die Wette, daß, wenn Jemand für die Fortschritte der Wissenschaft sich genug interessirte, um einen Preis auf jeden dieser Punkte zu setzen, er sich verbindlich mache, eben so viel zu verlieren, wenn er den ersten nicht erfüllte, das doppelte, wenn der zweite ihm nicht gelänge, das dreifache, wenn er den dritten ver-

fehlte. Man wird aus diesen Mittheilungen den in diesen Streitschriften herrschenden Ton hinreichend zu beurtheilen im Stande seyn. Sie finden sich alle im ersten Theile der Opp. Joh. Bern. gesammelt. Joh. Bernoulli behauptete fortwährend die Güte seiner Auflösungen und forderte den ausgesetzten Preis. In einem Briefe an Varignon vom 26. Jun. 1698. (J. d. S. 1698. 4. Arnst.) suchte Jacob B. den zwei ersten sich auferlegten Bedingungen zu genügen, trug in demselben eine in sich fehlerhafte Analysis vor, wo die falschen Sätze, indem sie durch andere wieder aufgehoben werden, nichts desto weniger in gewissen Fällen zu einem wahren Resultat führten, und fand vermittelst dieser Analysis die Gleichungen seines Bruders. Zugleich verlangte er (J. d. S. 1698. 23. Juin) neben Leibnitz noch L'Hospital, Newton und alle berühmte Geometer der Zeit zu Richtern, und machte den triumphirenden Ton seines Bruders mit einer Feinheit und einem Witz lächerlich, den man, wie Bossut sagt, sonst nicht bei Mathematikern gewohnt ist, besonders da er sich, als ein Schweizer, der französischen Sprache bediente. Bossut erzählt, daß Joh. Bernoulli, als er diese Stücke des Journal des Savans erhalten, in eine Wuth, die man sich nicht vorstellen könne, gerathen sey, und sich in einem an seinen Bruder gerichteten Briefe (Joh. Bern. Opp. T. I. p. 231.) Luft gemacht habe, so wie denn dieser Brief (22 Aout. 1698.) manche Ausfälle in der That gegen denselben enthält. Im Jahre 1700 erschien von Jac. Bernoulli ein Brief zu Basel, worin er seinen Bruder zur Bekanntmachung seiner Methode aufforderte, und am Schlusse die Formeln ohne Beweis gab. M. s. diese Formeln auch Act. Erud. 1700. p. 261. Joh. Bernoulli entwickelte nun seine Methode, und schickte die Abhandlung im Februar 1701 versiegelt an die Akademie zu Paris mit der Bedingung, sie zu eröffnen, wenn sein Bruder seine Auflösung mitgetheilt haben würde. Dies ward in dem J. d. S. 21. Fevr. 1701. mit Ausfällen gegen Jac. Bernoulli angezeigt. (Joh. Bern. Oqp. T. I. p. 367.). Nun erschien Jac. Bernoulli's eigne Auflösung in Form

von Thesen im März 1701 mit einer Dedication an L'Hospital, Leibnitz, Newton und Fatio de Duillier, so wie auch in den Act. Erud. Maj. 1701 p. 213. unter dem Titel: Jacobi Bern. Analysis magni problematis isoperimetrici. Er erkannte zuerst das richtige Princip für die Auflösung der hierher gehörenden Aufgaben. Joh. Bernoulli hatte sich nämlich bei der Auflösung der isoperimetrischen Aufgaben vorzüglich darin geirrt, daß er bei derselben, wie bei den Aufgaben aus der Classe der absoluten Maxima und Minima, nur zwei Elemente der Curve betrachtete, welches oben an der Aufgabe von der Brachystochrone deutlich gemacht worden ist. Bey den isoperimetrischen Aufgaben, wo neben der Bedingung des Größten und Kleinsten noch andere Bedingungen zu erfüllen sind, müssen aber, wie Jac. Bernoulli a. a. O. zuerst zeigte, drey Elemente der Curve auf ähnliche Art betrachtet werden, wovon man sich am besten aus der angeführten Abhandlung selbst, oder noch leichter aus einer spätern Abhandlung Joh. Bernoullis (Opp. T. II. p. 235.) einen Begriff verschaffen wird. Von nun an beobachtete Joh. Bernoulli ein tiefes Stillschweigen, und die der Pariser Akademie übersandte Auflösung erschien nur erst im Jahre 1706 (Opp. T. I. p. 424.), nachdem Jac. Bernoulli 1705 gestorben war. Welche Motive den Erstern vermochten, eine in sich falsche Auflösung doch noch bekannt zu machen, wage ich nicht zu entscheiden. Der eigentliche Irrthum ist oben angegeben. Dreizehn Jahre nach seines Bruders Tode erkannte Joh. Bernoulli diesen Irrthum selbst: „je m'y étois effectivement mépris en quelque chose" sagt er von seiner ersten Auflösung, und gab in dem Mém. de Paris 1718. p. 100. (Opp. T. II. p. 235) eine neue Auflösung, welche ebenfalls auf der Betrachtung dreier Elemente beruht, und im Grunde ganz mit der seines Bruders einerley ist, nur unter einer einfachern Form dargestellt. Auf denselben Principien beruht auch die von Taylor in der Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1715. gegebene Auflösung.

Euler hat sich viel mit dem isoperimetrischen Problem beschäftigt. Zuerst erschien Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Comm. Petrop. VI. 1739. Curvarum maximi minimique proprietate gaudentium inventio nova et facilis. Comm. Petrop. VIII. 1741., seiner vielfältigen Arbeiten über die Brachystochronen, auch in widerstehenden Medien, nicht zu gedenken. Eine ungemeine Erweiterung aber gewann diese Untersuchung durch sein berühmtes Werk: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Laus. et Genev. 1744. 4. In diesem Werke wird zuerst zwischen absoluten und relativen Maximis und Minimis unterschieden, die Auflösung auf die in diesem Artikel entwickelten allgemeinen Formeln, in Bezug auf die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, gebracht, und die Zurückführung der relativen Maxima und Minima auf die absoluten gezeigt, zugleich aber die Theorie durch eine so große Anzahl höchst lehrreicher Beispiele erläutert, daß dieses Werk, nach Lagrange's Urtheil, als das vortrefflichste Uebungsbuch in der Integralrechnung noch jetzt dienen kann. Was noch zu wünschen übrig blieb, war eine rein analytische Methode, zu den von Euler gefundenen Resultaten zu gelangen, wodurch die Deutlichkeit nur erhöht werden konnte, und die Auffindung der Unterscheidungskennzeichen des Maximum und Minimum. Indem Lagrange diesen Untersuchungen die Differentialrechnung anzupassen suchte, ward er auf die nach ihren Hauptsätzen in diesem Artikel entwickelte, von Euler später so genannte, Variationsmethode oder Variationsrechnung geleitet, welche Alles leistet, was man in dieser Beziehung wünschen kann. Lagrange's erste Untersuchungen finden sich in den Miscell. Soc. Taurin. Nämlich: Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales. II. 1760. 61. p. 173. Application de la méthode précendente à la Dynamique p. 196. An Fontaine fand La-

grange einen Gegner (Mém. de Paris. 1767. p. 588.), so wie auch an Borda (Mém. de Paris. 1767. p. 551.). Lagrange vertheidigt sich in der Abhandlung: Observations sur la méthode des variations. Misc. Soc. Taur. T. IV. p. 163. Schon 1755 hatte Lagrange die Methode Eulern mitgetheilt, und dieser sie so vortrefflich gefunden, daß er sie selbst in mehrern Abhandlungen zu erläutern suchte, und ihr auch, wie schon erwähnt, den Namen Calculus variationum gab. M. s. Elementa calculi variationum. Nov. Comm. Petrop. T. X. p. 51. Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi. T. XVI. p. 35., vorzüglich aber Institutiones calculi integralis. T. III. Appendix. Weiter entwickelt hat Lagrange die Methode in der Théorie des fonctions. Seconde partie. Chap. XII. XIII., und vorzüglich in den Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon XXI. XXII.

Zu leugnen ist indeß nicht, daß rücksichtlich der Strenge und Deutlichkeit der Darstellung noch Manches zu wünschen übrig blieb, und in dieser Rücksicht haben sich einige neuere deutsche Mathematiker ein unbestreitbares Verdienst um diese Wissenschaft erworben. Nicht genug erkannt scheint zu seyn, was schon Crelle in seinem Versuch einer rein algebraischen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen. I. Gött. 1813. S. 527 — 776 in Bezug auf die Darstellung der Principien der Variationsrechnung geleistet hat. Die vielen neuen Zeichen führen einige Schwierigkeit bei dem Studium dieses Werkes herbei. Die Anwendung auf die Lehre von den Maximis und Minimis lag außer dem Zwecke desselben. Als die vollständigsten Lehrbücher verdienen alle Empfehlung, vorzüglich:

Analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Grössten und Kleinsten, von E. H. Dirksen. Berlin. 1823. 4., und:

Die Lehre vom Größten und Kleinsten von M. Ohm. Berlin. 1825., wo jedoch auch die nicht immer ganz gewöhn-

liche Bezeichnung einige Schwierigkeit für Anfänger machen wird.

Außer den Abhandlungen in den allgemein bekannten analytischen Werken von Lacroix (Traité du calc. diff. et int. T. II. p. 721. Traité élém. de calc. diff. et int. p. 484.) Bossut, Cousin, und dem Cours complet de Mathém. pures par Francoeur. T. II. Paris 1828. p. 478. hebe ich noch aus:

S. Gourief Essai de démontrer rigoureusement un theorême fondamentale des équations de condition de la differentielle des fonctions à plusieurs variables et du calcul des variations. Nov. Act. Petrop. T. XIII. p. 154.

P. Frisii Opp. T. I. Medial. 1782. 4. p. 414.

L'Huilier Principiorum calculi diff. et int. expos. elem. Tab. 1795. 4. Cap. XX. De problematibus, quae vocantur, isoperimetricis. Mit Anwendung der Methode der Gränzen. Nicht allgemein.

Eine Abhandlung von Gergonne in den Annales de Math. T. XIII. 1822. und Exposition des principes du calcul des variations par Ampère. Ibid. T. XVI. 1825. p. 133.

Noch s. m. über die sogenannte Methode der unbestimmten Factoren, welche besonders bei den Anwendungen der Variationsrechnung auf Mechanik ihre Anwendung findet, eine Abhandlung von Ampere in dem Recueil des Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrangers. T. I., und über die Anwendung auf Mechanik überhaupt ganz vorzüglich die Mécanique analytique von Lagrange.

Zur Geschichte gehört außer den Bemerkungen in Kästners Anal. d. U. S. 857. ff. auch: Specimen historiae atque principiorum calculi quem vocant variationum. Auct. F. W. A. Murhard. Gott. 1796.

Die Abhandlung der Variationsrechnung in der Integralrechnung von Leseur und Jacquier (T. II.) rühmt Montucla (T. III. p. 354.) sehr. Unsere deutschen Lehrbücher der höhern Analysis übergehen diesen wichtigen Theil

derselben entweder ganz, oder behandeln ihn wenigstens sehr unvollständig, undeutlich und oberflächlich.

Vector, Radius vector heißt in der höhern Geometrie jede von einem bestimmten Punkte an eine Curve gezogene gerade Linie; in der Lehre von den Kegelschnitten vorzugsweise jede von einem Brennpunkte an den Kegelschnitt gezogene Gerade.

Veränderliche Größe (quantitas variabilis) ist jede Größe, welche unter einer solchen Beziehung betrachtet wird, daß ihr jeder willkührliche bestimmte Werth beigelegt werden kann, die man also willkührlich ab- und zunehmen lassen kann. Veränderliche Größen werden in der Mathematik, zum Unterschiede von den unveränderlichen, beständigen oder constanten Größen, welche in derselben Rechnung durchgängig ein und denselben Werth behalten, und durch die ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden, immer durch die letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, v, u. s. f., bezeichnet. Ist AB der Durchmesser eines Kreises, und von irgend einem Punkte der Peripherie ein Perpendikel PQ auf denselben gefällt, so ist nach einem sehr bekannten geometrischen Satze $PQ^2 = AQ \times BQ$. Bezeichnen wir nun den Radius durch r, PQ durch y, und den Abstand dieses Perpendikels vom Mittelpunkte durch x, so ist immer die eine der Größen AQ, BQ, $= r - x$, die andere $= r + x$; also

$$y^2 = r^2 - x^2 .$$

Man nennt dies die Gleichung des Kreises. Sie stellt im Allgemeinen die Relation dar, welche zwischen jedem der durch y bezeichneten Perpendikel, und dessen Abstande x vom Mittelpunkte statt findet. Hier sind also offenbar x und y die veränderlichen Größen, r dagegen ist, so lange die Untersuchung auf ein und denselben Kreis eingeschränkt wird, eine constante oder beständige Größe, da sie, wie auch x und y sich ändern mögen, immer denselben Werth behält, und obige Relation oder Gleichung immer statt findet.

Jede Größe, welche von einer veränderlichen Größe auf irgend eine Art abhängt, so daß sie zugleich mit ihr sich ändert, heißt eine Function dieser veränderlichen Größe, und wird, wenn x die veränderliche Größe bezeichnet, im Allgemeinen durch f(x), φ(x), oder ein ähnliches Zeichen, angedeutet. Functionen sind also offenbar auch veränderliche Größen. Man unterscheidet in dieser Beziehung auch unabhängige und abhängige veränderliche Größen, indem man unter jenen solche veränderliche Größen versteht, deren Werth durch Nichts bedingt wird, und völlig willkührlich angenommen werden kann. Abhängige veränderliche Größen dagegen sind solche, deren Werth auf irgend eine Art durch den Werth einer unabhängigen veränderlichen Größe bestimmt wird, von dem Werthe einer solchen veränderlichen Größe abhängt; also alle Functionen unabhängiger veränderlichen Größen, jede Function einer andern Function, wie z. B. log sin x u. dergl. Die Betrachtung der veränderlichen Größen und ihrer Functionen, namentlich der durch die willkührlichen Veränderungen jener herbeigeführten Veränderungen dieser, ist ausschließlich der Gegenstand der höhern Mathematik, besonders der mathematischen Analysis. Alle auf letztere Bezug habende Artikel dieses Wörterbuchs können also zu weiterer Aufklärung des Begriffs der veränderlichen Größen dienen.

Veränderung (Vertauschung, Verwechselung, Uebertragung nach: Versuch einer rein algebraischen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen von Crelle. Gött. 1813. S. 373.) der unabhängigen veränderlichen Größe (Changement de la variable indépendante) bezeichnet in der Differentialrechnung ein Verfahren, durch welches die, in irgend einer Aufgabe als solche angenommene, ursprüngliche unabhängige veränderliche Größe mit einer andern vertauscht werden kann, die entweder schon unter den Größen der Aufgabe enthalten ist, oder erst neu in die Rechnung eingeführt wird. Da dieses Verfahren wichtig ist, und manches Eigenthümliche hat, so sollen einige der am häufigsten vorkommenden Fälle hier näher betrachtet werden. Die Differentialquotienten

der abhängigen veränderlichen Größe in Bezug auf die ursprüngliche unabhängige veränderliche Größe sollen immer durch Einschließung in Klammern ausgezeichnet werden.

1. Sey y die abhängige, x die ursprüngliche veränderliche Größe, und irgend ein Ausdruck

$$f\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots\right) = F$$

gegeben. Soll nun x als Function einer neuen unabhängigen veränderlichen Größe t betrachtet, und der gegebene Ausdruck auf diese, als unabhängige veränderliche Größe, bezogen werden; so fragt sich, wie derselbe, um dieser Bedingung zu genügen, umgeformt werden müsse.

Es ändere sich t um i, so ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn wir die dadurch herbeigeführte Aenderung von x durch k bezeichnen,

$$k = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Die Aenderung von y ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so wie auch

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \cdot \frac{k}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \cdot \frac{k^2}{1.2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Setzt man hierin für k den vorher gefundenen Werth, ordnet nach den Potenzen von i, und vergleicht die beiden für die Aenderung von y erhaltenen Ausdrücke; so ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + 3\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3,$$

u. s. f. u. s. f.

woraus ferner successive:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3} - 3\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} + 3\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^4} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3},$$

u. s. f. u. s. f.

Gebraucht man die von Lagrange eingeführte Bezeichnung der Differentialquotienten oder derivirten Functionen (Differentiale Thl. I. S. 821. Taylors Lehrsatz. 4.), so nehmen diese Formeln, wenn alle nicht eingeklammerten derivirten Functionen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen sich auf die unabhängige veränderliche Größe t beziehen, folgende einfachere Gestalt an:

$$[y'] = \frac{y'}{x'},$$

$$[y''] = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3};$$

$$[y'''] = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3x''y''}{x'^4} - y'\left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^5}\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Diese Ausdrücke müssen also für

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots$$

oder $[y']$, $[y'']$, $[y''']$, ... in den gegebenen allgemeinen Ausdruck F eingeführt werden, um denselben auf die unabhängige veränderliche Größe t zu beziehen.

Um das Gesetz der gefundenen Ausdrücke zu übersehen, hebe man im Zähler und Nenner der einzelnen Brüche die gleichen Potenzen von ∂t auf, und erinnere sich nur, daß alle Differentiale von x und y auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen sich auf die unabhängige veränderliche Größe t beziehen, so daß also nicht ∂x, sondern ∂t constant ist; so erhält man

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3},$$

u. s. f. u. s. f.

Da also hiernach $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ gefunden wird, wenn man das Differential ∂y, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, durch das Differential ∂x, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, dividirt, und die Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots$$

eben so von einander abhängen, wie $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ von y abhängt; so erhellet leicht die Richtigkeit und der Sinn folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Es ist wohl zu bemerken, daß bei diesen Differentiationen kein Differential als constant zu betrachten ist. Entwickelt man die Differentiale wirklich, so erhält man wieder die obigen entwickelten Formeln. Für

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = p, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = q$$

ist z. B. der Krümmungshalbmesser

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

(Krümmungskreis. 2.). Um diesen Ausdruck auf irgend eine andere unabhängige veränderliche Größe, von welcher

x auf eine willkührliche Art abhängt, zu beziehen, muß man nach dem Obigen setzen

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}.$$

Nach gehöriger Substitution erhält man

$$r = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

wo nun kein Differential constant ist, und alle sich auf eine neue willkührliche unabhängige veränderliche Größe beziehen.

2. Ferner kann der Fall vorkommen, und kommt in der That sehr häufig vor, daß in dem Ausdrucke F nicht mehr x, sondern y als die unabhängige veränderliche Größe, und x vielmehr als von y abhängig betrachtet werden soll, indem eine solche gegenseitige Abhängigkeit der Größen x und y offenbar statt findet.

Wenn, indem x sich um i ändert, y die Aenderung k erleidet, so wird offenbar auch umgekehrt x die Aenderung i erleiden, wenn y sich um k ändert. Da nun nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$k = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \cdot \frac{i}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \cdot \frac{i^2}{1.2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots;$$

$$i = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{k}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots.$$

ist; so erhält man, indem man die letztere Reihe für i in den Ausdruck von k setzt, nach Potenzen von k entwickelt, und die Coefficienten mit einander vergleicht, leicht folgende Gleichungen:

$$1 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial x}{\partial y},$$

$$0 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2,$$

$$0 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} + 3\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3,$$

u. s. f. u. s. f.

woraus leicht:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}, \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^4} + 3\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5},$$

u. s. f. u. s. f.

oder mittelst der Bezeichnung von La'grange:

$$[y'] = \frac{1}{x'}, [y''] = -\frac{x''}{x'^3}, [y'''] = -\frac{x'''}{x'^4} + \frac{3x''^2}{x'^5}, \ldots.$$

Hebt man nun wieder gleiche Potenzen von ∂y auf, und bezieht, indem man ∂y als constant betrachtet, alle Differentiale auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen auf y als unabhängige veränderliche Größe; so wird

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\partial^2 x\, \partial y}{\partial x^3},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\partial^3 x\, \partial y}{\partial x^4} + 3\frac{(\partial^2 x)^2 . \partial y}{\partial x^5},$$

u. s. f. u. s. f.

Auch überzeugt man sich, wie vorher, leicht von der Richtigkeit und dem Sinne folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Immer ist hier ∂y als constant zu betrachten. Durch Entwickelung dieser Ausdrücke erhält man die schon oben gefundenen Formeln.

3. Die hier gefundenen Formeln sind für den Algorithmus der Differentialrechnung von großer Wichtigkeit. Sey z. B.

$$y = \sin x;$$

so ist bekanntlich, wenn y als Function von x betrachtet wird,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \cos x.$$

Betrachtet man nun aber x als Function von y; so ist nach dem Bewiesenen

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y .$$

Also

$$\frac{1}{\partial x}\partial y = \cos x, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc}\sin y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

Für $y = \operatorname{tang} x$ ist bekanntlich

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\cos x^2};$$

also, wenn x als Function von y betrachtet wird,

$$\frac{1}{\partial x}\partial y = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang} x^2};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc}\operatorname{tang} y}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} .$$

Ferner ist für $y = \sin x$:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\sin x .$$

Also, wenn y die unabhängige veränderliche Größe ist,

$$\frac{\partial^2 x\, \partial y}{\partial x^3} = \sin x .$$

Aber nach dem Obigen

$$\partial x^3 = \cos x^{-3} . \partial y^3 .$$

Also

$$\frac{\partial^2 x}{\cos x^{-3} . \partial y^2} = \sin x, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial^2 . \operatorname{Arc}\sin y}{\partial y^2} = \frac{y}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} .$$

Differentiirt man den vorher gefundenen Ausdruck für $\frac{\partial \operatorname{Arc}\sin y}{\partial y}$ nach bekannten Regeln von Neuem, so erhält man Dasselbe. Aus diesen wenigen Beispielen wird der Nutzen der gefundenen Formeln schon hinlänglich erhellen.

4. Soll ferner die Unabhängigkeit der veränderlichen Größe x auf eine andere veränderliche Größe t, welche als Function von x und y betrachtet wird, übergetragen werden, wie Crelle diese Operation gar nicht unpassend bezeichnet; so muß man bekanntlich (1.) überhaupt setzen:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. s. f. u. s. f.

Da aber t eine Function von x und y ist, welche wir im Allgemeinen durch

$$t = \varphi(x, y)$$

bezeichnen wollen, so kann man offenbar auch umgekehrt x und y, wo y von x abhängig ist, als Functionen von t betrachten, und eine Aenderung von t wird folglich immer auch Aenderungen von x und y herbeiführen. Also ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$t + i = \varphi\left(x + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots,\ y + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots\right),$$

d. i. für

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta' = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere veränderliche Größen (Taylors Lehrsatz. 7.):

$$i = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\Delta}{1} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\Delta'}{1} + \frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y}\,\frac{\Delta}{1} \cdot \frac{\Delta'}{1} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\frac{\Delta'^2}{1.2} + \ldots.$$

wo alle Differentialquotienten von t partielle Differentialquotienten in Bezug auf x und y sind. Setzt man nun für Δ und Δ' die vorher gefundenen Werthe, entwickelt nach Potenzen von i, und vergleicht die Coefficienten; so erhält man:

$$1 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\,\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},$$

u. s. f. u. s. f.

Mittelst dieser Gleichungen kann man sowohl alle Differentialquotienten von x in Bezug auf t, als auch alle Differentialquotienten von y in Bezug auf t eliminiren. Es ist nämlich z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}}{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung, so erhält man $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, u. s. f. Werden nun die gefundenen Ausdrücke in die obigen Formeln für $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... gesetzt, so erhält man Ausdrücke für diese Differentialquotienten, in welchen die Differentialquotienten von x in Bezug auf t nicht mehr vorkommen.

Eben so ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t}}{\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)},$$

und man kann ganz auf ähnliche Weise wie vorher $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... von $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, ... befreien. Die eine dieser Eliminationen muß aber immer vorgenommen werden, weil, wegen der Abhängigkeit von x und y von einander, eben so, wie in dem gegebenen Ausdrucke bloß die Differentialquotienten von y nach x vorkamen, wenn t die unabhängige veränderliche Größe seyn soll, auch nur von einer der Größen x und y die Differentialquotienten nach t vorkommen dürfen.

5. Es kann aber auch t nicht als eine entwickelte Function von x und y, sondern unentwickelt, mittelst einer

Differentialgleichung gegeben seyn, wie wenn z. B., um nur diesen einfachen Fall zu betrachten,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \ldots\right)$$

wäre. Man setze für $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... in die gegebene Function F die in (1.) entwickelten Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. s. f. u. s. f.

und thue ein Gleiches in Bezug auf die Function φ. Den dadurch hervorgehenden Ausdruck dieser Function bezeichne man durch Ω. Nach (2.) ist

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 1, \text{ d. i. } \Omega \frac{\partial x}{\partial t} = \Omega' = 1;$$

also

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \Omega'}{\partial t^3} = \ldots = 0.$$

Durch die Entwickelung dieser Differentialquotienten nach t erhält man Gleichungen, mittelst welcher man wieder die Differentialquotienten einer der Größen x, y in Bezug auf t eliminiren kann. Die erhaltenen Ausdrücke substituirt man in die schon oben verwandelte Function, welche auf diese Art in einen Ausdruck verwandelt werden wird, der, außer den beiden Größen x und y, nur noch die Differentialquotienten einer dieser beiden Größen in Bezug auf die neue unabhängige veränderliche Größe t enthält.

Der Raum gestattet hier nicht größere Ausführlichkeit; wir verweisen daher auf Lagrange Léçons sur le calcul des fonctions. Paris. 1806. p. 62. Lacroix Traité du calcul diff. et int. T. I. p. 203. sqq., dessen Traité élém. de calc. diff. et int. p. 154.. Francoeur cours complet de Math. pures. T. II. Paris. 1828. p. 280., und vorzüglich auf das angeführte Werk

von Crelle (S. 373 — 415), wo dieser Gegenstand mit besonderer Ausführlichkeit und Genauigkeit behandelt, und auch auf solche Fälle, wo mehrere unabhängige veränderliche Größen vorkommen, Rücksicht genommen wird. Man muß sich nur vorher mit den neuen Zeichen des Verfassers einigermaßen bekannt machen (Nr. 32.).

Verdoppelung des Würfels, siehe Delische Aufgabe.

Verfolgungslinien (courbes de poursuite) heißen Curven, bei welchen der Bogen zu dem Unterschiede der Abscisse und Subtangente ein gegebenes constantes Verhältniß hat.

Ist a der Exponent dieses Verhältnisses, und s der Bogen; so ist (Berührende Linie. 13.)

$$s = a\left(x - \frac{y\partial x}{\partial y}\right)$$

die Bedingungsgleichung der Aufgabe.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -ay.\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Folglich (Rectification. 2.):

$$-ay.\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{a\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\log n\, y = a \log n\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right\} + \log n\, C,$$

$$C = \frac{y}{\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right\}^a}.$$

Der Werth der Ordinate, für welche $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ ist, sey $= k$; so ist $C = k$. Also

$$y^{\frac{1}{a}} = k^{\frac{1}{a}}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right\}.$$

Macht man nun diese Gleichung rational; so erhält man leicht:

$$\partial x = \tfrac{1}{2}\partial y\left\{\left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1}{a}}\right\},$$

unddurch Integration:

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{k^{\frac{1}{a}}.y^{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{a}} - \frac{k^{-\frac{1}{a}}.y^{1+\frac{1}{a}}}{1+\frac{1}{a}}\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt[a]{ky^{a-1}}}{a-1} - \frac{\sqrt[a]{k^{-1}y^{a+1}}}{a+1}\right\} + C.$$

Für $a > 1$, vorausgesetzt daß $y = o$ für $x = o$, ist $C = o$. Für $a = 1$, wo das erste Glied der Gleichung $= \infty$ wird, ist die Differentialgleichung:

$$\partial x = \tfrac{1}{2}\partial y\left\{\frac{k}{y} - \frac{y}{k}\right\},$$

$$x = \tfrac{1}{2}k\log n\, y - \tfrac{1}{4}.\frac{y^2}{k} + C.$$

Da man wegen $\log n\, y = \log n\, o$ für $y = o$ die Constante nicht so bestimmen kann, daß x, y zugleich verschwinden; so bestimme man C so, daß $y = k$ wird für $x = o$. Dies giebt:

$$x = \tfrac{1}{2}k\log n\frac{y}{k} - \tfrac{1}{4}.\frac{y^2-k^2}{k}.$$

Bestimmt man, wenn $a < 1$ ist, die Constante auf dieselbe Art; so erhält man:

$$x = \tfrac{1}{2}.\frac{k^{\frac{1}{a}}y^{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{a}} - \tfrac{1}{2}.\frac{k^{-\frac{1}{a}}y^{1+\frac{1}{a}}}{1+\frac{1}{a}} - \frac{k}{a-\frac{1}{a}}.$$

Erhält a verschiedene Werthe; so erhalten die Curven sehr verschiedene Gestalten. Sie sind von Maupertuis und Bouguer (Mém. de Paris. 1732. p. 1.) zuerst betrachtet. Auch s. m. v. Prittwitz Untersuchungen über Curven, die durch ihre Subtangente rectificirt werden. Lpzg. 1815. Brandes höhere Geom. II. S. 99. Der Ur-

sprung des Namens wird sich am einfachsten für den Fall, wo $a = 1$ ist, zeigen lassen. Seyen nämlich A, B (Fig. 101.) zwey Körper, welche sich gleichförmig mit gleicher Geschwindigkeit so bewegen, daß A immer in der Abscissenlinie fortgeht, B aber seinen Weg immer nach A hinrichtet, wie z. B. ein Hund, der von seinem Herrn angerufen wird, indem sich der Herr nach einer geraden Linie fortbewegt. Sind nun A, B gleichzeitig in A′, B′; so ist A′B′ die Berührende für B′, A′C′ die Subtangente, und offenbar Bogen $BB' = AA' = AC' + A'C' = AC' - (-A'C') =$ Abscisse — Subtangente, da hier die Subtangente als negativ zu betrachten ist. In diesem Falle ist also der Bogen dem Unterschiede zwischen der Abscisse und Subtangente gleich, d. i. $a = 1$. Für andre Bewegungen erhält man andre Werthe von a. M. vergl. noch einen Aufsatz von Lehmus in Crelles Journal d. Math. I. S. 61.

Verhältniß (ratio, λόγος) zweyer gleichartigen Größen zu einander ist nach Euclid (V. Erkl. 3.) die gegenseitige Beziehung, in welcher diese beiden Größen in Absicht ihrer Größe zu einander stehen, so daß also der Begriff eines Verhältnisses überhaupt aus der Vergleichung zweier gleichartigen Größen mit einander entspringt.

1. Die vollkommenste Vergleichung zweyer Größen mit einander wird aber angestellt, wenn man untersucht, wie die eine aus der andern entstehen kann, wobei man also immer die eine als bekannt, die andere als unbekannt ansehen muß.

2. Die beiden mit einander verglichenen Größen heißen Glieder des Verhältnisses; die als bekannt betrachtete das erste, die andere das zweite Glied, obgleich einige Schriftsteller hiervon abweichen. S. z. B. Eucl. Elem. lib. XV. Op. J. Barrow. Cant. 1655. p. 90.

3. Die Größe B kann aus A auf doppelte Art entstehen:

a) Wenn man zu A eine gewisse (positive oder negative) Größe addirt.

b) Wenn man A mit einer gewissen (ganzen oder gebrochenen) Zahl multiplicirt.

Die erste Art des Verhältnisses nennt man ein arithmetisches, die andere ein geometrisches oder auch bloß ein Verhältniß. Beide Namen sind unpassend. Das erste bezeichnet man durch $A - B$, das zweite durch $A : B$.

Bei den ältern Mathematikern (Clavii Euclides Lib. V. Def. IV.) ist proportio, eigentlich ratio, multiplex ein Verhältniß von der Form $nA : A$, wenn n eine ganze Zahl ist, und zwar proportio dupla, tripla, etc. wenn $n = 2, = 3$, ꝛc. Das Verhältniß $A : A$ heißt ratio aequalitatis, jedes andere ratio inaequalitatis. Verhältnisse von der Form $(n + 1) A : nA$, $nA : (n + 1) A$, $(n + m) A : nA$, $nA : (n + m) A$, wo $n > m$, $(mn + 1) A : nA$, $(mn + p) A : nA$, wo $n > p$, heißen: ratio superparticularis, subsuperparticularis, superpartiens, subsuperpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens; so wie denn die alten Arithmetiker sehr reich an dergleichen Kunstwörtern sind, welche aber alle nicht mehr gebraucht werden.

4. Die Größe D, welche zu A addirt werden muß, um B zu erhalten, heißt die Differenz des Verhältnisses $A - B$. Die Zahl e, mit welcher man A multipliciren muß, um B zu erhalten, heißt der Exponent oder Name von $A : B$. Es ist also immer $A + D = B$, $Ae = B$.

5. Die Differenz läßt sich für jede zwei Größen leicht finden, da immer $D = B - A$. Die schwierigere Aufgabe, den Exponenten zu finden, wird auf folgende Art aufgelöset. Man bestimme, welches durch wiederholte Subtraction immer möglich ist, die ganzen Zahlen $n, n', n'', n''', \ldots$, wo n auch $= o$ seyn kann, so, daß

$$
\begin{aligned}
B &= nA + R, \\
A &= n'R + R', \\
R &= n''R' + R'', \\
R' &= n'''R'' + R''', \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wo $R < A$, $R' < R$, $R'' < R'$, $R''' < R''$, u. s. f. ist; so ist

$$\frac{B}{A} = n + \frac{R}{A};$$

$$\frac{A}{R} = n' + \frac{R'}{R}, \quad \frac{R}{A} = \frac{1}{n' + \frac{R'}{R}},$$

$$\frac{R}{R'} = n'' + \frac{R''}{R'}, \quad \frac{R'}{R} = \frac{1}{n'' + \frac{R''}{R'}};$$

$$\frac{R'}{R''} = n''' + \frac{R'''}{R''}, \quad \frac{R''}{R'} = \frac{1}{n''' + \frac{R'''}{R''}};$$

u. s. f. u. s. f.

woraus durch successive Substitution sogleich:

$$\frac{B}{A} = n + \frac{1}{n' + \frac{1}{n'' + \frac{1}{n''' + \ldots}}}$$

oder für

$$e = n + \frac{1}{n' + \frac{1}{n'' + \frac{1}{n''' + \ldots}}}$$

$$B = Ae,$$

so daß also e in Form eines Kettenbruchs gefunden ist.

6. Man muß zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der obige Kettenbruch aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern besteht. Im ersten Falle kann e durch eine Rationalzahl nicht genau ausgedrückt werden. Der zweite Fall tritt ein, wenn man in der Reihe

$$R, R', R'', R''', \ldots\ldots$$

auf ein Glied $= 0$ kommt. Ist nämlich $R^{(\alpha)} = 0$; so sind die beiden letzten Gleichungen in (5.):

$$R^{(\alpha-3)} = n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)} + R^{(\alpha-1)}$$

$$R^{(\alpha-2)} = n^{(\alpha)} R^{(\alpha-1)}$$

so daß also $R^{(\alpha-1)}$ in $R^{(\alpha-2)}$, folglich auch in $n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)}$, also auch in $n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)} + R^{(\alpha-1)}$ d. i. in $R^{(\alpha-3)}$ aufgeht. So schließt man leicht weiter, daß $R^{(\alpha-1)}$ in

$$R^{(\alpha-4)}, R^{(\alpha-5)}, \ldots R, A, B$$

aufgeht, und folglich ein gemeinschaftliches Maaß von A, B ist, diese Größen also commensurabel sind. Hieraus sieht man, daß der obige Kettenbruch, wenn die Größen A, B commensurabel sind, jederzeit abbricht, und also e durch einen rationalen Bruch dargestellt wird. Sind A, B incommensurabel; so bricht der Kettenbruch nie ab, und e ist irrational.

7. Da $B = Ae$ und $e = 1 . e$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie e aus 1. Folglich sind offenbar die Verhältnisse $A : B$ und $1 : e$ einander gleich, so daß also jedes Verhältniß zweier gleichartigen Größen durch ein Zahlenverhältniß dargestellt werden kann, welches rational oder irrational ist, jenachdem A und B commensurabel oder incommensurabel sind. Im ersten Falle sey $e =$ dem ratinalen Bruche $\frac{b}{a}$. Da $B = Ae = A . \frac{b}{a}$ und $b = a . \frac{b}{a}$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie b aus a. Also ist $A : B = a : b$, und jedes Verhältniß commensurabeler Größen kann folglich immer durch das Verhältniß zweier rationalen ganzen Zahlen dargestellt werden. Im Falle der Incommensurabilität kann dies nur annähernd geschehen, wenn man für den Exponenten die successiven Näherungswerthe des obigen Kettenbruchs setzt. Da die Näherungswerthe bekanntlich abwechselnd größer und kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs sind; so wird mit Hülfe derselben der Zahlenwerth des Exponenten auch leicht zwischen immer engere Gränzen eingeschlossen.

Gleichheit der Verhältnisse.

8. Arithmetische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Differenzen einander gleich sind, und zwey gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion, deren allgemeiner Ausdruck also

$$A - B = A' - B'$$

ist, woraus sich sogleich ergiebt:

$$A + B = A + B,$$

d. h. in jeder arithmetischen Proportion sind die Summen des ersten und letzten und zweiten und dritten Gliedes einander gleich. Ist $B = A'$; so heißt die Proportion eine stetige, deren allgemeine Form also

$$A - B = B - C$$

ist. B heißt die mittlere arithmetische Proportionalzahl, das arithmetische Mittel, zwischen A und C, und es erhellet leicht, daß $B = \frac{1}{2}(A + C)$. Diese Proportionen sind fast von gar keinem Gebrauche in der Mathematik, weshalb diese wenigen Bemerkungen hinreichen mögen.

9. Geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind, weil dann offenbar in beiden Verhältnissen das zweite Glied auf einerley Art aus dem ersten entsteht, und zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion (proportio, ἀναλογία). Diese bey den Neuern gewöhnliche Erklärung hat Euclid in Beziehung auf ganze Zahlen VII. Erkl. 20. Bey Größen überhaupt mußte dem griechischen Geometer die Incommensurabilität Schwierigkeit machen. Er giebt daher V. Erkl. 6. folgende Definition gleicher Verhältnisse: Größen sind in einerley Verhältniß, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn bei Vergleichung willkührlicher Gleichvielfacher der ersten und dritten, und willkührlicher Gleichvielfacher der zweiten und vierten, allemal, wenn das Vielfache der ersten größer, kleiner oder eben so groß ist, als das Vielfache der zweiten, auch das Vielfache der dritten größer, kleiner oder eben so groß ist als das Vielfache der vierten.

Die allgemeine Form einer geometrischen Proportion ist also

$$A : B = C : D,$$

oder nach einer andern Bezeichnung:

$$A : B :: C : D.$$

Nach der ersten Erklärung ist $B = Ae$, $D = Ce$, nach der andern dagegen gleichzeitig für jedes positive ganze n

und m, $nA \gtrless mB$ und $nC \gtrless mD$, wo das Zeichen $\gtrless$ größer, gleich oder kleiner bedeutet.

10. Bey keiner der beiden Erklärungen brauchen A, B, C, D alle vier gleichartige Größen zu seyn, sondern nur A, B und C, D. Bey den arithmetischen Proportionen ist dies natürlich anders. Jetzt werden wir nun hauptsächlich zeigen, daß jede der beiden Erklärungen eine unmittelbare Folge aus der andern ist.

11. Sey daher zunächst

$$A:B = C:D$$

nach der ersten Erklärung, und folglich $B = Ae$, $D = Ce$. Ist nun $nA \gtrless mB$; so ist $nA \gtrless m.Ae$, $nA \gtrless meA$, $n \gtrless me$, $nC \gtrless meC$, $nC \gtrless m.Ce$, $nC \gtrless mD$; folglich auch

$$A:B = C:D$$

nach der zweiten Erklärung.

Ist dagegen

$$A:B = C:D$$

nach der zweiten Erklärung; so ist gleichzeitig $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$. Sey nun $B = Ae$, $D = Ce'$ (5.); so ist $nA \gtrless m.Ae$, $nC \gtrless m.Ce'$; $nA \gtrless meA$, $nC \gtrless me'C$; $n \gtrless me$, $n \gtrless me'$. Gäbe es nun zwei Werthe von n, m, für welche $n = me$ wäre; so wäre auch $n = me'$, also $e = \frac{n}{m} = e'$. Gäbe es aber nicht zwei solche Werthe; so sey zuerst $e' = e + \varepsilon$. Nimmt man nun die ganze Zahl m so an, daß $m\varepsilon > 1$, welches immer möglich, da man bloß $m > \frac{1}{\varepsilon}$ zu nehmen braucht; so erhellet leicht, daß man die ganze Zahl n immer so annehmen kann, daß sie zwischen me und $me + m\varepsilon$ fällt, oder daß $n > me$, $n < me + m\varepsilon$ ist, d. h. $n > me$, $n < m(e + \varepsilon)$; $n > me$, $n < me'$. Nach dem Obigen ist aber immer gleichzeitig $n > me$, $n > me'$, welches sich einander widerspricht, so daß also nicht $e' = e + \varepsilon$, oder $e' > e$ seyn kann. Wäre ferner $e' = e - \varepsilon$; so nehme man m wieder so an, daß $m\varepsilon > 1$ ist. Dann wird man n immer so annehmen können, daß es $> me - m\varepsilon$, $< me$, d. h.

$> m(e - \varepsilon)$, $< me$; $> me'$, $< me$ ist, da doch immer zugleich $n < me$, $n < me'$ seyn muß. Demnach kann auch e' nicht $< e$ seyn, so daß also $e' = e$ ist, und A, B, C, D auch nach der ersten Erklärung proportional sind. Auf eine andere Art ist die Verbindung zwischen der neuern und euclidischen Theorie der Proportionen hergestellt in Gartz Allgemeine Größenlehre. Halle. 1820. S. 61., in welchem Werkchen überhaupt die Lehre von den Verhältnissen sehr deutlich und streng auf ganz elementarem Wege vorgetragen ist. An diesem Orte hielt ich die Anwendung der Kettenbrüche für passend. M. s. auch zwey Aufsätze von Pfleiderer in Hindenburgs Archiv. II. S. 257. 440., und Expositio et dilucidatio lib. V. Elem. Eucl. Auct. Pfleiderer Tub. 1782. Die Anwendung der euclidischen Definition wird man am besten aus den Elementen. VI. selbst kennen lernen, der Vortrag ist strenger als in allen neuern geometrischen Werken. Die Schwierigkeit der Incommensurabilität wird ganz vermieden.

12. Die vier Größen, welche eine Proportion bilden, heißen ihre Glieder: das erste, zweite, dritte und vierte. Das erste und dritte heißen Vorderglieder, das zweite und vierte Hinterglieder, jene sowohl, als auch diese ähnlich liegende oder homologe Glieder, das erste und vierte äußere, das zweite und dritte mittlere Glieder. Sind die mittleren Glieder gleich; so heißt die Proportion stetig, sonst discret oder abgesondert. Stetige Proportionen bezeichnet man statt durch $A:B = B:C$, auch so: $\div\div A.B.C$. Das vierte Glied einer jeden Proportion heißt die vierte Proportionalgröße zu den drei ersten, das mittlere Glied einer stetigen die mittlere Proportionalgröße zwischen den beiden äußern, und das vierte Glied einer solchen Proportion die dritte Proportionalgröße zu den beiden ersten.

13. Verhältnisse wie

$$A:B,\ B:C,\ C:D,\ \text{u. s. f.}$$

heißen aneinanderhangend, welches man, wenn

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$
$$C:D = C':D',$$
u. s. f.

ist, auch so bezeichnet:

$$A:B:C:D:\ldots = A':B':C':D':\ldots.$$

In diesem Falle sagt man auch, A, B, C, D, ... seyen mit A′, B′, C′, D′, ... in geordneter Proportion (Ordinata proportio). Bei Proportionen von folgender Form:

$$A:B = D':E',$$
$$B:C = C':D',$$
$$C:D = B':C',$$
$$D:E = A':B',$$

und eben so bei mehrern Verhältnissen, sagt man, diese Größen seyen in zerstreuter Proportion (Perturbata proportio).

Wenn mehrere Größen A, B, C, D mit eben so vielen A′, B′, C′, D′ in geordneter oder zerstreuter Proportion sind, und es ist $A:D = A':D'$, d. h. es verhält sich die erste von jenen zur letzten von jenen, wie die erste von diesen zur letzten von diesen; so sagt man, die Größen A, D, A′, D′ seyen aus dem Gleichen proportional (ex aequalitate, ex aequo).

14. Gegebene Verhältnisse A:B, C:D, E:F, G:H zusammensetzen heißt ein Verhältniß A′:B′ finden, für welches, wenn α, α', α'', α''' gewisse Größen bezeichnen,

$$A:B = A':\alpha$$
$$C:D = \alpha:\alpha'$$
$$E:F = \alpha':\alpha''$$
$$G:H = \alpha'':B'$$

ist, und A′:B′ heißt das aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesetzte (composita), welches man auch so bezeichnet:

$$A':B' = (A:B) + (C:D) + (E:F) + (G:H)$$

Werden n gleiche Verhältnisse zusammengesetzt; so heißt das zusammengesetzte Verhältniß das nfache von einem

der gegebenen Verhältnisse, welches man auch durch $A' : B' = n\,(A : B)$ bezeichnet, und ratio multiplicata, duplicata, triplicata nennt. Das Doppelte und Dreifache eines Verhältnisses heißt auch quadratisches und cubisches Verhältniß, weil, wenn $a : b$ ein Verhältniß in Zahlen ist, sein Doppeltes $= a^2 : b^2$, und Dreifaches $= a^3 : b^3$ ist, wie wir unten sehen werden.

15. Der Zusammensetzung der Verhältnisse ist die Theilung derselben entgegengesetzt. Ein Verhältniß theilen heißt es in mehrere Verhältnisse zerlegen, durch deren Zusammensetzung das gegebene Verhältniß erhalten wird. Jedes der gefundenen Verhältnisse heißt ein Theil des gegebenen; ein aliquoter Theil, wenn die gefundenen Verhältnisse unter einander alle gleich sind. Jedes Vielfache eines aliquoten Theils heißt ein aliquanter Theil. Die ganze oder gebrochene Zahl, welche ein Vielfaches, einen aliquoten oder aliquanten Theil eines Verhältnisses bestimmt, heiße der Coefficient desselben. Der zweite, dritte, überhaupt nte Theil eines Verhältnisses heißt in Bezug auf letzteres ratio subduplicata, subtriplicata, submultiplicata.

Ueber die harmonische und contraharmonische Proportion s. m. die entsprechendtn Artikel; von dem äußern und mittlern Verhältniß den Artikel Theilung (12.). Die im Folgenden der Kürze wegen oft nur in Zeichen ausgedrückten Sätze wird man sich leicht in Worte übersetzen. Wir werden uns vorzüglich an die Definition des Euclides halten.

16. Nach der Definition des Euclides läßt sich nicht übersehen, daß und wie zu jeden drei Größen A, B, C, wo die beiden ersten gleichartig sind, eine vierte Proportionalgröße gefunden werden kann, obgleich er auch die Möglichkeit dieser Aufgabe bey der allgemeinen Theorie im fünften Buche nicht voraussetzt, wofür er aber sich genöthigt sieht, mehrere Sätze über die ungleichen Verhältnisse in die Lehre von der Gleichheit der Verhältnisse mit aufzunehmen, welches, wie wir sehen werden, sonst nicht nöthig gewesen wäre. Für Linien löset Euclides die Aufgabe VI. 12.

besonders auf, und für Zahlen würde sich die Auflösung leicht aus VII. 19. (s. unten 39.) ergeben. Nach der neuern Theorie sucht man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, der sich auch im Falle der Incommensurabilität durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen läßt, und setzt $X = C^e$; so ist $A:B = C:X$ (9.), also X die gesuchte vierte Proportionale. Soll zwischen A, C die mittlere Proportionale gefunden werden; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:C, und setze $X = A.\sqrt{e}$, weil dann $C = A^e = A.\sqrt{e}.\sqrt{e} = X.\sqrt{e}$, also $A:X = X:C$ ist, indem der Exponent beider Verhältnisse $= \sqrt{e}$. Für Linien löset Euclid diese Aufgabe VI. 13. auf allgemein bekannte Art auf. Soll X so bestimmt werden, daß $A:B = X:C$ ist; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, und setze $X = \frac{1}{e} C$, weil dann $B = A^e$ und $C = X^e$ ist.

17. Wenn A, B, C, D gleichartige Größen sind, und $A = C$, $B = D$ ist; so ist $A:B = C:D$.

Da $nA = nC$, $mB = mD$ ist; so ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$, also $A:B = C:D$ (9.).

18. Wenn $A:C = B:C$ ist; so ist $A = B$.

Wäre $A > B$, $= B + \Delta$; so nehme man n so, daß $n\Delta > C$ ist, und bestimme m so, daß zunächst $mC > nB$, also $(m-1)C \overset{=}{<} nB$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(B + \Delta)$, $mC < nA$, da doch $mC > nB$, gegen die Voraussetzung (9.). Wäre $A < B$, $= B - \Delta$; so nehme man wieder $n\Delta > C$, und m so, daß $mC > nA$, $(m-1)C \overset{=}{<} nA$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(A + \Delta)$, $mC < nB$, da doch $mC > nA$, gegen die Voraussetzung. Also $A = B$.

19. Wenn $A:B = C:D$ ist; so ist auch $C:D = A:B$.

Wenn $nA \gtrless mB$ ist; so ist nach der Voraussetzung $nC \gtrless mD$, und folglich auch $nA \gtrless mB$, wenn $nC \gtrless mD$ ist; also $C:D = A:B$ (9.).

20. Wenn $A:B = C:D$, $A':B' = C:D$ ist; so ist auch $A:B = A':B'$.

Da (19.) auch $C:D = A':B'$ ist; so ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$ und $nC \gtrless mD$, $nA' \gtrless mB'$; also auch zugleich $nA \gtrless mB$, $nA' \gtrless mB'$, d. i. $A:B = A':B'$ (9.).

21. Ist also $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$, $A:B = A':B'$, so schließt man leicht, daß auch $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ ist.

22. Wenn $A:B = C:D$ ist; so ist auch $B:A = D:C$.

Nach der Voraussetzung ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also offenbar auch zugleich $mB \gtrless nA$, $mD \gtrless nC$, d. i. $B:A = D:C$ (9.).

Ist also $C:A = C:B$, so ist $A:C = B:C$; also $A = B$ (18.).

23. Für $A:B = C:D$ ist, wenn α, β ganze Zahlen bezeichnen:

$$\alpha A:\alpha B = \beta C:\beta D\,,$$
$$\alpha A:\beta B = \alpha C:\beta D\,,$$
$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\alpha} = \frac{C}{\beta}:\frac{D}{\beta}\,,$$
$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:\frac{D}{\beta}\,.$$

Nach der Voraussetzung ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also auch zugleich $\alpha nA \gtrless \alpha mB$, $\beta nC \gtrless \beta mD$ und $\frac{nA}{\alpha} \gtrless \frac{mB}{\alpha}$, $\frac{nC}{\beta} \gtrless \frac{mD}{\beta}$, oder $n.\alpha A \gtrless m.\alpha B$, $n.\beta C \gtrless m.\beta D$, und $n.\frac{A}{\alpha} \gtrless m.\frac{B}{\alpha}$, $n.\frac{C}{\beta} \gtrless m.\frac{D}{\beta}$, woraus unmittelbar sich die erste und dritte Proportion ergeben. Es ist aber auch zugleich, wenn $n\alpha$, $m\beta$ als einfache ganze Zahlen betrachtet werden, $n\alpha A \gtrless m\beta B$, $n\alpha C \gtrless m\beta D$, nach der Voraussetzung, und folglich $n.\alpha A \gtrless m.\beta B$, $n.\alpha C \gtrless m.\beta D$, woraus die zweite Proportion folgt. Endlich sey

$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:X\,;$$

so ist nach der zweiten jetzt bewiesenen Proportion:

$$\alpha\left(\frac{A}{\alpha}\right):\beta\left(\frac{B}{\beta}\right) = \alpha\left(\frac{C}{\alpha}\right):\beta X\,,$$
$$A:B = C:\beta X\,.$$

Also $C:D = C:\beta X$ (20), $D = \beta X$ (22), $X = \frac{D}{\beta}$, und folglich

$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:\frac{D}{\beta}.$$

24. In jeder Proportion $A:B = C:D$ ist für $A \gtrless B$ auch $C \gtrless D$.

Für jedes n, m ist $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also für $n = m = 1$ zugleich $A \gtrless B$, $C \gtrless D$.

25. Sind A, B, C, D gleichartige Größen, und $A:B = C:D$; so ist für $A \gtrless C$ auch $B \gtrless D$.

Für $A = C$ ist auch $B = D$ (22.). Wäre für $A > C$, $= C + \Delta$ aber $B \gtreqless D$; so nehme man $n\Delta > D$, und m so, daß $mD > nC$, $(m-1)D \lesseqgtr nC$ ist. Dann ist $mD - D + D < n(C + \Delta)$, $mD < nA$. Aber $mB \gtreqless mD$; also um so mehr $mB < nA$, und folglich zugleich $nA > mB$, $nC < mD$, gegen die Voraussetzung (9.). Für $A < C$ ist $C > A$. Aber $C:D = A:B$ (19.). Also nach dem oben Bewiesenen $D > B$ oder $B < D$. Folglich zugleich $A \gtrless C$, $B \gtrless D$.

26. Sind A, B, C, D gleichartig, und $A:B = C:D$; so ist auch $A:C = B:D$.

Wegen der Voraussetzung ist $nA:nB = mC:mD$ (23.). Also zugleich $nA \gtrless mC$, $nB \gtrless mD$ (25.). Folglich $A:C = B:D$ (9.).

27. Mit den vier Gliedern jeder Proportion gleichartiger Größen kann man folgende acht Veränderungen vornehmen:

1) $A:B = C:D$
2) $A:C = B:D$ (permutando s. vicissim.)
3) $B:A = D:C$ (invertendo.)
4) $B:D = A:C$
5) $C:A = D:B$
6) $C:D = A:B$
7) $D:B = C:A$
8) $D:C = B:A$

2) folgt aus 1) nach (26.); 3) aus 1) nach (22); 4) aus

3) nach (26.); 5) aus 2) nach (22.); 6) aus 5) nach (26.); 7) aus 4) nach (22.); 8) aus 7) nach (26.).

28. Ist $A:B = C:D$; so ist

$A + B:B = C + D:D$, (componendo);

$A + C:B + D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes summando);

$A - B:B = C - D:D$, (dividendo);

$A - C:B - D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes differentiando);

$A:A \pm B = C:C \pm D$, (convertendo).

Im zweiten und vierten Falle müssen, wie sich von selbst versteht, alle vier Glieder gleichartig seyn.

Für beliebige n, m sey $n(A+B) \gtreqless mB$, $nA + nB \gtreqless mB$; so ist $mB > nB$, $m > n$. Also $nA:(m-n)B = nC:(m-n)D$ (23.), und folglich zugleich $nA \gtreqless mB - nB$, $nC \gtreqless mD - nD$ (9.), $n(A+B) \gtreqless mB$, $n(C+D) \gtreqless mD$. Da nun nach der Annahme $n(A+B) \gtreqless mB$ ist; so ist auch $n(C+D) \gtreqless mD$. Für $n(A+B) > mB$ ist auch $n(C+D) > mD$. Denn es ist $C:D = A:B$ (19.), und folglich, nach dem so eben Bewiesenen, wenn $n(C+D) \gtreqless mD$ wäre, auch $n(A+B) \gtreqless mB$, da doch $n(A+B) > mB$. Also ist zugleich $n(A+B) \gtreqless mB$, $n(C+D) \gtreqless mD$, woraus unmittelbar die erste Proportion folgt.

Nach (26.) ist $A:C = B:D$. Also nach dem so eben Bewiesenen $A + C:C = B + D:D$, und folglich (permutando) $A + C:B + D = C:D$. Aber nach der Voraussetzung $A:B = C:D$. Also $A + C:B + D = A:B$ (20.) $= C:D$.

Sey ferner $A - B:B = X:D$; so ist nach der ersten Proportion: $A:B = X + D:D$, oder $B:A = D:X + D$ (22). Nach der Voraussetzung aber $B:A = D:C$ (22.). Also $D:X + D = D:C$ (20.). Also $X + D = C$ (22.), $X = C - D$, $A - B:B = C - D:D$.

Da nun nach der Voraussetzung $A:C = B:D$ (26.); so ist nach dem so eben Bewiesenen: $A - C:C = B - D:D$, $A - C:B - D = C:D$ (26.). Aber $A:B$

$= C:D$ (Vorss.). Also $A - C : B - D = A:B$ (20.) $= C:D$.

Ferner sey $A:A - B = C:X$; so ist nach der dritten hier bewiesenen Proportion: $B:A - B = C - X:X$, $A - B:B = X:C - X$ (22.). Aber $A - B:B = C - D:D$. Also $X:C - X = C - D:D$ (20.). Folglich nach der ersten hier bewiesenen Proportion: $C:C - X = C:D$. Also $C - X = D$ (22.), $X = C - D$, $A:A - B = C:C - D$.

Da $A:B = C:D$ (Vorss.), $B:A = D:C$ (22.) ist; so ist nach der ersten hier bewiesenen Proportion: $A + B:A = C + D:C$. Also $A:A + B = C:C + D$ (22.).

29. Ist $A:B = A':B' = A'':B'' = A''':B'''\ldots$, und alle Größen gleichartig; so folgt durch mehrmalige Anwendung der zweiten vorher bewiesenen Proportion leicht, daß $A + A' + A'' + A''' + \ldots : B + B' + B'' + B''' + \ldots = A:B$.

30. Für

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$

ist immer

$$A:C = A':C'.$$

Wäre dies nicht; so sey zuerst $A:C = A':C' + \Delta$. Nun nehme man, welches offenbar immer möglich ist, m, m', n so, daß $m\Delta > A' + B'$, $m'B' > mC'$, $(m'-1)B' \leqq mC'$, $nA' > m'B'$, $(n-1)A' \leqq m'B'$ ist; so ist auch $m'B' \leqq mC' + B'$, $nA' \leqq m'B' + A'$, d. i. $nA' \leqq mC' + B' + A'$, $nA' < mC' + m\Delta$, $nA' < m(C' + \Delta)$. Da aber $m'B' > mC'$, $nA' > m'B'$ ist; so ist nach der Voraussetzung auch $m'B > mC$, $nA > m'B$ (9.), und folglich $nA > mC$. Also zugleich $nA > mC$, $nA' < m(C' + \Delta)$, welches wegen $A:C = A':C' + \Delta$ nicht seyn könnte (9.). Sey nun $A:C = A':C' - \Delta$; so muß $A':C' = A:C + \Delta'$ seyn, so daß nämlich C wächst. Nimmt man nämlich, welches offenbar immer möglich ist, m und n so, daß $m\Delta > A'$, $nA' \leqq mC'$, $(n+1)A' > mC'$; so

ist $nA' + A' - A' > mC' - m\Delta$, $nA' > m(C' - \Delta)$. Also wegen obiger Proportion $nA > mC$ (9.). Wäre nun $A' : C' = A : C - \Delta'$; so wäre wegen $nA' \gtreqless mC'$ auch $nA \gtreqless m(C - \Delta')$. Aber $nA > mC$ und $nA \gtreqless m(C - \Delta')$ widerspricht sich. Folglich ist $A' : C' = A : C + \Delta'$, wenn $A : C = A' : C' - \Delta$ ist. Da aber $A' : B' = A : B$, $B' : C' = B : C$ (Vorauss.); so kann nach dem zuerst Bewiesenen nicht $A' : C' = A : C + \Delta'$, also auch nicht $A : C = A' : C' - \Delta$ seyn. Folglich ist weder $A : C = A' : C' + \Delta$, noch $A : C = A' : C' - \Delta$. Also $A : C = A' : C'$.

31. Aus

$$\begin{aligned} A : B &= A' : B' \\ B : C &= B' : C' \\ &\ldots\ldots \\ M : N &= M' : N' \\ N : P &= N' : P' \end{aligned}$$

folgt mittelst mehrmaliger Anwendung von (30.) leicht $A : P = A' : P'$.

32. Wenn

$$\begin{aligned} A : B &= B' : C', \\ B : C &= A' : B' \end{aligned}$$

ist; so ist

$$A : C = A' : C'.$$

Sey wie vorher zuerst $A : C = A' : C' + \Delta$, und man nehme m, m', n so, daß $m\Delta > A' + B'$, $m'B' > mC'$, $(m' - 1)B' \gtreqless mC'$, $nA' > m'B'$, $(n - 1)A' \gtreqless m'B'$; so zeigt man wie in (30.), daß $nA' < m(C' + \Delta)$. Wegen der Voraussetzung ist aber auch $m'A > mB$, $nB > m'C$. Also auch $m'nA > mnB$, $mnB > mm'C$, und folglich um so mehr $m'nA > mm'C$, $nA > mC$. Also zugleich $nA > mC$, $nA' < m(C' + \Delta)$, welches wegen der angenommenen Proportion ungereimt ist (9.). Wäre $A : C = A' : C' - \Delta$; so könnte man wie in (30.) zeigen, daß $A' : C' = A : C + \Delta'$, eine Proportion, deren Ungereimtheit ganz wie in (30.) nachgewiesen wird. Folglich ist weder $A : C = A' : C' + \Delta$, noch $A : C = A' : C' - \Delta$; also $A : C = A' : C'$.

33. Aus

$$A:B = N':P'$$
$$B:C = M':N'$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$M:N = B':C'$$
$$N:P = A':B'$$

folgt mittelst mehrmaliger Anwendung von (32.) leicht: $A:P = A':P'$.

34. Ist nun

$$A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$$
$$A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$$
$$A'':B'' = \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}''$$

u. s. f.

so ist auch $(A:B) + (A':B') + (A'':B'') + \ldots = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') + \ldots$ (14.).

Sey $M:N = (A:B) + (A':B') + (A'':B') + \ldots$, $\mathfrak{M}:\mathfrak{N} = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') + \ldots$; so ist (14.):

$$A:B = M:\alpha\ ;\ \mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$$
$$A':B' = \alpha:\alpha'\ ;\ \mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\beta'$$
$$A'':B'' = \alpha':\alpha''\ ;\ \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'' = \beta':\beta''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A^{(n)}:B^{(n)} = \alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)}\ ;\ \mathfrak{A}^{(n)}:\mathfrak{B}^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$A^{(n+1)}:B^{(n+1)} = \alpha^{(n)}:N\ ;\ \mathfrak{A}^{(n+1)}:\mathfrak{B}^{(n+1)} = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}.$$

Folglich nach der Voraussetzung:

$$M:\alpha = \mathfrak{M}:\beta$$
$$\alpha:\alpha' = \beta:\beta'$$
$$\alpha':\alpha'' = \beta':\beta''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$\alpha^{(n)}:N = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}$$

woraus $M:N = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (31.).

35. Da man alle Verhältnisse im vorigen Satze als gleich annehmen kann; so folgt aus demselben unmittelbar, daß für $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, auch $n(A:B) = n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ ist, für jedes ganze n.

36. Ist

$$A : B = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$$
$$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$$
$$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D}$$
$$D : E = \mathfrak{D} : \mathfrak{E}$$

u. s. f.

so verhält sich $A + B + C + D + \ldots$ zu irgend einem Gliede auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, wie $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \ldots$ zu dem gleichstelligen Gliede auf der rechten Seite. Denn es ist

$$A + B : B = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \text{ (28.)}$$
$$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C} \text{ (Vorauss.)}$$
$$A + B : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{C} \text{ (30.)}$$
$$A + B + C : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{C} \text{ (28.)}$$
$$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D} \text{ (Vorauss.)}$$
$$A + B + C : D = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{D} \text{ (30.)}$$

u. s. f. u. s. f.

$$D : A = \mathfrak{D} : \mathfrak{A} \text{ (30. 22.)}$$
$$A + B + C : A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{A} \text{ (30.)}$$

und so auf ähnliche Art für jede zwei andere Glieder.

Zahlenproportionen.

37. In jeder Zahlenproportion sind die Producte der äußern und mittlern Glieder einander gleich.

Ist nämlich $a : b = c : d$, $b = ae$, $d = ce$ (9.); so ist auch $bce = ade$, $bc = ad$.

38. Aus zwei gleichen Producten läßt sich immer eine Proportion bilden, so daß man die Factoren des einen zu mittlern, die des andern zu äußern Gliedern macht.

Aus $pq' = p'q$ folgt z. B. $p : p' = q : q'$. Denn sei $p' = pe$, $q' = qe'$; so ist $pq'e = p'qe'$. Also $e = e'$, da $pq' = p'q$.

39. Aus $a : b = c : x$, $a : y = y : b$ folgt leicht $x = \frac{bc}{a}$, $y = \sqrt{ab}$, die bekannten Formeln für die vierte und mittlere Proportionalzahl.

Das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a + b) = m$ (8) zwischen a und b ist immer größer als das geometrische $\sqrt{ab} = m'$.

Man erhält nämlich leicht $m^2 - m'^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2$, woraus erhellet, daß $m^2 - m'^2$ immer eine positive Größe, also $m > m'$ ist. Auch ist

$$m - m' = \frac{(a-b)^2}{4(m+m')},$$

so daß also $m - m'$ desto kleiner ist, je weniger a und b von einander verschieden, und je größer diese Zahlen an sich sind, da m, m' mit a, b wachsen.

40. Für $a:b = c:d$ ist für jedes ganze oder gebrochene n, $a^n : b^n = c^n : d^n$. Denn $b = ae$, $d = ce$, $b^n = a^n . e^n$, $d^n = c^n . e^n$.

41. Aus

$$\begin{aligned} a : b &= c : d; \\ a' : b' &= c' : d', \\ a'' : b'' &= c'' : d'', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

folgt leicht:

$$aa'a''\ldots : bb'b''\ldots = cc'c''\ldots : dd'd''\ldots,$$

da $b = ae$, $d = ce$; $b' = a'e'$, $d' = c'e'$; $b'' = a''e''$, $d'' = c''e''$; u. s. f.; also $bb'b''\ldots = aa'a''\ldots \times ee'e''\ldots$, $dd'd''\ldots = cc'c''\ldots \times ee'e''\ldots$ ist. Dies nennt man Zusammensetzung der Proportionen, unterschieden von Zusammensetzung der Verhältnisse (14.).

Aus

$$\begin{aligned} a : b &= \alpha : \beta \\ a' : b' &= \beta : \gamma \\ a'' : b'' &= \gamma : \delta \\ a''' : b''' &= \delta : \varepsilon \end{aligned}$$

folgt nach dem Obigen:

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha\beta\gamma\delta : \beta\gamma\delta\varepsilon,$$

woraus nach (23.)

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha : \varepsilon.$$

42. Sollen die Verhältnisse $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$ in eins zusammengesetzt werden; so suche man successive die vierten Proportionalzahlen x, y, z, β für die willkührlich angenommene Zahl α aus den Proportionen:

$$\begin{aligned} a : b &= \alpha : x \\ c : d &= x : y \\ e : f &= y : z \\ g : h &= z : \beta; \end{aligned}$$

dann ist (14.):

$$(a:b) + (c:d) + (e:f) + (g:h) = \alpha:\beta.$$

Aber

$$aceg : bdfh = \alpha:\beta \ (41.).$$

Also aceg:bdfh das gesuchte zusammengesetzte Verhältniß.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß $n(a:b) = a^n : b^n$, und folglich $\frac{1}{n}(a:b) = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, weil $n(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = a:b$ ist. Endlich ist auch $\frac{m}{n}(a:b) = m.\frac{1}{n}(a:b) = m(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{a})^m : (\sqrt[n]{b})^m = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$.

43. Gegebene Verhältnisse, die nicht an einander hangen, können leicht an einander hangend gemacht werden, wenn man die Glieder eines jeden mit dem Producte der Hinterglieder aller vorhergehenden und dem Producte der Vorderglieder aller folgenden multiplicirt. Z. B. für vier Verhältnisse a:b, c:d, e:f, g:h erhält man: aceg:bceg, bceg:bdeg, bdeg:bdfg, bdfg:hbdf.

44. Soll eine Größe A in mehrere Theile X, Y, Z, ... zerlegt werden, welche sich wie gewisse Zahlen a, b, c, ... verhalten; so hat man nach der Bedingung folgende Proportionen:

$$a:b = X:Y$$
$$b:c = Y:Z$$
$$c:d = Z:V$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Folglich nach (36.), da $X + Y + Z + \ldots = A$:

$$a + b + c + \ldots : b = A:Y,$$
$$a + b + c + \ldots : c = A:Z,$$
$$a + b + c + \ldots : d = A:V,$$

u. s. f.

woraus leicht folgt:

$$Y = \frac{bA}{a+b+c+\ldots}, \quad Z = \frac{cA}{a+b+c+\ldots}, \quad V = \frac{dA}{a+b+c+\ldots},$$

u. s. f. u. s. f.

und mittelst der ersten Proportion:

$$X = \frac{aA}{a+b+c+\ldots}.$$

45. Die einfache und zusammengesetzte Regula de tri, letztere von den Rechenmeistern nach der Anzahl der gegebenen Sätze auch Regula quinque, septem, u. s. f. genannt, sind leichte Anwendungen der vorhergehenden Theorie auf im gemeinen Leben vorkommende Größen, unter denen man zwischen Größen, die einander gerade oder verkehrt proportional sind, zu unterscheiden hat. Größen sind nämlich einander gerade proportional, wenn mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen auch ein Wachsen oder Abnehmen der andern verbunden ist; ist aber mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen ein Abnehmen oder Wachsen der andern verbunden; so heißen sie verkehrt proportional. Waaren und Preise, Arbeiter und Zeit bei gleicher Arbeit, sind Beispiele beider Arten.

46. Die Methode der Rechnung wird aus folgenden Exempeln deutlich werden.

1) 2 Wisp. 12 Scheffel Waizen kosten 83 thlr. 18 gr. 4 pf. Was kosten 120 Wispeln?

Angabe: 2 W. 12 Sch. — 83 thlr. 18 gr. 4 pf.
Frage: 120 W. — x.

Die Größen sind gerade proportional. Also $x > 83$ thlr. 18 gr. 4 pf., so wie 120 W. > 2 W. 12 Sch. ist. Folglich

2 W. 12 Sch. : 120 W. = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x
1 : 48 = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x (23.)
670 — 2 — 8 —(8 (39.)
x = 4020 — 16 — — —(6

2) Zur Bekleidung einer Wand sind 120 Ellen Tapeten nöthig, wenn sie 1 Elle breit sind. Wie viel Ellen braucht man, wenn sie $\frac{5}{4}$ breit sind?

Angabe: 1 Elle — 120 Ellen
Frage: $\frac{5}{4}$ — — x —.

Die Größen sind verkehrt proportional. $\frac{5}{4} > 1$, $x < 120$. Also ist die Proportion:

$$\frac{5}{4} : 1 = 120 : x$$
$$\left.\begin{array}{l} 5 : 4 = 120 : x \\ 1 : 4 = 24 : x \end{array}\right\} (23.)$$

Also $x = 4 . 24$ (39.) $= 96$.

Die Rechenmeister unterscheiden zwischen gerader und verkehrter Regula de tri.

3) Für die zusammengesetzte Regula de tri habe man folgendes Exempel:

120 Arbeiter haben in 3 Tagen in einer Länge von 125 Fuß, 52 Fuß breit, 6 Fuß hoch Erde aufgedämmt. Wenn nun 460 Fuß in der Länge, 45 in der Breite, 4 Fuß hoch in einem Tage aufgedämmt werden sollen; wie viele Arbeiter würden nöthig seyn?

Man unterscheide Angabe und Frage:

125′ l.	52′ b.	6′ h.	3 T.	120 A.
460′ —	45′ —	4′ —	1 —	x —

und führe Zwischengrößen t, u, v, z, u. s. f. ein, deren Bedeutung aus folgenden Ansätzen leicht erhellen wird:

125′ l.	52′ b.	6′ h.	3 T.	120 A.
460′ —	52′ —	6′ —	3 —	t —
460′ —	45′ —	6′ —	3 —	u —
460′ —	45′ —	4′ —	3 —	v —
460′ —	45′ —	4′ —	1 —	x —

Da in jeden zwei aufeinander folgenden Reihen nur zwei bekannte Größen ungleich sind; so hat man, jenachdem die Größen gerade oder verkehrt proportional sind, sogleich folgende Proportionen:

$$125 : 460 = 120 : t$$
$$52 : 45 = t : u$$
$$6 : 4 = u : v$$
$$1 : 3 = r : x$$

woraus (41.)

$$125 . 52 . 6 . 1 : 460 . 45 . 4 . 3 = 120 : x ,$$
$$x = \frac{460 . 45 . 4 . 3 . 120}{125 . 52 . 6 . 1} .$$

Vor der Rechnung kann man im Zähler und Nenner dieses Bruchs, oder in den ersten und zweiten oder ersten und dritten Gliedern obiger Proportionen aufheben, was sich aufheben läßt. Der praktische Proportionsaufsatz sieht so aus:

$$\left.\begin{array}{r:r} 125 & 460 \\ 52 & 45 \\ 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{array}\right\} = 120 : x .$$

Die Rechnung wie vorher. Sie giebt $x = 764\frac{4}{13}$, d. h. 764 A. werden nicht ganz in 1 Tage fertig, 765 etwas früher.

Nach der Basedowischen Regel schreibt man die Angabe auf die linke, die Frage auf die rechte Seite eines Vertikalstrichs, wie folgt:

120 A.	x A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ h.	4′ h.
3′ T.	1 T.

Dies nennt man den unberichtigten Aufsatz. Er wird berichtigt, indem man alle Größen, die mit der gesuchten gerade proportional sind, versetzt:

120 A.	x A.
460′ l.	125′ l.
45′ b.	52′ b.
4′ h.	6′ h.
3 T.	1 T.

Die verkehrt proportionalen Größen bleiben stehen. Links und rechts des Strichs wird aufgehoben, was sich aufheben läßt, und etwa vorkommende Brüche durch Multiplication mit einerlei Zahl auf beiden Seiten weggeschafft. Das Product der Zahlen links durch das Product der Zahlen rechts dividirt giebt x. Die Gründe erhellen aus dem obigen Proportionsaufsatze.

Mit dieser Regel dem wesentlichen nach einerlei ist die bei den Rechenmeistern so berühmte, nach dem Holländer de Rees benannte Reesische Regel. Die Fragezahl x setze man oben auf die linke Seite eines Vertikalstrichs, und schreibe jeden Satz der Frage auf die linke oder rechte Seite, jenachdem er mit der Fragezahl verkehrt oder gerade proportional ist, wie folgt:

x A.	
	460′ l.
	45′ b.
	4′ h.
1 T.	

Die Sätze der Angabe werden sodann den gleichnamigen Sätzen der Frage gegenüber geschrieben:

x A.	120 A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ h.	4′ h.
1 T.	3 T.

Aufgehoben wird wie vorher. Das Product aller Zahlen rechts durch das Product aller Zahlen links dividirt giebt x. M. s. Mönnichs Lehrb. d. Math. I. 1. Berlin. 1800. S. 206., vorzüglich aber W. L. Willigs gründliche Vorstellung der reesischen allgemeinen Regel. 2 Bände. Bremen u. Gött. 1759. 1760. und allgemeine Regel der Rechenkunst (a. d. Holl.) übersetzt von L. M. Kahle, in drei Ausgaben: 1739, 1743, 1751.

Die Gesellschaftsregel, Kettenregel oder Regel Multiplex, auch Conjointe, Alligationsregel u. s. f. gründen sich alle auf die Lehre von den Verhältnissen, und sind in den ihnen eigends gewidmeten Artikeln nachzusehen. S. auch Regel.

Ungleichheit der Verhältnisse.

47. Verhältnisse heißen ungleich, wenn ihre Exponenten ungleich sind, und zwar heißt das Verhältniß größer, welches den kleinern Exponenten hat, und umgekehrt. Ist nämlich $B = Ae$, $B' = A'e'$, und $e < e'$; so ist $A:B > A':B'$, weil in der That A im Verhältnisse zu B größer ist, als A′ zu B′. Nach Euclid (V. Erkl. 8.) heißt ein Verhältniß größer als ein anders, wenn in irgend einem Falle das nfache der ersten Größe größer ist als das mfache der zweiten, und das nfache der dritten nicht größer als das mfache der vierten. Das andere Verhältniß heißt dann kleiner. Aus diesen Erklärungen, verbunden mit (9.), ergiebt sich unmittelbar, daß ein Verhältniß, welches weder größer noch kleiner ist als ein anders, diesem Verhältnisse gleich seyn muß.

48. Jede dieser beiden Erklärungen ist eine Folge aus der andern.

Sei zuerst $A:B > A':B'$ nach der ersten Erklärung, so daß $e < e'$ für $B = Ae$, $B' = A'e'$. Man nehme, welches offenbar immer möglich ist, einen Bruch $\frac{n}{m}$, der $> e$, $\leqq e'$ ist; so ist $n > me$, $n \leqq me'$, $nA > meA$, $nA' \gtreqless me'A'$, $nA > m.Ae$, $nA' \gtreqless m.A'e'$, $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$, also $A:B > A':B'$ nach der Erklärung des Euclides. Wäre $A:B < A':B'$, also $A':B' > A:B$; so würde man wie vorher schließen.

Ist dagegen $A:B > A':B'$ nach der Erklärung des Euclides; so gibt es zwei ganze Zahlen n, m, für welche $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$, also, wenn $B = Ae$, $B' = A'e'$ (5.) ist: $nA > m.Ae$, $nA' \gtreqless m.A'e'$, $nA > meA$, $nA' \gtreqless me'A'$, $n > me$, $n \gtreqless me'$, $\frac{n}{m} > e$, $\frac{n}{m} \gtreqless e'$. Also $e < e'$, und folglich $A:B > A':B'$ nach der ersten Erklärung.

Wir folgen vorzüglich wieder der Definition des Euclides.

49. Ist ein Verhältniß $A:B$ größer als ein anderes $A':B'$; so kann es nicht auch zugleich kleiner seyn.

Für zwei ganze Zahlen n, m ist nämlich nach der Voraussetzung $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$, und es ist zu beweisen, daß es nicht zwei Zahlen n', m' geben kann, für welche $n'A' > m'B'$, $n'A \gtreqless m'B$ ist. Könnte nämlich Beides zugleich statt finden; so wäre auch $nm'A > mm'B$, $n'mA \gtreqless mm'B$. Also $nm'A > n'mA$, $nm' > n'm$. Es wäre aber auch $nm'A' \gtreqless mm'B'$, $n'mA' > mm'B'$. Also $n'mA' > nm'A'$, $n'm > nm'$, welches dem Obigen widerspricht.

50. Wenn $A > B$ ist; so ist für jede dritte mit A und B gleichartige Größe C, $A:C > B:C$, und $C:A < C:B$.

Man setze $A - B = \Delta$ und nehme n so, daß $n\Delta > C$, d. i. $nA - nB > C$, $nA > nB + C$ ist. Nun nehme man m so, daß $mC > nB$, $(m-1)C \gtreqless nB$ ist; so ist $mC - C \gtreqless nB$, $mC \gtreqless nB + C$. Also $nA > mC$, $nB < mC$, und folglich $A:C > B:C$ (47.).

Ferner nehme man m so, daß $m\Delta > C$, $m(A-B) > C$, $mA > mB + C$, und n so, daß $nC > mB$, $(n-1)C \gtreqless mB$, also $nC \gtreqless mB + C$ ist; so ist um so mehr $nC < mA$. Also $nC > mB$, $nC < mA$, $C:B > C:A$ (47.), $C:A < C:B$.

51. Ist $A:C > B:C$; so ist $A > B$. Ist $C:A < C:B$; so ist $A > B$.

Wäre im ersten Falle $A \gtreqless B$; so wäre entweder $A:C = B:C$ (17.), oder $B:C > A:C$ (50.), Beides gegen die Voraussetzung. Wäre im andern Falle $A \gtreqless B$; so wäre entweder $C:A = C:B$ (17.), oder $C:B < C:A$ (50.), Beides gegen die Voraussetzung.

52. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist $B:A < B':A'$.

Da $A:B > A':B'$ ist; so ist $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Für $nA > mB$, $nA' < mB'$ wäre $mB' > nA'$, $mB < nA$; also $B':A' > B:A$ (47.), oder $B:A < B':A'$. Wäre aber $nA > mB$, $nA' = mB'$; so nehme man n' so, daß, für $nA - mB = \Delta$, $n'\Delta > B$, $n'(nA - mB) > B$ ist. Nun ist nach der Annahme $nn'A > mn'B$, $nn'A' = mn'B'$, $mn'B' + B' > nn'A'$, $(mn' + 1)B' > nn'A'$. Ferner $nn'A - mn'B > B$, $nn'A > (mn' + 1)B$, so daß also $(mn' + 1)B' > nn'A'$, $(mn' + 1)B < nn'A$, und demnach $B':A' > B:A$ (47.), oder $B:A < B':A'$ ist.

53. Wenn $A:B = C:D$, $C:D > A':B'$ ist; so ist auch $A:B > A':B'$.

Da $C:D > A':B'$ ist; so ist $nC > mD$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Da ferner $A:B = C:D$ ist; so ist zugleich $nC > mD$, $nA > mB$ (9.). Also auch $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$, und folglich $A:B > A':B'$ (47.).

54. Wenn $A:B = C:D$, $A':B' > C:D$ ist; so ist auch $A':B' > A:B$.

Denn es ist $nA' > mB'$, $nC \gtreqless mD$ (47.); $nA \gtreqless mB$, $nC \gtreqless mD$ (9.). Also $nA' > mB'$, $nA \gtreqless mB$, und folglich $A':B' > A:B$ (47.). Ist also $A:B = C:D$, $C:D < A':B'$; so ist auch $A:B < A':B'$.

55. Ist $A:B = C:D$, $A':B' = C':D'$, $A:B > A':B'$; so ist $C:D > A':B'$ (53.). Aber $C':D' = A':B'$. Also $C:D > C':D'$ (54.).

56. Wenn für vier gleichartige Größen $A:B > A':B'$ ist; so ist auch $A:A' > B:B'$.

Denn sey $A:B = A':\mathfrak{A}$ (16.); so ist $A':\mathfrak{A} > A':B'$ (53.). Also $A':B' < A':\mathfrak{A}$, $B' > \mathfrak{A}$ (51.). Folglich $B:B' < B:\mathfrak{A}$ (50.). Aber $A:A' = B:\mathfrak{A}$ (26.). Also $B:B' < A:A'$ (53.), oder $A:A' > B:B'$.

57. Wenn $A:B > A':B'$, $A':B' > A'':B''$ ist; so ist $A:B > A'':B''$.

Nach der Voraussetzung ist $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Wäre nun $nA'' > mB''$; so wäre $nA'' > mB''$, $nA' \gtreqless mB'$, also $A'':B'' > A':B'$ (47.), da doch $A':B' > A'':B''$ seyn soll. Demnach ist $nA'' \gtreqless mB''$, und folglich $nA > mB$, $nA'' \gtreqless mB''$. Also $A:B > A'':B''$ (47.).

58. Ist daher $A:B < A':B'$, $A':B' < A'':B''$; so ist $A'':B'' > A':B'$, $A':B' > A:B$; also $A'':B'' > A:B$ (57.), oder $A:B < A'':B''$.

Also ist auch für $A > B$, $C < D$ immer $A:C > B:D$, wenn A, B, C, D gleichartig sind. Denn sey $C + \Delta = D$; so ist $A:C + \Delta > B:D$ und $A:C > A:C + \Delta$ (50.). Folglich um so mehr $A:C > B:D$ (57.). Eben so ist für $A < B$, $C > D$, immer $A:C < B:D$, da, wie so eben bewiesen, $B:D > A:C$, also $A:C < B:D$ ist.

59. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist auch $\alpha A:\alpha B > \beta A':\beta B'$, $\alpha A:\beta B > \alpha A':\beta B'$.

Denn $A:B = \alpha A:\alpha B$ (23.), $A:B > A':B'$

(Vorauss.); also $\alpha A : \alpha B > A' : B'$ (53.). Ferner ist $A' : B' = \beta A' : \beta B'$ (23.). Also $\alpha A : \alpha B > \beta A' : \beta B'$ (54.). Auch ist $nA > mB$, $nA' \lesseqgtr mB'$ (47.). Also $n\alpha\beta A > m\alpha\beta B$, $n\alpha\beta A' \lesseqgtr m\alpha\beta B'$, d. i. $n\beta . \alpha A > m\alpha . \beta B$, $n\beta . \alpha A' \lesseqgtr m\alpha . \beta B'$. Folglich $\alpha A : \beta B > \alpha A' : \beta B'$ (47.).

60. Eben so ist für $A : B > A' : B'$, auch $\frac{1}{\alpha}A : \frac{1}{\alpha}B > \frac{1}{\beta}A' : \frac{1}{\beta}B'$, $\frac{1}{\alpha}A : \frac{1}{\beta}B > \frac{1}{\alpha}A' : \frac{1}{\beta}B'$.

Denn im entgegengesetzten Falle wäre, nach (59.) und (23.), $\alpha\left(\frac{1}{\alpha}A\right) : \alpha\left(\frac{1}{\alpha}B\right) \leqq \beta\left(\frac{1}{\beta}A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta}B'\right)$, $\alpha\left(\frac{1}{\alpha}A\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta}B\right) \leqq \alpha\left(\frac{1}{\alpha}A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta}B'\right)$, d. i. $A : B \leqq A' : B'$, da doch $A : B > A' : B'$.

61. Wenn $A : B > A' : B'$, $B : C > B' : C'$ ist; so ist auch $A : C > A' : C'$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \lesseqgtr mB'$, und $n'B > m'C$, $n'B' \lesseqgtr m'C'$ (47.). Also $nn'A > mn'B$, $nn'A' \lesseqgtr mn'B'$; $mn'B > mm'C$, $mn'B' \lesseqgtr mm'C'$. Also offenbar auch $nn'A > mm'C$, $nn'A' \lesseqgtr mm'C'$, und folglich $A : C > A' : C'$ (47.).

Die Erweiterung dieses Satzes auf mehrere Verhältnisse hat keine Schwierigkeit.

62. Wenn $A : B > A' : C'$, $B : C > B' : A'$ ist; so ist $A : C > B' : C'$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \lesseqgtr mC'$; $n'B > m'C$, $n'B' \lesseqgtr m'A'$ (47.), $nn'A > mn'B$, $nm'A' \lesseqgtr mm'C'$; $mn'B > mm'C$, $nn'B' \lesseqgtr nm'A'$. Folglich augenscheinlich $nn'A > mm'C$, $nn'B' \lesseqgtr mm'C'$. Also $A : C > B' : C'$.

Auch hier hat die Erweiterung auf mehrere Verhältnisse keine Schwierigkeit.

63. Wenn $A : B = A' : B'$, $B : C > B' : C'$ ist; so ist auch $A : C > A' : C'$.

Sei $B : C = B' : C' - \Delta$, da $B' : C' + \Delta < B' : C'$ (50.), $< B : C$ (58.) ist; so ist, weil $A : B = A' : B'$ ist, $A : C = A' : C' - \Delta$ (30.). Aber $A' : C' - \Delta > A' : C'$ (50.). Also $A : C > A' : C'$ (53.).

64. Wenn $A:B = A':C'$, $B:C > B':A'$ ist; so ist $A:C > B':C'$.

Sei $B:C = B' + \Delta:A'$, da $B' - \Delta:A' < B':A'$ (50.), $< B:C$ (58.) ist; so ist $A:C = B' + \Delta:C'$ (32.), $> B':C'$ (50.).

65. Wenn $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' > \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ ist; so ist auch $(A:B) + (A':B') > (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}')$.

Sei $(A:B) + (A':B') = M:N$, $(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$; so ist $A:B = M:\alpha$, $A':B' = \alpha:N$, und $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$, $\mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\mathfrak{N}$ (14.). Also $M:\alpha > \mathfrak{M}:\beta$, $\alpha:N > \beta:\mathfrak{N}$ (55.)., $M:N > \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (61.).

Die Erweiterung dieses Satzes auf mehrere Verhältnisse hat keine Schwierigkeit.

66. Nimmt man im vorigen Satze die Verhältnisse auf jeder der beiden Seiten des Zeichens $>$ alle als gleich an; so ergiebt sich augenblicklich, daß, für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) > n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, oder, was dasselbe ist, für $A:B < \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) < n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ ist.

67. Ist folglich $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist $\frac{1}{n}(A:B) = \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \gtreqless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \gtreqless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$, d. i. $A:B \gtreqless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ (15.) seyn würde. Demnach ist auch $m\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} = m\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35.), d. i. $\frac{m}{n}(A:B) = \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (15.).

68. Ist ferner $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist auch $\frac{1}{n}(A:B) > \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \eqless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, auch $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \eqless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35. 66.), d. i. $A:B \eqless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ seyn müßte. Also ist auch $\frac{m}{n}(A:B) > \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (66.).

69. Wenn $A:B > A':B'$, $A' > B'$ ist; so ist auch $A > B$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \eqless mB'$ (47.). Da nun

$A' > B'$ ist; so ist offenbar $n < m$. Wäre daher $A \gtreqless B$; so wäre $nA \gtreqless mB$, da doch $nA > mB$.

70. Wenn $A:B > A':B'$, $A < B$ ist; so ist auch $A' < B'$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$; also $n > m$, weil $A < B$. Wäre nun $A' \geqq B'$; so wäre $nA' > mB'$.

71. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist $A + B : B > A' + B' : B'$, $A - B : B > A' - B' : B'$, $A - B : A > A' - B' : A'$.

Nach der Vorauss. ist $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Also $nA + nB > mB + nB$, $nA' + nB' \gtreqless mB' + nB'$, d. i. $n(A + B) > (m + n)B$, $n(A' + B') \gtreqless (m + n)B'$, woraus augenblicklich $A + B : B > A' + B' : B'$ folgt (47.). Bei den letzten beiden Paaren ungleicher Verhältnisse muß man natürlich voraussetzen, daß $A' > B'$, also auch $A > B$ (69.) ist. Folglich ist, wegen $nA' \gtreqless mB'$, $n < m$. Also $nA - nB > mB - nB$, $nA' - nB' \gtreqless mB' - nB'$, d. i. $n(A - B) > (m - n)B$, $n(A' - B') \gtreqless (m - n)B$, woraus sogleich $A - B : B > A' - B' : B'$ (47.). Also (52.) $B : A - B < B' : A' - B'$, $B' : A' - B' > B : A - B'$, und folglich, nach dem ersten hier bewiesenen Satze, $B' + A' - B' : A' - B' > B + A - B : A - B$, $A' : A' - B' > A : A - B$, $A' - B' : A' < A - B : A$ (52.), $A - B : A > A' - B' : A'$.

72. Wenn $A:A' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$; so ist auch $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$.

Sey zuerst $A:A' > B:B'$; so ist $A:B > A':B'$ (56.), $A + B : B > A' + B' : B'$ (71.), $A + B : A' + B' > B:B'$ (56.), $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorss.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (57.). Ist ferner $A:A' < B:B'$; so ist $B:B' > A:A'$, $B:A > B':A'$ (56.), $A + B : A > A' + B' : A'$ (71.), $A + B : A' + B' > A:A'$ (56.), $A:A' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorss.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (57.). Ist endlich $A:A' = B:B'$; so ist $A:B = A':B'$ (26.), $A + B : B = A' + B' : B'$ (28.), $A + B : A' + B' = B:B'$ (26.), $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorss.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (53.).

73. Hieraus schließt man leicht, daß für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A':B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A'':B'' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, u. s. f., immer $A + A' + A'' + \ldots : B + B' + B'' + \ldots > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist.

74. Für $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist auch $A + B : A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$.

Für $A:A' > B:B'$ ist $A':A < B':B$ (52.), $B':B > A':A$, $B':A' > B:A$ (56.), $B' + A':A' > B + A:A$ (71.), $B' + A':B + A > A':A$ (56.), $A + B:A' + B' < A:A'$ (52.), $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorauss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Für $A:A' < B:B'$ ist $B:B' > A:A'$, $B:A > B':A'$ (56.), $A:B < A':B'$ (52.), $A':B' > A:B$, $A' + B':B' > A + B:B$ (71.), $A' + B':A + B > B':B$ (56.), $A + B:A' + B' < B:B'$ (52.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorauss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Wäre endlich $A:A' = B:B'$; so wäre $A:B = A':B'$ (26.), $A + B:B = A' + B':B'$ (28.), $A + B:A' + B' = B:B'$ (26.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Vorss.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (54.).

Die Erweiterung auf mehrere Verhältnisse ist leicht.

75. Mehrere Sätze über ungleiche Verhältnisse s. m. bei Gartz a. a. O., vorzüglich aber in Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes, ex solis lib. V. Elem. definitionibus et propositionibus deductae. Auct. Hauber. Tub. 1793.

Gränzen der Verhältnisse.

76. Wenn ein veränderliches Verhältniß immer {kleiner / größer} als ein gegebenes Verhältniß ist, aber so {vergrößert / verkleinert} werden kann, daß es {größer / kleiner} wird, als jedes gegebene Verhältniß, welches {kleiner / größer} ist, als das erste gegebene Verhältniß; so heißt dieses die Gränze im

{Wachsen / Abnehmen} des veränderlichen Verhältnisses. Ein veränderliches Verhältniß kann indeß auch bald größer, bald kleiner seyn, als ein gegebenes Verhältniß, kann aber demselben von beiden Seiten her willkührlich genähert werden. In diesem Falle mag das gegebene Verhältniß überhaupt die Gränze des veränderlichen heißen, und man sieht leicht, daß in diesem Falle eigentlich eine Gränze im Wachsen und im Abnehmen Statt findet; erstere für die Werthe des veränderlichen Verhältnisses, welche kleiner, letztere für die, welche größer sind, als das gegebene Verhältniß. Setzt man für Verhältniß nur überall Größe; so hat man die Erklärung der Gränzen veränderlicher Größen. Diese Erklärungen scheinen uns denen im Art. Gränze vorzuziehen zu seyn.

77. Wenn L die Gränze im {Wachsen / Abnehmen} von X ist; so ist das Verhältniß der Gleichheit die Gränze im {Abnehmen / Wachsen} des Verhältnisses L:X.

Sey zuerst L die Gränze in Wachsen von X; so ist immer $L > X$ (76.). Also $L:A > X:A$ (50.), $L:X > A:A$ (56.). Sey nun $L:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> A:A$; so ist; wegen $A:A = L:L$, auch $L:L' > L:L$ (54.), und folglich $L' < L$ (51.). Nimmt man nun $X > L'$, welches möglich ist, da L die Gränze im Wachsen von X ist (76.); so ist $L:X < L:L'$ (50.), und man hat also immer $L:X > A:A$, $L:X < L:L'$, wo $L:L'$ jedes Verhältniß bedeutet, welches $> A:A$ ist. Also ist $A:A$ die Gränze im Abnehmen von $L:X$. Ist aber L die Gränze im Abnehmen von X; so ist immer $L < X$ (76.). Also $L:A < X:A$ (50.), $L:X < A:A$ (56.). Sey nun $L:L' < A:A$ oder $L:L' < L:L$ (54.); so ist $L' > L$ (51.). Man nehme nun $X < L'$, welches möglich ist, da L die Gränze im Abnehmen von X ist (76.); so ist $L:X > L:L'$ (50.). Also hat man immer $L:X < A:A$, $L:X > L:L'$,

Folglich ist A : A die Gränze im Wachsen von L : X (76.).

Wäre L überhaupt die Gränze von X, so daß sich also X von beiden Seiten her der L immer mehr und mehr nähert (76.); so wird der vorige Satz doch noch richtig seyn. Man kann sich nämlich alle Werthe der Veränderlichen X in zwei Klassen getheilt denken, von denen sich die einen von der einen, die andern von der andern Seite her der L immer mehr und mehr nähern. Daher wird sich auch das Verhältniß L : X dem Verhältnisse der Gleichheit nach (77.) immer mehr und mehr von beiden Seiten her nähern, und Letzteres folglich überhaupt die Gränze des ersteren seyn.

78. Daß, wenn L irgend eine Gränze von X ist, immer auch L : A die gleichartige Gränze von X : A seyn wird, erhellet von selbst ohne weitere Erläuterung.

79. Ist umgekehrt das Verhältniß der Gleichheit die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\ \text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ von L : X; so ist L die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von X.

Ist A : A die Gränze im Abnehmen von L : X, und L′ irgend eine Größe, welche $<$ L ist; so ist L : L′ $>$ L : L (50.), L : L′ $>$ A : A (54.). Nach der Voraussetzung aber L : X $>$ A : A, L : X $<$ L : L′ (76.). Also auch L : X $>$ L : L (54.), L : X $<$ L : L′. Folglich hat man X $<$ L (51.), X $>$ L′ (51.), L′ $<$ L. Also L die Gränze im Wachsen von X. Ist dagegen A : A die Gränze im Wachsen von L : X, und L′ irgend eine Größe, welche $>$ L ist; so ist L : L′ $<$ L : L (50.), L : L′ $<$ A : A (54.). Aber nach der Voraussetzung L : X $<$ A : A, L : X $>$ L : L′ (76.), oder L : X $<$ L : L (54.), L : X $>$ L : L′. Also hat man X $>$ L (51.), X $<$ L′ (51.), L′ $>$ L. Folglich ist L die Gränze im Abnehmen von X.

Wäre das Verhältniß der Gleichheit überhaupt die Gränze von L : X; so nähert sich dieses Verhältniß von beiden Seiten her dem Verhältnisse der Gleichheit. Demnach wird sich nach dem so eben Bewiesenen auch X der

Größe L von beiden Seiten her beliebig nähern, und folglich L überhaupt die Gränze von X seyn.

80. Daß, wenn $L:A$ irgend eine Gränze von $X:A$ ist, immer auch L die gleichartige Gränze von X seyn muß, erhellet von selbst, ohne weitere Erläuterung.

81. Sind L, L' gleichartige Gränzen von X, X', und das Verhältniß $X:X'$ ist immer dem constanten Verhältniß $A:A'$ gleich; so ist auch $L:L' = A:A'$.

Seyen zuerst L, L' Gränzen im Wachsen von $X:X'$, und folglich immer $L > X$, $L' > X'$ (76.). Sey nun a) $L:L' > A:A'$; so ist $L - \Delta:L' = A:A'$, weil $L + \Delta:L' > L:L'$ (50.), $> A:A'$ (37.) ist. Nun nehme man, welches nach der Voraussetzung immer möglich, $L - X < \Delta$ (76.), d. i. $L - \Delta < X$; so ist $L - \Delta : L' < X : L'$ (50.). Aber $X:X' = A:A'$ (Vorauss.), $= L - \Delta : L'$. Also auch $X:X' < X:L'$ (54.), $X' > L'$ (51.) da doch nach der Vorss. immer $X' < L'$. b) Sey $L:L' < A:A'$, also $L:L' - \Delta = A:A'$, da $L:L' + \Delta < L:L'$ (50.) $< A:A'$ (58.) ist. Nun nehme man, welches immer möglich ist, $L' - X' < \Delta$ (76.), d. i. $L' - \Delta < X'$ so ist $L:L' - \Delta > L:X'$ (50.). Also $L:X' < X:X'$ (53.), da $X:X' = A:A'$ (Vorauss.) $= L:L' - \Delta$ ist. Folglich $L < X$ (51.), da doch immer $L > X$ (Vorauss.). Es ist also weder $L:L' > A:A'$, noch $L:L' < A:A'$. Folglich $L:L' = A:A'$.

Sind L, L' Gränzen im Abnehmen von X, X'; so ist immer $L < X$, $L' < X'$ (76.). Sey nun wieder a) $L:L' > A:A'$, also $L:L' + \Delta = A:A' = X:X'$, da $L:L' - \Delta > L:L'$ (50.), $> A:A'$ (57.) ist. Man mache nun $X' - L' < \Delta$ (76.), $X' < L' + \Delta$; so ist $L:L' + \Delta < L:X'$ (50.). Also auch $X:X' < L:X'$ (54.), und folglich $X < L$ (51.), da doch immer $X > L$ (Vorauss.). Sey ferner b) $L:L' < A:A'$, also $L + \Delta:L' = A:A' = X:X'$, da $L - \Delta:L' < L:L'$ (50.), $< A:A'$ (58.) ist. Man mache nun $X - L < \Delta$ (Vorauss.), $X < L + \Delta$; so ist $L + \Delta:L' > X:L'$ (50.). Also auch $X:X' > X:L'$ (53.), und demnach $X' < L'$ (51.), da doch immer $X' > L'$ (Vor-

ausſ.). Alſo iſt auch für Gränzen im Abnehmen $L:L' = A:A'$.

Sind endlich L, L' überhaupt Gränzen von X, X'; ſo ſeyen φX, ψX und $\varphi' X'$, $\psi' X'$ die Werthe von X, X', welche respective immer kleiner und immer größer ſind, als L, L'; ſo ſind L, L' die Gränzen im Wachſen von φX, $\varphi' X'$. Da nun immer $X:X' = A:A'$ iſt; ſo iſt auch immer $\varphi X:\varphi' X' = A:A'$. Alſo nach dem Obigen $L:L' = A:A'$. Eben ſo kann man dieſe Proportion aus den Gränzen im Abnehmen ſchließen.

Dieſer Satz iſt für die Geometrie von großer Wichtigkeit. M. ſ. den Art. Exhauſtions-Methode. Die Peripherie und der Flächenraum des Kreiſes ſind die Gränzen im Wachſen der Peripherieen und Flächenräume der in den Kreis beſchriebenen regulären Polygone. Die Peripherieen und Flächenräume zweier in zwei Kreiſe beſchriebenen regulären Polygone verhalten ſich aber wie die Halbmeſſer und wie die Quadrate der Halbmeſſer dieſer Kreiſe. Alſo verhalten ſich die Peripherieen und Flächenräume der Kreiſe eben ſo.

82. Sind L, L' gleichartige Gränzen von X, X', und es iſt $X:A = X':A'$; ſo iſt auch $L:A = L':A'$, wo X, X' nicht, wie vorher, gleichartige Größen zu ſeyn brauchen.

Seyen L, L' Gränzen im Wachſen; alſo $L > X$, $L' > X'$. Sey nun a) $L:A > L':A'$; ſo iſt $L - \Delta:A = L':A'$, weil $L + \Delta:A > L:A$ (50.), $> L':A'$ (57.). Man mache $L - X < \Delta$, $L - \Delta < X$; ſo iſt $L - \Delta:A < X:A$ (50.), $L':A' < X:A$ (54.). Aber $L' > X'$. Alſo $X':A' < L':A'$ (50.), und folglich $X':A' < X:A$ (58.), da doch immer $X':A' = X:A$ (Vorauſſ.). b) $L:A < L':A'$. Alſo $L:A = L' - \Delta:A'$, da $L':A' < L' + \Delta:A'$ (50.), alſo um ſo mehr $L:A < L' + \Delta:A'$ (58.) iſt. Man mache $L' - X' < \Delta$, $L' - \Delta < X'$; ſo iſt $L' - \Delta:A' < X':A'$ (50.), $L:A < X':A'$ (54.). Aber $L > X$. Alſo $X:A < L:A$ (50.). Folglich $X:A < X':A'$ (58), da doch $X:A = X':A'$. Es iſt alſo $L:A = L':A'$.

Sind L, L′ Gränzen im Abnehmen, also $L < X$, $L' < X'$; so sey wieder a) $L:A > L':A'$, $L:A = L' + \Delta:A'$, da $L':A' > L' - \Delta:A'$ (50.), also um so mehr $L:A > L' - \Delta:A'$ (57.) ist. Man mache $X' - L' < \Delta$, $X' < L' + \Delta$; so ist $L' + \Delta:A' > X':A'$ (50.), $L:A > X':A'$ (53.). Aber $L < X$. Also $X:A > L:A$ (50.). Also um so mehr $X:A > X':A'$ (57.), da doch immer $X:A = X':A'$. Ferner sey b) $L:A < L':A'$, also $L + \Delta:A = L':A'$, da $L - \Delta:A < L:A$ (50.), $< L':A'$ (58.) ist. Man nehme $X - L < \Delta$, $X < L + \Delta$; so ist $L + \Delta:A > X:A$ (50.), $L':A' > X:A$ (53.). Aber $L' < X'$, $X':A' > L':A'$ (50.), folglich um so mehr $X':A' > X:A$ (57.), da doch immer $X':A' = X:A$. Also ist $L:A = L':A'$.

Für Gränzen überhaupt beweiset man den Satz durch ein dem in (81.) gebrauchten ganz ähnliches Raisonnement.

83. Ist $L:L'$ die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von $X:X'$; so ist $L':L$ die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\ \text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ von $X':X$.

Ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$; so ist $L:L' > X:X'$. Also $L':L < X':X$ (52.). Sey nun $A:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $L':A > L':L$, also $L':A$ irgend ein Verhältniß, welches $> L':L$. Nach der Voraussetzung ist nun $X:X' > A:L'$ (76.). Also $X':X < L':A$ (52.). Folglich ist $L':L$ die Gränze im Abnehmen von $X':X$ (76.). Ist ferner $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$; so ist $L:L' < X:X'$. Also $L':L > X':X$ (52.). Sey nun $A:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$ ist; so ist $L':A$ irgend ein Verhältniß, welches $< L':L$ ist (52.). Aber $X:X' < A:L'$ (Vorauss.) Also $X':X > L':A$ (52.), und folglich $L':L$ die Gränze im Wachsen von $X':X$ (76.).

84. Wenn immer $X:X' = Y:Y'$, und $L:L'$ eine

Gränze von $X:X'$ ist; so ist $L:L'$ die gleichnamige Gränze von $Y:Y'$.

Ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$; so ist immer $L:L' > X:X'$. Also nach der Voraussetzung auch $L:L' > Y:Y'$ (54.). Ist nun $A:B$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $X:X' > A:B$ (76.), und folglich auch $Y:Y' > A:B$ (53.). Folglich $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $Y:Y'$ (76.) Ganz auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn $L:L'$ die Gränze im Abnehmen ist. Ist aber $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X:X'$; so seyen $\varphi(X:X')$, $\varphi'(X:X')$ die Werthe von $X:X'$, welche sich von der einen oder andern Seite her dem Verhältnisse $L:L'$ beliebig nähern, und $\psi(Y:Y')$, $\psi'(Y:Y')$ die entsprechenden gleichen Werthe von $Y:Y'$. Es ist folglich $\varphi(X:X') = \psi(Y:Y')$, $\varphi'(X:X') = \psi'(Y:Y')$, und es nähert sich also nach dem hier bewiesenen $\psi(Y:Y')$ von der einen, $\psi'(Y:Y')$ von der andern Seite her dem Verhältnisse $L:L'$ immer mehr und mehr, so daß also $L:L'$ überhaupt die Gränze von $Y:Y'$ ist.

85. Wenn L die Gränze im Abnehmen, L' die Gränze im Wachsen von X' ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$.

Nach der Voraussetzung ist immer $L < X$, $L' > X'$. Also $L:L' < X:X'$ (58). Sey ein $A > L$, $A' < L'$, $X < A$, $X' > A'$ (76.); so ist $A:A' > L:L'$, $X:X' < A:A'$ (58.). Folglich offenbar $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$ (76.).

86. Ist L die Gränze im Wachsen von X, L' die Gränze im Abnehmen von X'; so ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$.

Nach der Voraussetzung ist immer $L > X$, $L' < X'$. Also $L:L' > X:X'$ (58.). Sey nun $A < L$, $A' > L'$, $X > A$, $X' < A'$; so ist $A:A' < L:L'$, $X:X' > A:A'$ (58.). Also ist $L:L$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$ (16.).

87. Die Gränze der Verhältnisse $X:X'$, $Y:Y'$ sey $L:L'$; so ist $L:L'$ auch eine Gränze von $X+Y:X'+Y'$.

Sey $L:L'$ die Gränze im Wachsen beider Verhältnisse; so ist $L:L' > X:X'$, $L:L' > Y:Y'$ (76.). $A:A'$ sey irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $X:X' > A:A'$ $Y:Y' > A:A'$, wenigstens lassen sich die veränderlichen Verhältnisse so annehmen (76.). Folglich ist $L:L' > X+Y:X'+Y'$, $X+Y:X'+Y' > A:A'$ (74. 72.). Also $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X+Y:X'+Y'$ (76.).

Ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen beider Verhältnisse; so zeigt man durch ganz ähnliche Schlüsse, daß $L:L'$ auch die Gränze im Abnehmen von $X+Y:X'+Y'$ ist.

Ist aber z. B. $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$, und die Gränze im Abnehmen von $Y:Y'$, $A:B$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$, $A':B'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$; so ist $L:L' > X:X'$, $A:B < L:L'$, $X:X' > A:B$ und eben so $L:L' < Y:Y'$, $A':B' > L:L'$, $Y:Y' < A':B'$ (76.). Also $A':B' > X:X'$ (57.), und folglich, da auch $A':B' > Y:Y'$ ist, $X+Y:X'+Y' < A':B'$ (74.). Eben so ist $A:B < Y:Y'$ (58.), $A:B < X:X'$. Also $X+Y:X'+Y' > A:B$ (72.). Macht nun, welches offenbar immer möglich ist, zugleich $X:X' > A:B$, $Y:Y' < A':B'$; so hat man auch zugleich $X+Y:X'+Y' > A:B$, $X+Y:X'+Y' < A':B'$. Da nun die Verhältnisse $A:B$ ($< L:L'$), und $A':B'$ ($> L:L'$) dem Verhältnisse $L:L'$ offenbar von beiden Seiten her beliebig nahe genommen werden können; so kann auch $X+Y:X'+Y'$ von beiden Seiten her dem Verhältnisse $L:L'$ beliebig nahe gebracht werden, so daß also $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X+Y:X'+Y'$ ist.

Ist $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X:X'$ und $Y':Y'$; so kann man auf die schon öfter gebrauchte Art zeigen, daß auch $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X+Y:X'+Y'$ ist.

88. Das aus zwei oder mehreren Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß hat das aus ihren Gränzverhältnissen zusammengesetzte Verhältniß zur Gränze.

Seyen $L:M$, $M:L'$ die Gränzen im Abnehmen von $X:Y$, $Y:X'$; so ist immer $X:Y > L:M$, $Y:X' > M:L'$; also auch $X:X' > L:L'$ (61.). Sey nun $L:A$

irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$, so daß also $L' > A$ (51.). Nimmt man folglich $M:L' = B:A$; so ist auch $M > B$ (25) und demnach $L:B > L:M$ (50.). Also kann man machen $X:Y < L:B$ (76.). Sey nun $X:Y = L:C$, also $L:C < L:B$ (54.), $C > B$ (51.) $C:A > B:A$ (50.), $C:A > M:L'$ (53.). Folglich $Y:X' < C:A$ (76.). Man hat also $X:Y = L:C$, $Y:X' < C:A$, woraus $X:X' < L:A$ (63.). Da nun $X:X' > L:L'$, $L:A > L:L'$, $X:X' < L:A$ ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$.

Sind $L:M$, $M:L'$ beides Gränzen im Wachsen von $X:Y$, $Y:X'$; so ist immer $X:Y < L:M$, $Y:X' < M:L'$; also $X:X' < L:L'$ (61.). Sey nun wieder $L:A$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$ ist; so ist $L' < A$ (51.). Nimmt man nun $M:L' = B:A$; so ist $M < B$ (25.), $L:B < L:M$ (50.). Man kann also $X:Y > L:B$ machen (76.). Ferner sey $X:Y = L:C$; so ist $L:C > L:B$ (53.), $C < B$ (51.), $C:A < B:A$ (50.), $C:A < M:L'$ (54.), und man kann also $Y:X' > C:A$ machen (76.). Also hat man $X:Y = L:C$, $Y:X' > C:A$, woraus $X:X' > L:A$ (63.). Da nun $L:L' > X:X'$, $L:A < L:L'$, $X:X' > L:A$ ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$ (76.).

Ist z. B. $L:M$ die Gränze im Abnehmen von $X:Y$, $M:L'$ die Gränze im Wachsen von $Y:X'$, so ist immer $L:M < X:Y$, $M:L' > Y:X'$. Sey nun $L:A$ irgend ein Verhältniß welches $< L:L'$ ist; so ist $A > L'$ (51.), $M:A < M:L'$ (50.). Folglich kann man $Y:X' > M:A$ machen (76.), und hat immer $X:Y > L:M$. Also $X:X' > L:A$ (61.). Ferner sey $B:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$ ist; so ist $B > L$ (51.), $B:M > L:M$ (50.). Also kann man $X:Y < B:M$ machen (76.), und hat immer $Y:X' < M:L'$. Folglich $X:X' < B:L'$ (61.). Macht man nun zugleich $Y:X' > M:A$, $X:Y < B:M$, welches offenbar möglich, da $M:A$, $B:M$ zwei Verhältnisse sind, welche $< M:L'$ und $> L:M$ sind; so ist zugleich $X:X' > L:A$, $X:X' < B:L'$, wo $L:A$, $B:L'$ zwei Verhältnisse sind, welche willkührlich

$< L:L'$ und $> L:L'$ sind. Also kann sich $X:X'$ dem dem Verhältnisse $L:L'$ von beiden Seiten her beliebig nähern, so daß also letzteres überhaupt die Gränze von ersterem ist.

Sind $L:M$, $M:L'$ überhaupt Gränzen von $X:Y$, $Y:X'$, so beweiset man den Satz wieder nach der öfter gebrauchten Methode.

89. Für mehr als zwei Verhältnisse wird der Satz durch mehrmalige Anwendung des vorhergehenden bewiesen.

90. Sehr ausführlich ist die Lehre von den Gränzen der Verhältnisse behandelt in L'Huilier expositio elem. princip. calc. diff. et int. Tub. 1795. Cap. I. und in R. Simson Opp. posthuma. Glasguae. 1776., wo man auch Anwendungen auf die Geometrie findet.

Ueber die Lehre von den Verhältnissen überhaupt s. m. auch: Kannengießer Versuch einer allgemeinen Theorie der Verhältnisse. Mit einer Vorrede von E. G. Fischer. Berlin. 1811. 4.

Verkehrte Regula de tri, s. Verhältniß. (46. 2.).

Verkürzte Multiplication und Division, (multiplicatio et divisio contracta), s. Multiplication. Thl. III. S. 651.

Verlängern, wird vorzugsweise von geraden Linien gebraucht, wenn man sie sich über einen ihrer Endpuncte hinaus nach ihrer Richtung hin erweitert denkt.

Vermischungs-Rechnung oder Regel, ist bei einigen Schriftstellern gleichbedeutend mit Alligationsrechnung. Andere verstehen darunter nur einen besondern Fall der Gesellschaftsrechnung, wenn mehrere Ingredienzen nach gegebenen Verhältnissen mit einander zu vermischen sind, wozu Thl. II. S. 357. ein Beispiel liefert.

Verneinte Größen, gleichbedeutend mit negative Größen; s. entgegengesetzte Größen.

Verschwindungsquotient, s. Thl. I. S. 821.

Versetzungen (Permutationes) gegebener Dinge oder Elemente nennt man alle verschiedenen Stellungen, welche sie unter und gegen einander annehmen können, wobei ihre Anzahl nicht verändert wird. Den Inbegriff der Versetzungen der Elemente a, b, c, d, ... bezeichnet Hindenburg durch P(a, b, c, d, ...), und, wenn die Elemente respective α, β, γ, δ, ... Mal wiederholt vorkommen, durch $P(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots)$. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen heißt die Versetzungs- oder Permutationszahl, und wird für ein, zwei, drei, vier, u. s. f. m Elemente nach Hindenburg durch a, b, c, d, ... m, bezeichnet.

1. Hat man zunächst m verschiedene Elemente a, b, c, ... m, und bezeichnet den Inbegriff der Versetzungen dieser Elemente ohne a, ohne b, ohne c, u. s. f., durch $\underset{a}{P}$, $\underset{b}{P}$, $\underset{c}{P}$, u. s. f.; so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Formel:

$$P(a, b, c, \ldots m) = a\underset{a}{P} + b\underset{b}{P} + c\underset{c}{P} + \ldots + m\underset{m}{P}.$$

In dem Aggregat auf der rechten Seite kommen nämlich offenbar alle Permutationen der gegebenen Elemente vor, weil, wenn eine mit dem Anfangselement k fehlte, auch in $k\underset{k}{P}$, also auch in $\underset{k}{P}$ eine fehlen müßte, und ein ganz ähnlicher Schluß zeigt, daß auch keine Permutation in dem genannten Aggregat zwei Mal vorkommen kann, in demselben also P (a, b, c, ... m) richtig entwickelt ist.

2. Die Versetzungszahl ergiebt sich hieraus unmittelbar. Bezeichnen wir nämlich die Versetzungszahlen für m — 3, m — 2, m — 1 Elemente durch i, k, l; so folgt aus der Formel in (1.) sogleich:

$$m = \underset{(1}{l} + \underset{(2)}{l} + \underset{(3)}{l} + \ldots + \underset{(m)}{l},$$

d. i. $m = ml = m(m-1)k = m(m-1)(m-2)i$, und, so weiter gehend, $m = m(m-1)(m-2)\ldots.2.a$. Aber offenbar $a = 1$. Also

$$m = 1.2.3 \ldots\ldots m.$$

3. Für eine mäßige Anzahl von Elementen wird die Permutationszahl schon sehr groß. Eine Tischgesellschaft von 10 Personen kann ihre Plätze $1.2.3\ldots 10 = 3628800$ Mal wechseln. In Récreations mathématiques par Ozanam. Paris. 1696. p. 45. sind die Versetzungszahlen bis zur 25sten, welche aus 26 Ziffern besteht, in Athanasii Kircheri Ars magna sciendi. Amst. 1669. p. 157. bis zur 50sten berechnet.

4. Kommen aber unter den gegeben m Elementen α vor, welche einander gleich, z. B. $= a$ sind; so sind offenbar alle die Permutationen identisch, in welchen die übrigen Elemente, außer a, einerlei Stellen einnehmen. Denkt man sich nun irgend eine Permutation; so kommen offenbar so viele Permutationen, in denen b, c, d, ... dieselben Stellen einnehmen, vor, als sich die α Elemente, welche $= a$ sind, unter einander versetzen lassen, d. i. (2.) $1.2.3\ldots\alpha$. Da dies von jeder Permutation gilt; so kommt eine jede $1.2.3\ldots\alpha$ Mal vor, und die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationen ist

$$= \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\ldots \alpha}.$$

Kommen nun ferner noch β Elemente vor, welche alle $= b$; so schließt man ganz auf ähnliche Art, daß die Anzahl der Permutationen

$$= \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha . 1.2.3\ldots\beta},$$

und überhaupt ist für die Elementenreihe $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots m^\mu$ die Permutationszahl

$$= \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha . 1.2.3\ldots\beta . 1.2.3\ldots\gamma\ldots 1.2.3\ldots\mu}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu)}{1.2.3\ldots\alpha . 1.2.3\ldots\beta . 1.2.3\ldots\gamma\ldots 1.2.3\ldots\mu}.$$

Z. B. num Perm $(a^4 b^3 c d e) = \frac{1.2.3\ldots 10}{1.2.3.4 . 1.2.3} = 5.7.8.9.10 = 25200$.

5. Da für die Elementenreihe $a^\alpha b^\beta \ldots p^\varkappa qrs \ldots$ die Permutationszahl

$$\frac{1.2.3 \ldots . m}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa}$$

ihrer Natur nach eine ganze Zahl ist; so folgt hieraus der arithmetische Satz, daß, wofern nur $\alpha + \beta + \ldots + \varkappa$ nicht $> m$ ist, das Product $1.2.3 \ldots m$ immer durch $1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa$ theilbar ist.

6. Man setze die Permutationszahl $= \frac{p}{q} = r$, wo r eine ganze Zahl. Ist nun m eine Primzahl, nnd nicht alle Elemente gleich; so sind alle Factoren des Nenners $< m$. Also geht m in q nicht auf (Zahl. I. 4.). Da nun aber m offenbar in $p = qr$ aufgeht; so muß m in r aufgehen (Zahl. I. 5.). Ist also die Anzahl m der gegebenen Elemente eine Primzahl; so geht m immer in der Permutationszahl auf, wenn nur nicht alle Elemente unter einander gleich sind. (Gauss Disq. arithm. Lips. 1801. p. 34.)

7. Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten läßt sich leicht aus der Formel für die Versetzungszahl ableiten. Am Meisten kommen diese Zahlen bei der Entwickelung der Potenzen der Polynomien und der Reversion der Reihen vor.

8. Es sind nun noch Regeln zur wirklichen Aufstellung aller möglichen Permutationen gegebener Elemente nöthig. Da (1.)

$$P(a, b, c, \ldots m) = \underset{a}{aP} + \underset{b}{bP} + \underset{c}{cP} + \ldots + \underset{m}{mP}$$
$$= \underset{m}{mP} + \underset{l}{lP} + \underset{k}{kP} + \ldots + \underset{a}{aP}$$

ist; so erhält man, diese Formel nur in Worte übersetzend, aus den Permutationen für $m - 1$ Elemente die für m Elemente auf folgende Art. Man schreibe die Permutationen der $m - 1$ Elemente a, b, c, .. l hin, und füge ihnen allen m bei; so erhält man $\underset{m}{mP}$. Vertauscht man nun m mit l, dann l mit k, u. s. f.; so erhält man $\underset{l}{lP}$, $\underset{k}{kP}$, u. s. f., also zusammen P (a, b, c, ... m). So leitet man aus den Permutationen für ein Element die für

zwei, aus diesen wieder die für drei Elemente ab, u. s. f. bis zu der gegebenen Anzahl von Elementen.

Da ferner auch z. B. in Bezug auf vier Elemente,

$$P(d) = d,$$
$$P(c, d) = cP_c + dP_d,$$
$$P(b, c, d) = bP_b + cP_c + dP_d,$$
$$P(a, b, c, d) = aP_a + bP_b + cP_c + dP_d$$

ist; so kann man auch zuerst d hinschreiben, diesem c vorsetzen, und dann c mit d vertauschen, allen diesen hierauf b vorsetzen, b mit c, und dann c mit d vertauschen, diesen allen a vorsetzen, und a mit b, b mit c, c mit d vertauschen.

Schließt man nun die Permutationen für ein, zwei, drei, u. s. f. Elemente in Haken ein, und fängt bei der ersten Regel, welches offenbar verstattet ist, sowohl von vorn als von hinten an; so erhält man folgende drei Darstellungen der Permutationen für vier Elemente nach den obigen beiden Regeln:

a|b|c|d	a b c d	a|b|c|d
b a|c|d	a b d c	a|b|d c
a c b|d	a c b d	a c b d
c a b|d	a c d b	a c d b
b c a|d	a d b c	a d b c
c b a|d	a d c b	a d c b
a b d c	b a c d	b a c d
b a d c	b a d c	b a d c
a d b c	b c a d	b c a d
d a b c	b c d a	b c d a
b d a c	b d a c	b d a c
d b a c	b d c a	b d c a
a c d b	c a b d	c a b d
c a d b	c a d b	c a d b
a d c b	c b a d	c b a d
d a c b	c b d a	c b d a
c d a b	c d a b	c d a b
d c a b	c d b a	c d b a
b c d a	d|a b c	d a b c
c b d a	d|a c b	d a c b
b d c a	d|b a c	d b a c
d b c a	d|b c a	d b c a
c d b a	d|c|a b	d c a b
d c b a	d|c|b|a	d c b a

Alle diese Darstellungen sind involutorisch, die beiden letzten zugleich lexicographisch.

9. Aus der Natur der lexicographischen Anordnung folgt unmittelbar, daß man aus jeder einzelnen Permutation die nächst höhern ableitet, wenn man von der rechten nach der linken Hand zu das erste Element sucht, welches als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, dieses mit dem nächst höhern Element rechts vertauscht, und es selbst mit den übrigen Elementen zur rechten Hand in lexicographischer Ordnung folgen läßt, indem die Elemente links völlig ungeändert bleiben. Diese Ableitung der Permutationen aus einander ist besonders in dem Falle anwendbar, wenn identische Elemente vorkommen. Die Permutation, in welcher kein Element mehr als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, ist die letzte. Für aabbc sind hiernach die Permutationen:

aabbc
aabcb
aacbb
ababc
abacb
abbac
abbca
abcab
abcba
acabb
acbab
acbba
baabc
baacb
babac
babca
bacab
bacba
bbaac
bbaca
bbcaa
bcaab
bcaba
bcbaa
caabb
cabab
cabba
cbaab
cbaba
cbbaa

10. Der Nutzen dieser Regeln in der Analysis ist sehr eingeschränkt. Anwendung finden sie bei der Bildung von

Anagrammen, d. i. der Versetzungen der Buchstaben eines Wortes, oder der Worte eines Satzes, so daß die Versetzung wieder einen Sinn giebt, welches aber keine mathematische Anwendung ist. Das Wort Roma giebt die Anagramme: ramo, oram, mora, maro, armo, amor. Der Name des berühmten Calvinus giebt Alcuinus, wie er sich selbst auf dem Titel seiner Institutionen nennt. Révolution française giebt: un Corse la finira, und veto. Der bekannte Vers

Tot tibi sunt dotes, Virgo quod sidera coelo,

mit dessen Versetzung der andächtige Jesuit Bauhusius zum Lobe der Jungfrau Maria sich viel beschäftigt hat, giebt 3312 Anagramme, die wieder einen Hexameter geben, worüber, wie überhaupt über dergleichen Spielereien, mit Mehrerem Jac. Bernoulli Ars conjectandi. p. 77. sqq. nachzusehen ist. Ueber eine lächerliche Anwendung der Versetzungen der Gesichtstheile auf die Verschiedenheit der Gesichter in J. V. Merbitzii de varietate faciei humanae tract. phys. Dresd. 1676. s. Kästners Anal. endl. Gr. S. 38.

11. Eine besonders wichtige Anwendung finden die Permutationen in der Theorie der Elimination aus Gleichungen des ersten Grades, worüber in den Zusätzen zu diesem Werke mehr vorkommen wird. Rothe über Permutationen mit ihrer Anwendung auf das Eliminationsproblem in Hindenburgs 2r. Samml. comb. anal. Abh. S. 263. Scherk math. Abh. Berlin. 1825. S. 31.

Auch gehört zur Lehre von den Permutationen: Heßel über positive und negative Permutationen u. s. f. Marburg 1823. 8.

Eine interessante Aufgabe, die sich auf Permutationen gründet, s. m. Annales d. Math. XVI. p. 32., und aufgelöst von Ferriot XVII. p. 137. Sie betrifft die Bestimmung der Anzahl der verschiedene Arten, auf welche m verschiedene Farben auf die m Seitenflächen eines regulären Polyeders, deren jede n Seiten hat, aufgetragen werden können. Die gesuchte Zahl ist

$$= \frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{2n}.$$

12. Die Anzahl der Permutationen in jeder einzelnen Ordnung findet man offenbar, wenn man unter den gegebenen Elementen eins von denen, mit welcher die Ordnung anfängt, wegläßt, und für die übrigen die Versetzungszahl sucht. Für $a^4\ b^3\ c^2$ ist die Anzahl der Permutationen von der Ordnung $a = \text{num Perm}\ (a^3\ b^3\ c^2) = 560$, von der Ordnung $b = \text{num Perm}\ (a^4\ b^2\ c^2) = 420$, von der Ordnung $c = \text{num Perm}\ (a^4\ b^3\ c) = 280$.

Versetzungszahl, Permutationszahl, s. Versetzungen.

Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Vertex, s. Scheitelpunkt.

Verticalwinkel, s. Winkel.

Verwandlung, einer Größe oder eines Ausdrucks ist überhaupt die zu irgend einem Zweck dienliche Veränderung der Form oder Gestalt derselben, ohne daß dadurch der Werth geändert wird. Ueber die Verwandlung der Figuren, Functionen, Gleichungen, Proportionen s. die entsprechenden Artikel. Bey der Verwandlung der Coordinaten wird bloß die Lage der Axen, auf welche die krumme Linie oder Fläche durch Abscissen und Ordinaten bezogen ist, geändert. Die nöthige Anleitung hierzu ertheilt der Artikel Coordinate.

Verwechslung bei Proportionen, (Alternatio) heißt die Vertauschung der Mittelglieder mit einander, welche offenbar nur dann zulässig ist, wenn alle vier Glieder gleichartig sind. (Verhältniß. 26.).

Verwechslung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Vieleck oder **Polygon** heißt jede von einer beliebigen Anzahl gerader Linien, welche seine **Seiten** genannt werden, eingeschlossene ebene Figur. Die Gesammtheit aller Seiten heißt der **Umfang**, die Durchschnittspunkte der Seiten heißen **Spitzen**. Jede gerade Linie, welche zwei nicht ein und derselben Seite angehörende Spitzen mit einander verbindet, heißt **Diagonale**. Die von den Seiten gebildeten innern Winkel nennt man **Vielecks-** oder **Polygonwinkel**. Werden die Seiten über die Spitzen hinaus verlängert; so erhält man die **Außenwinkel** des Vielecks, die aber, wenn die entsprechenden Polygonwinkel einspringende oder convexe Winkel sind, innerhalb des Polygons liegen, und daher in diesem Falle als negativ betrachtet werden sollen. Nach der Anzahl der Seiten theilt man die Vielecke in **Dreiecke**, **Vierecke**, **Fünfecke**, u. s. f. **Sphärische Vielecke**, von denen Einiges Trigonometrie. (92.) beigebracht worden, werden auf der Oberfläche einer Kugel von Bogen größter Kreise eingeschlossen. **Polygones gauches** nennen französische Schriftsteller solche Vielecke, deren Seiten nicht alle in **einer** Ebene liegen. M. s. einige Eigenschaften solcher Vielecke in dem Art. Transversale. (4. 7. 11. 12. 15.)

I. Allgemeine Eigenschaften in Bezug auf Seiten, Diagonalen und Winkel.

1. Die Seiten, Winkel, und Spitzen sind offenbar bei jedem Vieleck in gleicher Anzahl vorhanden.

2. Sei nun immer die Anzahl der Seiten $= n$; so lassen sich offenbar aus jeder Spitze $n - 3$, aus allen also $n(n-3)$ Diagonalen ziehen, wobei aber jede Diagonale doppelt, z. B. die zwischen A und N als AN und NA, gerechnet worden, so daß also die Anzahl der Diagonalen nur $= \frac{n(n-3)}{2}$.

3. Die Summen der innern Winkel eines n und $(n-1)$ecks, den rechten Winkel als Einheit genommen,

seyen Σ und Σ'. Sind nun A, B, C (Fig. 102.) drei auf einander folgende Spitzen irgend eines ecks; so wird, wenn man AC zieht, ein Dreieck ABC bestimmt, welches außerhalb oder innerhalb des gegebenen ecks fällt, jenachdem der Polygonwinkel bei B concav oder convex ist. Da nun in jedem Dreieck die Winkelsumme $= 2$ ist; so ist, wenn B concav ist, $\Sigma = \Sigma' + 2$, wenn B convex ist aber $\Sigma = \Sigma' - (\alpha + \beta) + 4 - \gamma = \Sigma' - (2 - \gamma) + (4 - \gamma) = \Sigma' + 2$, wie vorher. Folglich bilden für $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$ die Winkelsummen die Progression $2, 4, 6, 8, \ldots$, deren $(n-2)$ tes Glied, d. i. die Winkelsumme jedes ecks, $= 2(n-2) = 2n - 4$ ist, immer den rechten Winkel als Einheit angenommen.

4. Hat nun ein eck m concave, m′ convexe Winkel, und setzen wir die Summe jener $= S$, dieser $= S'$, die Summen der entsprechenden äußern Winkeln aber $= s$ und $= s'$; so ist offenbar $S + s = 2m$, $S' - s' = 2m'$. Also $S + S' + s - s' = 2(m + m') = 2n$. Aber $S + S' = 2n - 4$ (3). Also $2n - 4 + s - s' = 2n$, $s - s' = 4$. Folglich ist, da die, convexen Polygonwinkeln entsprechenden, Außenwinkel als negativ betrachtet werden, die algebraische Summe aller Außenwinkel eines jeden Vielecks $= 4$. Hat das Vieleck keinen convexen Winkel; so ist $s' = o$, $s = 4$.

5. Ein eck kann höchstens $n - 3$ convexe Winkel haben, weil, wenn es $n - 2$ hätte, da jeder convexe Winkel > 2 ist, die Summe aller convexen Winkel schon $> 2n - 4$ wäre, da doch die Summe aller Winkel überhaupt immer nur $= 2n - 4$ ist (3.).

6. Ein Vieleck sei durch Diagonalen in Dreiecke getheilt, deren Anzahl $= \Delta$ sei. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist $= 2\Delta$, und der Summe aller Winkel des Vielecks offenbar gleich. Also $2\Delta = 2n - 4$ (3.), $\Delta = n - 2$, so daß also die Anzahl der Dreiecke, in welche ein Vieleck durch Diagonalen getheilt werden kann, immer um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Seiten. Die Anzahl der Seiten aller dieser Dreiecke ist $= 3(n-2)$,

wo aber jede Diagonale augenscheinlich doppelt gerechnet ist. Setzen wir also die Anzahl der Diagonalen, durch welche ein Polygon in Dreiecke getheilt werden kann, $= \delta$; so ist $3(n-2) = n + 2\delta$, woraus $\delta = n - 3$, d. h. die Anzahl der Diagonalen, welche ein Polygon in Dreiecke zerlegen, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten.

7. Man habe jetzt einmal ein beliebiges aus a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. bestehendes Figurennetz in einer Ebene. Die Anzahl der Verbindungslinien sei $= K$, die Anzahl der Punkte, in welchen dieselben zusammenstoßen, $= E$, die Anzahl der einzelnen Figuren $= S$. Die Anzahl der im äußern Umfange des Netzes liegenden Linien und Punkte sei $= \mathfrak{K}$, $= \mathfrak{E}$, und die Anzahl der innern Linien und Punkte $= \mathfrak{K}'$, $= \mathfrak{E}'$; so ist offenbar $K = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$, $E = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, und auch $S = a + b + c + d + \ldots$. Rechnet man jede Linie im äußern Umfang ein, jede innere zwei Mal; so ist offenbar $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots = \mathfrak{K} + 2\mathfrak{K}' = K + \mathfrak{K}'$, $2a + 3b + 4c + 5d + \ldots = K + \mathfrak{K}' - S$. Die Summe der innern Winkel aller das Netz bildenden Figuren ist $= 2a + 4b + 6c + 8d + \ldots$ (3.), aber auch, da um jeden innern Punkt vier rechte Winkel liegen, $= 4\mathfrak{E}' + 2\mathfrak{K} - 4$, weil $2\mathfrak{K} - 4$ die Summe der Winkel am äußern Umfange ist (3.). Also $2a + 4b + 6c + 8d + \ldots = 4\mathfrak{E}' + 2\mathfrak{K} - 4$, $a + 2b + 3c + 4d + \ldots = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} - 2$, $2a + 3b + 4c + 5d + \ldots = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} + S - 2$. Also $K + \mathfrak{K}' - S = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} + S - 2 = 2(E - \mathfrak{E}) + \mathfrak{K} + S - 2 = 2(E - \mathfrak{K}) + \mathfrak{K} + S - 2 = 2E - \mathfrak{K} + S - 2$, $K + \mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = 2(E + S - 1) = K + K = 2K$, also $E + S - 1 = K$, $E + S = K + 1$, so daß also die Summe der Anzahl der Durchschnittspunkte und Figuren immer um 1 größer ist als die Anzahl der Linien. Es erhellet sehr leicht, daß dieser Satz auch für Netze gilt, die nicht in einer Ebene liegen. Einen andern noch weit einfachern Beweis s. im Art. Vieleckiger Körper (1.). Der Satz ist von Cauchy gefunden. S. a. a. O.

8. Die n Seiten und n Winkel eines Vielecks sollen Stücke desselben heißen. Man kann fragen, wie viele dieser Stücke zur Bestimmung des Vielecks nöthig sind. Die Elemente der Geometrie und Trigonometrie lehren, daß zur Bestimmung eines Dreiecks immer 3 Stücke erforderlich sind. Sey nun ein neck gegeben, und durch eine Diagonale ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein $(n-1)$eck übrig bleibt. Die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke dieses $(n-1)$ecks sey $= b'$, die des necks $= b$. Sind also b' Stücke des $(n-1)$ecks gegeben; so ist dadurch die gezogene Diagonale bestimmt, d. i. eine Seite des abgeschnittenen Dreiecks, zu dessen Bestimmung, folglich auch zur Bestimmung des necks, demnach nur noch 2 Stücke gegeben zu seyn brauchen. Folglich ist $b = b' + 2$, und die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke für das Dreieck, Viereck, Fünfeck, ... neck, also $3, 5, 7, \ldots, 2n-3$. Es erhellet aber leicht, daß unter diesen $2n-3$ nöthigen Bestimmungsstücken immer nothwendig wenigstens $n-2$ Seiten seyn müssen, weil, wenn nur $n-3$ Seiten gegeben wären, noch n Winkel gegeben seyn müßten. Da aber durch $n-1$ Winkel der nte schon an sich bestimmt wird, indem die Summe aller $= 2n-4$ (3.); so wären in der That nur $2n-4$ von einander unabhängige Stücke gegeben, da doch die Anzahl derselben $2n-3$ seyn muß. Also müssen $2n-3$ Stücke, unter denen wenigstens $n-2$ Seiten vorkommen, gegeben seyn. Damit ist übrigens nicht gesagt, daß durch jede $2n-3$ Stücke, unter denen wenigstens $n-2$ Seiten vorkommen, ein Vieleck völlig bestimmt wird, indem ja, wie die Trigonometrie (S. diesen Art. 15.) lehrt, schon bei Dreiecken Fälle vorkommen, wo durch drei Stücke mit wenigstens einer Seite das Dreieck nicht völlig bestimmt wird. Eine vollständige Aufzählung aller Fälle bei Polygonen, worin zugleich die Bedingungen der Congruenz enthalten seyn würden, gestattet hier der Raum nicht, da die Untersuchung an sich ganz elementar, und keinen Schwierigkeiten unterworfen ist. M. v. Crelles Geometrie.

Thl. I. §. 95. ff., auch Polygonometrie im Art. Trigonometrie. IV. Ueber die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke bei Figurennetzen s. einen Aufsatz von Olivier in Crelles Journal d. Math. Thl. I. H. 3. S. 227.

II. Vergleichung der Vielecke.

9. Zwei Vielecke können in dreifacher Rücksicht mit einander übereinstimmen, und in eben diesen Beziehungen mit einander verglichen werden. Uebereinstimmung rücksichtlich der Größe heißt Gleichheit; Vielecke, die in Bezug auf ihre Form mit einander übereinstimmen, heißen ähnliche Vielecke; Uebereinstimmung rücksichtlich der Form und Größe heißt Congruenz. Die hierher gehörenden Untersuchungen werden als völlig elementar, und größtentheils selbst in den Elementen des Euclides enthalten, hier füglich übergangen, um für schwierigere Untersuchungen den Raum zu sparen. In Bezug auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Vielecke, so wie ihre Verwandlung und Theilung s. m. den Art. Figur. Thl. II. S. 214 — 245.

III. Punkt der mittlern Entfernung.

10. Der Punkt der mittlern Entfernungen, oder auch der Mittelpunkt der Entfernungen eines Vielecks ist der Punkt in der Ebene desselben, welcher die Eigenschaft besitzt, daß seine Entfernung von jeder in der Ebene des Vielecks willkührlich angenommenen geraden Linie oder Axe das arithmetische Mittel der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von dieser Axe ist, wobei die Entfernungen positiv oder negativ genommen werden, jenachdem sie auf der einen oder der andern Seite der Axe liegen. Auch auf Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, selbst auf willkührliche Punkte im Raume läßt sich dieser Begriff erweitern, wenn nur willkührliche Ebenen im Raume als Axen angenommen werden. Die nöthige Kürze gebietet uns jedoch, die

Untersuchung auf Vielecke in einer Ebene zu beschränken, um so mehr, da sie sich leicht auch auf den Raum überhaupt ausdehnen lassen wird, wenn sie für den speciellern Fall richtig aufgefaßt worden. Carnot hat den Punkt der mittlern Entfernungen in die Geometrie eingeführt, und in seiner Géométrie de position viele merkwürdige Eigenschaften desselben bewiesen. Uebrigens lehrt die Mechanik, daß dieser Punkt mit dem Schwerpunkte mehrerer gleichen Massen in den Spitzen des Vielecks einerlei ist.

11. Zuvörderst ist zu zeigen, daß es für jedes Vieleck einen Punkt der mittlern Entfernungen giebt. Nimmt man nämlich zwei willkührliche auf einander senkrechte Axen an, und bezeichnet die Coordinaten der Spitzen des Vielecks durch $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;$ u. s. f.; so ist, wenn die Seitenzahl $= n$ ist, der Punkt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n},$$

sind, der Punkt der mittleren Entfernungen. Um dies zu beweisen ist zu zeigen, daß diese Gleichungen, oder wenigstens die Ordinatengleichung, für jede zwei andere Axen eben so statt finden. Sind diese Axen zuerst den primitiven parallel, die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes in Bezug auf die primitiven Axen a, b; so ist, wenn die neuen Coordinaten durch Indices von den primitiven unterschieden werden, offenbar

$$x' = x - a,\ x'_1 = x_1 - a,\ x'_2 = x_2 - a, \ldots\ldots;$$
$$y' = y - b,\ y'_1 = y_1 - b,\ y'_2 = y_2 - b, \ldots\ldots;$$

wenn nur a, b immer mit den gehörigen Zeichen genommen werden. Nach der Voraussetzung ist aber

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n} - a,$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n} - b;$$

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots - na}{n},$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots - nb}{n};$$

$$x - a = \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \ldots}{n},$$

$$y - b = \frac{(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \ldots}{n};$$

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots}{n};$$

so daß also unsere Gleichungen auch für das neue, dem primitiven parallele, System gelten. Auch sind sie für jede zwei neue auf den primitiven senkrechte Axen richtig, weil man offenbar x und y vertauschen kann. Ist nun aber irgend ein anderes System gegeben; so kann man sich, weil unsere Gleichungen für alle parallelen Systeme gelten, wenn sie für eins gelten, dessen Axen durch den Anfang des primitiven Systems gehend denken. Auch lassen sich, wie sogleich in die Augen fällt, diese beiden Systeme in immer paralleler Lage jederzeit so weit fortrücken, daß das gegebene Vieleck ganz zwischen die Schenkel des Winkels $x'Ay$ (Fig. 103.) fällt, und man also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, nur die beiden in der Figur dargestellten Fälle, jenachdem der Winkel $\alpha <$ oder $> 90^0$ ist, zu betrachten braucht. P ist irgend eine Spitze des gegebenen Vielecks. In Fig. 103. a. ist $AB = x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

In Fig. 103. b. dagegen ist $AB = -x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = -y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$-x = x' \cos(180^0 - \alpha) - (-y').\cos(\alpha - 90^0),$$
$$y = x' \sin(180^0 - \alpha) + (-y').\sin(\alpha - 90^0),$$

welche Gleichungen sich leicht ganz auf dieselbe Form wie die obigen bringen lassen. Mittelst Elimination erhält man leicht aus ihnen:

$$x' = y \sin\alpha + x \cos\alpha, \quad y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Nun ist nach der Voraussetzung:

$$y \sin\alpha = \frac{y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha + y_3 \sin\alpha + \ldots}{n},$$

$$x \cos\alpha = \frac{x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 \cos\alpha + \ldots}{n};$$

$$y \cos\alpha = \frac{y_1 \cos\alpha + y_2 \cos\alpha + y_3 \cos\alpha + \ldots}{n},$$

$$x \sin\alpha = \frac{x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\alpha + x_3 \sin\alpha + \ldots}{n};$$

$$y \sin\alpha + x \cos\alpha = \frac{(y_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha) + (y_2 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) + \ldots}{n},$$

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha = \frac{(y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha) + (y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha) + \ldots}{n};$$

d. i. nach dem so eben Bewiesenen:

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots}{n}.$$

Die beiden Ausdrücke für x, y gelten also für jedes System, und der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt ist also der Punkt der mittlern Entfernungen des Vielecks. (10.)

12. Legt man durch den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eine gerade Linie als Axe der y; so ist $y = 0$, und folglich auch

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0,$$

d. h. die Summe der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von jeder durch den Punkt der mittlern Entfernungen gehende gerade Linie $= 0$. Eine solche Linie heißt eine Axe der mittlern Entfernungen. Umgekehrt gehen alle Axen, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$$

ist, durch einen Punkt, nämlich durch den Punkt der mittlern Entfernungen. Denn man erhält denselben (11) durch die Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots}{n}.$$

Ist nun $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$; so ist auch $y = 0$, und der Punkt der mittlern Entfernungen muß also in der Axe liegen, auf welcher die y senkrecht sind, d. i. in der gegebenen.

13. Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung erhellet augenblicklich, daß im Dreieck für jede von einer Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogene gerade Linie als Axe $y_1 + y_2 + \ldots = o$ ist. Daher sind diese drei geraden Linien Axen der mittlern Entfernungen (12.), und schneiden sich in einem Punkte (Dreieck. 16.), nämlich in dem Punkte der mittlern Entfernungen des Dreiecks.

Eben so leicht erhellet, daß der Punkt der mittlern Entfernungen eines Parallelogramms der Durchschnittspunct seiner beiden Diagonalen ist.

14. Zieht man vom Punkte der mittlern Entfernungen nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z_1, z_2, z_3, ..., und bezeichnet die Winkel, welche diese Linien mit irgend einer durch den Punkt der mittlern Entfernungen gezogenen geraden Linie, die man als Axe, den Punkt der mittlern Entfernungen als Anfang der x annehmen mag, einschließen, diese Winkel immer nach einer Seite hin von 0 bis 360° gezählt, durch α_1, α_2, α_3, ...; so ist

$$x_1 = z_1 \cos\alpha_1,\ x_2 = z_2 \cos\alpha_2,\ x_3 = z_3 \cos\alpha_3,\ \ldots$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha_1,\ y_2 = z_2 \sin\alpha_2,\ y_3 = z_3 \sin\alpha_3,\ \ldots$$

Folglich, da hier $x = y = o$ ist:

$$o = \frac{z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots}{n},$$

$$o = \frac{z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots}{n}$$

und demnach, wie auch die Transversale durch den Punkt der mittlern Entfernungen gelegt seyn mag:

$$o = z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots,$$
$$o = z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots.$$

15. Zieht man nun von irgend einem andern Punkte in der vorher durch den Punkt der mittlern Entfernungen willkührlich gelegten Axe nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z'_1, z'_2, z'_3, ..., und bezeichnet die Entfernung des angenommenen Punktes vom Punkte der mittlern Entfernungen durch a; so bilden a, z_1, z'_1; a, z_2, z'_2; u. s. f. Dreiecke, auf deren Grundlinie a

die Perpendikel y_1, y_2, y_3, ... von ihren Spitzen gefällt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a und der x gehörig Rücksicht; so folgt aus Elem. II. 12. 13. und dann ferner mittelst (14.) sogleich, daß immer

$$z'^2_1 = z_1^2 + a^2 - 2ax_1 = z_1^2 + a^2 - 2az_1 \cos\alpha_1 ,$$
$$z'^2_2 = z_2^2 + a^2 - 2ax_2 = z_2^2 + a^2 - 2az_2 \cos\alpha_2 ,$$
$$z'^2_3 = z_3^2 + a_2 - 2ax_3 = z_3^2 + a^2 - 2az_3 \cos\alpha_3 ,$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich durch Addition (14.):

$$z'^2_1 + z'^2_2 + z'^2_3 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + na^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ebene eines ecks von dessen n Winkelspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Winkelspitzen nebst dem nfachen Quadrate der Entfernung des erstern Punktes von dem Punkte der mittlern Entfernungen gleich. Mittelst (13.) ergeben sich hieraus leicht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Parallelogramm.

16. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratensumme geben.

17. Beschreibt man aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis; so ist für jeden Punkt der Peripherie dieses Kreises die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich

$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + nr^2 \quad (15.) .$$

18. Setzt man letztere Größe $= q^2$; so erhält man

$$r = \sqrt{\frac{q^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \ldots}{n}} .$$

Die Peripherie des aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich $= q^2$ ist, wie schon

Apollonius beweiset. Apollonius ebene Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übers. von Camerer. Leipzig. 1796. S. 263 — 310. Ein ähnlicher Satz läßt sich auf ganz analoge Art von der Kugel beweisen. M. s. z. B. mein Lehrbuch der Statik. Halle. 1826. S. 624.

19. Von jeder der n Spitzen ziehe man jetzt an alle diese n Spitzen gerade Linien $\overset{1}{z}_1, \overset{1}{z}_2, \overset{1}{z}_3, \ldots$; $\overset{2}{z}_1, \overset{2}{z}_2, \overset{2}{z}_3, \ldots$; $\overset{3}{z}_1, \overset{3}{z}_2, \overset{3}{z}_3, \ldots$; .... $\overset{n}{z}_1, \overset{n}{z}_2, \overset{n}{z}_3, \ldots$, bezeichne die von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die n Spitzen gezogenen geraden Linien durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$, und setze

$$(\overset{1}{a})^2 + (\overset{2}{a})^2 + (\overset{3}{a})^2 + \ldots = S;$$

so ist nach (15.):

$$(\overset{1}{z}_1)^2 + (\overset{1}{z}_2)^2 + (\overset{1}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{1}{a})^2,$$
$$(\overset{2}{z}_1)^2 + (\overset{2}{z}_2)^2 + (\overset{2}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{2}{a})_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\overset{n}{z}_1)^2 + (\overset{n}{z}_2)^2 + (\overset{n}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{n}{a})^2.$$

Es ist aber offenbar $\overset{1}{z}_1 = \overset{2}{z}_2 = \overset{3}{z}_3 = \ldots = 0$, und allgemein $\overset{k}{z}_m = \overset{m}{z}_k$. Folglich ist das Aggregat aller Größen auf der linken Seite die doppelte Summe der Quadrate aller die n Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden geraden Linien. Bezeichnen wir nun diese doppelte Summe durch 2Σ; so erhält man durch beiderseitige Addition leicht $2\Sigma = 2nS$, $\Sigma = nS$, so daß also die Summe der Quadrate aller die Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden Linien der nfachen Summe der Quadrate der von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die Spitzen gezogenen geraden Linien gleich ist. Im Dreieck ist also die Summe der Quadrate der drei Seiten der 3fachen Summe der Quadrate der drei geraden Linien gleich, welche von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Spitzen mit den Mitten der Gegenseiten verbindenden geraden Linien nach den Spitzen des Dreiecks gezogen werden (13.).

20. Im Parallelogramm ABCD (Fig. 104.) ist (13. 19.) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4(AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2) = 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2)$, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich.

21. Ist Σ' die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen, und K der Punkt der mittlern Entfernungen; so ist, wenn S, Σ ihre vorige (19.) Bedeutung behalten:

$$\Sigma = nS \ (19.); \ \Sigma' = S + n.AK^2 \ (15.);$$

woraus durch Elimination von S:

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma' - \Sigma)},$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitze von dem Punkte der mittlern Entfernungen berechnet werden kann.

22. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwei verbindenden geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittlern Entfernungen. Die Coordinaten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2}(x_1 + x_2), & \frac{1}{2}(x_2 + x_1), & \frac{1}{2}(x_3 + x_1), \ldots; \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_3), & \frac{1}{2}(x_2 + x_3), & \frac{1}{2}(x_3 + x_2), \ldots; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_n), & \frac{1}{2}(x_2 + x_n), & \frac{1}{2}(x_3 + x^n), \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_2), & \frac{1}{2}(y_2 + y_1), & \frac{1}{2}(y_3 + y_1), \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_3), & \frac{1}{2}(y_2 + y_3), & \frac{1}{2}(y_3 + y_2), \ldots; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_n), & \frac{1}{2}(y_2 + y_n), & \frac{1}{2}(y_3 + y_n), \ldots;
\end{array}$$

wobei wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, so daß jede Coordinate in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$ mal vorkommt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittelpunkte sind also

$$\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\},$$
$$\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 \ldots\},$$

und folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien, also eben so viele Mittelpunkte derselben giebt, wenn die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfer-

nungen dieser Mittelpunkte durch (x), (y) bezeichnet werden:

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

$$(y) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

oder

$$(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots}{n},$$

$$(y) = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots}{n},$$

d. i. $(x) = x$, $(y) = y$ (11.), folglich der Punkt der mittlern Entfernungen der Spitzen zugleich der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte aller Verbindungslinien derselben.

Sind (x), (y) die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines ecks, so ist

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \cdots + \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) + \frac{1}{2}(x_n + x_1)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n},$$

d. i. $(x) = x$, und eben so $(y) = y$. Also ist auch der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines ecks mit dem Punkte der mittlern Entfernungen der Spitzen einerlei, und man findet demnach z. B. den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eines Vierecks, wenn man die Mittelpunkte seiner Gegenseiten verbindet, da diese Mittelpunkte die Spitzen eines Parallelogramms sind.

23. Sind A_1, A_2 irgend zwei Spitzen des Vielecks, K der Punkt der mittlern Entfernungen, $\overset{1}{k}_2$ der Mittelpunkt von $A_1 A_2$; so erhellet, wenn man sich das Dreieck $K A_1 A_2$ denkt, leicht, daß $A_1 K^2 + A_2 K^2 = 2A_1 \overset{1}{k}_2^2 + 2K \overset{1}{k}_2^2 = \frac{1}{2}A_1 A_2^2 + 2K \overset{1}{k}_2^2$ ist. Denkt man sich nun von A_1 nach allen den übrigen $n-1$ Spitzen gerade Linien gezogen; so ist

$$A_1K^2 + A_2K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K\overset{1}{k}_2^2\,,$$
$$A_1K^2 + A_3K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_3^2 + 2K\overset{1}{k}_3^2\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1K^2 + A_nK^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_n^2 + 2K\overset{1}{k}_n^2\,;$$
$$(n-1).A_1K^2 + A_2K^2 + A_3K^2 + \ldots + A_nK^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\{A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2\}$$
$$+ 2\{K\overset{1}{k}_2^2 + K\overset{1}{k}_3^2 + \ldots + K\overset{1}{k}_n\}^2$$
$$= (n-2).A_1K^2 + S\,,$$

wenn S die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Spitzen bezeichnet. Denkt man sich nun für jede der n Spitzen eine ähnliche Gleichung entwickelt, setzt die Summe der Quadrate aller die n Spitzen zu zweien verbindenden Linien $= \Sigma$, die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte derselben vom Punkte der mittlern Entfernungen aber $= S'$; so erhält man durch Addition aller Gleichungen, da offenbar jede Verbindungslinie, also auch jede Entfernung eines Mittelpunktes vom Punkte der mittlern Entfernungen zweimal vorkommt, leicht:

$$\tfrac{1}{2}.2\Sigma + 2.2S' = (n-2)S + nS\,,$$
$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'\,.$$

Aber $\Sigma = nS$ (19.). Also durch Substitution $(n-2)S = 4S'$, $S' = \frac{1}{4}(n-2)S$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte aller die n Spitzen des Vielecks verbindenden geraden Linien vom Punkte der mittlern Entfernungen, ist dem vierten Theile der $(n-2)$fachen Summe der Quadrate der Entfernungen der Spitzen von jenem Punkte gleich.

24. Die Anzahl der Mittelpunkte der verbindenden Linien ist $= \frac{1}{2}n(n-1)$. Setzen wir nun die Summe der Quadrate aller diese Mittelpunkte verbindenden Linien $= \Sigma'$; so ist $\Sigma' = \frac{1}{2}n(n-1)S'$ (19.). Die drei Gleichungen:

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'\,,$$
$$\Sigma = nS,\ \Sigma' = \tfrac{1}{2}n(n-1)S'$$

dienen zur Bestimmung der vier Größen S, Σ, S', Σ' durch einander. So erhält man z. B.

$$(n-1)(n-2)\Sigma = 8\Sigma',$$
$$n(n-1)(n-2)S = 8\Sigma',$$

u. s. f., woraus sich wieder merkwürdige Sätze ergeben würden.

25. In jedem Vierecke ABCD (Fig. 105.), welches bei B und C rechtwinklig ist, ist, wenn wir den Winkel BAC = A setzen, immer $ABCD - 2 . \Delta ABC = -\frac{1}{4} AD^2 . \sin 2A$. Sey AB = b, AC = c; so ist

$$AD = b \sec\varphi = c \sec(A-\varphi),$$
$$b\cos(A-\varphi) = c\cos\varphi,$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c - b\cos A}{b\sin A}.$$

Folglich, wenn man zugleich b, c vertauscht:

$$BD = \frac{c - b\cos A}{\sin A}, \quad CD = \frac{b - c\cos A}{\sin A};$$
$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin A^2}.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe für BD, CD erhält man nun leicht:

$$ABCD = \tfrac{1}{2} b . BD + \tfrac{1}{2} c . CD$$
$$= \frac{2bc\sin A^2 - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A}{2\sin A},$$

wenn man nur $2bc(\sin A^2 + \cos A^2)$ für 2bc setzt. Aber $2 . \Delta ABC = bc\sin A$. Folglich

$$ABCD = bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{4\sin A^2}$$
$$= 2 . \Delta ABC - \tfrac{1}{4} AD^2 . \sin 2A,$$

woraus die zu beweisende Gleichung unmittelbar folgt.

26. Sey nun ABCD ... ein willkührliches Vieleck, dessen Inhalt wir durch I bezeichnen wollen. Von irgend einem Punkte K′ in der Ebene des Vielecks fälle man auf die Seite Lothe, und verbinde deren Fußpunkten durch gerade Linien, wodurch ein neues Vieleck A′B′C′D′ .... von gleicher Seitenzahl entsteht, dessen Inhalt wir = I′ setzen wollen; so hat man (25.):

$$K'BA'B' - 2 . \Delta K'A'B' = -\tfrac{1}{4} K'B^2 . \sin 2B,$$
$$K'CB'C' - 2 . \Delta K'B'C' = -\tfrac{1}{4} K'C^2 . \sin 2C,$$
$$K'DC'D' - 2 . \Delta K'C'D' = -\tfrac{1}{4} K'D^2 . \sin 2D,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K'AN'A' - 2 . \Delta K'N'A' = -\tfrac{1}{4} K'A^2 . \sin 2A,$$

wenn N die letzte Spitze des gegebenen Vielecks ist. Die Summe der Vierecke ist offenbar $= I$, die der Dreiecke $= I'$. Also

$$I - 2I' =$$
$$-\tfrac{1}{4}\{K'A^2 \,.\, \sin 2A + K'B^2 \,.\, \sin 2B + K'C^2 \,.\, \sin 2C + \ldots\}$$

und, wenn das Viereck gleichwinklich ist:

$$I - 2I' =$$
$$-\tfrac{1}{4}\{K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots\}\sin 2A.$$

Soll nun, indem A und I constant bleiben, I′ constant bleiben; so muß $K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots$ constant bleiben. Diese Quadratensumme bleibt aber (17.) constant, wenn K′ in der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen des Vielecks beschriebenen Kreises liegt. Dies giebt folgenden Satz: Fället man aus irgend einem Punkte der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen eines gleichwinkligen Vielecks beschriebenen Kreises auf dessen Seiten Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des dadurch entstehenden eingeschriebenen Vielecks eine constante Größe. Dieser Satz für regelmäßige Polygone ist von L'Huilier (Bibliothèque universelle, 1824. p. 169.) gefunden, von Sturm und von einem Ungenannten (Annales d. Math. T. XV. p. 250. p. 45.) bewiesen, und von Steiner (Crelles Journal. B. I. S. 51.) noch mehr erweitert.

IV. Punkte kleinster Entfernung.

27. Man habe irgend zwei Punkte M, M′ in der Ebene eines Vielecks. Die durch M und M′ gehende gerade Linie nehme man als Axe der x an, M sey der Anfang der Coordinaten, die Entfernungen der Spitzen von M sollen durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ihre Entfernungen von M′ durch $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$, die Coordinaten wie vorher, die Entfernung des Punktes M′ von M durch k, bezeichnet werden; so ist (15.):

$$r'_1 = \sqrt{(r_1^2 + k^2 - 2kx_1)} = r_1\sqrt{(1 - c_1)},$$
$$r'_2 = \sqrt{(r_2^2 + k^2 - 2kx_2)} = r_2\sqrt{(1 - c_2)},$$
$$r'_3 = \sqrt{(r_3^2 + k^2 - 2kx_3)} = r_3\sqrt{(1 - c_3)},$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

$$\text{für } c_1 = \frac{k(2x_1 - k)}{r_1^2}, \quad c_2 = \frac{k(2x_2 - k)}{r_2^2} \ldots.$$

Entwickelt man die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatze, und ordnet nach Potenzen von k; so wird:

$$r'_1 = r_1 - k\frac{x_1}{r_1} + k^2\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_1} + \ldots,$$

$$r'_2 = r_2 - k\frac{x_2}{r_2} + k^2\left(1 - \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_2} + \ldots,$$

$$r'_3 = r_3 - k\frac{x_3}{r_3} + k^2\left(1 - \frac{x_3^2}{r_3^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

folglich, weil

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2,\ r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \ldots.;$$

$$1 - \frac{x_1^2}{r_1^2} = \frac{y_1^2}{r_1^2},\ 1 - \frac{x_2^2}{r_2^2} = \frac{y_2^2}{r_2^2}, \ldots.$$

ist, wenn man auf beiden Seiten addirt:

$$\Sigma r' = \Sigma r - k\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right\}$$
$$+ k^2\left\{\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^3} + \ldots\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

wo die Bezeichnung Σr, $\Sigma r'$ leicht verständlich seyn wird. Man kann den Punkt M nun einer solchen Bedingung unterwerfen, daß für ihn Σr, d. i. die Summe seiner Entfernungen von allen Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller andern in seiner Nähe liegenden Punkte von den Spitzen des Vielecks. Zu dem Ende muß also, für kleine k, $\Sigma r' > \Sigma r$ seyn. Man kann nun aber k so klein nehmen, daß das erste Glied

$$-k\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right\}$$

obiger Reihe, rücksichtlich seines absoluten Werths, größer ist, als die Summe aller übrigen, so daß also für so kleine k das Zeichen der zu Σr addirten Größe bloß von diesem ersten Gliede abhängt, also positiv oder negativ ist, jenachdem

$$-\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right\}$$

es ist. Soll demnach, für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ seyn; so muß nothwendig

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_2} + \ldots = 0$$

seyn. Das zweite Glied

$$k^2 . \left\{ \frac{1}{2r_1} . \frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} . \frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_2} . \frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots \right\}$$

ist offenbar immer positiv, und man kann wieder k^2 so klein nehmen, daß der absolute Werth jenes Gliedes die Summe aller folgenden übertrifft, so daß also, für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ ist. Folglich giebt es in der Ebene jedes Vielecks Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den Spitzen des Vielecks kleiner ist als die Summe der Entfernungen aller in ihrer Nähe liegenden Punkte von diesen Spitzen. Jene Punkte nennt man Punkte kleinster Entfernung, und sie sind, da man offenbar auch x mit y vertauschen kann, der Bedingung unterworfen, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

ist.

28. Man denke sich nun die Coordinatenaxen durch den Punkt kleinster Entfernung M gelegt, schneide von ihm an auf den von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Stücke ϱ ab, und bezeichne die Coordinaten der Endpunkte A_1, A_2, A_3, ... dieser Stücke durch ξ_1, v_1; ξ_2, v_2; ξ_3, v_3; ....; so erhellet auch ohne Figur augenblicklich, daß

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\xi_1}{\varrho}, \frac{x_2}{r_2} = \frac{\xi_2}{\varrho}, \frac{x_3}{r_3} = \frac{\xi_3}{\varrho}, \ldots;$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{v_1}{\varrho}, \frac{y_2}{r_2} = \frac{v_2}{\varrho}, \frac{y_3}{r_3} = \frac{v_3}{\varrho}, \ldots;$$

und folglich wegen der Bedingungsgleichungen (27.), wenn man zugleich mit ϱ multiplicirt:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0.$$

Dies sind aber die Bedingungsgleichungen für den Punkt der mittlern Entfernungen der Punkte A_1, A_2, A_3, ... Folglich ist jeder Punkt der kleinsten Entfernung eines Vielecks der Mittelpunkt der Entfernungen der Punkte,

welche man erhält, wenn man auf den, von dem Punkte kleinster Entfernung nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von diesem Punkte aus willkührliche, aber gleiche, Stücke abschneidet.

29. Ist umgekehrt ein Punkt M in der Ebene eines Vielecks der Punkt mittlerer Entfernungen der gleich weit von ihm entfernten Punkte A_1, A_2, A_3, ...; so ist, wenn man sich die Coordinatenaxen wieder durch M gelegt denkt, und die vorige Bezeichnung beibehält (12.):

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0,$$

woraus wie vorher folgt, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$
$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

M also ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks, der vorige Satz folglich auch umgekehrt richtig ist.

Im Viereck ist also der Durchschnittspunkt der Diagonalen ein Punkt kleinster Entfernung, weil, wenn man von den Diagonalen gleiche Stücke abschneidet, und deren Endpunkte verbindet, ein Parallelogramm entsteht, dessen Punkt der mittlern Entfernungen besagter Durchschnittspunkt ist (13.).

30. Giebt es in der Ebene eines Vielecks einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß die von ihm nach den Spitzen gezogenen Linien lauter gleiche Winkel einschließen; so ist M ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks. Schneidet man nämlich auf den von M nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von M aus gleiche willkührliche Stücke ab, und verbindet deren Endpunkte durch gerade Linien; so entsteht offenbar ein reguläres (39.) Vieleck, dessen Mittelpunkt M ist. Also (40.) ist M der Punkt der mittlern Entfernungen dieses regulären Vielecks, folglich der Punkt kleinster Entfernung des gegebenen Vielecks.

31. Sind alle Winkel eines Dreiecks $< \frac{4}{3}$ R; so giebt es innerhalb desselben immer einen Punkt von solcher Be-

Beschaffenheit, daß die von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Winkel (jeder $= \frac{4}{3}$R) einschließen, und nur einen. Wären alle drei Winkel eines Dreiecks $< \frac{2}{3}$R; so wäre die Summe aller < 2R. Folglich muß es wenigstens einen geben, welcher $\geqq \frac{2}{3}$R. Dieser Winkel sey BAC (Fig. 106.). Ueber AB und AC beschreibe man zwei Kreisabschnitte, deren jeder einen Winkel $= \frac{4}{3}$R faßt (Elem. III. 33.); so müssen die Bogen dieser Segmente sich nothwendig zwischen den Schenkeln des Winkels BAC schneiden, weil dieser Winkel $< \frac{4}{3}$R, $\geqq \frac{2}{3}$R ist, und jede der beiden durch A an die Bogen gezogenen Berührenden mit AB und AC einen Winkel $= \frac{2}{3}$R einschließt, indem jeder dieser beiden Winkel dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte gleich (Elem. III. 32.), also die Ergänzung von $\frac{4}{3}$R zu 2R (Elem. III. 22.), d. i. $= \frac{2}{3}$R ist. Da nun der Durchschnittspunkt M der beiden Bogen zwischen den Schenkeln von BAC liegt; so muß M nothwendig innerhalb des Dreiecks liegen, weil der der Spitze A zugekehrte Winkel BMC $= \frac{8}{3}$R ein convexer Winkel ist, welches nicht möglich wäre, wenn M außerhalb des Dreiecks läge. Da nun AMB $=$ AMC $= \frac{4}{3}$R ist; so ist auch BMC $= \frac{4}{3}$R, und folglich die drei von AM, BM, CM eingeschlossenen Winkel einander gleich. Da die beiden Bogen der Kreisabschnitte, welche $\frac{4}{3}$R fassen, sich nur in einem Punkte schneiden können; so giebt es auch nur einen Punkt wie M.

32. Da es in jedem Dreieck, dessen Winkel alle $< \frac{4}{3}$R sind, innerhalb immer einen Punkt giebt, für welchen die von ihm an die Spitzen gezogenen Linien gleiche Winkel einschließen; so giebt es für jedes solche Dreieck immer auch einen Punkt kleinster Entfernung innerhalb (30.). Auch giebt es nur einen Punkt kleinster Entfernung. Gäbe es nämlich zwei M, M′; so müßten wenigstens zwei der von AM′, BM′, CM′, gebildeten Winkel ungleich seyn, weil es nur einen Punkt giebt, wo diese Winkel gleich sind (31.). Der Punkt M′ wäre aber der Punkt der mittlern Entfernungen auf AM′, BM′, CM′ von M′ gleich weit entfernter Punkte (28.). Folglich müßten, wenn man die den

beiden ungleichen Winkel zugleich als Schenkel angehörende Linie unter AM′, BM′, CM′ als Axe annähme, die Ordinaten der auf den beiden andern Linien gleichweit von M′ entfernten Punkte einander gleich seyn (12.), welches jedoch wegen der Ungleichheit der Winkel offenbar unmöglich ist.

33. Hat nun ein Dreieck einen Winkel BAC (Fig. 107.), welcher $\overline{\overline{>}}\ \frac{4}{3}$R ist; so kann der Punkt kleinster Entfernung nicht innerhalb liegen, weil sonst AMB = AMC = $\frac{4}{3}$R (32.), also nothwendig MAB′ $< \frac{2}{3}$R, MAC $< \frac{2}{3}$R, BAC $< \frac{4}{3}$R seyn müßte. In einer Seite des Dreiecks kann aber der Punkt kleinster Entfernung überhaupt eben so wenig liegen, als außerhalb des Dreiecks, weil sich von einem solchen Punkte nie nach den Spitzen drei, gleiche Winkel mit einander einschließende, gerade Linien ziehen lassen, wie es doch in vorliegendem Falle möglich seyn müßte (32.). Daher muß der Punkt kleinster Entfernung in zwei Seiten zugleich, d. h. in einer Spitze des Dreiecks, liegen. Da aber offenbar BA + BC > AB + AC, CA + CB > AB + AC ist; so muß der Punkt kleinster Entfernung in der Spitze C des stumpfen Winkels liegen.

V. In und um den Kreis beschriebene Vielecke.

34. Ein Vieleck heißt in einen Kreis beschrieben, wenn alle seine Seiten Sehnen, um einen Kreis, wenn alle seine Seiten Berührende sind. Im erstern Falle heißt der Kreis um, im letztern in das Vieleck beschrieben. Eingeschriebene Vielecke haben einen Mittelpunkt der Spitzen, umschriebene einen Mittelpunkt der Seiten. Erstere heißen centrisch nach den Spitzen, letztere centrisch nach den Seiten.

35. Bezeichnet man in einem eingeschriebenen 2neck, also mit gerader Seitenzahl, die Vielecks winkel nach der Reihe durch (1), (2), (3), (4), u. s. f.; so ist immer

$$(1) + (3) + (5) + (7) + \ldots = (2) + (4) + (6) + (8) + \ldots$$

Wir wollen annehmen, der Satz gelte für das 2neck. Hat man nun ein $(2n+2)$eck, so schneide man durch die Diagonale, welche die Winkelspitzen (1) und $(2n)$ mit einander verbindet, ein Viereck ab, so daß ein 2neck übrig bleibt. Die an der gezogenen Diagonale liegenden Winkel des 2necks seyen $(1)'$, $(2n)'$, die des Vierecks $'(1)$, $'(2n)$; so hat man nach der Annahme, und nach dem Art. Viereck (9.)

$$(1)' + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) =$$
$$(2) + (4) + (6) + \ldots + (2n)',$$
$$'(1) + (2n+1) = '(2n) + (2n+2).$$

Woraus, da offenbar $(1)' + '(1) = (1)$, $(2n)' + '(2n) = (2n)$ ist, durch Addition sogleich folgt:

$$(1) + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) + (2n+1) =$$
$$(2) + (4) + (6) + \ldots + (2n) + (2n+2).$$

Der Satz gilt also für das $(2n+2)$eck, wenn er für das 2neck gilt. Er gilt aber für das Viereck, da für dieses immer $(1) + (3) = (2) + (4)$ (Viereck. 9.). Also ist er allgemein.

36. Hat man ein eingeschriebenes Vieleck von $2n-1$, d. i. einer ungeraden Anzahl von Seiten; so theile man durch einen nach irgend einer Spitze gezogenen Radius den Winkel an derselben in zwei Winkel, und bezeichne, diese beiden Winkel mit eingeschlossen, alle Winkel des Vielecks durch (1), (2), (3), $\ldots$ $(2n-1)$, $(2n)$; so hat man auch hier

$$(1) + (3) + \ldots + (2n-1) = (2) + (4) + \ldots + (2n).$$

Ist nämlich in Fig. 108. der Radius CA gezogen; so denke man sich durch A eine Tangente gezogen, und durch eine Diagonale, welche dem Winkel A gegenüber liegt, ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein $(2n-2)$eck übrig bleibt. In diesem ist (35.):

$$(1)' + (3) + \ldots + (2n-3) = (2) + (4) + \ldots + (2n-2)'.$$

Aber (Elem. III. 32.) $\alpha = '(2n-2)$, $\beta = '(1)$, auch $\alpha + (2n) = 90^0$, $\beta + (2n-1) = 90^0$, d. i.

$$'(1) + (2n-1) = '(2n-2) + (2n).$$

Dies, zu obiger Gleichung addirt, giebt, da

$$(1)' + '(1) = (1)\,,\ (2n-2)' + '(2n-2) = (2n-2)$$

ist, die zu beweisende Gleichung.

Diese Sätze sind Erweiterungen des Satzes vom eingeschriebenen Viereck.

37. Sehr leicht überzeugt man sich, daß in jedem umschriebenen Vieleck von gerader Seitenzahl, die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, ... Seite der Summe der 2ten, 4ten, 6ten, ... gleich ist. In einem umschriebenen Vieleck von ungerader Seitenzahl dagegen ist die Summe der 2ten, 4ten, 6ten, ... , und des ersten Theils der 1ten Seite, bis an ihren Berührungspunkt, gleich der Summe des zweiten Theils der 1ten Seite, von ihrem Berührungspunkte an, und der 3ten, 5ten, 7ten, ... Seite. Die Beweise beider Sätze folgen sogleich aus dem Satze, daß die beiden von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben gezogenen Berührenden einander gleich sind.

38. Um einen Kreis sey ein Vieleck beschrieben, und mit dem Kreise ein concentrischer Kreis verzeichnet. Zieht man von irgend einem Punkte in der Peripherie des zweiten Kreises gerade Linien an die Berührungspunkte; so ist die Summe der Producte der Quadrate dieser Linien in die entsprechenden Seiten des umschriebenen Polygons eine constante Größe. Die Halbmesser der beiden Kreise seyen r, R, die Seiten des Vielecks a, b, c, d, ..., die entsprechenden Berührungspunkte, A, B, C, D, ..., der angenommene Punkt in der Peripherie des zweiten Kreises sey P und O der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Kreise. Die Winkel POA, POB, POC, ..., von PO an nach einer Seite hin von 0° bis 360° gezählt, bezeichne man durch α, β, γ, δ, ...; so ist, wie leicht erhellet (Trigonometrie. 7.):

$$AP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha\,,$$
$$BP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\beta\,,$$
$$CP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma\,,$$
$$DP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\delta\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots$$

$$= (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots)$$
$$- 2rR\,(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots\ldots).$$

Aus (Fig. 109.) erhellet aber sogleich, daß die Winkel α, β, γ, δ, ... den Winkeln gleich sind, welche die Seiten des Polygons mit einer durch O auf OP senkrecht gezogenen Linie OP′ einschließen, diese Winkel nach der Richtung der Seiten nach einer Seite hin ebenfalls von 0^0 bis 360^0 gezählt. Folglich ist (Trigonometrie. 176.)

$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots\ldots,$$

also

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots\ldots$$
$$= (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots),$$

und folglich die Summe

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots\ldots$$

eine constante Größe, wo auch der Punkt P in der Peripherie des zweiten, mit dem eingeschriebenen concentrischen, Kreises liegen mag. Wird der Punkt in der Peripherie des eingeschriebenen Kreises selbst angenommen; so ist obige Summe

$$= 2r^2\,(a + b + c + d + \ldots).$$

Ueber in und um den Kreis beschriebene Vielecke, besonders auch über die schwierige Aufgabe, in einen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, vergl. den Art. Kreis (115.). Eine merkwürdige Eigenschaft des eingeschriebenen Sechsecks s. auch im Art. Transversale (35. 36.).

VI. Reguläre Vielecke.

39. Vielecke deren Seiten und Winkel einander gleich sind, heißen reguläre oder regelmäßige Polygone. Die Elemente lehren, daß um und in jedes Polygon dieser Art ein Kreis beschrieben werden kann, oder daß jedes reguläre Polygon centrisch nach den Spitzen und Seiten ist. Der Halbmesser des um das Polygon beschriebenen Kreises heißt der große Radius oder auch bloß der Radius, der Halbmesser des in das Polygon beschriebenen Kreises der kleine Radius des Polygons, der gemeinschaftliche Mittelpunkt

beider Kreise des Centrum des Polygons, der von zwei großen, oder zwei kleinen Radien eingeschlossene Winkel der Centriwinkel, ein Perpendikel von dem Mittelpunkte auf eine Seite heißt auch Apothema. Ist das Polygon ein reguläres neck; so ist der Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$, der Winkel am Umfange $= \frac{2(n-2)R}{n}$ (3.). Der Polygon- und Centriwinkel machen immer zusammen $2R = 180^0$.

Besonders wichtig ist die Beschreibung der regulären Polygone in und um den Kreis. Die Elemente lehren, daß diese Beschreibung dann allemal möglich ist, wenn der Kreis sich in so viele gleiche Theile geometrisch theilen läßt, als das zu beschreibende Polygon Seiten hat. Wir werden, indem wir dies als hinlänglich bekannt voraussetzen, nachher auf diesen Gegenstand zurück kommen.

40. Der Mittelpunkt eines regulären Polygons ist zugleich sein Punkt der mittlern Entfernungen. Man kann sich hiervon auf folgende einfache Art überzeugen. Ist die Seitenzahl gerade; so nehme man den Durchmesser BE (Fig. 110.) als Axe der x an. Dieser Durchmesser theilt aber das Vieleck offenbar in zwei congruente Theile, so daß also augenscheinlich $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = o$,

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots}{n} \text{ (11.)} = o,$$

folglich BE eine Axe der mittlern Entfernungen ist, in welcher demnach der Punkt der mittlern Entfernungen liegt. Eben so liegt aber auch dieser Punkt in AD, folglich in dem Durchschnittspunkte von BE und AD, d. i. in dem Mittelpunkte. Ganz eben so zeigt man bei regulären Vielecken mit ungerader Seitenzahl (Fig. 111.), daß der Punkt der mittlern Entfernungen sowohl in BH, als in AL, folglich im Durchschnittspunkte beider, d. i. im Mittelpunkte K liegen muß.

41. Drückt man diesem gemäß die oben (III.) bewiesenen allgemeinen Sätze vom Punkte der mittlern Entfernungen aus; so ergeben sich viele merkwürdige Eigenschaften der regulären Vielecke, wovon wir hier nur einige ausheben.

In jedem regulären neck ist die Summe der Quadrate der von irgend einem Punkte in seiner Ebene nach den Spitzen gezogenen Linien gleich der nfachen Summe der Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises und der den Mittelpunkt mit jenem Punkte verbindenden geraden Linie (15.).

Einen allgemeinern Satz, von Lentheric bewiesen, s. in den Annales d. Math. T. XVI. p. 20.

Die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes in der Peripherie irgend eines, mit einem regulären Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt habenden, Kreises von allen Spitzen des Polygons ist gleich der nfachen Summe des Quadrats des Halbmessers des gegebenen Kreises und des Quadrats des Halbmessers r des Polygons, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag (17.). Ist der Kreis, in dessen Peripherie der Punkt angenommen wird, um das Polygon beschrieben; so ist besagte Quadratensumme offenbar $= 2nr^2$. Theilt man also die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile, und zieht von irgend einem Punkte in der Peripherie nach allen Theilpunkten gerade Linien; so ist, wenn r der Radius des Kreises ist, die Summe der Quadrate dieser Linien $= 2nr^2$, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag.

Die Summe der Quadrate aller Seiten und Diagonalen eines regulären necks ist dem mit n^2 multiplicirten Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises gleich (19.). Ist a die Seite des regulären Dreiecks, r der Radius des umschriebenen Kreises; so ist $3a^2 = 9r^2$, $a = r\sqrt{3}$, $r = a : \sqrt{3}$.

Fällt man von irgend einem Punkte in der Peripherie eines mit einem regulären Polygon einerlei Mittelpunkt habenden Kreises auf die Seiten des Polygons Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des entstehenden Vielecks eine constante Größe, wo auch der angenommene Punkt in der Peripherie des Kreises liegen mag (26.).

Fällt man von irgend einem Punkte in der Ebene eines regulären Vielecks, dessen Seite $= s$ sey, auf alle Seiten Perpendikel $p, p', p'', p''', \ldots$, wobei die vom angenommenen Punkte aus in das Polygon hinein gehenden Perpendikel als negativ angesehen werden sollen; so ist, wenn P der Inhalt des Polygons, offenbar

$$P = \tfrac{1}{2}(p + p' + p'' + p''' + \ldots)s.$$

Ist aber ϱ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, und die Seitenzahl $= n$; so ist $P = \frac{1}{2} n \varrho s$. Also

$$p + p' + p'' + p''' + \ldots = n\varrho,$$

d. h. die Summe aller von irgend einem Punkte auf die Seiten eines regulären necks gefällten Perpendikel ist dem nfachen kleinen Radius gleich, also eine constante Größe.

Ist in (38.) das um den Kreis beschriebene Polygon regulär; so ist $a = b = c = \ldots$, $a + b + c + \ldots = na$, wenn n die Seitenzahl, wodurch sich die dortige Gleichung in

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + \ldots = n(R^2 + r^2)$$

verwandelt. Zieht man also von irgend einem Punkte in der Peripherie eines mit einem umschriebenen regulären Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt habenden Kreises nach allen Berührungspunkten desselben gerade Linien; so ist die Summe der Quadrate dieser Linien der nfachen Summe der Quadrate der Radien des eingeschriebenen und des ihm concentrischen Kreises gleich, oder = dem 2nfachen Quadrate des Radius des eingeschriebenen Kreises, wenn der Punkt in der Peripherie dieses Kreises selbst angenommen wird.

42. Schon oben ist bemerkt, daß die Beschreibung der regulären Polygone in und um den Kreis auf die geometrische Theilung der Kreisperipherie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zurückkommt. Schon die Eintheilung eines Bogens in drei gleiche Theile übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie, wenn auch die geometrische Theilung des ganzen Kreises in drei gleiche Theile möglich ist. M. vergl. den Art. Trisection des Winkels. Euclid lehrt bloß die Eintheilung des Kreises in 4, 6, 5 und 15 gleiche Theile, und, da sich jeder Bogen geometrisch

halbiren läßt, so kann man obige Zahlen auch willkührlich oft verdoppeln und halbiren, wodurch man andere geometrische Theilungen erhält. Alles dieses ist aus den Elementen bekannt. Mascheroni macht in seiner Géometrie du compas (Uebers. v. Grüson. Berlin. 1825.) diese und andere Theilungen zur praktischen Anwendung geschickter, indem er, den Gebrauch des Lineals vermeidend, sie bloß mit dem Zirkel auszuführen lehrt. Renaldinus (De resolutione et compositione mathematica. Lib. II. f. 367.) glaubte eine allgemeine Regel zur Beschreibung jedes regulären Polygons in den Kreis gefunden zu haben, deren Unrichtigkeit aber schon Wolf (Elementa Analyseos finitor. §. 292.) nachgewiesen hat, und in der That ist seit Euclid die Theorie der Eintheilung des Kreises in gleiche Theile um keinen Schritt wesentlich gefördert worden, bis im Jahre 1801 Gauß eine seiner glänzendsten Entdeckungen bekannt machte. Er hat nämlich folgenden merkwürdigen Satz gefunden: Wenn die Seitenzahl n eines regulären Polygons eine Primzahl, und $n - 1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \ldots$ ist; so läßt sich die Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile immer auf die Auflösung von α Gleichungen des 2ten, β Gleichungen des 3ten, γ Gleichungen des 5ten Grades u. s. f. zurückführen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf sehr feinen Untersuchungen der höhern Arithmetik, und hängt unmittelbar mit der Auflösung einer gewissen merkwürdigen Klasse von Gleichungen zusammen, kann aber hier, ohne zu große Weitläufigkeit nicht mitgetheilt werden. Wir haben daher diese merkwürdige und wichtige Theorie in die Zusätze zu diesem Werke, in den Artikel Gleichung, verwiesen, wo sie ganz und im Zusammenhange dargestellt werden soll. Der 7te Abschnitt (De aequationibus circuli sectiones definientibus) der Disquisitiones arithmeticae (Lips. 1801.) des berühmten deutschen Geometers giebt über diesen Gegenstand die vollständigste und beste Belehrung, hängt aber innig mit dem Gegenstande des ganzen Werkes zusammen. Auch in Legendre Théorie des nombres. V. Partie.

p. 435 — 480. ist eine klare Darstellung dieser Untersuchungen gegeben. Außerdem s. m. noch eine Abhandlung von Abel in Crelles Journal. IV. 2. 5. 131. wo die Untersuchung zugleich noch erweitert ist. Ist also $n - 1 = 2^{\alpha}$; so wird zu der Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile nur die Auflösung von α quadratischen Gleichungen erfordert, und solche Theilungen sind also immer durch die Elementargeometrie ausführbar, weil jede quadratische Gleichung sich bloß mittelst der geraden Linie und des Kreises construiren läßt. Für $n = 17$, wo $n - 1 = 2^4$, ist also die elementar-geometrische Construction möglich. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir nun zur Construction der euclidischen regulären Polygone und des regulären 17ecks in den Kreis über, werden dabei aber vorzüglich uns des Calcus bedienen.

43. Aus der Seite $AB = a$ (Fig. 112.) eines necks im Kreise läßt sich immer die Seite $AD = a'$ des 2necks im Kreise finden. Denn es ist, den Radius $= 1$ gesetzt, $a'^2 = \frac{1}{4}a^2 + DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + (1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)})^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)}$. Also

$$a' = \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - a^2)})}\,.$$

Mittelst einer successiven Anwendung dieser Formel erhält man leicht für die Seiten des 2necks, 4necks, 8necks, 16necks, u. s. f. im Kreise aus der Seite a des necks folgende Ausdrücke:

$$\sqrt{(2 - \sqrt{(4 - a^2)})}\,,$$
$$\sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - a^2)})})}\,,$$
$$\sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - a^2)})})})}\,,$$
$$\sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - a^2)})})})})}\,,$$
$$\sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - a^2)})})})})})}\,,$$

u. s. f. u. s. f.

deren Gesetz leicht erhellet. Für einen beliebigen Radius r braucht man diese Ausdrücke bloß mit r zu multipliciren. Nur bezieht sich a immer auf den Radius $= 1$.

44. Die Seite des necks findet man aus der Seite des 2necks durch die Formel

$$a = a'\sqrt{(4 - a'^2)}\,.$$

Für einen beliebigen Radius r muß man diesen Ausdruck

mit r multipliciren. Aber a′ bezieht sich immer auf den Radius = 1.

45. Die Seite des umschriebenen necks sey = b; so ist (Fig. 113.) AF = $\frac{1}{2}$b. Aber AF : AE = AC : CE, $\frac{1}{2}b : \frac{1}{2}a = 1 : \sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)}$, woraus

$$b = \frac{2a}{\sqrt{(4 - a^2)}}.$$

46. Ein von zwei Radien und einer Seite eines eingeschriebenen regulären Polygons gebildetes gleichschenkliges Dreieck wollen wir ein Bestimmungsdreieck nennen. Der Winkel an dessen Spitze ist der Centriwinkel, der Winkel an der Grundlinie der halbe Polygonwinkel des regulären Vielecks. Der Centriwinkel des regulären Vierecks ist = 90°. Folglich die Seite = $\sqrt{2}$. Also (43.) die Seite des eingeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f.:

$$\sqrt{2},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{2})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})};$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})},$$

u. s. f. u. s. f.

immer den Radius = 1 gesetzt. Folglich sind (45.) die Seite des umgeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f:

$$2,$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}},$$

u. s. f. u. s. f.

Durch verschiedene Reductionen kann man diesen Ausdrücken einfachere Gestalten geben. Das Gesetz ist aber dann nicht so einleuchtend. Für das Achteck erhält man z. B. die Seite = $2(\sqrt{2} - 1)$. Die Hälfte dieser

Seite ist $= \sqrt{2} - 1$, nämlich = der Differenz zwischen der Seite des eingeschriebenen Vierecks und dem Radius. Vergleichungen dieser Art würden sich hier und im Folgenden mehrere anstellen lassen. Da sie sich aber alle leicht ergeben; so werden sie der Kürze wegen größtentheils übergangen.

47. Der Centriwinkel des eingeschriebenen regulären Sechsecks ist $= 60^0$, und eben so groß der halbe Polygonwinkel; das Bestimmungsdreieck demnach ein gleichseitiges. Folglich die Seite des regulären Sechsecks dem Radius gleich, $= 1$, so daß sich also der Radius genau 6mal in der Peripherie herumtragen läßt, wodurch sogleich die Beschreibung des regulären Sechsecks in den Kreis gegeben. Die Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks ist also (44.) $= \sqrt{3}$, und folglich die Seiten des eingeschriebenen regulären Dreiecks, Sechsecks, Zwölfecks, u. s. f.:

$$\sqrt{3},$$
$$1,$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{3})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{3})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})},$$
u. s. f. u. s. f.

Hieraus ergeben sich ferner die Seiten der umgeschriebenen regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl:

$$2\sqrt{3},$$
$$2\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})}}},$$
u. s. f. u. s. f.

Die Seite des umgeschriebenen regulären Zwölfecks ist,

einfacher ausgedrückt, $= 2(2 - \sqrt{3})$, also das Doppelte von der Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfecks.

48. Der Centriwinkel des regulären Zehnecks ist $= 36^0$. Also der halbe Polygonwinkel $= 90^0 - 18^0 = 72^0$. Im Bestimmungsdreieck ist also der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze. Ist also ABC (Fig. 114.) das Bestimmungsdreieck für das Zehneck, dessen Seite AB, und man halbirt den Winkel BAC durch AD; so überzeugt man sich leicht, daß ADC, ADB gleichschenklige Triangel, also $CD = AD = AB$, und die Triangel ABC, ABD ähnlich sind, woraus $BC : AB = AB : BD$, oder, für $AB = x$, $1 : x = x : 1 - x$, $x^2 = 1 - x$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Nach (44.) ergiebt sich hieraus leicht die Seite des eingeschriebenen regulären Fünfecks $= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$. Also hat man (43.) die Seiten des eingeschriebenen regulären Fünfecks, Zehnecks, Zwanzigecks, u. s. f.:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$
$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$
$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)},$$
$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}\right)},$$
$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(2+\sqrt{\left(2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}\right)}\right)},$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

Für die umschriebenen Vielecke von gleicher Seitenzahl erhält man nach (45.), $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \alpha$ setzend:

$$2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}},$$
$$\frac{(\sqrt{5}-1).\sqrt{2}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\alpha)}}{2+\sqrt{(2+\alpha)}}}$$

$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\alpha)})}}{2+\sqrt{(2-\sqrt{(2+\alpha)})}}},$$

$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\alpha)})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\alpha)})})}}},$$

u. s. f. u. s. f.

Die Seiten des umschriebenen Fünf- und Zehnecks sind, einfacher ausgedrückt, auch $2\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ und $2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.

49. Da $1+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2=\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$ ist; so ist immer das Quadrat des Radius und das Quadrat der Seite des Zehnecks dem Quadrate der Seite des Fünfecks gleich, und der Radius, die Seite des Zehnecks und die Seite des Fünfecks bilden folglich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seite des Fünfecks ist. Die Seite des Zehnecks ist $=\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{(1+(\frac{1}{2})^2)}-\frac{1}{2}$, oder, wenn man mit r multiplicirt, $=\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)}-\frac{r}{2}$. Dies giebt unmittelbar folgende einfache Construction der Seite des Zehn- und Fünfecks im Kreise. Man halbire (Fig. 115.) den Halbmesser CB in D, ziehe CE senkrecht auf AB, ziehe DE, und beschreibe mit diesem Radius einen Bogen EF; so ist, wegen obigen Ausdrucks, FC die Seite des Zehnecks, und folglich die Hypotenuse FE des rechtwinkligen Dreiecks FCE die Seite des Fünfecks.

50. Die Diagonalen des Fünfecks sind offenbar alle einander gleich, und das Dreieck ABC (Fig. 116.) ist gleichschenklich. Auch sind die Winkel ABC, ACB, als auf den doppelten Bogen stehend, doppelt so groß als BAC, und man hat, für $AB=d$, $BC=a$, ganz wie in (48.), $AB:BC=BC:AB-BC$, $d:a=a:d-a$, $a^2=d^2-ad$, $d=\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ (48.). Auch ist

$$d=\tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}=a\,.\,\frac{2}{\sqrt{5}-1}=a:\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Setzen wir also die Seite des Zehnecks $=a'$; so ist (48.) immer $d=\frac{a}{a'}=$ der Seite des Fünfecks, dividirt durch die Seite des Zehnecks, oder, für den Radius r, $d=\frac{ra}{a'}$, $a':a=r:d$, die Seite des Zehnecks zur Seite

des Fünfecks, wie der Radius zur Diagonale des Fünfecks. Vollendet man den aus D (Fig. 115.) beschriebenen Bogen zum Halbkreise, und zieht EG; so ist, weil FEG ein rechter Winkel, $FC : FE = CE : EG$, folglich EG die Diagonale des Fünfecks.

Zieht man im eingeschriebenen Zehneck (Fig. 117.) die Diagonalen AB, AC, AD, AE; so ist AB der Durchmesser $= 2$, AE die Seite des Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ferner ist $AC^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BC die Seite des Zehnecks setzt (48.). Also ist $AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} =$ der Diagonale des Fünfecks (50.). Endlich ist $AD^2 = AB^2 - BD^2, = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, wenn man $AB = 2$, und für BD die Seite des Fünfecks (48.) setzt. Die Diagonalen des Zehnecks sind also:

$AB = 2$, der Durchmesser;

$AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, Diagonale des Fünfecks;

$AD = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, und

$AE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, Seite des Fünfecks.

In Fig. 115. ist $CG^2 = EG^2 - CE^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1$ (50.) $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $CG = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, die dritte Diagonale AD (Fig. 117.) des Zehnecks. Das Dreieck FEG (Fig. 115.) enthält also die Seiten und alle Diagonalen des regulären Fünf- und Zehnecks.

51. Da man nach dem Bisherigen das reguläre Sechs- und Zehneck in den Kreis beschreiben, also auch den 6ten und 10ten Theil der Peripherie geometrisch finden kann; so kann man den Kreis in 15 gleiche Theile theilen, da $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, und folglich auch das reguläre Funfzehneck in den Kreis beschreiben.

Mit Hülfe einiger trigonometrischen Sätze ist die Berechnung der Seite des Funfzehnecks leicht. Es ist nämlich $\frac{1}{30} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$, die ganze Peripherie als Einheit ge-

nommen. Also $\sin\frac{1}{30} = \sin\frac{1}{12}.\cos\frac{1}{20} - \cos\frac{1}{12}.\sin\frac{1}{20}$ (Goniometrie. 24.). Ferner ist $\sin\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\,\text{chord}\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (47.); also $\cos\frac{1}{12} = \sqrt{(1 - \sin^2\frac{1}{12})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin\frac{1}{20} = \frac{1}{2}\,\text{chord}\frac{1}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (48.), $\cos\frac{1}{20} = \sqrt{(1 - \sin^2\frac{1}{20})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Folglich nach obiger Formel:

$$\sin\frac{1}{30} = \frac{1}{8}\{\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\}.$$

Aber $\text{chord}\frac{1}{15} = 2\sin\frac{1}{30}$. Also die Seite des Funfzehnecks

$$= \frac{1}{4}\{\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\}.$$

Wie oben findet man nun auch die Seite des ein- und umschriebenen 30, 60, 120ecks, u. s. f. Die Construction des Funfzehnecks ergiebt sich sogleich.

52. Die Beschreibung des regulären Siebzehnecks in den Kreis, welche wir aus der schon oben (42.) erwähnten allgemeinen Theorie von Gauß hier ausheben, beruht, so wie wir die Sache darstellen wollen, vorzüglich auf der Summirung der Reihe

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots$$
$$\ldots \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1} = S.$$

Da (Goniometrie. 27.) immer

$$\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha = 2\cos k\alpha.\cos\alpha,$$
$$\cos(k+1)\alpha = 2\cos k\alpha.\cos\alpha - \cos(k-1)\alpha,$$

ist; so erhält man für die einzelnen Glieder unserer Reihe:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1},$$
$$-2\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1,$$
$$2\cos\frac{2\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp 2\cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n-3)\pi}{2n+1},$$
$$\pm 2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}.$$

Folglich, wenn man addirt:

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\left\{S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\}.\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$+ 1 - \left\{S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\},$$
$$2S\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}$$
$$\pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} + 1 \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

da $\frac{(n+1)\pi}{2n+1} + \frac{n\pi}{2n+1} = \pi$ ist. Also $S = \frac{1}{2}$ für jedes ganze positive n.

53. Dies giebt

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\\ + \cos\frac{5\pi}{17} - \cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} - \cos\frac{8\pi}{17}\end{array}\right\} = \frac{1}{2};$$

eine Gleichung mit 8 unbekannten Größen. Da es nun hier vorzüglich auf die Bestimmung von $\frac{\pi}{17}$ oder $\cos\frac{\pi}{17}$ ankommt; so sind zwischen diesen acht Unbekannten noch 7 andere Gleichungen zu suchen. Setzen wir

$$\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} - \left(\cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17}\right) = X,$$
$$\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} - \left(\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\right) = Y;$$

so haben wir die Gleichung:

$$X - Y = \frac{1}{2}.$$

54. Multiplicirt man nun die beiden Ausdrücke für X, Y mit einander, und zerlegt das Product jeder zwei Cosinus nach Goniometrie. (27.), so daß z. B.

$$\cos\frac{5\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{2}\cos\frac{13\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17},$$

wodurch der Factor von π nie 8 übersteigt; so findet man, daß dieses Product die Hälfte der in (53.) summirten Reihe 4 Mal enthält, woraus

$$XY = 1.$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit der vorigen,

reicht zur Bestimmung von X und Y hin, und es erhellet, daß dazu nur quadratische Gleichungen erforderlich sind.

55. Setzen wir nun

$$\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} = X', \quad \cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17} = X'';$$

$$\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} = Y', \quad \cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17} = Y'';$$

so finden wir nach einer ganz ähnlichen Methode wie vorher, $X'X''$, $Y'Y''$ der Hälfte der in (53.) summirten Reihe gleich. Also haben wir:

$$X' - X'' = X, \; Y' - Y' = Y;$$
$$X'X'' = \tfrac{1}{4}, \; Y'Y'' = \tfrac{1}{4};$$

vier, zur Bestimmung von X', X'', Y', Y'' hinreichende Gleichungen, und es fällt in die Augen, daß zu dieser Bestimmung ebenfalls nur quadratische Gleichungen erforderlich sind.

56. Nun ist ferner immer nach derselben Zerlegung wie vorher:

$$\cos\frac{3\pi}{17}.\cos\frac{5\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{6\pi}{17}.\cos\frac{7\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17}\right).$$

Bezeichnen wir also die acht Glieder der Reihe in (53.), alle positiv genommen, durch $x_1, x_2, x_3, \ldots x_8$; so hat man zur Bestimmung dieser 8 unbekannten Größen folgende Gleichungen:

$$X - Y = \tfrac{1}{2}, \; XY = 1.$$

$$X' - X'' = X, \; Y' - Y'' = Y;$$
$$X'X'' = \tfrac{1}{4}, \; Y'Y'' = \tfrac{1}{4}.$$

$$x_3 + x_5 = X', \; x_3 . x_5 = \tfrac{1}{2}Y';$$
$$x_6 - x_7 = X'', \; x_6 . x_7 = \tfrac{1}{2}Y'';$$
$$x_2 + x_8 = Y', \; x_2 . x_8 = \tfrac{1}{2}X'';$$
$$x_1 - x_4 = Y'', \; x_1 . x_4 = \tfrac{1}{2}X'.$$

Es ist klar, daß diese Gleichungen zur Bestimmung der obigen 8 unbekannten Größen hinreichen, und daß dazu

nur Gleichungen des zweiten Grades erforderlich sind. Hat man nun $x_1 = \cos\frac{\pi}{17}$ gefunden; so ist die Seite des Siebenzehnecks offenbar

$$= 2r\sin\frac{\pi}{17} = 2r\sqrt{\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{17}\right)}.$$

Nach gehöriger Rechnung findet man, wenn $r = 1$, die Seite des Siebzehnecks = der Quadratwurzel aus folgendem Ausdruck:

$$\tfrac{34}{16} - \tfrac{2}{16}\sqrt{17} - \tfrac{2}{16}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}$$
$$- \tfrac{4}{16}\sqrt{(17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{(170 + 38\sqrt{17})})}.$$

57. Um aus den obigen Formeln eine Construction des Siebenzehnecks abzuleiten, ist es zuvörderst nöthig, ihnen eine etwas veränderte Gestalt zu geben. Zu dem Ende denke man sich von jeder unbekannten Größe das Doppelte genommen, und diese Doppelten durch beigefügte obere oder untere Indices von den primitiven Größen unterschieden; so nehmen obige Gleichungen, so weit wir hier ihrer bedürfen, folgende Gestalt an:

$$X_1 - Y_1 = 1,\ X_1 Y_1 = 4.$$
$$X'_1 - X''_1 = X_1,\ Y'_1 - Y''_1 = Y_1;$$
$$X'_1 X''_1 = 1,\ Y'_1 Y''_1 = 1.$$
$$x'_2 + x'_8 = Y'_1,\ x'_2 \cdot x'_8 = X''_1.$$

Werden die erstern aufgelöst; so erhält man:

$$X_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} + \tfrac{1}{2},\ Y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2};$$
$$X'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4 + X_1^2)} + \tfrac{1}{2}X_1,$$
$$X''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4 + X_1^2)} - \tfrac{1}{2}X_1;$$
$$Y'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4 + Y_1^2)} + \tfrac{1}{2}Y_1,$$
$$Y''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4 + Y_1^2)} - \tfrac{1}{2}Y_1.$$

Setzen wir nun, wie immer, den Radius = 1; so wird der 17te Theil der Peripherie auf folgende Art durch Construction gefunden. Durch A (Fig. 118.) errichte man auf den Radius CA das Perpendikel AB = dem doppelten Radius = 2, halbire AC in D, und mache DE = BD; so ist $BD^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $BD = DE = \frac{1}{2}\sqrt{17}$, $CE = \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} = X_1$, $AE = \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2} = Y_1$. Halbire AE in F, AB in G, und nimm FH = FG; so ist $FG^2 = 1 + \frac{1}{4}Y_1^2$, $FG = FH = \frac{1}{2}\sqrt{(4 + Y_1^2)}$, $AH = \frac{1}{2}\sqrt{(4 + Y_1^2)} + \frac{1}{2}Y_1 = Y'_1$, EH =

$\frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)}-\frac{1}{2}Y_1 = Y''_1$. Errichte den senkrechten Radius CI, halbire CE in K, nimm $KL = KI$; so ist $KI^2 = 1 + \frac{1}{4}X_1^2$, $KI = KL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)}$, $EL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} + \frac{1}{2}X_1 = X'_1$, $CL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} - \frac{1}{2}X_1 = X''_1$. Beschreibt man nun über AL und AH Halbkreise, deren erster das Perpendikel CI in M schneidet, zieht durch M eine Parallele MN mit HL bis an den zweiten Halbkreis, und fällt von N auf HL das Perpendikel NP; so ist $NP^2 = CM^2 = AC.CL = PH.PA$, und $AH = PH + PA$. Da nun $AC = 1$; so hat man nach dem Obigen:

$$PH + PA = Y'_1,\ PH.PA = X''_1.$$

Diese Gleichungen, mit

$$x'_2 + x'_8 = Y'_1,\ x'_2.x'_8 = X''_1$$

verglichen, verbunden mit der Bemerkung, daß $x'_2 = 2x_2$, als der doppelte Cosinus des kleinern Winkels, $> x'_8$ ist, geben $PH = x'_2$, $PA = x'_8$. Aber $x'_8 = 2x_8 = 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{8\pi}{17}) = 2\sin\frac{\pi}{34} = \text{chord}\,\frac{2\pi}{34}$ = der Seite des Vier- und Dreißigecks $= PA$. Nimmt man also $Aa = AP$; so ist der Bogen $Aa = \frac{1}{34}$, sein Doppeltes also $= \frac{1}{17}$ der Peripherie. Ferner ist $x'_2 = 2x_2 = 2\cos\frac{2\pi}{17} = 2\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{2\pi}{17}) = 2\sin\frac{13\pi}{34} = \text{chord}\,\frac{13\pi}{17}$. Nimmt man also $Ab = PH$; so ist Bogen $Ab = \frac{13\pi}{17}$, also $A'b = \frac{4\pi}{17}$, $\frac{1}{2}A'b = \frac{2\pi}{17}$. Wird also Bog $A'b$ in c halbirt; so ist Bog $A'c = \frac{1}{17}$ der Peripherie, und Sehne $A'c$ die Seite des regulären Siebzehnecks. Diese Construction ergiebt sich unmittelbar aus unsern obigen Formeln. M. s. auch Geometrie von Paucker. Königsb. 1823. S. 187. H. A. Rothe, de divisione peripheriae circuli in XVII et XIII part. aequales. Erlangae. 1804. Paucker de divisione geometrica peripheriae circuli in XVII part. aequales. 1817. Auch Erchinger hat der Göttingischen Societät eine Construction vorgelegt, und geometrisch bewiesen.

58. Noch sind einige Inhaltsbestimmungen übrig. Der Inhalt eines regulären ecks im Kreise ist offenbar:

$$I = \tfrac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n};$$

der Inhalt des umschriebenen ecks dagegen:

$$I' = nr^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}.$$

Der Umfang des umschriebenen ecks ist immer $P' = 2nr \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$. Für $r = 1$ ist $I' = n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$, und für $2r = 1$ auch $P' = n \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$. Also ist das Verhältniß der Fläche eines umschriebenen ecks zum Quadrate des Radius einerlei mit dem Verhältniß seines Umfangs zum Durchmesser.

Der Inhalt eines in einen Kreis beschriebenen regulären Polygons von 2n Seiten ist:

$$i = nr^2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} I.I' &= \tfrac{1}{2} n^2 r^4 \sin \frac{2\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Also $I.I' = i^2$, d. h. das eingeschriebene reguläre Polygon von 2n Seiten ist das geometrische Mittel zwischen dem in und um den Kreis beschriebenen regulären Polygon von n Seiten.

Der Inhalt des regulären Polygons von 2n Seiten um den Kreis ist:

$$i' = 2nr^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{2n}.$$

Aber (Goniometrie. 38.)

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}},$$

und

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2 \sin\frac{\pi}{n}}{nr^2 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}} = \frac{i}{I'};$$

also

$$i' = \frac{2iI'}{I'+i}.$$

Aber nach dem Obigen

$$I' + i = \frac{i(I+i)}{I}.$$

Also

$$i' = \frac{2I.I'}{I+i}.$$

Aus dem erstern Ausdrucke für i' folgt leicht, daß

$$I' : i = I' - i' : i' - i,$$

d. h. das um den Kreis beschriebene reguläre Polygon i' von $2n$ Seiten ist das harmonische Mittel (S. harmonische Proportion) zwischen dem in den Kreis beschriebenen Polygon i von $2n$ Seiten, und dem um den Kreis beschriebenen I' von n Seiten.

Setzt man den Radius $= 1$; so ist die Seite des ein- und umgeschriebenen Quadrats $= \sqrt{2}$, $= 2$, also der Flächeninhalt $I = 2$, $I' = 4$. Folglich $i = \sqrt{2.4} = 2{,}8284271$, $i' = \frac{2.2.4}{2+\sqrt{8}} = 3{,}3137085$, der Inhalt des ein- und umgeschriebenen Achtecks. Nach derselben Methode findet man ohne Schwierigkeit den Inhalt des ein- und umgeschriebenen 16, 32, 64ecks, u. s. f. Für das ein- und umgeschriebene 32768eck erhält man auf diese Art für beide die Zahl 3,1415926, woraus man schließt, daß dies der Flächeninhalt des Kreises bis auf die 7te Decimale genau ist, folglich auch die halbe Peripherie, da der Flächeninhalt $= r^2 . \pi = \pi$ für $r = 1$.

59. Noch erwähnen wir hier eines merkwürdigen, von Gauß (Carnots Geom. d. Stellung. A. d. F. v. Schumacher. Thl. II. S. 362.) gefundenen Ausdrucks für den Inhalt eines willkührlichen Vielecks durch die Coordinaten seiner Spitzen. Sey I_3 der Inhalt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 119.), und die Coordinaten der Spitzen, nach einer Richtung gezählt, $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$.

Offenbar ist I_3 = der Summe der beiden Trapezien $A_1 a_3$, $A_2 a_3$, weniger dem Trapezio $A_1 a_2$. Also (Trapezium. 1.)

$$I_3 = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$$

und, obgleich diese Formel nur für den in der Figur dargestellten Fall entwickelt ist, so überzeugt man sich doch bald von ihrer Allgemeinheit, wenn nur die Coordinaten mit den gehörigen Zeichen genommen werden. S. z. B. m. Lehrb. d. Statik. Halle. 1826. S. 254. Ein Viereck läßt sich in zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$ zerlegen, deren Flächenräume:

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\},$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)\right\}.$$

Folglich

$$I_4 = \tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\right\}.$$

Ein Fünfeck läßt sich in ein Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ und ein Dreieck $A_1 A_4 A_5$ zerlegen. Der Inhalt des Vierecks ist der obige, der des Dreiecks

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_1) + x_5(y_1 - y_4)\right\}.$$

Durch Addition erhält man leicht den Inhalt des Fünfecks. Hieraus folgt, daß allgemein für irgend ein neck der Inhalt I_n =

$$\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots \\ \ldots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1}) \end{array}\right\}$$

eine auch zu praktischen Rechnungen sehr brauchbare Formel. In Puissant Traité de Topographie. Paris. 1820. p. 263. findet man ein vollständig berechnetes Beispiel, Gauß aber wird nicht als Erfinder genannt.

60. Folgende Tafel enthält einige numerische Bestimmungen für Umfang und Flächeninhalt einiger regulären Polygone:

Seitenzahl.	Eingeschriebene Vielecke.		Umschriebene.
	Umfang zum Durchmesser.	Fläche zum Quadrat des Halbmessers.	Umfang zum Durchm. Fläche zum Quadrat des Halbmessers.
3	2,5980762	1,2990381	3,1961524
4	2,8284271	2,0000000	4,0000000
5	2,9389262	2,3776413	3,6327126
6	3,0000000	2,5980762	3,4641016
8	3,0614674	2,8284271	3,3137085
10	3,0901699	2,9389262	3,2491969
12	3,1058285	3,0000000	3,2153903
15	3,1186753	3,0505248	3,1883484
16	3,1214451	3,0614674	3,1825978
17	3,1237418	3,0705541	3,1778507

61. Die Berechnung der Vielecke aus gegebenen Bestimmungsstücken lehrt die Polygonometrie (S. Trigonometrie. IV.). Ueber isoperimetrische Vielecke vergl. den Art. Größtes und Kleinstes. Mehrere andere, hier nicht entwickelte merkwürdige Eigenschaften kommen in den mathematischen Zeitschriften, besonders den Annales d. Math. und Crelles Journal, zerstreut vor. Alle einzelne Aufsätze hier anzuführen, gestattet der Raum nicht. Auch s. m. Carnots neue Eigenschaften der Vielecke, frei a. d. F. übers. v. Schellig. Dresden. 1802. 4. Wir wünschen, daß die in diesem Artikel mitgetheilte Theorie der Eintheilung des Kreises in 17 gleiche Theile zum Studium der von Gauß a. a. O. gegebenen allgemeinen Theorie dieser Theilungen reitzen möge, noch ehe die Zusätze zu diesem Werke (vergl. 42.) erscheinen.

Vieleckiger Körper oder Polyeder heißt jeder von lauter Ebenen eingeschlossene Körper. Die ein-

zelnen begränzenden ebenen Figuren heißen Seitenflächen, die Gesammtheit aller heißt Oberfläche. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen werden Kanten genannt, die Durchschnittspunkte der Kanten Ecken. An jeder Ecke liegt ein Körperwinkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander heißen Flächenwinkel. Dieser Artikel ist allgemeinen Untersuchungen über die Polyeder gewidmet. Einzelne vieleckige Körper, z. B. das Prisma, das Parallelepipedon, die Pyramide u. s. f., s. m. in besondern Artikeln.

I. Allgemeine Eigenschaften beliebiger Polyeder.

1. Man denke sich ein Netz an einander hängender ebener Figuren, welche in einer Ebene liegen können oder nicht, und bezeichne die Anzahl aller ebenen Figuren, Kanten und Ecken desselben durch S, K, E. Um zwischen diesen drei Größen eine Gleichung zu finden, stelle man sich vor, daß zu dem Netze eine neue Figur mit n Seiten hinzu komme, welche n′ Seiten mit dem Netze gemein, n″ nicht mit demselben gemein habe, und bezeichne durch S′, K′, E′ in Bezug auf das neue Netz dasselbe, was S, K, E in Bezug auf das primitive bedeuten; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$n = n' + n'',\ S' = S + 1,\ K' = K + n''.$$

Zugleich aber ist auch klar, daß die hinzukommende Figur, welche n′ Seiten mit dem primitiven Netze gemein hat, n′ + 1 Eckpunkte mit demselben gemein, also n″ — 1 Eckpunkte mit demselben nicht gemein hat, da immer

$$n = n' + n'' = (n'+1) + (n''-1)$$

seyn muß. Also ist

$$E' = E + n'' - 1.$$

Man hat also jetzt

$$\begin{aligned} E' &= E + n'' - 1 \\ S' &= S + 1 \\ -K' &= -K - n''; \end{aligned}$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten addirt, sogleich erhalten wird:

$$E' + S' - K' = E + S - K,$$

so daß also die Größe $E + S - K$ für alle Netze eine constante Größe ist. Für ein aus einer einzigen Figur bestehendes Netz ist aber

$$E = K,\ S = 1,\ E + S - K = 1.$$

Also ist für alle Netze

$$E + S - K = 1,\ E + S = K + 1;$$

d. h. die Summe der Anzahl der Ecken und Figuren ist um Eins größer als die Anzahl der Kanten.

Diese merkwürdige Gleichung ist zuerst von Cauchy gefunden worden (Journal de l'école polytechnique. T. IX. Cah. 16. p. 80.).

Hat man ein völlig umschlossenes Polyeder mit S Seitenflächen, K Kanten und E Ecken; so denke man sich einmal eine Seitenfläche hinweg, wodurch man ein Netz mit $S - 1$ Figuren, K Kanten und E Ecken erhält, in welchem also nach dem Vorigen

$$E + S - 1 = K + 1,\ E + S = K + 2.$$

Folglich ist in jedem völlig umschlossenen Polyeder die Summe der Anzahl der Ecken und Seitenflächen um Zwei größer als die Anzahl der Kanten.

Dieser merkwürdige und wichtige Satz bildet die Grundlage der allgemeinen Theorie vieleckiger Körper. Man nennt ihn nach seinem ersten Erfinder den Euler'schen Satz. M. s. Eulers Abhandlung: Elementa doctrinae solidorum. Nov. Comm. Petrop. T. IV. p. 109. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Ibid. p. 140.

Ferner denke man sich jetzt ein nicht unterbrochenes System, oder ein Netz mehrerer Polyeder, deren Anzahl wir durch P, die Anzahl ihrer Seitenflächen wie vorher durch S, die Anzahl der Kanten durch K, und die Anzahl der Ecken durch E bezeichnen wollen.

Denke man sich nun wieder, daß zu diesem Netze ein neues Polyeder hinzu komme, für welches P', S', K', E' dasselbe bedeuten, was P, S, K, E in Bezug auf das primitive Netz bezeichnen. Sey ferner s die Anzahl der Seiten, k die Anzahl der Kanten, und e die Anzahl der Ecken, welche das neu hinzukommende Polyeder nicht mit dem primitiven Netze gemein hat; so ist nach dem zuerst bewiesenen Satze von Cauchy

$$e + s - k = 1.$$

Zugleich erhellet aber augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$E' = E + e,\ S' = S + s,\ K' = K + k,\ P' = P + 1;$$

oder

$$\begin{aligned} E' &= E + e, \\ S' &= S + s, \\ -K' &= -K - k, \\ -P' &= -P - 1. \end{aligned}$$

Folglich, wenn man addirt:

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P + e + s - k - 1.$$

Aber nach dem Obigen

$$e + s - k - 1 = 0.$$

Also

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P.$$

Folglich $E + S - K - P$ für jedes Netz von Polyedern eine constante Größe. Ist nun $P = 1$, so ist nach dem Euler'schen Satze

$$E + S = K + 2,$$

$$E + S - K - P = 2 - 1 = 1.$$

Also ist in jedem Netze von Polyedern

$$E + S - K - P = 1,\ E + S = K + P + 1;$$

d. i. in jedem Netze von Polyedern ist die Summe der Anzahl der Ecken und Seitenflächen um Eins größer als die Summe der Anzahl der Polyeder, welche das Netz bilden, und die Anzahl der Kanten.

Diesen merkwürdigen Satz hat ebenfalls Cauchy gefunden.

Mit dem Beweise der vorhergehenden Sätze haben sich mehrere Mathematiker beschäftigt. Gewöhnlich gründet

man denselben auf die Formel für den Flächeninhalt sphärischer Polygone (Trigonometrie. 92.), worüber u. A. Legendre Elém. de Géométrie. Onzième éd. p. 228. Meier Hirsch Sammlung geometrischer Aufgaben. II. Berlin. 1807. S. 93. nachzusehen sind. Auf diese Weise kann aber bloß der Euler'sche Satz bewiesen werden, und überdies scheint die Anwendung des Satzes von den sphärischen Polygonen bei einem an sich so einfachen Satze einer guten Methode nicht gemäß zu seyn. Andere Beweise haben gegeben Cauchy (a. a. O. Crelles Journal der Math. I. 3. S. 228.), Rothe (Kastners Archiv für die gesammte Naturlehre. B. IV. S. 306.), Steiner in Crelles Journal. I. 4. S. 364. Den hier mitgetheilten Beweis für den Euler'schen und den ersten Satz von Cauchy habe ich zuerst in Crelles Journal. II. 4. S. 367. gegeben; er ist sodann wiederholt worden in dem Bulletin des sciences mathém. par Férussac. Avril. 1828. p. 235., und in einer Abhandlung von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XIX. p. 333. In dieser Abhandlung hat Gergonne auch den zweiten Satz von Cauchy auf die obige Art bewiesen, indem er den von mir eingeschlagenen Weg weiter verfolgte. M. s. auch noch Karstens Lehrbegriff. Thl. II. Abth. 1. S. 563., und Annales de Mathém. T. XV. p. 157.

2. Die Anzahl aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Polyeders sey $= W$; so ist immer

$$W = 2K,$$

d. h. die Anzahl aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Polyeders ist der doppelten Anzahl der Kanten gleich, und folglich immer eine gerade Zahl. Es gehört nämlich jede Kante zu zwei Seitenflächen, so daß also die Anzahl der Kanten immer halb so groß ist, wie die gesammte Anzahl aller Seiten der Seitenflächen, also auch halb so groß als die Anzahl der Winkel.

3. Nimmt man den rechten Winkel als Einheit an; so ist die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche des Polyeders $= 4\,(E - 2)$. Die Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen seyen $n, n', n'', n''', \ldots,$ so

sind die Winkelsummen der einzelnen Seitenflächen (Vieleck. 3.) $2n-4$, $2n'-4$, $2n''-4$, $2n'''-4$, ... Folglich die Summe aller Winkel

$$= 2(n + n' + n'' + n''' + \ldots) - 4S,$$

oder, da offenbar

$$n + n' + n'' + n''' + \ldots = W = 2K$$

ist (2.), obige Summe $= 4K - 4S = 4(K-S) = 4(E-2)$ (1.).

4. Wird ein Polyeder von m Seitenflächen von gerader und n Seitenflächen von ungerader Seitenzahl begränzt; so ist n immer eine gerade Zahl. Sind nämlich 2α, $2\alpha'$, $2\alpha''$, ꝛc., $2\gamma+1$, $2\gamma'+1$, $2\gamma''+1$, ꝛc. die Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen; so ist offenbar

$$W = 2(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) + n.$$

Da nun (2.) W immer eine gerade Zahl ist; so ist es auch n. Der Satz gilt auch, wenn $m = o$.

5. Die Anzahl der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, u. s. w., welche ein Polyeder begränzen, sey a, b, c, d, ...; so ist offenbar $S = a + b + c + d + \ldots$, und $W = 2K = 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Aber (1.) $E + S = K + 2$, $2E + 2S = 2K + 4$. Also

$$2E + 2a + 2b + 2c + 2d + \ldots$$
$$= 4 + 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots,$$
$$2(E-2) = a + 2b + 3c + 4d + \ldots,$$

folglich $a + 2b + 3c + 4d + \ldots$ immer eine gerade Zahl, so wie nach dem Obigen auch $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Die halbe Summe aller ebenen Winkel ist $= a + 2b + 3c + 4d + \ldots$ (3.), immer für den rechten Winkel als Einheit.

6. Sey

$$b + 2c + 3d + 4e + \ldots = p;$$

so ist

$$K = \tfrac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + \ldots) \text{ (5.)}$$
$$= \tfrac{3}{2}(a + b + c + d + \ldots)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(b + 2c + 3d + 4e + \ldots) = \tfrac{3}{2}S + \tfrac{1}{2}p.$$

Da nun ferner $E = K - S + 2$ (1.); so ist $E = 2 + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}p$. Also, weil p in gewissen Fällen zwar $= o$, aber nie negativ seyn kann, immer $K \geqq \frac{3}{2}S$, $E \geqq$

$2 + \frac{1}{2}S$. Da jede Ecke wenigstens von 3 ebenen Winkeln gebildet wird; so ist $W \geqq 3E$. Aber $W = 2K$ (2.). Also $2K \geqq 3E$, oder $K \geqq \frac{3}{2}E$.

7. Also $2K \geqq 3S$, $2K \geqq 3E$. Aber $S = K - E + 2$, $E = K - S + 2$ (1.). Also $2K \geqq 3K - 3E + 6$, $2K \geqq 3K - 3S + 6$, $3E \geqq K + 6$, $3S \geqq K + 6$, $K \leqq 3E - 6$, $K \leqq 3S - 6$.

Also kann man $K + 6 + \alpha = 3E$, $K + 6 + \beta = 3S$ setzen. Da nun auch $K = \frac{3}{2}E + \gamma$, $K = \frac{3}{2}S + \delta$ (6.) gesetzt werden kann; so ist

$$\tfrac{3}{2}E + \gamma + 6 + \alpha = 3E,\ \tfrac{3}{2}S + \delta + 6 + \beta = 3S;$$
$$\alpha + \gamma + 6 = \tfrac{3}{2}E,\ \beta + \delta + 6 = \tfrac{3}{2}S;$$
$$E = 4 + \tfrac{2}{3}(\alpha + \gamma),\ S = 4 + \tfrac{2}{3}(\beta + \delta).$$

Folglich kann weder die Anzahl der Ecken, noch der Seitenflächen, in einem Polyeder < 4 seyn. Da $K = E + S - 2$ (1.); so erhält man leicht

$$K = 6 + \tfrac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

und die Anzahl der Kanten kann also nie < 6 seyn. Die dreiseitige Pyramide, in welcher $E = 4$, $S = 4$, $K = 6$, ist also der Körper mit der geringsten Anzahl von Ecken, Seitenflächen und Kanten.

8. Da $K = \frac{3}{2}E + \gamma$, $K = \frac{3}{2}S + \delta$ (7.), $S + E = K + 2$ (1.) ist; so ist $S + E = \frac{3}{2}E + \gamma + 2 = \frac{3}{2}S + \delta + 2$, $2S + 2E = 3E + 2\gamma + 4 = 3S + 2\delta + 4$, $2S = E + 2\gamma + 4$, $2E = S + 2\delta + 4$; $2S = (E + 4) + 2\gamma$, $2E = (S + 4) + 2\delta$; $2S \geqq E + 4$, $2E \geqq S + 4$.

9. Nach dem Bisherigen haben wir also: $K \geqq \frac{3}{2}S$, $E \geqq 2 + \frac{1}{2}S$, $K \geqq \frac{3}{2}E$, $K + 6 \leqq 3E$, $K + 6 \leqq 3S$, $E + 4 \leqq 2S$, $S + 4 \leqq 2E$. Dies giebt folgende Tabelle.

Wenn gegeben:	so ist der Größe	kleinster Werth	größter Werth.
S	K	$\frac{3}{2}S$	$3S - 6$
	E	$2 + \frac{1}{2}S$	$2S - 4$
K	S	$2 + \frac{1}{3}K$	$\frac{2}{3}K$
	E	$2 + \frac{1}{3}K$	$\frac{2}{3}K$
E	S	$2 + \frac{1}{2}E$	$2E - 4$
	K	$\frac{3}{2}E$	$3E - 6$

10. Diese Tabelle giebt zu folgenden Bemerkungen Veranlassung.

a) Kein Körper kann 7 Kanten haben, weil, für $K = 7$, S zwischen die Gränzen $2 + \frac{7}{3}$, $\frac{14}{3}$, d. i. $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, fallen müßte, zwischen denen keine ganze Zahl liegen kann.

b) Kein Körper kann von lauter solchen Figuren eingeschlossen werden, die mehr als 5 Seiten haben. Hätten nämlich alle Seitenflächen mehr als 5 Seiten, so wäre offenbar $W \geqq 6S$, $2K \geqq 6S$ (2.), $K \geqq 3S$, da doch nach der Tabelle $K \leqq 3S - 6$, also immer $< 3S$ ist.

c) Es giebt keinen Körper, dessen Ecken alle von 6 oder mehrern ebenen Winkeln gebildet würden. Wäre dies nämlich der Fall; so wäre $W \geqq 6E$, $2K \geqq 6E$ (2.), $K \geqq 3E$, da doch nach der Tabelle $K \leqq 3E - 6$, also immer $< 3E$ ist.

d) Auch ergiebt sich hieraus folgende Tabelle für die möglichen eckigen Körper.

Anzahl der Seitenflächen.	Anzahl der Ecken.	Anzahl der Kanten.	Namen der Körper.
4	4	6	Tetraedrum tetragonum
5	5	8	Pentaedrum pentagonum
	6	9	— — — hexagonum
6	5	9	Hexaedrum pentagonum
	6	10	— — — hexagonum
	7	11	— — — heptagonum
	8	12	— — — octogonum
7	6	11	Heptaedrum hexagonum
	7	12	— — — heptagonum
	8	13	— — — octogonum
	9	14	— — — enneagonum
	10	15	— — — decagonum
8	6	12	Octaedrum hexagonum
	7	13	— — — heptagonum
	8	14	— — — octogonum
	9	15	— — — enneagonum
	10	16	— — — decagonum
	11	17	— — — endecagonum
	12	18	— — — dodecagonum
etc.	etc.	etc.	etc.

S. Karstens Lehrbegriff. II. 1. S. 569.

11. Körper, welche von lauter Dreiecken eingeschlossen, und deren Ecken alle entweder von fünf oder sechs ebenen Winkeln gebildet werden, haben immer 12 Ecken der ersten Art. Die Anzahl der Ecken der ersten Art sey $= V$, die der zweiten $= VI$; so ist $E = V + VI$, $W = 5.V + 6.VI = 2K$ (2.). Also $6.V + 6.VI = 6E$, $5.V + 6.VI = 2K$, $V = 6E - 2K$. Da nun alle Seitenflächen Dreiecke sind; so ist $W = 3S = 2K$ (2.), $E + S = K + 2$ (1.), $2E + 2S = 2K + 4$, $2E + 2S = 3S + 4$, $2E = S + 4$, $6E = 3S + 12$, $V = 3S + 12 - 3S = 12$.

Auch ist $5.V + 6.VI = 2K$, $5.V + 5.VI = 5E$, $VI = 2K - 5E = 3S - 5E$. Aber $2E = S + 4$, $5E = \frac{5}{2}S + 10$, $VI = \frac{1}{2}S - 10$, und $E = V + VI = \frac{1}{2}S - 10 + 12 = \frac{1}{2}S + 2$, auch $E = VI + 12$.

12. Ein Polyeder werde wieder von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. eingeschlossen. Werden die Ecken je zwei mit einander verbunden; so ist die Anzahl der Verbindungslinien offenbar $= \frac{E(E-1)}{2}$. Will man die Anzahl der Diagonalen D haben; so muß man hiervon die Anzahl der Kanten und der Diagonalen der Seitenflächen abziehen. Dies giebt (Vieleck. 2.)

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K - \{2b + 5c + 9d + \ldots\}.$$

Ist der Körper von lauter Dreiecken eingeschlossen; so ist $b = c = d = \ldots = o$. Also

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K = \frac{E(E-1) - 2K}{2}.$$

Da $E = K - S + 2$ ist (1.); so ist auch

$$D = \frac{(K-S+2)(K-S+1)}{2} - K - \{2b + 5c + \ldots\}.$$

Man kann auch setzen

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K + \tfrac{3}{2}(3a + 4b + 5c + \ldots) - \tfrac{1}{2}(3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + \ldots)$$
$$= \frac{E(E-1)}{2} + 2K - \tfrac{1}{2}(3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + \ldots),$$

da $2K = 3a + 4b + 5c + \ldots$ ist (5.). Dies giebt auch

$$E(E-1) + 4K - 2D = 3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + 6^2.d + \ldots,$$

woraus folgt, daß das letztere Aggregat immer eine gerade Zahl ist. Also ist auch $3^2 . a + 5^2 . c + 7^2 . e + \ldots$ immer eine gerade Zahl.

13. Wichtig und interessant ist auch noch die Frage, wie viele Stücke eines Polyeders gegeben seyn müssen, wenn dasselbe völlig bestimmt seyn soll. Sey eine Seitenfläche ein neck, so sind zu deren Bestimmung $2n - 3$ Stücke nöthig (Vieleck. 8.). Außerhalb dieses necks liegen $E - n$ Ecken des Polyeders. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume sind aber immer 3 Stücke, z. B. seine drei Coordinaten in Bezug auf ein gewisses System, nöthig, welches $3(E - n) + 2n - 3 = 3E - n - 3$ Bestimmungsstücke giebt. Diese Anzahl ist aber zu groß. Bezeichnet man nämlich die Seitenzahlen der übrigen Seitenflächen durch n', n'', n''', ...; so liegen immer n', n'', n''' .... Ecken des Polyeders in einer Ebene. Die Lage einer Ebene wird aber durch 3 Punkte bestimmt, und, wenn also die Lage des n'ecks z. B. einmal durch 3 Punkte bestimmt ist; so braucht man zur Bestimmung der übrigen $n' - 3$ Punkte in dieser Ebene nur noch $2(n' - 3)$ Bestimmungsstücke. Oben rechneten wir $3(n' - 3)$ Bestimmungsstücke für diese $n' - 3$ Punkte, also $n' - 3$ zu viel, welches für alle übrigen Seitenflächen mit n'', n''', ... Seiten eben so gilt. Folglich muß die Summe $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \ldots$ von dem obigen $3E - n - 3$ abgezogen werden. Die Summe dieser Reihe ist $= n' + n'' + n''' + \ldots - 3(S - 1) = n + n' + n'' + n''' + \ldots - n - 3(S - 1) = W - n - 3(S - 1) = 2K - n - 3(S - 1)$ (2.). Also die Anzahl der nöthigen Bestimmungstücke $= 3E - n - 3 - 2K + n + 3(S - 1) = 3(E + S) - 2K - 6 = 3(K + 2) - 2K - 6$ (1.) $= K$, d. h. die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eines Polyeders ist immer der Anzahl seiner Kanten gleich, woraus man aber nicht etwa schließen darf, daß durch jede K Stücke ein Polyeder völlig bestimmt werde, indem ja dann z. B. jedes Prisma durch seine Kanten völlig bestimmt seyn müßte, welches offenbar nicht der Fall ist, da man

ja unter Beibehaltung der Grundfläche durch verschiedene Neigung der Seitenkanten mit denselben Kanten sehr verschiedene Prismen construiren kann. Der Sinn unsers Satzes ist allein der, daß die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eben so groß ist wie die Anzahl der Kanten, wobei es nun aber weiter auf die richtige Auswahl der nöthigen Bestimmungsstücke ankommen würde.

II. Vergleichung der Polyeder mit einander im Allgemeinen.

14. In Bezug auf die Vergleichung zweier Polyeder mit einander sind vier Arten denkbar.

a) Polyeder heißen einander gleich, oder nach Legendre (a. a. O. p. 276.) äquivalent, wenn sie gleiche körperliche Räume einschließen.

b) Congruente, oder nach Legendre (a. a. O.) gleiche, Polyeder sind solche, welche sich so in einander legen lassen, daß sie nur ein einziges Polyeder derselben Art bilden, und ihre Oberflächen sich also völlig decken. Polyeder dieser Art sind also völlig in einerlei Ordnung von lauter congruenten und gleich gegen einander geneigten Seitenflächen eingeschlossen. Nach Euclid (XI. Def. 10.) sind gleich und ähnliche, also congruente, Polyeder solche, welche von gleich und ähnlichen Ebenen in gleicher Anzahl eingeschlossen sind. Mag diese Erklärung nun von Euclid selbst, oder, welches wahrscheinlicher ist, von einem unwissenden Herausgeber herrühren; so ist sie doch in doppelter Rücksicht zu tadeln, indem α) sogleich in die Augen fällt, daß sie eigentlich einen Lehrsatz enthält, welcher bewiesen werden muß, wie auch schon ältere Herausgeber gefühlt haben. Clavius z. B. fügt dieser Definition eine Erläuterung bei, die, mit quod anfangend, mit quare etc. endigend, ganz die Form eines Beweises hat. Man könnte hier anführen, daß ja Euclid im ersten Buche die Congruenz zweier Dreiecke aus Gleichheit der drei Seiten auch als einen Lehrsatz aufstellt und beweiset. β) Ferner ist aber zu bemerken, daß der in obiger Erklä-

rung enthaltene Satz, wenigstens so allgemein ausgesprochen, ein falscher Satz ist, welches sogleich erhellet, wenn man sich ober- und unterhalb ein und derselben Seitenfläche eines Polyeders ein und dieselbe Pyramide beschrieben denkt, wodurch man, wenn man die erste Pyramide als zu dem Polyeder addirt, die zweite als davon subtrahirt ansieht, zwei Polyeder mit denselben Seitenflächen erhält, welche offenbar nicht congruent. Dem Geiste der Elemente des Euclides ist es indeß ganz gemäß, nur Polyeder mit lauter auswärts gehenden Körperwinkeln, convexe Polyeder, zu betrachten, und es wird sich also fragen, ob vielleicht der in der obigen Erklärung enthaltene Satz unter der Einschränkung auf convexe Polyeder richtig ist, welche Frage in III. beantwortet werden wird. Robert Simson läßt die Erklärung in seiner Bearbeitung der Elemente ganz weg, und fügt einige Erläuterungen bei, die den obigen ähnlich sind. In der französischen Uebersetzung des Simsonschen Euclides von Friedrich Castillon (Berlin. 1767. 8.) ist bei genannter Erklärung nur bemerkt: omise.

c) Symmetrische Polyeder sind solche, welche über einer gemeinschaftlichen Grundfläche auf beiden Seiten derselben so liegen, daß die Spitzen ihrer in gleicher Anzahl vorhandenen körperlichen Winkel je zwei in ein und derselben auf der gemeinschaftlichen Grundfläche senkrechten Linie in gleichen Entfernungen von der Grundfläche auf beiden Seiten derselben liegen. Daß diese Erklärung sich leicht noch einigermaßen erweitern ließe, und die Bedingung einer gemeinschaftlichen Grundfläche nur größerer Einfachheit wegen eingeführt worden, fällt in die Augen. Daß symmetrische Polyeder wegen der umgekehrten Ordnung, in der ihre einzelnen, wenn auch gleichen, Theile liegen, nicht zur Deckung gebracht werden können, also nicht congruent, sondern nur gleich sind, erhellet leicht. Euclid hat diesen Unterschied übersehen, und ist deshalb, besonders XI. 28., in Fehler verfallen. Der Begriff der Symmetrie ist von den französischen Geometern, besonders von Legendre, in die Geometrie eingeführt. M. v. d. Art. Symmetrie.

d) Aehnliche Polyeder sind nach Euclid (XI. Def. 9.) solche, welche von einer gleichen Anzahl ähnlicher Figuren eingeschlossen werden; eine Erklärung, auf welche dieselben Bemerkungen wie in (b) anwendbar sind. Robert Simson erklärt daher ähnliche Polyeder als solche, deren körperliche Winkel in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, gleich sind, und welche von gleich vielen ähnlichen Figuren eingeschlossen werden. Indeß scheint diese Erklärung einige überflüssige Bedingungen zu enthalten, welches näher zu erörtern hier der Raum fehlt. Legendre (a. a. O. p. 163. 164.) giebt daher folgende Erklärung: Zwei dreieckige Pyramiden sind ähnlich, wenn sie zwei ähnliche, ähnlich gelegene, und gleich gegen einander geneigte Seitenflächen haben. Polyeder sind ähnlich, wenn sie zwei ähnliche Grundflächen haben, und die außerhalb derselben liegenden Ecken durch ähnliche und ähnlich liegende dreiseitige Pyramiden bestimmt werden. Obgleich manche neuere Schriftsteller, z. B. Kramp (Elémens de Géom. Cologne. 1806. p. 270. 276.) hiervon abweichende Definitionen geben; so werden wir in diesem Artikel doch Legendre folgen, weil die von ihm gegebene Erklärung namentlich vor der von Euclid und R. Simson gegebenen, den wichtigen Vorzug hat, daß aus ihr sogleich die Möglichkeit ähnlicher Pyramiden und Polyeder erhellet.

III. Congruente Polyeder.

15. Die Frage, ob der in Euclids Definition congruenter Polyeder enthaltene Lehrsatz: Polyeder sind congruent, d. h. können sich decken, wenn sie von lauter congruenten Figuren in gleicher Aufeinanderfolge eingeschlossen werden, unter der Bedingung, daß beide Polyeder convex sind, richtig ist (14. b.), ist von Cauchy durch einen sehr sinnreichen Beweis dieses Satzes, welchen wir hier mittheilen, bejahend beantwortet werden.

16. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich; so sind auch die übri-

gen Stücke gleich. Sey (Fig. 120.) $A = A'$, $AC = A'C'$, $AB = A'B'$. Man fälle von C, C′ auf ABD, A′B′D′ die Perpendikel CE, C′E′, von E, E′ auf AD, BD, A′D′, B′D′ die Perpendikel EF, EG, E′F′, E′G′, und ziehe CF, CG, C′F′, C′G′, welche auch auf AD, BD, A′D′, B′D′ senkrecht seyn werden; so läßt sich leicht aus der Voraussetzung zeigen, daß $\triangle CFE \cong \triangle C'F'E'$ ist, woraus $CE = C'E'$, $FE = F'E'$. Auch ist klar, daß, wegen der gleichen Bogen AC, A′C′, $FD = F'D'$ ist. Also $\triangle FDE \cong \triangle F'D'E'$, und folglich $ED = E'D'$, $\angle EDF = \angle E'D'F'$, woraus, da, wegen der gleichen Bogen AB, A′B′, auch $\angle ADB = \angle A'D'B'$ ist, leicht $\angle EDG \angle E'D'G'$, $\triangle EDG \cong \triangle E'D'G'$, $EG = E'G'$, $\triangle CEG \cong \triangle C'E'G'$, $\angle CGE = \angle C'G'E'$, d. i. $B = B'$ folgt. Durch eine ähnliche Construction, indem man von B, B′ Perpendikel auf CAD, C′A′D′ fällt, zeigt man, daß $C = C'$. Da wegen der Congruenz der Dreiecke CEG, C′E′G′ auch $CG = C'G'$ ist; so ist auch $BC = B'C'$. Dieser Satz ist in vielen Lehrbüchern durch das Princip der Deckung bewiesen, welches aber nur zulässig seyn würde, wenn die gleichen Stücke in beiden Dreiecken ganz in einerlei Ordnung lägen. Er liegt den folgenden Untersuchungen zum Grunde, und mußte daher hier vorausgeschickt werden.

17. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich folgende Sätze ganz eben so wie die entsprechenden Sätze bei ebenen Dreiecken beweisen: 1) Im gleichschenklichen sphär. Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich, und umgekehrt. 2) Der größern Seite steht der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt. 3) Sind in zwei sphär. Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich; so steht dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

18. Wir werden nun allgemein untersuchen, ob mit denselben Seitenflächen eines convexen Polyeders in derselben Aufeinanderfolge, indem man ihnen verschiedene Neigungen giebt, ein von jenem verschiedenes Polyeder beschrieben werden kann. Zwei dreiseitige körperliche Ecken

sind congruent, wenn sie von gleichen ebenen Winkeln in einerlei Ordnung eingeschlossen werden, wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man sich die beiden Ecken mit ein Paar gleichen ähnlich liegenden Seitenflächen auf einander gelegt, und mit den andern Seitenflächen Kegelflächen beschrieben denkt, welche sich, so wie ihre Durchschnittslinien, also auch die beiden Ecken, offenbar decken werden. Daher braucht man bei angedeuteter Untersuchung nur Polyeder zu betrachten, bei denen keine Ecke weniger als vierseitig ist, indem die Veränderung der Neigung der Seitenflächen nur auf den Theil des Polyeders Einfluß haben kann, welchen man erhält, wenn man sich nach und nach alle dreiseitigen Ecken abgeschnitten denkt. Hiernächst sind folgende Sätze vorläufig zu beweisen.

19. Wenn in einem sphärischen Vielecke ABCDEF (Fig. 121.) alle Seiten bis auf eine, AF, gegeben sind, und man läßt einen der, der Seite AF nicht anliegenden, Winkel sich verändern, indem alle übrigen Winkel ungeändert bleiben; so nimmt AF mit dem veränderten Winkel gleichzeitig zu und ab, wenn das Polygon immer convex bleibt. Verändert sich, indem alles Uebrige ungeändert bleibt, z. B. der Winkel ABC; so bleibt, da sich sonst Nichts ändert, auch BF offenbar ungeändert, der Winkel ABF nimmt aber mit ABC gleichzeitig zu und ab, also im Dreieck ABF, wo auch AB ungeändert bleibt, auch die Seite AF (17. 3.). Verändert sich irgend ein anderer Winkel CDE; so bleiben AD, FD ungeändert, da alles Uebrige ungeändert bleibt, der Winkel ADF, und folglich (17. 3.) auch AF, nimmt aber mit CDE gleichzeitig zu und ab. Daß der Satz nur gilt, wenn das Polygon immer convex bleibt, fällt leicht in die Augen. Denkt man sich nämlich z. B. den Winkel FED so lange vermindert, bis der Punkt F in die Diagonale AE fällt; so erhellet aus dem Vorigen, daß sich dann auch AF immer gleichzeitig vermindert. Läßt man aber den Winkel FED noch weiter abnehmen, wo dann das Vieleck bei F einen einspringenden Winkel erhält; so ist klar, daß auf der andern Seite der Diagonale AF eben so wieder zunehmen wird,

wie es vorher abgenommen hat. Nehmen mehrere der nicht an AF liegenden Winkel zugleich zu, oder zugleich ab; so ist aus dem Vorigen klar, daß durch dieses mehrfache Zu- oder Abnehmen auch eine mehrfache Zu- oder Abnahme von AF hervorgebracht werden wird, wenn nur das Polygon immer convex bleibt.

20. In einem convexen sphärischen Polygon von mehr als drei, z. B. n, Seiten, dessen Seiten constant bleiben, indem sich die Winkel ändern, bezeichne man alle größer gewordenen Winkel durch +, alle kleiner gewordenen durch —, die ungeändert gebliebenen Winkel dagegen durch kein Zeichen; so müssen in der Reihe dieser Zeichen immer wenigstens vier Zeichenwechsel vorkommen.

1) Man denke sich irgend eine Seite des Polygons; so stehen derselben n — 2 Winkel gegenüber. Hätten sich, indem vielleicht einige ungeändert geblieben wären, diese n — 2 Winkel bloß vermehrt, oder bloß vermindert; so müßte auch jene Seite größer oder kleiner geworden seyn (19.), da doch die Seiten constant bleiben sollen. Also können nicht lauter +, oder lauter — Zeichen, sondern + und — Zeichen, d. i. es müssen wenigstens zwei Zeichenwechsel vorkommen.

2) Kämen nun (Fig. 122.) bloß zwei Zeichenwechsel vor, so denke man sich in dem ursprünglichen unveränderten Polygon durch zwei willkührliche, in beiden Polygonen aber gleich gelegene, Punkte α, β in AB, FE den Bogen eines größten Kreises $\alpha\beta$ gelegt; so müßte, da die der $\alpha\beta$ gegenüber liegenden Winkel im Polygon αAHGFβ nur zugenommen, die der $\alpha\beta$ gegenüber liegenden Winkel im Polygon αBCDEβ nur abgenommen haben, $\alpha\beta$ sich zugleich vergrößert und vermindert haben (19.), welches zusammen nicht statt finden kann.

3) Eben so wenig können bloß drei Reihen von Zeichen vorkommen, weil die erste und dritte Reihe immer aus gleichen Zeichen bestehen, sich daher an einander anschließen, und daher doch eigentlich nur zwei Zeichenreihen, und zwei Zeichenwechsel existiren würden.

4) Also muß es wenigstens vier Zeichenwechsel geben.

21. Beschreibet man aus der Spitze einer convexen körperlichen Ecke von mehr als drei Seiten mit willkührlichem Radius eine Kugel; so umschließt die Ecke ein sphärisches convexes Polygon, von dessen Seiten die Ecke einschließenden Winkel gemessen werden, und dessen Winkel den Flächenwinkeln der Ecke gleich sind. Also ist der vorige Satz unmittelbar auf convexe körperliche Ecken von mehr als drei Seiten anwendbar.

22. Nun läßt sich beweisen, daß durch Veränderung der Neigungen der Seitenflächen eines convexen Polyeders mit lauter mehr als dreiseitigen körperlichen Ecken (18.), wenn nur die Seitenflächen selbst ungeändert bleibt, und auch ihre Ordnung keine Veränderung erleidet, kein von dem gegebenen verschiedenes convexes Polyeder erzeugt werden kann.

1) Alle Neigungswinkel der Seitenflächen sollen eine Aenderung erlitten haben. Die Anzahl aller Zeichenwechsel bei allen Ecken des Polyeders sey $= n$; so ist, da bei keiner Ecke weniger als 4 Zeichenwechsel vorkommen können (21.), $n \geqq 4E$.

Denke man sich nun die Zeichen auf die Kanten des Polyeders, also auch auf die Seiten der Seitenflächen gesetzt; so kann man ihre Aufeinanderfolge sowohl auf den Kanten rings herum, welches eigentlich bloß hierher gehört (21.), als auch rings um die einzelnen Seitenflächen herum betrachten. Zwei auf einander folgende Kanten einer Ecke gehören immer zu einer, und, auf die Aufeinanderfolge derselben gesehen, nur zu einer Seitenfläche des Polyeders, und es erhellet, da alle Neigungswinkel sich geändert haben, also jede Kante mit einem Zeichen versehen ist, leicht, daß jedem Zeichenwechsel oder jeder Zeichenfolge auf den Kanten auch ein Zeichenwechsel oder eine Zeichenfolge auf den Seitenflächen entspricht, die Anzahl der Zeichenwechsel auf den Kanten also immer der Anzahl der Zeichenwechsel auf den Seitenflächen gleich seyn muß, diese folglich statt jener gesetzt werden kann.

Die größte Anzahl der Zeichenwechsel auf den Seiten einer ebenen Figur erhält man aber, wenn man die Zeichen immer abwechseln läßt. Jenachdem die Figur $2m$ oder $2m + 1$ Seiten hat, ist die Folge der Zeichen:

$$\begin{array}{cccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + \,, \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - \,, \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) & (2m+1) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + & - \,, \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - & + \,. \end{array}$$

Denkt man sich jede dieser Reihen in einen Kreis geschrieben; so ist klar, daß man in jedem Falle $2m$ Zeichenwechsel erhält, die Seitenzahl mag gerade oder ungerade seyn, als größte Anzahl der Zeichenwechsel. Wird nun das Polyeder von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. eingeschlossen; so ist also die Anzahl der Zeichenwechsel auf jeder Art von Figuren überhaupt

$$\overline{\overline{<}}\, 2a,\ \overline{\overline{<}}\, 4b,\ \overline{\overline{<}}\, 4c,\ \overline{\overline{<}}\, 6d,\ \overline{\overline{<}}\, 6e,\ \text{etc.},$$

$$n \overline{\overline{<}}\, 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \ldots.$$

Aber (5.)

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots,$$

$$S = a + b + c + d + e + \ldots,$$

$$4E = 4K - 4S + 8 \quad (1.)$$

$$= 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots.$$

Also offenbar $n \overline{\overline{<}}\, 4E - 8$, oder immer $n < 4E$, da doch nach dem Obigen $n \overline{\overline{>}}\, 4E$ seyn muß. Folglich ist die angenommene Veränderung aller Neigungswinkel der Seitenflächen unsers Polyeders unstatthaft.

2) Haben nicht alle Neigungswinkel der Seitenflächen eine Veränderung erlitten; so nehme man auf die Kanten, an welchen sich die Neigungswinkel nicht geändert haben, gar keine Rücksicht, wodurch man ein Polyeder erhält, das nicht bloß von ebenen Figuren, sondern zum Theil von nicht in einer Ebene liegenden Figurennetzen als Seitenflächen eingeschlossen wird, bei welchem aber nun an allen Kanten die Neigungswinkel sich geändert haben. Auf ein solches Polyeder ist das vorige Raisonne-

ment ebenfalls völlig anwendbar, wenn nur der Eulersche Satz auch für solche Polyeder seine Richtigkeit behält, wie es in der That der Fall ist. Denn man betrachte bei einem Polyeder, wo $E + S = K + 2$ ist (1.), ein Netz mehrerer Seitenflächen als eine Seitenfläche, und bezeichne die Anzahl der Ecken, Kanten und Figuren dieses Netzes durch E', K', S'; so ist nach Cauchy's Satze (1.) $E' + S' = K' + 1$. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen des so betrachteten Polyeders sey E_1, K_1, S_1, die Anzahl der äußern und innern Ecken und Kanten des Netzes dagegen E'', K'' und E''', K'''; so ist

$$E'' + E''' + S' = K'' + K''' + 1,$$

und, weil offenbar $E'' = K''$ ist:

$$E''' + S' = K''' + 1.$$

Folglich, mittelst der Gleichung

$$E + S = K + 2$$

durch Subtraction:

$$E - E''' + S - S' = K - K''' + 1.$$

Aber, wie sogleich erhellet:

$$E_1 = E - E''', \; K_1 = K - K''',$$
$$S_1 = S - S' + 1, \; S_1 - 1 = S - S'.$$

Also

$$E_1 + S_1 - 1 = K_1 + 1,$$

oder

$$E_1 + S_1 = K_1 + 2.$$

Auf ähnliche Art könnte man weiter schließen, wenn noch ein anderes Netz mehrerer Seitenflächen als eine Seitenfläche betrachtet worden wäre, u. s. f., und man wird den Eulerschen Satz immer bestätigt finden. Demnach kann mit denselben Seitenflächen in derselben Ordnung, auch wenn nicht alle Neigungswinkel der Seitenflächen sich änderten, kein neues convexes Polyeder beschrieben werden.

23. Daher sind zwei convexe, von denselben Seitenflächen in derselben Ordnung eingeschlossene Polyeder, einander congruent, so daß also die Erklärung congruenter Polyeder des Euclides für den Fall der Convexität derselben einen völlig richtigen Satz enthält (V. 14. b.).

24. Da ein ebenes Dreieck bloß durch seine Seiten bestimmt wird; so wird auch ein von lauter Dreiecken eingeschlossenes Polyeder bloß durch seine Kanten bestimmt, und zwei Polyeder, deren sämmtliche Seitenflächen Dreiecke sind, sind congruent, wenn die Kanten gegenseitig in einerlei Ordnung gleich sind.

IV. Symmetrische Polyeder.

25. Zunächst ist zu beweisen, daß in zwei von gleichen ebenen Winkeln eingeschlossenen dreiseitigen körperlichen Ecken bei A und H (Fig. 123.) die Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind. Nimmt man nämlich AK = PH, fällt von K und P auf die gegenüber liegenden Seitenflächen die Perpendikel KN, PQ, und von N, Q auf AC, AD, HF, HG die Perpendikel LN, MN, QT, QS, und zieht LK, KM, PT, PS, welche auch auf AC, AD, HF, HG senkrecht seyn werden; so folgt aus der Voraussetzung leicht, daß $\triangle$AKL $\cong$ PHS, $\triangle$AKM $\cong$ $\triangle$PHT, also KL = PS, KM = PT, so wie auch AL = HS, AM = HT, also ALNM $\cong$ HTQS, und folglich LN = QS, MN = QT, also $\triangle$KLN $\cong$ $\triangle$PSQ, $\triangle$KMN $\cong$ $\triangle$PQT, $\angle$ KLN = $\angle$ PSQ, $\angle$ KMN = $\angle$ PTQ. Die Gleichheit der dritten Neigungswinkel folgt eben so, wenn man nur die Punkte K, P in AD, FH oder AC, GH annimmt.

26. In zwei symmetrischen Polyedern sind alle ähnlich liegenden Seitenflächen congruent, und alle gleich gegen einander geneigt.

Sey ABCDE (Fig. 124.) die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Polyeder (14. c.), und M, N; M′, N′ correspondirende Ecken derselben; so sind MM′, NN′ auf der gemeinschaftlichen Grundfläche, also auch auf mn senkrecht, und es ist Mm = M′m, Nn = N′n (14. c.), also offenbar Trap. MNmn $\cong$ Trap. M′N′mn, MN = M′N′, so daß also je zwei correspondirende Spitzen beider Polyeder gleich weit von einander entfernt sind. Kommen noch die Ecken P, P′ dazu; so ist eben so MP = M′P′,

NP = N'P', also ⊿MNP ≌ ⊿M'N'P' und folglich jede zwei zwischen drei correspondirenden Ecken der beiden Polyeder enthaltene Dreiecke einander congruent. Kommen ferner noch die Ecken Q, Q' hinzu, und die Dreiecke MNP, NPQ liegen in einer Ebene; so läßt sich zeigen, daß auch M'N'P', N'P'Q' in einer Ebene liegen müssen. Zieht man nämlich MQ, M'Q'; so ergiebt sich aus dem Vorigen unmittelbar, daß ⊿MPQ ≌ ⊿M'P'Q', ∠ MPQ = ∠ M'P'Q' ist. Da aber nach dem Obigen auch ∠ MPN = ∠ M'P'N', ∠ NPQ = ∠ N'P'Q', und, weil MPN, NPQ in einer Ebene liegen, ∠ MPQ = ∠ MPN + ∠ NPQ ist; so ist auch ∠ M'P'N' + ∠ N'P'Q' = ∠ M'P'Q', welches nicht der Fall seyn könnte, wenn M'N'P', N'P'Q' nicht in einer Ebene lägen (Elem. XI. 20.). Aus allem Bisherigen erhellet, daß alle Seitenflächen der beiden Polyeder aus lauter congruenten Dreiecken in derselben gegenseitigen Lage zusammengesetzt, und daher je zwei correspondirende congruent sind. Um zu beweisen, daß zwei in NP, N'P' z. B. zusammenstoßende Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind, denke man sich wieder MQ, M'Q' gezogen; so werden nach dem Vorigen die beiden dreiseitigen Ecken MNQP, M'N'Q'P' von lauter congruenten Dreiecken, also von lauter gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen, so daß also ihre Seitenflächen alle gleich gegen einander geneigt sind (25.), woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

27. Aus dem vorigen Satze folgt unmittelbar, daß symmetrische Polyeder immer auch gleiche körperliche Räume einschließen müssen. Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind, wie in den Elementen bewiesen wird, gleich. Also sind auch symmetrische Pyramiden gleich, wie aus der Erklärung 14. c. unmittelbar folgt. Symmetrische Polyeder lassen sich aber offenbar in gleich viele symmetrische Pyramiden zerlegen. Also sind symmetrische Polyeder auch aus diesem Grunde gleich.

M. v. den Artikel Symmetrie.

Der Satz, daß jedes Parallelepipedon durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt

wird, bei dessen Beweise Euclides (XI. 28.) den Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie übersehen hat (S. d. a. Art.), läßt sich auf folgende Art streng beweisen. Man denke sich die Diagonale AB (Fig. 125.) in n gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilpunkte mit den Seitenflächen des Parallelepipedons parallele Ebenen gelegt; so wird dadurch das Parallelepipedon offenbar in n^2 congruente Parallelepipeda getheilt, von denen n um die Diagonale liegen. Jedes dieser Parallelepipeda sey $= p$, der Inhalt des gegebenen $= P$; so ist $p = \frac{P}{n^2}$. Auf jeder Seite der Diagonalfläche liegen $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Parallelepipeda, deren jedes $= p$, und, setzen wir die beiden Prismen, in welche das gegebene Parallelepipedon durch die Diagonalfläche getheilt wird, $= P'$ und $= P''$; so ist offenbar $P' > \frac{n(n-1)}{2} p$, $P'' > \frac{n(n-1)}{2} p$. Also

$$P' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta' = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta',$$

$$P'' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta'' = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta'',$$

$$P' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta', \; P'' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta'',$$

wo offenbar sowohl Δ' als Δ'' kleiner als die Summe der um die Diagonale liegenden Parallelepipeda ist, d. i. $\Delta' < np, < n.\frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$; $\Delta'' < np, < n.\frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$. Wäre nun nicht $P' = P''$, also auch nicht $\Delta' = \Delta''$; so sey zunächst $\Delta' > \Delta''$, $= \Delta'' + \delta$, $\Delta' - \Delta'' = \delta$. Nimmt man, welches offenbar immer möglich ist (M. s. Elem. X. 1.), n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta$ ist; so ist um so mehr nach dem Obigen $\Delta' < \delta$, $\Delta' - \Delta'' < \delta$, gegen das obige $\Delta' - \Delta'' = \delta$. Wäre ferner $\Delta' < \Delta''$, $\Delta'' = \Delta' + \delta'$, $\Delta'' - \Delta' = \delta'$; so nehme man n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta'$ ist; so ist um so mehr $\Delta'' < \delta'$, $\Delta'' - \Delta' < \delta'$, gegen $\Delta'' - \Delta' = \delta'$. Also muß $\Delta' = \Delta''$, $P' = P''$ seyn.

Einen andern Beweis hat Pfaff gegeben im Art. Prisma des Probehefts zu der von Ersch und Gruber

herausgegebenen Encyklopädie. Auch s. Lorenz Grundriß d. r. Math. N. A. v. Gerling. Helmst. 1820. S. 251., und die bekannten Schriften von Karsten.

V. Aehnliche Polyeder.

28. Zwei ähnliche dreieckige Pyramiden (14. d.) sind von lauter ähnlichen Dreiecken eingeschlossen, und haben gleiche körperliche Winkel, also auch gleiche Flächenwinkel. Der Erklärung ähnlicher dreieckiger Pyramiden (14. d.) gemäß, sey (Fig. 126.) $\Delta ABC \backsim \Delta abc$, $\Delta ABD \backsim \Delta abd$, und die Neigungswinkel an den Kanten AB, ab seyen einander gleich; so kann man sich die beiden Pyramiden offenbar so in einander gelegt denken, wie die Figur zeigt, so daß $\Delta BEG \backsim \Delta ABD$, $\Delta BEF \backsim \Delta ABC$ ist, und überhaupt die Pyramide BEFG mit abcd einerlei ist. Also ist $AB : BE = BD : BG = BC : BF$, folglich $\Delta BCD \backsim \Delta BGF \backsim \Delta bcd$. Also $BD : BG = AD : GE = CD : GF$, $AB : BE = AC : EF = AD : EG$, $BC : BF = AC : EF = CD : FG$; folglich $\Delta ACD \backsim \Delta EFG \backsim \Delta acd$, so daß also die beiden Pyramiden von lauter ähnlichen Seitenflächen, die Ecken folglich von lauter gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen sind, daher auch alle Flächenwinkel der beiden Pyramiden, also auch alle körperlichen Winkel, einander gleich sind (25.). Es ergiebt sich hieraus auch leicht, daß alle Kanten ähnlicher dreieckiger Pyramiden proportional sind.

29. Seyen S, S', S'', S''' und s, s', s'', s''' die Seitenflächen, K, k ein Paar ähnlich liegende Kanten; so ist (Elem. VI. 20.) $S : s = S' : s' = S'' : s'' = S''' : s''' = K^2 : k^2$, da alle Kanten proportional sind (28); $S + S' + S'' + S''' : s + s' + s'' + s''' = S : s = K^2 : k^2$, so daß sich also die Oberflächen ähnlicher dreieckiger Pyramiden wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Kanten verhalten.

30. Aus (28.) folgt unmittelbar, daß die Linien AD, EG; CD, FG, also auch die Ebenen ACD, EFG pa-

rallel sind. Bezeichnet man nun diese beiden Dreiecke durch F, f, ihre Entfernungen von B aber durch E, e; so ist $F:f = CD^2:FG^2 = BD^2:BG^2 = E^2:e^2$; aber auch $E:e = E:e$; also $F.E:f.e = E^3:e^3$. Sind aber P, p die Volumina der beiden Pyramiden; so ist $P:p = \frac{1}{3}F.E:\frac{1}{3}f.e = F.E:f.e = E^3:e^3$, und da, wenn K, k zwei willkührliche Kanten sind, indem alle Kanten einerlei Verhältniß zu einander haben (28.), offenbar $E:e = K:k$, $E^3:e^3 = K^3:k^3$ ist; so ist auch $P:p = K^3:k^3$, d. h. die Volumina zweier ähnlichen dreieckigen Pyramiden verhalten sich wie die Würfel zweier ähnlich liegenden Kanten zu einander.

31. Zwei ähnliche Polyeder (14. d.) werden von lauter ähnlichen und gleich gegen einander geneigten Figuren begränzt. ABCDE, abcde (Fig. 127.) seyen die beiden ähnlichen Grundflächen der Polyeder (14. d.), und F, G; f, g irgend zwei ähnlich liegenden Ecken in beiden, welche durch die ähnlichen dreiseitigen Pyramiden ABCF, ABCG; abcf, abcg bestimmt werden. Wegen Aehnlichkeit dieser Pyramiden sind FAC, GAC; fac, gac gegen die Grundflächen (28.), also auch gegen einander gleich geneigt, und überdies ist FAC $\backsim$ fac, GAC $\backsim$ gac (28.), also Pyr. ACFG $\backsim$ Pyr. acfg (14. d.), und folglich $FG:fg = FA:fa = AB:ab$, da auch $\triangle ABF \backsim \triangle abf$ (28.). Die Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken der beiden Polyeder verhalten sich also immer zu einander wie zwei ähnlich liegende Seiten der Grundflächen, und da die Seiten der Grundflächen alle einander proportional sind; so haben auch alle Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken, also auch alle Kanten der beiden Polyeder, einerlei Verhältniß zu einander. Kommt eine neue Ecke H, h hinzu, so sind, wie so eben bewiesen, die Seiten der Dreiecke FGH, fgh proportional, diese Dreiecke, so wie jede zwei durch drei ähnlich liegende Ecken bestimmten Dreiecke, also einander ähnlich. Kommt noch eine neue Ecke K, k hinzu; so läßt sich ganz wie in (26.) zeigen, daß, wenn FGH, GHK in einer Ebene liegen, dies auch mit fgh, ghk der Fall seyn muß, und daß FGH, GHK und fgh, ghk

gleich gegen einander geneigt sind, da aus der Aehnlichkeit der Dreiecke eben so wie aus ihrer Congruenz die Gleichheit der Winkel folgt. Denk man sich nun die Oberflächen beider Polyeder auf ähnliche Art in Dreiecke zerlegt; so sind die homologen Dreiecke einander ähnlich und gleich gegen einander geneigt, welches also auch von den ganzen homologen Seitenflächen gilt. Aus der Gleichheit der Flächenwinkel folgt unmittelbar die Gleichheit der homologen körperlichen Winkel. Der hier bewiesene Satz ist die von Robert Simson gegebene Definition ähnlicher Polyeder (14. d.)

32. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die geraden Linien, welche irgend vier ähnlich liegende Ecken zweier ähnlichen Polyeder mit einander verbinden, zwei ähnliche dreieckige Pyramiden einschließen, indem diese Linien einerlei Verhältniß zu einander haben (31.), also ähnliche Dreiecke einschließen, die Ecken der beiden Pyramiden folglich von gleichen ebenen Winkeln gebildet werden, und die Seitenflächen der Pyramiden also gleich gegen einander geneigt sind (25.). Demnach lassen sich zwei ähnliche Polyeder immer in lauter ähnlich und ähnlich gelegene, in gleicher Anzahl vorhandene, dreieckige Pyramiden zerlegen.

33. Sind nun Π, π; Π', π'; Π'', π''; u. s. f. diese Pyramiden; K, k; K', k'; K'', k''; u. s. f. aber ähnlich liegende Kanten derselben; so ist (30.) $\Pi : \pi = K^3 : k^3$, $\Pi' : \pi' = K'^3 : k'^3$, $\Pi'' : \pi'' = K''^3 : k''^3$, u. s. f. Aber (31.) $K : k = K' : k' = K'' : k'' = \ldots$, $K^3 : k^3 = K'^3 : k'^3 = K''^3 : k''^3 = \ldots$, $\Pi : \pi = \Pi' : \pi' = \Pi'' : \pi'' = \ldots = K^3 : k^3$, $\Pi + \Pi' + \Pi + \ldots : \pi + \pi' + \pi'' + \ldots = \Pi : \pi = K^3 : k^3$, d. i., wenn P, p die Volumina der beiden ähnlichen Polyeder bezeichnen, $P : p = K^3 : k^3$. Also verhalten sich die Volumina ähnlicher Körper wie die Würfel ähnlich liegender Kanten (oder Diagonalen (31.)). Eben so leicht würde sich (29.) auf beliebige Polyeder erweitern lassen.

VI. Reguläre Polyeder.

34. Reguläre Polyeder sind solche, welche von lauter congruenten regulären, und gleich gegen einander geneigten, ebenen Figuren eingeschlossen werden. Mittelst Elem. XI. 21. überzeugt man sich leicht, daß es nur fünf reguläre Körper geben kann. Der Winkel des regulären Dreiecks ist $= 60^0$. Drei, vier, fünf solcher Winkel, zu einer Ecke verbunden, geben die Summen 180^0, 240^0, 300^0, also weniger als 360^0; sechs und mehrere geben aber schon 360^0 und mehr, können folglich keine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Vierecks ist $= 90^0$. Drei, zu einer Ecke verbunden, geben die Summe 270^0; vier aber schon 360^0, und können folglich keine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Fünfecks ist $= 108^0$, $3.108^0 = 324^0$, $4.108^0 = 432^0$, $> 360^0$. Der Winkel des regulären Sechsecks ist $= 120^0$, $3.120^0 = 360^0$. Also können solche Winkel gar keine Ecke bilden. Es kann also bloß drei von regulären Dreiecken, einen von regulären Vierecken, und einen von regulären Fünfecken eingeschlossenen, im Ganzen also nur fünf reguläre Körper geben.

35. Ein regulärer Körper werde von lauter regulären Dreiecken eingeschlossen, deren Anzahl $= n$ sey; so ist $W(2.) = 3n$, $S = n$, $K = \frac{1}{2}W(2.) = \frac{3}{2}n$. Aber $K + 6 \overset{=}{<} 3S$ (9.). Also $\frac{3}{2}n + 6 \overset{=}{<} 3n$, $12 \overset{=}{<} 3n$, $n \overset{=}{>} 4$. Folglich kann die Anzahl der Dreiecke nicht $<$ 4 seyn.

36. Nehmen wir nun zuerst an, daß jede Ecke von drei ebenen Winkeln eingeschlossen werden soll; so ist $W = 3E$, $2K = 3E(2.)$, $S = \frac{1}{3}W = E$. Aber $E + S = K + 2(1.)$. Also $2E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 4 = S$, $K = 6$, und $D = o(12.)$. Dieser reguläre Körper wird also von 4 regulären Dreiecken eingeschlossen, hat 4 Ecken, 6 Kanten und keine Diagonale. Er heißt Tetraeder.

37. Wird jede Ecke von vier Winkeln regulärer Dreiecke eingeschlossen; so ist $W = 4E = 2K(2.)$, $K = 2E$, $S = \frac{1}{3}W = \frac{4}{3}E$, $E + \frac{4}{3}E = 2E + 2(1.)$, $E = 6$,

$S = 8$, $K = 12$, und $D = 3$ (12.). Dieser von 8 regulären Dreiecken eingeschlossene Körper mit 6 Ecken, 12 Kanten und 3 Diagonalen heißt Octaeder.

38. Wird endlich jede Ecke von 5 Winkeln regulärer Dreiecke eingeschlossen; so ist $W = 5E = 2K$, und auf ähnliche Art wie vorher erhält man $E = 12$, $S = 20$, $K = 30$, $D = 36$. Dieser von 20 regulären Dreiecken eingeschlossene Körper mit 12 Ecken, 30 Kanten und 36 Diagonalen heißt Icosaeder. Andere reguläre von Dreiecken eingeschlossene reguläre Körper giebt es nicht.

39. In einem regulären Körper, der von lauter regulären Vierecken, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln eingeschlossen wird, ist $W = 3E = 2K$, $S = \frac{1}{4}W = \frac{3}{4}E$, $E + \frac{3}{4}E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 8$, $S = 6$, $K = 12$, $D = 4$. Dieser von 6 Quadraten eingeschlossene reguläre Körper mit 8 Ecken, 12 Kanten, 4 Diagonalen heißt Hexaeder oder Würfel.

40. Ist endlich ein regulärer Körper nur von regulären Fünfecken, jede Ecke aber von drei ebenen Winkeln eingeschlossen; so ist $W = 3E = 2K$, $S = \frac{1}{5}W = \frac{3}{5}E$, $E + \frac{3}{5}E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 20$, $S = 12$, $K = 30$, $D = 100$. Dieser von 12 regulären Fünfecken eingeschlossene reguläre Körper mit 20 Ecken, 30 Kanten und 100 Diagonalen heißt Dodecaeder.

41. Man nennt diese Köper oft pythagoräische, auch platonische Körper. Die Pythagoräer verglichen nach ihrer symbolischen Lehrart das Tetraeder mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Octaeder mit der Luft, das Icosaeder mit dem Wasser, das Dodecaeder mit dem Weltall. M. s. Plato im Timäus. Das dreizehnte, vierzehnte und funfzehnte Buch in den Elementen des Euclides ist ihrer Untersuchung gewidmet, und Euclides soll sogar die ganzen Elemente wegen dieser Körper verfaßt haben. Das 14te und 15te Buch werden jedoch dem Alexandriner Hypsikles, dessen Zeitalter ungewiß ist, zugeschrieben. Das 13te und 14te Buch betreffen die Construction der regulären Körper, die Verhältnisse ihrer

Theile, und ihrer gegenseitigen Beziehungen, das 15te beschäftigt sich mit der Beschreibung dieser Körper in einander. Ein 16tes Buch hat Franciscus Flussates Candalla (Francis Foix de Candalla, Bischoff von Aire, welcher 1594 im 90sten Jahre starb, und eine Lehrstelle der Mathematik zu Bourdeaux gestiftet hat, mit deren Ertheilung die Bedingung verbunden war, daß der Adspirant einen Satz von eigner Erfindung, der nicht über das 9te Buch der Elemente hinausging, und einen neuen Satz von den regulären Körpern vortragen mußte) seiner zuerst 1566 (dann 1578, 1602) erschienenen Uebersetzung der Elemente beigefügt, welches sich auch in des Clavius Euclid (Coloniae 1591. fol. T. II. p. 324.) befindet, und verschiedene Vergleichungen der in einander beschriebenen regulären Körper und ihrer Seiten enthält. Die Netze zur Verfertigung der regulären Körper aus Pappe u. dergl. findet man z. B. in den Wolfischen Schriften. Wir wollen nur die wichtigsten Elemente derselben mittelst des Calculs bestimmen.

42. Eine körperliche Ecke werde von n gleichen und gleich gegen einander geneigten ebenen Winkeln α eingeschlossen. Man soll die Größe eines Neigungswinkels $= 2\gamma$ bestimmen. Aus der Spitze der Ecke sey mit willkührlichem Radius eine Kugel beschrieben, und ABCDE (Fig. 128.) sey das der Ecke entsprechende sphärische Polygon, dessen Seiten und Winkel, wie aus der Natur der Ecke unmittelbar folgt, alle gleich sind. Jede Seite ist $= \alpha$, jeder Winkel $= 2\gamma$. Werden nun zwei Winkel, z. B. A und B durch AF, BF halbirt, und auch CF, DF u. s. f. gezogen; so folgt aus bekannten Sätzen vom sphärischen Dreieck (16. 17.) leicht, daß ABF, BCF, CDF, u. s. f. lauter gleichschenkliche sphärische Dreiecke mit gleichen Seiten und Winkeln sind, so daß also $AF = BF$, $\angle AFB = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ ist. Wird nun AB in G halbirt; so ist FG auf AB senkrecht, und $\angle AFG = \angle BFG = \frac{\pi}{n}$, wie ebenfalls leicht zu beweisen ist (16. 17.). Folglich hat man (Trigonometrie. 76.) $\sin GBF = \frac{\cos BFG}{\cos BG}$, d. i.

$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, wodurch der Neigungswinkel 2γ bestimmt ist.

43. Ist nun bei irgend einem regulären Körper n die Anzahl der ebenen Winkel, welche jede Ecke bilden, m die Anzahl der Seiten jeder Seitenfläche; so ist $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{m}\pi$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{m}\pi$, also $\sin\gamma = \frac{\cos\frac{1}{n}\pi}{\sin\frac{1}{m}\pi}$.

Für das Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodecaeder, Icosaeder ist respective $n = 3, 3, 4, 3, 5$; $m = 3, 4, 3, 5, 3$. Folglich nach (Goniometrie. 168.) mittelst leichter Rechnung für diese Körper nach der Reihe:

$$\begin{aligned}
\sin\gamma &= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \\
&= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\
&= \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \\
&= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}, \\
&= \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\tfrac{2}{3}\sqrt{5})}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht:

$$\begin{array}{lll}
\cos\gamma = \sqrt{\tfrac{2}{3}} & ; \sin 2\gamma = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}; & \cos 2\gamma = \tfrac{1}{3}; \\
= \sqrt{\tfrac{1}{2}} & = 1 & = 0 \\
= \sqrt{\tfrac{1}{3}} & = \tfrac{2}{3}\sqrt{2} & = -\tfrac{1}{3} \\
= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} & = \frac{2}{\sqrt{5}} & = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\
= \sqrt{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\sqrt{5})} & = \tfrac{2}{3} & = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5}
\end{array}$$

woraus sich für die fünf regulären Körper in obiger Folge respective folgende rationale Ausdrücke ergeben $\cos 2\gamma = \frac{1}{3}$, $\sin 2\gamma = 1$, $\cos 2\gamma = -\frac{1}{3}$, $\tang 2\gamma = -2$, $\sin 2\gamma = \frac{2}{3}$, und man hat

für das Tetraeder $2\gamma = 70^\circ 31' 44''$,
= = Hexaeder = $= 90^\circ$,
= = Octaeder = $= 109^\circ 28' 16''$,
= = Dodecaeder = $= 116^\circ 33' 54''$,
= = Icosaeder = $= 138^\circ 11' 23''$.

44. Bezeichnen r, R die Halbmesser der in und um ein reguläres Polyeder beschriebenen Kugel, so ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kugeln die gemeinschaftliche Spitze von so vielen regulären Pyramiden, als das Polyeder Seitenflächen hat. Die Seitenkante einer solchen Pyramide ist $= R$, ihre Höhe, welche den Mittelpunkt der Grundfläche trifft, $= r$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $= \gamma$, der Polygonwinkel der Grundfläche $= \alpha$. Eine Kante des Polyeders sey $= a$, die Halbmesser des in und um eine Seitenfläche beschriebenen Kreises seyen $= r'$, R'; so erhellet auch ohne Figur leicht, daß $r' = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$, $r = r' \operatorname{tang}\gamma$, $R' = \frac{1}{2} a \sec \frac{1}{2}\alpha$, $R^2 = r^2 + R'^2$ ist, woraus durch Verbindung dieser Formeln

$$r = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\gamma ,$$
$$R = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sec\gamma^2)} .$$

Setzt man nun $\frac{\pi}{m} = \varphi$, $\frac{\pi}{n} = \psi$; so ist $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sin\varphi$, $\sin\gamma = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi}$, welches, in die Formel für R gesetzt, die Größe unter dem Wurzelzeichen

$$= \frac{\sin\psi^2}{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2} = \frac{\sin\psi^2}{\cos\psi^2} \cdot \frac{\cos\psi^2}{\sin\varphi^2 - \cos\psi^2} = \operatorname{tang}\psi^2 . \operatorname{tang}\gamma^2$$

giebt. Da $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \cot \frac{\pi}{m}$ (43.); so ist

$$r = \tfrac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{m} \operatorname{tang}\gamma , \; R = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang}\gamma ;$$

also $\frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}$. Im Dodecaeder und Icosaeder ist $n = 3$, $m = 5$; $n = 5$, $m = 3$; folglich das Verhältniß $R : r$ in beiden Körpern dasselbe.

45. Ist K der körperliche Inhalt, S eine Seitenfläche, F die ganze Oberfläche, v die Anzahl der Seitenflächen eines Polyeders; so erhellet leicht, daß der Inhalt eines der m congruenten Dreiecke, in welche jede Seitenfläche aus ihrem Mittelpunkte getheilt werden kann, $= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, also $S = \frac{1}{4} m a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, $F = \frac{1}{4} m v a^2 \cot \frac{\pi}{m}$ ist. Der Inhalt einer der v gleichen Pyramiden, in welche das Polyeder aus seinem Mittelpunkte getheilt werden

kann, ist $= \frac{1}{3} Sr = \frac{1}{12} mra^2 \cot\frac{\pi}{m} = \frac{1}{24} ma^3 \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 .$ $\tang\gamma$. Also $K = \frac{1}{24} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \tang\gamma$.

In den Formeln

$$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}};$$

$$r = \tfrac{1}{2} a \cot\frac{\pi}{m} \tang\gamma,\ R = \tfrac{1}{2} a \tang\frac{\pi}{n} \tang\gamma;$$

$$S = \tfrac{1}{4} ma^2 \cot\frac{\pi}{m},\ F = \tfrac{1}{4} mva^2 \cot\frac{\pi}{m};$$

$$K = \tfrac{1}{24} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \tang\gamma$$

ist die ganze Theorie der regulären Körper enthalten.

Da

$$a = \frac{2r}{\cot\frac{\pi}{m} \tang\gamma} = \frac{2R}{\tang\frac{\pi}{n} \tang\gamma};$$

so kann auch Alles leicht durch r oder R ausgedrückt werden.

46. Nach diesen Formeln ist:

Für das Tetraeder:

$$\begin{aligned}
R &= \tfrac{1}{4} a \sqrt{6} &&= a . 0{,}6123724 ,\\
K &= \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{2} &&= a^3 . 0{,}1178511 ,\\
F &= a^2 . \sqrt{3} &&= a^2 . 1{,}73205 ,\\
a &= 2R \sqrt{\tfrac{2}{3}} &&= R . 1{,}632993 ,\\
S &= \tfrac{2}{3} R^2 \sqrt{3} &&= R^2 . 1{,}154701 ,\\
F &= \tfrac{8}{3} R^2 \sqrt{3} &&= R^2 . 4{,}618804 ,\\
K &= \tfrac{8}{27} R^3 \sqrt{3} &&= R^3 . 0{,}513200 .
\end{aligned}$$

Für das Hexaeder:

$$\begin{aligned}
R &= \tfrac{1}{2} a \sqrt{3} &&= a . 0{,}8660254 ,\\
K &= a^3 &&= a^3 . 1{,}000000 ,\\
F &= && a^2 . 6{,}000000 ,\\
a &= \tfrac{2}{3} R \sqrt{3} &&= R . 1{,}154700 ,\\
S &= \tfrac{4}{3} R^2 &&= R^2 . 1{,}333333 ,\\
F &= 8R^2 &&= R^2 . 8{,}000000 ,\\
K &= \tfrac{8}{9} R^2 \sqrt{3} &&= R^3 . 1{,}539600 .
\end{aligned}$$

Für das Octaeder:

$$R = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2} = a.0{,}7071068\,,$$
$$K = \tfrac{1}{3} a^3 \sqrt{2} = a^3.0{,}4714045\,,$$
$$F = 2a^2.\sqrt{3} = a^2.3{,}46410\,,$$
$$a = R\sqrt{2} = R.1{,}414214\,,$$
$$S = \tfrac{1}{2} R^2.\sqrt{3} = R^2.0{,}866025\,,$$
$$F = 4R^2.\sqrt{3} = R^2.6{,}928203\,,$$
$$K = \tfrac{4}{3} R^3 = R^3.1{,}333333\,.$$

Für das Dodecaeder:

$$R = \tfrac{1}{4} a \sqrt{(18 + 6\sqrt{5})} = a.1{,}4012585\,,$$
$$K = \tfrac{1}{4} a^3.(15 + 7\sqrt{5}) = a^3.7{,}6631189\,,$$
$$F = 3a^2\sqrt{5}.\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} = a^2.20{,}645728\,,$$
$$a = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{3}} = R.0{,}713644\,,$$
$$S = \tfrac{1}{6} R^2 \sqrt{10}.\sqrt{(5 - \sqrt{5})} = R^2.0{,}876218\,,$$
$$F = 2R^2\sqrt{10}.\sqrt{(5 - \sqrt{5})} = R^2.10{,}514616\,,$$
$$K = \frac{2R^3(5 + \sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = R^3.2{,}785164\,.$$

Für das Icosaeder:

$$R = \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}} = a.0{,}9510565\,,$$
$$K = \tfrac{5}{12} a^3.(3 + \sqrt{5}) = a^3.2{,}1816950\,,$$
$$F = 5a^2\sqrt{3} = a^2.8{,}66025\,,$$
$$a = \frac{R\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = R.1{,}051462\,,$$
$$S = \frac{3R^2.(5 - \sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = R^2.0{,}478727\,,$$
$$F = \frac{6R^2.(5 - \sqrt{5})}{\sqrt{3}} = R^2.9{,}574540\,,$$
$$K = \frac{2R^3.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{3} = R^3.2{,}536150\,.$$

VII. Archimedische Körper.

47. Archimedische Körper nennt man solche Körper, welche von regulären Figuren zweier- oder dreierlei Art eingeschlossen werden (Kepleri Harmonice mundi Linc. Austr. 1649. fol. Lib. II. 27. 28.), mit der Bedingung, daß alle ihre körperlichen Winkel gleich, nämlich congruent oder symmetrisch sind. Sehr ausführ-

liche Untersuchungen über solche Körper findet man in Meier Hirsch geom. Aufg. Berlin. II. 1807. S. 139—186, wo S. 186—196 auch von solchen Körpern gehandelt wird, die von lauter Rhomben eingeschlossen sind. Geometry improved 1) by a large and accurate table of segments of circles; 2) a concise Treatise of polyedra etc. by A. Sharp. Lond. 1718. (Weitläufig ohne sphär. Trig.). Meister de solidis geometricis. Comm. Gotting. T. VII. Netze für solche Körper zu zeichnen in Marpurgs Progressionalcalcul. Berlin u. Stralsund. 1774. 4tes Buch. Kästner de polyedris data lege irregularibus. Comm. Gotting. Vol. VI. VII. VIII. Mit Anwendung auf Krystallographie Kästner de sectionibus solidorum crystallorum structuram illustrantibus. Ibid. VI. Der rein-wissenschaftliche Werth solcher Untersuchungen ist sehr beschränkt. M. Hirsch (a. a. O. S. 149. 175.) giebt auch eine Aufzählung der überhaupt möglichen archimedischen Körpern.

VIII. Polyedrometrie.

48. Was die Polygonometrie (Trigonometrie. IV.) in Bezug auf Polygone leistet, sucht die Polyedrometrie in Bezug auf Polyeder zu leisten, nämlich aus einigen, ein Polyeder bestimmenden Stücken (13.), die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden. Eine vollständige Auflösung aller Fälle würde eine großes Werk füllen. Wir müssen uns daher hier mit einigen, vorzüglich von L'Huilier und Carnot (S. dessen Geom. d. Stellung. A. d. Franz. v. Schumacher. Altona. Thl. II. 1810. S. 57. und eine Abhandlung von L'Huilier in den Mém. présentés à l'Institut par les savans étrangers. T. I.) gefundenen Grundformeln begnügen.

49. Die Projection jeder ebenen Figur auf eine Ebene ist ihrem Inhalte nach dem Producte gleich, welches man erhält, wenn man den Flächeninhalt der gegebenen Figur in den Cosinus des Neigungswinkel ihrer Ebene gegen die Projectionsebene multiplicirt.

Ist nämlich (Fig. 129.) AB'C die Projection von ABC, und der Neigungswinkel BDB' $= \alpha$; so ist $\Delta AB'C = \frac{1}{2} AC . B'D = \frac{1}{2} AC . BD . \cos\alpha = \Delta ABC . \cos\alpha$. Ist dagegen allgemein (Fig. 130.) A'B'C' die Projection von ABC; so sey CD mit MN parallel, und durch CD eine mit der Projectionsebene parallele Ebene gelegt. Die Projectionen der Dreiecke ADC, BDC auf dieser Ebene sind nach dem Obigen $= \Delta ADC . \cos\alpha$, $\Delta BDC . \cos\alpha$. Folglich $\Delta A'B'C'$, welches der Projection auf der parallelen Ebene durch CD offenbar gleich ist, $= (\Delta ADC + \Delta BDC) . \cos\alpha = \Delta ABC . \cos\alpha$. Fiele CD außerhalb des Dreiecks ABC, so würde sich die Addition nur in eine Subtraction verwandeln. Jede geradlinige Figur läßt sich in Dreiecke zerlegen, und jede krummlinige Figur kann als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Also gilt der Satz allgemein.

50. Alle Seitenflächen eines Polyeders denke man sich auf irgend eine Ebene projicirt. Der Inhalt der Figur, welche die äußerste Gränzlinie der Projectionen bildet, sey $= M$. Ferner seyen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die spitzen Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Projectionsebene, welche nach dem innern Raume des Polyeders; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ dagegen die nach dem äußern Raume desselben hinliegenden Neigungswinkel, und a, b, c, ...; a', b', c', ... die entsprechenden Seitenflächen; so ist klar, daß

$$M = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots,$$
$$M = a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma' + \ldots,$$
$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots$$
$$- a'\cos\alpha' - b'\cos\beta' - c'\cos\gamma' + \ldots$$

ist. Nimmt man aber alle Neigungswinkel entweder nach dem innern, oder nach dem äußern Raume des Polyeders hin; so sind die Neigungswinkel, welche den spitzen Neigungswinkeln nach dem äußern oder innern Raume hin entsprechen, stumpfe Winkel, und ihre Cosinus also positiv. Bezeichnen wir also, alle Neigungswinkel nach dem innern, oder alle nach dem äußern Raume hin nehmend, die Seitenflächen und entsprechenden Neigungswinkel durch a, b, c, d, ..., und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$; so ist nach dem Obigen

$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots.$$

51. Bezeichnen wir nun den nach dem innern Raume des Polyeders hin liegenden Neigungswinkel irgend zweier Seitenflächen m, n gegen einander, überhaupt durch (m, n); so ist, wenn irgend eine Seitenfläche, z. B. a, als Projectionsebene angenommen wird,

$$o = a\cos(a, a) + b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + \ldots$$

Da aber die Winkel nach dem innern Raume hin genommen werden; so ist $(a, a) = 180^0$, $\cos(a, a) = -1$, und folglich, zugleich durch Verwechslung der Buchstaben:

$$\begin{aligned}
a &= b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d) + \ldots \\
b &= a\cos(b, a) + c\cos(b, c) + d\cos(b, d) + \ldots \\
c &= a\cos(c, a) + b\cos(c, b) + d\cos(c, d) + \ldots \\
d &= a\cos(d, a) + b\cos(d, b) + c\cos(d, c) + \ldots \\
&\text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Jede Seitenfläche ist also der Summe aller andern gleich, wenn man jede mit dem Cosinus ihres nach dem innern Raume des Polyeders hin liegenden Neigungswinkels gegen jene Seitenfläche multiplicirt.

52. Multiplicirt man die vorigen Gleichungen auf beiden Seiten successive mit a, b, c, ..., und addirt; so erhält man

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots = \\
&2ab\cos(a, b) + 2ac\cos(a, c) + 2ad\cos(a, d) + \ldots \\
&\quad + 2bc\cos(b, c) + 2bd\cos(b, d) + \ldots \\
&\qquad\qquad + 2cd\cos(c, d) + \ldots
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots \\
&+ 2ab + 2ac + 2ad + \ldots \\
&\qquad + 2bc + 2bd + \ldots \\
&\qquad\qquad + 2cd + \ldots
\end{aligned}\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= (a + b + c + d \ldots)^2 \\
&= 2ab\{1 + \cos(a, b)\} + 2ac\{1 + \cos(a, c)\} + \ldots \\
&\qquad + 2bc\{1 + \cos(b, c)\} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{a + b + c + d + \ldots}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&ab\cos^2\tfrac{1}{2}(a, b) + ac\cos^2\tfrac{1}{2}(a, c) + ad\cos^2\tfrac{1}{2}(a, d) + \ldots \\
&\quad + bc\cos^2\tfrac{2}{2}(b, c) + bd\cos^2\tfrac{1}{2}(b, d) + \ldots \\
&\qquad\qquad + cd\cos^2\tfrac{1}{2}(c, d) + \ldots.
\end{aligned}$$

Also erhält man das Quadrat der halben Oberfläche eines Polyeders, wenn man die Producte aller Seiten-

flächen zu zwei und zwei in das Quadrat des Cosinus ihres halben gegenseitigen Neigungswinkel (wie oben genommen) zu einander addirt.

53. Da (51.)

$$a^2 = ab\cos(a, b) + ac\cos(a, c) + \ldots;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots =$$
$$2ab\cos(a, b) + 2ac\cos(a, c) + 2ad\cos(a, d) + \ldots$$
$$+ 2bc\cos(b, c) + 2bd\cos(b, d) + \ldots$$
$$+ 2cd\cos(c, d) + \ldots;$$

so erhält man leicht

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots$$
$$- 2bc\cos(b, c) - 2bd\cos(b, d) - \ldots$$
$$- 2cd\cos(c, d) - \ldots$$

Also erhält man jede Seitenfläche, wenn man von der Summe der Quadrate aller übrigen die doppelte Summe der Producte aller übrigen zu zwei und zwei in den Cosinus ihres gegenseitigen Neigungswinkels (wie oben) subtrahirt, und aus der Differenz der Quadratwurzel zieht.

Für eine dreiseitige Pyramide ist also immer

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$
$$- 2\{bc\cos(b, c) + bd\cos(b, d) + cd\cos(c, d)\}$$

und, wenn die Pyramide rechtwinklig, d. i. $(b, c) = (b, d) = (c, d) = 90^0$, ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2,$$

wie schon Theil III. S. 926. auf andere Art bewiesen.

54. Der cubische Inhalt eines jeden Polyeders läßt sich auch durch die Coordinaten seiner Ecken ausdrücken. Sey $A'B'C'$ die Grundfläche eines schief abgeschnittenen geraden Prismas $ABCA'B'C'$, und zugleich die Ebene der xy. Die Coordinaten von A, B, C seyen x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; also, da das Prisma gerade seyn soll, x, y; x', y'; x'', y'' die Coordinaten von A', B', C'. Der Inhalt der Grundfläche $A'B'C'$ sey $= F$, und der Kürze wegen möge z unter z, z', z'' am kleinsten seyn. Legt man durch A eine mit der Grundfläche parallele Ebene; so wird das schief abgeschnittene Prisma in ein gerades Prisma und eine vierseitige Pyramide getheilt. Der Inhalt des erstern ist $= Fz$. Die

Spitze der Pyramide liegt in A, und ihre Höhe ist = dem von A′ auf B′C′ gefällten Perpendikel, welches $= \frac{2F}{B'C'}$ ist. Die Grundfläche der Pyramide ist ein Trapezium, dessen parallele Seiten $z' - z$, $z'' - z$ sind, und dessen Höhe $= B'C'$, sein Inhalt also $= \frac{(z' + z'' - 2z).B'C'}{2}$; folglich der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{3}F(z' + z'' - 2z)$. Addirt man dies zu Fz; so erhält man den Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas $= \frac{1}{3}(z + z' + z'').F$. Nach Vieleck. (59.) ist aber

$$F = \tfrac{1}{2}\{x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)\}.$$

Folglich der Inhalt unsers Prismas =

$$\tfrac{1}{6}(z + z' + z'')\{x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)\}.$$

Hat man nun ein mehr als dreiseitiges gerades schief abgeschnittenes Prisma, dessen Grundfläche die Ebene der xy ist; so kann man sich dasselbe in mehrere dreiseitige schief abgeschnittene Prismen zerlegt denken, und es ist, wenn die Coordinaten seiner außerhalb der Grundfläche liegenden Ecken durch x, y, z; x', y', z'; ... $\overset{n-1}{x}, \overset{n-1}{y}, \overset{n-1}{z}$ bezeichnet, und alle Diagonalflächen durch den Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, gehend gedacht werden, für

$$X' = x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y),$$
$$X'' = x(y''' - y'') + x''(y - y''') + x'''(y'' - y),$$
$$X''' = x(y'''' - y''') + x'''(y - y'''') + x''''(y''' - y),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n-2}{X} = x(\overset{n-1}{y} - \overset{n-2}{y}) + \overset{n-2}{x}(y - \overset{n-1}{y}) + \overset{n-1}{x}(\overset{n-2}{y} - y),$$

der Inhalt des schief abgeschnittenen mehrseitigen Prismas =

$$\tfrac{1}{6}(z + z' + z'')X' + \tfrac{1}{6}(z + z'' + z''')X''$$
$$+ \tfrac{1}{6}(z + z''' + z'''')X''' + \ldots + \tfrac{1}{6}(z + \overset{n-2}{z} + \overset{n-1}{z})\overset{n-2}{X}.$$

55. Denkt man sich nun irgend ein Polyeder durch rechtwinklige Coordinaten auf eine Ebene der xy bezogen; so erhält man offenbar zwei Reihen schief abgeschnittener Prismen über derselben Grundfläche. Bezeichnet man diese Prismen durch $P, P', P'', \ldots$; $\Pi, \Pi', \Pi'', \ldots$; so ist klar, daß der Inhalt des Polyeders $= P + P' + P'' + \ldots \pm \Pi \pm \Pi' \pm \Pi'' \pm \ldots$, wo die obern oder

untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Ebene der xy das Polyeder schneidet, oder nicht schneidet. Die einzelnen Prismen lassen sich durch ihre Coordinaten ausdrücken (54.), also auch der Inhalt des Polyeders.

56. Eine ganz vollständige Ausführung der Lehre von den Polyedern ließ sich ohne zu große Weitläufigkeit in diesem Artikel nicht geben. Indeß mag das Obige zur Andeutung der Hauptmomente dieser interessanten Theorie hinreichend seyn, wobei ich nur noch bemerke, daß es für jedes Polyeder, wie für jedes Vieleck auch einen Punkt der mittlern Entfernungen giebt, d. h. einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß seine Entfernung von jeder willkührlich im Raume angenommenen Ebene das arithmetische Mittel der Entfernungen aller Ecken des Polyeders von dieser Ebene ist. Die im Art. Vieleck gegebene Ausführung der Theorie dieses Punktes wird hinreichend seyn, um mit Leichtigkeit die Anwendung auf Polyeder zu machen. Verschiedene Eigenschaften der Polyeder sind in den Zeitschriften der Mathematik, besonders in Crelles Journal, und den Annales d. Math. par Gergonne zerstreut, worauf wir hier noch im Allgemeinen verweisen.

Vieleckige Zahlen, s. Polygonalzahlen.

Vielecksseite, s. Vieleck.

Vieleckswinkel, s. Vieleck.

Vielfacher Punkt (punctum multiplex) ist ein Punkt einer Curve, welchen mehrere Zweige derselben mit einander gemein haben. Jenachdem zwei, drei, vier, u. s. w. Zweige der Curve durch diesen Punkt gehen, heißt er ein zweifacher- oder Doppelpunkt (punctum duplex), ein dreifacher, vierfacher Punkt, u. s. w. (punctum triplex, quadruplex, u. s. w.). Die Theorie dieser Punkte setzt eine allgemeinere Darstellung der Lehre von den Berührungen, als in diesem Wörterbuche in dem Art. Berührende Linie gegeben worden ist, voraus, wodurch wir genöthigt sind, einige Betrachtungen in dieser Beziehung

vorauszuschicken, jedoch nur so viel, als die Lehre von den vielfachen Punkten unmittelbar erfordert.

1. Die Gleichungen zweier Curven seyen

$$y = f(x),\ y_1 = f'(x_1);$$

so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$f(x+i) =$$
$$y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$
$$f'(x_1+i) =$$
$$y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wofür wir der Kürze wegen setzen wollen:

$$f(x+i) =$$
$$y + y'\cdot\frac{i}{1} + y''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \ldots,$$
$$f'(x_1+i) =$$
$$y_1 + y_1'\cdot\frac{i}{1} + y_1''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y_1'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y_1''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \ldots$$

Die Bedingung, daß diese beiden Curven einen Punkt, dessen Abscisse nun durch x bezeichnet werden soll, mit einander gemein haben, wird durch die Gleichung

$$y = y_1 \text{ oder } f(x) = f'(x)$$

ausgedrückt. Setzen wir die auf der Ordinate, welche der Abscisse $x + i$ entspricht, genommene Entfernung der beiden Curven von einander $= \Delta$; so ist, nur immer x für x_1 gesetzt, offenbar

$$\Delta = f(x+i) - f'(x+i),$$

oder, weil nach der so eben ausgesprochenen Bedingung $y = y_1$ ist:

$$\Delta = (y' - y_1')\cdot\frac{i}{1} + (y'' - y_1'')\cdot\frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3}$$
$$+ (y'''' - y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1\ldots.4} + \ldots$$

Nun ist klar (M. v. den Art. Taylors Lehrsatz. 32.), einmal, daß diese Differenz, wenn man i abnehmen läßt, willkührlich klein gemacht werden kann, dann aber auch, daß, gewissermaßen bei gleichem Grade der Kleinheit von i, dieselbe desto kleiner ist, je mehr Glieder der Reihe, durch welche sie dargestellt wird, vom Anfange an ver-

schwinden; und desto inniger werden die beiden Curven sich an einander anschließen.

Hat man nun zuerst

$$y = y_1 , y' = y'_1 ;$$

so daß

$$\Delta = (y'' - y_1'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \ldots ;$$

so denke man sich irgend eine dritte Curve, deren Gleichung

$$y_2 = f''(x) ,$$

und bezeichne, indem man zugleich annimmt, daß diese Curve auch durch den Punkt geht, welchen die beiden ersten mit einander gemein haben, die Entfernung dieser Curve von der ersten, auf der Ordinate genommen, welche der Abscisse $x + i$ entspricht, durch Δ'; so ist, wie vorher

$$\Delta' = (y' - y'_2) \cdot \frac{i}{1} + (y'' - y_2'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_2''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3}$$
$$+ (y'''' - y_2'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \ldots .$$

Folglich kann man, wofern nicht etwa $y' - y'_2 = 0$ ist, i immer so klein nehmen, daß $\Delta < \Delta'$ ist, so daß also die dritte Curve in der Nähe des allen gemeinschaftlichen Punktes nicht zwischen den beiden ersten Curven liegen kann, wenn nicht $y' - y'_2 = 0$, $y'_2 = y'$, und also auch $y'_2 = y'_1$ ist. Man sagt daher in diesem Falle, wo also

$$y = y_1 , y' = y'_1$$

ist, daß zwischen den beiden ersten Curven in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, eine Berührung des ersten Grades statt findet. Eine Berührung des zweiten Grades dagegen findet statt, wenn

$$y = y_1 , y' = y'_1 , y'' = y''_1 ,$$

ist, und eben so eine Berührung des dritten Grades, wenn

$$y = y_1 , y' = y_1' , y'' = y_1'' , y''' = y_1''' ,$$

ist, u. s. f.

Bei den Berührungen des zweiten Grades ist

$$\Delta = (y''' - y_1''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''') \cdot \frac{i^4}{1 \ldots 4} + \ldots,$$

und ändert folglich, wegen der in dem ersten Gliede, von welchem für kleine i das Zeichen von Δ abhängt, enthaltenen ungeraden Potenz von i, sein Zeichen mit i, so daß also die osculirende Curve in der Nähe des Berührungspunktes oberhalb und unterhalb der ersten Curven liegt. Aehnliche Bemerkungen gelten für alle Berührungen einer geraden Ordnung.

2. Um ein Beispiel zu geben, sey die osculirende Curve eine gerade Linie, deren Gleichung

$$y_1 = f(x_1) = Ax_1 + B,$$

und so zu bestimmen, daß sie mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung hat. Zu dem Ende hat man nach dem Obigen:

$$y_1 = y, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

indem man $x_1 = x$ setzt. Aber $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = A$; also $A = \frac{\partial y}{\partial x}$;

$$y = Ax + B, B = y - x\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Folglich die Gleichung der Berührenden:

$$y_1 - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x_1 - x).$$

Sind die Coordinaten rechtwinklig, und bezeichnet α den Winkel der Berührenden mit der Abcissenaxe; so ist

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Die Subtangente würde sich ebenfalls leicht bestimmen lassen.

Da bei einer Berührung des nten Grades nach dem Obigen $n + 1$ Bedingungen zu erfüllen sind; so muß die Gleichung einer Curve, die eine osculirende Curve des nten Grades seyn kann, $n + 1$ constante, durch die erwähnten $n + 1$ Bedingungsgleichungen zu bestimmende, Größen enthalten. Die Osculation der geraden Linie kann also nie den ersten Grad übersteigen.

3. Soll der Kreis gefunden werden, welcher mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve eine Berührung des ersten Grades hat; so sey

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

die Gleichung dieses Kreises. Folglich, wegen der Berührung erster Ordnung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-a}{y-b};$$

woraus für $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$:

$$x = a + \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}}, \; y = b - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Man hat also bloß zwei Gleichungen, und eine der Constanten a, b, r bleibt also unbestimmt. Eliminirt man r; so erhält man:

$$b - y = -\frac{1}{y'}(a-x) = -\frac{\partial x}{\partial y}(a-x),$$

welches, wie leicht erhellen wird, die Gleichung der Normale der gegebenen Curve für den Berührungspunkt ist, auf der also die Mittelpunkte aller Kreise, die mit der gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung haben, liegen.

Für die Berührung zweiter Ordnung hat man, x für x_1 gesetzt:

$$y_1 = y, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Folglich

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

$$(x-a) + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

woraus leicht:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$b = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \; r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zur völligen Bestimmung des gesuchten Kreises, der bekanntlich der Krümmungskreis, und sein Radius der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve für den gegebenen Punkt genannt wird, und also immer eine Berührung zweiter Ordnung mit derselben hat.

So viel schien aus der Lehre von den Berührungen zur Erläuterung des Vorhergehenden, und dem Verständniß des Folgenden nöthig zu seyn.

4. Man hat zwei Arten vielfacher Punkte zu unterscheiden, jenachdem nämlich die einzelnen Zweige der Curve sich in ihnen schneiden, oder bloß berühren. Die Gleichung der gegebenen Curve sey immer:

$$u = f(x, y) = 0 .$$

5. Im ersten Falle hat jeder Zweig der Curve in dem vielfachen Punkte eine verschiedene Berührende, und also, ohne daß x, y, die Coordinaten des vielfachen Punktes, sich ändern, $\frac{\partial y}{\partial x}$ (2.) eben so viele Werthe, als die Ordnungszahl des vielfachen Punktes angiebt, so daß man also auch umgekehrt aus der Anzahl der verschiedenen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in dem vielfachen Punkte auf dessen Ordnungszahl schließen kann. Die Differentialgleichung der gegebenen Curve ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Zwei verschiedene Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in dem vielfachen Punkte seyen A, B; so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

wo $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ in beiden Gleichungen einerlei Werth haben. Folglich durch Subtraction

$$(A - B)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

und demnach, weil A — B nicht $= 0$ ist,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \text{ also auch } \left(\frac{\partial u}{\partial}\right) = 0 .$$

Hat also die gegebene Curve vielfache Punkte; so müssen die Coordinaten derselben den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = o, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = o, u = o$$

genügen, und man wird also x, y aus zweien dieser Gleichungen bestimmen, und untersuchen, ob die gefundenen Werthe auch der dritten genügen, in welchem Falle diese Werthe im Allgemeinen vielfachen Punkten der Curve als Coordinaten entsprechen.

Entwickelt man nun aus

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y = o$$

die zweite Differentialgleichung; so wird

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\partial x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\partial y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 y = o,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = o$. Also

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom zweiten Grade, und dieser Differentialquotient hat also, wofern nicht alle Glieder der Gleichung $= o$ werden, zwei Werthe, die entweder beide reell, oder beide imaginär sind. Im ersten Falle ist der vorher gefundene Punkt ein Doppelpunkt, und die Lagen der beiden Berührenden in demselben werden durch die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, die sich aus obiger Gleichung ergeben, bestimmt. Sind aber beide Wurzeln derselben imaginär; so giebt es, weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tang \alpha$$

gar keinen reellen Werth hat, für den gefundenen Punkt keine Berührende, so daß derselbe also auch nicht eigentlich in der Curve, als zusammenhängender Zug gedacht, liegen kann, obgleich er allerdings auch der Gleichung der Curve entspricht. Solche sich zwar aus der Gleichung einer Curve mit ergebende, aber nicht eigentlich in der Curve als zusammenhängender Zug liegende Punkte heißen conju-

girte Punkte, oder auch, namentlich bei ältern Schriftstellern, unsichtbare vielfache Punkte (puncta multiplicia invisibilia).

Sollten alle Glieder der obigen quadratischen Gleichung verschwinden; so müßte man die dritte Differentialgleichung entwickeln, in welcher wieder die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ behafteten Glieder verschwinden werden. In Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist diese Gleichung vom dritten Grade, und hat also entweder drei reelle Wurzeln, oder eine reelle und zwei imaginäre, vorausgesetzt, daß nicht alle Glieder derselben verschwinden. Sind alle drei Wurzeln reell; so ist der Punkt ein dreifacher, im andern Falle dagegen nur ein einfacher, weil $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur einen, aber doch einen, reellen Werth hat. Verschwinden auch alle Glieder der vorhergehenden Gleichung; so entwickele man die vierte Differentialgleichung, welche in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom vierten Grade seyn wird, und in der wieder die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ behafteten Glieder verschwinden. Diese Gleichung hat also entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln. Im ersten Falle ist der Punkt ein vierfacher, im zweiten ein Doppelpunkt, im dritten ein conjugirter. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung des Gesagten dienen.

Entwickelt man $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung der gegebenen Curve unmittelbar; so erhält man, wie aus der hier gelehrten Bestimmung der vielfachen Punkte unmittelbar hervorgeht, wenn in $\frac{\partial y}{\partial x}$ für x die Abscisse eines vielfachen Punktes gesetzt wird, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$, dessen Werth auch nach den bekannten Regeln (Function. 50.) bestimmt werden kann.

6. Die Gleichung der Curve sey

$$u = x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 4x^3 - 4a^2x, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -6ay^2 - 6a^2y;$$

$$x(x^2 - a^2) = o, \; y(y + a) = o;$$

$$x = o, = \pm a; \; y = o, = -a.$$

Nun untersuche man, ob diese Werthe von x, y der gegebenen Gleichung $u = o$ genügen. Für $x = o$ erhält man aus derselben $y = -a$, und für $y = o$ ergiebt sich $x = \pm a$, so daß also

$$x = o, \; y = -a; \; x = \pm a, \; y = o$$

drei vielfachen Punkten entsprechen können. Nun hat man

$$4x^3\partial x - 4a^2x\partial x - 6ay^2\partial y - 6a^2y\partial y = o,$$

$$2x^3\partial x - 2a^2x\partial x - 3ay^2\partial y - 3a^2y\partial y = o,$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x^2\partial x^2 - 2a^2\partial x^2 - 6ay\partial y^2 - 3a^2\partial y^2 \\ - 3ay(y + a)\partial^2 y \end{array}\right\} = o,$$

$$6x^2 - 2a^2 - 3a(2y + a)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

Für $x = o$, $y = -a$ wird diese Gleichung:

$$-2 + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o, \; \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\tfrac{2}{3}};$$

und für $x = \pm a$, $y = o$:

$$4 - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o, \; \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

Also ist jeder der drei vorher bestimmten Punkte ein Doppelpunkt. Für den ersten ist $\tang\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, für die beiden andern dagegen $\tang\alpha = \sqrt{\tfrac{4}{3}}$, wo natürlich immer das doppelte Zeichen der Wurzel zu berücksichtigen ist.

Für $x = o$ ist die Gleichung

$$-2ay^3 - 3a^2y^2 + a^4 = o,$$

welche sich in folgende drei Factoren zerlegen läßt:

$$a(y + a)(y + a)(a - 2y) = o,$$

und demnach die drei Wurzeln

$$y = -a, \; y = -a, \; y = \tfrac{1}{2}a$$

hat. Die beiden ersten entsprechen dem einen Doppelpunkte, die letztere dient zur Verzeichnung der Curve. Zu weiterer Bestimmung ihrer Gestalt suche man die Punkte, in denen die Berührende der Abscissen- und Ordinatenaxe parallel ist. Für den ersten Fall ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x(x^2 - a^2)}{3ay(y + a)} = o.$$

Also $x(x^2 - a^2) = o$, d. i. $x = o$, $x = \pm a$. Für $x = o$ sind die entsprechenden Werthe von y schon gefunden, und $x = \pm a$ giebt die beiden Doppelpunkte, für welche $y = o$. Setzt man aber $x = \pm a$; so wird die gegebene Gleichung:

$$-2ay^3 - 3a^2y^2 = o, \; -2y - 3a = o,$$

woraus noch $y = -\frac{3}{2}a$ für die den Abscissen $x = \pm a$ entsprechenden Punkte, in denen die Berührende der Abscissenaxe parallel ist. Für die Punkte, wo die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist, ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \infty, \; \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3ay(y+a)}{2x(x^2-a^2)} = o,$$

Also $y(y+a) = o$, $y = o$, $y = -a$. Der erste Werth von y giebt, wie wir schon wissen, $x = \pm a$, die beiden letztern Doppelpunkte. Für $y = -a$ wird die Gleichung der Curve:

$$x^4 - 2a^2x^2 = o, \; x^2 - 2a^2 = o.$$

Also $x = o$, wie wir schon wissen, und $x^2 = 2a^2$, $x = \pm a\sqrt{2}$ für die Punkte, in denen die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist. Für die Doppelpunkte wird hier immer $\frac{\partial y}{\partial x} = o$. Zur Verzeichnung unserer Curve haben wir also:

$x = o, \; y = -a$ $x = +a, \; y = o$ $x = -a, \; y = o$	Doppelpunkte.
$x = o, \; y = +\frac{1}{2}a$ $x = +a, \; y = -\frac{3}{2}a$ $x = -a, \; y = -\frac{3}{2}a$	Punkte, wo die Berührende der Abscissenaxe parallel ist.
$x = +a\sqrt{2}, \; y = -a$ $x = -a\sqrt{2}, \; y = -a$	Punkte, wo die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist.

Die Lage der Berührenden in den Doppelpunkten ist schon vorher bestimmt. Die Curve ist in Fig. 131., wo $AD = -a$, $AD' = +a$, $AD'' = -a$; $AE' = +a\sqrt{2}$, $AE'' = -a\sqrt{2}$; $AF = +\frac{1}{2}a$; $D'G' = -\frac{3}{2}a$; $D''G'' = -\frac{3}{2}a$; $E'H' = -a$, $E''H'' = -a$ ist, verzeichnet.

7. Für

$$u = ay^3 - x^3y - bx^3 = o \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -3x^2(y+b), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3ay^2 - x^3;$$

$$x^2(y+b) = o, 3ay^2 - x^3 = o;$$

$$x = o, y = -b; x = \sqrt[3]{3ab^2}, y = o.$$

Nur $x = o$, $y = o$ genügen der gegebenen Gleichung $u = o$. Die zweite Differentialgleichung wird mit Weglassung des $\partial^2 y$ enthaltenden Gliedes:

$$6ay\partial y^2 - 6x^2\partial x\partial y - 6x(y+b)\partial x^2 = o,$$

in welcher also alle Glieder für $x = o$, $y = o$ verschwinden. Eben so wird die dritte Differentialgleichung mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$6a\partial y^3 - 18x\partial x^2\partial y - 6(y+b)\partial x^3 = o,$$

woraus für $x = y = o$:

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - b = o, \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Also hat $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur einen reellen Werth, und der durch $x = o$, $y = o$ gegebene Punkt ist also kein vielfacher Punkt, deren die Curve folglich überhaupt nicht hat.

8. Sey ferner

$$u = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = o;$$

so ist die erste Differentialgleichung:

$$4x^3\partial x + 4axy\partial x + 2ax^2\partial y - 3ay^2\partial y = o,$$

$$4x(x^2 + ay) + a(2x^2 - 3y^2)\frac{\partial y}{\partial x} = o,$$

$$x(x^2 + ay) = o, 2x^2 - 3y^2 = o;$$

$$x = o, x = +a\sqrt{\tfrac{2}{3}}, = -a\sqrt{\tfrac{2}{3}}; y = o, = -\tfrac{2}{3}a, = -\tfrac{2}{3}a.$$

Nur $x = o$, $y = o$ genügen der gegebenen Gleichung $u = o$. Die zweite Differentialgleichung ist, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$6x^2 + 2ay + 4ax\frac{\partial y}{\partial x} - 3ay\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

Alle Glieder dieser Gleichung verschwinden für $x = o$, $y = o$. Entwickelt man nun die dritte Differentialgleichung; so ist, wieder mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$4x + 2a\frac{\partial y}{\partial x} - a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 = 0$$

und folglich für $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left\{2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} = 0.$$

Folglich ist der Punkt, für welchen $x = 0$, $y = 0$, ein dreifacher Punkt, und zur Bestimmung der Berührenden der drei sich in demselben schneidenden Zweige hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, = +\sqrt{2}, = -\sqrt{2},$$

so daß also die eine dieser Berührenden der Abscissenaxe parallel, oder vielmehr, weil $x = 0$, $y = 0$, die Abscissenaxe selbst ist. Die beiden andern sind durch $\tang\alpha = \pm\sqrt{2}$ ebenfalls bestimmt. Die Curve hat die in Fig. 132. dargestellte Gestalt, wie sich bei näherer Untersuchung zeigt.

9. Für

$$u = y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$$

ist die erste Differentialgleichung:

$$4y^3\partial y - 5x^4\partial x + 4x^3\partial x + 6xy^2\partial x + 6x^2y\partial y = 0,$$

$$4x^3 - 5x^4 + 6xy^2 + 2y(3x^2 + 2y^2)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$4x^3 - 5x^4 + 6xy^2 = 0,\ 2y(3x^2 + 2y^2) = 0.$$

Allein $x = 0$, $y = 0$ erfüllen diese Bedingungen, und genügen der gegebenen Gleichung. Die zweite und dritte Differentialgleichung verschwinden an sich. Die vierte ist mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Löset man diese Gleichung wie eine quadratische auf; so findet man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{5} - 3}{2}},$$

so daß also alle Wurzeln obiger Gleichung imaginär sind, und der durch $x = 0$, $y = 0$ bestimmte Punkt folglich ein conjugirter Punkt der Curve ist.

10. Die Gleichung sey

$$u = ay^2 - 2aby + ab^2 - x^3 - cx^2 = o,$$
$$-x(3x + 2c)\partial x + 2a(y - b)\partial y = o,$$
$$-x(3x + 2c) + 2a(y - b)\frac{\partial y}{\partial x} = o,$$
$$x(3x + 2c) = o,\ y - b = o;$$
$$x = o, = -\tfrac{2}{3}c;\ y = b.$$

Nur $x = o$, $y = b$ genügen der gegebenen Gleichung. Die zweite vollständige Differentialgleichung ist:

$$-(3x + c)\partial x^2 + a\partial y^2 - a(y - b)\partial^2 y = o,$$

und, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$-3x - c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

Also für $x = o$:

$$-c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

wodurch die Berührenden der beiden Zweige bestimmt werden. Der durch $x = o$, $y = b$ bestimmte Punkt ist also ein Doppelpunkt.

11. Findet aber, um nun zu näherer Betrachtung des in (4.) angedeuteten zweiten Falls überzugehen, zwischen den einzelnen Zweigen der Curve in dem vielfachen Punkte überhaupt eine Berührung des $(n-1)$ten Grades statt; so bezeichne man die Werthe von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \ldots$$

in dem vielfachen Punkte für irgend einen bestimmten Zweig durch $y', y'', y''', y'''', \ldots$, für jeden andern Zweig durch $y_1', y_1'', y_1''', y_1'''', \ldots$, die auf der Ordinate, welche, wenn x die Abscisse des vielfachen Punktes bezeichnet, der Abscisse $x + i$ entspricht, genommene Entfernung der beiden Zweige der Curve von einander aber durch Δ; so ist (1.):

$$\Delta = (y' - y_1')\cdot\frac{i}{1} + (y'' - y_1'')\cdot\frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3}$$
$$+ (y'''' - y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1..4} + \ldots$$

Da aber zwischen den einzelnen Zweigen eine Berührung des $(n-1)$ten Grades statt findet; so ist (1.):

$$y' = y_1',\ y'' = y_1'',\ y''' = y_1''',\ \ldots\ y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)};$$

und folglich

$$\Delta = (y^{(n)} - y_1^{(n)}) \cdot \frac{i^n}{1 \ldots n} + (y^{(n+1)} - y_1^{(n+1)}) \cdot \frac{i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} + \ldots$$

Nun ist klar, daß Δ, wie klein man auch i nehmen mag, so viele verschiedene Werthe haben wird, als die Anzahl der in dem vielfachen Punkte zusammenkommenden Zweige Einheiten enthält, weniger einen. Eben so viele verschiedene Werthe wird also, da dies bei jedem Grade der Kleinheit von i gilt, auch $y^{(n)} - y_1^{(n)}$, folglich auch $y_1^{(n)}$, haben. Demnach hat, wenn man nun den Werth $y^{(n)}$ selbst mit zählt, $y^{(n)}$ oder $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ eben so viele verschiedene Werthe, als Zweige der Curve in dem vielfachen Punkte zusammenkommen. Für

$$y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$$

giebt es dagegen in dem vielfachen Punkte nur einen Werth, wie aus dem Obigen erhellet. Nun hat aber, wenn $u = 0$, wie immer, die Gleichung der gegebenen Curve bezeichnet, die nte Differentialgleichung überhaupt die Form:

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 0,$$

wo alle fehlenden Glieder einen niedrigern Differentialquotienten von y als den nten enthalten, ein Gesetz, welches für $n = 1$, $n = 2$ unmittelbar aus (5.) erhellet, und durch die bekannte Schlußart von dem nten auf den $(n+1)$teu Fall leicht zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Sind also A, B wieder irgend zwei der verschiedenen Werthe von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ in dem vielfachen Punkte; so hat man

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + A \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + B \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

woraus, da, wie wir so eben gesehen haben, alle Differentialquotienten von y unter dem nten in dem vielfachen Punkte einerlei Werth behalten, ganz wie in (5.) geschlossen wird, daß

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Da aber die erste Differentialgleichung überhaupt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ ist; so hat man in diesem Falle ganz wie in dem ersten:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, u = 0,$$

so daß also in beiden Fällen die vielfachen Punkte völlig auf gleiche Art gefunden werden. Ob die einzelnen Zweige sich schneiden oder berühren, ergiebt sich unmittelbar bei der Bestimmung der Lage der Berührenden der einzelnen Zweige (5.), indem im letztern Falle die Gleichung, durch welche $\frac{\partial y}{\partial x}$ bestimmt wird, bloß so viele einander gleiche, im ersten dagegen so viele verschiedene Wurzeln haben wird, als die Ordnungszahl des vielfachen Punktes Einheiten enthält.

Vielfache Punkte der zweiten Art können in besondern Fällen auch in Spitzen übergehen, über deren Unterscheidung der Art. Rückkehrpunkt nachzusehen ist.

12. Auch ohne Calcul erhellet leicht, daß überhaupt nur erst eine Linie des $(n + 1)$ten Grades einen nfachen Punkt haben kann. Denn sollte schon eine Linie des nten Grades einen nfachen Punkt haben; so denke man sich durch denselben und irgend einen andern Punkt der Curve eine gerade Linie gezogen, welches offenbar immer möglich ist; so würde diese gerade Linie, da in dem nfachen Punkte n Zweige der Curve zusammenkommen, letztere offenbar eigentlich in $n + 1$ Punkten schneiden, welches bekanntlich nicht möglich ist (Krumme Linie. 27.). Kein Kegelschnitt also kann einen Doppelpunkt haben, sondern nur erst eine Linie des dritten Grades. Aus der allgemeinen Gleichung

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$$

der Kegelschnitte erhält man:

$$B + 2Dx + Ey + (C + Ex + 2Fy)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Folglich zur Bestimmung der vielfachen Punkte:

$$B + 2Dx + Ey = o, \; C + Ex + 2Fy = o;$$

$$x = -\frac{2BF - CE}{4DF - E^2}, \; y = -\frac{2CD - BE}{4DF - E^2}.$$

Diese Werthe genügen aber der Gleichung $u = o$ nicht, welches sogleich erhellet, wenn man für die Coefficienten, um eine weitläufige allgemeine Rechnung zu vermeiden, einfache bestimmte Werthe setzt. Setzt man z. B. alle Coefficienten $= 1$; so ist die Gleichung:

$$u = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 = o,$$

und für x und y erhält man mittelst obiger Formeln die Werthe $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. Also müßte

$$1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{2}{3} = o$$

seyn, welches ungereimt ist.

13. Auf die in (5. am Ende) erwähnte Schwierigkeit bei den Berührenden in vielfachen Punkten scheint zuerst Rolle gestoßen zu seyn. Er glaubte dabei die neue Rechnung des Unendlichen unzureichend zu finden, und machte seine Methode in dem Journal des Sçavans. Avril. 1702. bekannt. Diesen Aufsatz beantwortete Saurin, und zeigte, daß der Art. 163. der Analyse des infiniment petits (par de l'Hospital) hinreiche, die Berührenden in den schwierigen Fällen zu ziehen. Weiter verfolgte Saurin diesen Gegenstand in drei Abhandlungen in den Mém. de l'Acad. de Paris. 1716. p. 59. 275. 1723. p. 222. unter dem Titel: Rémarques sur un cas singulier du problème des tangentes. Am ausführlichsten ist die Lehre von den vielfachen Punkten behandelt in der Introduction à l'Analyse des lignes courbes par Cramer. Chap. X. XIII. Einiges kommt auch in der Introductio in Analysin infinitorum. T. II. §. 295 — 303. vor. Weder Cramer noch Euler bedienen sich der Differentialrechnung. Ihre Methoden gründen sich ganz auf die Verwandlung der Coordinaten. Eine besondere Schrift über die Anwendung der Differentialrechnung auf diesen Theil der höhern Geometrie ist: G. H. Bortz de rationibus regularum, quas calculus differentialis in constituendis punctis cur-

varum multiplicibus et subtangentibus in iis ad haec puncta ducendis offert. Lips. 1769. Ueber die vielfachen und conjugirten (points multiples invisibles) Punkte der Linien der vierten Ordnung s. m. zwei besondere Abhandlungen von Brage-Longne in den Mém. de l'Acad. de Paris. 1730. p. 363. 1731. p. 10. Auch Camus sur les tangentes des points communs à plusieurs branches d'une même courbe. Mém. de Paris. 1747. p. 272. Mehreres findet man auch in den neuern Werken über höhere Analysis, besonders in Lacroix Traité du calc. diff. et int. Ed. 2. T. I. §. 187. sqq. und dessen Traité élém. du calc. diff. et int. Ed. 2. p. 104. Auch s. m. Karsten Mathesis theoretica elem. atque sublimior. Rost. 1760. p. 921. sqq. Größere Ausführlichkeit gestattet hier der Raum nicht.

Vielfaches einer Größe A ist eine Größe, welche entsteht, wenn man zu der Größe A eine oder mehrere andere ihr gleiche hinzudenkt. Denkt man sich n der A gleiche Größen mit einander vereinigt; so erhält man das nfache von A, welches durch nA bezeichnet wird. A selbst heißt die vervielfältigte Größe. Das Vielfache einer Größe ist mit derselben immer von einerlei Art.

Vielfaches eines Verhältnisses, s. Verhältniß (14.).

Vielfaches, kleinstes gemeinschaftliches, s. Theiler, gemeinschaftlicher (9.).

Viereck heißt jede von vier geraden Linien in einer Ebene, oder von vier Bogen auf der Oberfläche einer Kugel eingeschlossene Figur. Die besondern Arten des Vierecks: Parallelogramm und Trapezium s. m. in besondern Artikeln. Ein in oder um einen Kreis beschriebenes Viereck heißt ein ein- oder umgeschriebenes Viereck. Jedes Viereck, um oder in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, heißt centrisch nach den Ecken oder nach

den Seiten. Ein System von vier geraden Linien, welche sich wie AC, CE, AD, BE (Fig. 133.) schneiden, nennt man ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalen BD, CF, AE sind, indem jedes Viereck im gewöhnlichen Sinne nur zwei Diagonalen hat. Die Berechnung der Seiten und Winkel der Vierecke aus gegebenen Stücken s. m. im Art. Trigonometrie V.

1. Für die Congruenz der Vierecke gelten folgende Bedingungen.

a) Wenn alle vier Seiten und ein Winkel gegenseitig gleich sind. Denn sind B, F (Fig. 134.) die gleichen Winkel; so folgt leicht die Congruenz der Dreiecke ABC, EFG, woraus AC = EG, also auch ΔACD $\cong$ ΔEGH, und folglich offenbar die Vierecke congruent.

b) Wenn drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel gegenseitig gleich sind. Wird sehr leicht durch das Aufeinanderlegen bewiesen.

c) Wenn drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel gleich sind. Sind AB, BC, CD und EF, FG, GH die gleichen Seiten; so fälle man die Perpendikel BK, CL, BP, FM, GN, FQ. Dann erhellet leicht, daß die Dreiecke ABK, EFM und CLD, GNH congruent sind. Also BK = FM, CL = GN, woraus CP = GQ. Folglich ΔBCP $\cong$ ΔFGQ. Nun schließt man leicht, daß die Winkel der Vierecke bei B, F und C, G gleich, die Vierecke also congruent sind.

d) Wenn zwei zusammenstoßende Seiten und drei (also alle vier) Winkel einander gleich sind. Sind AB, BC und FE, FG die gleichen Seiten, so ziehe man AC, EG, und beweise die Congruenz der Dreiecke ABC, FEG, und ACD, EGH, welches keine Schwierigkeit hat.

e) Wenn zwei gegenüberliegende Seiten, und drei (also alle vier) Winkel gleich sind. Sind BC, FG, und AD, EH die gleichen Seiten; so verlängere man die andern Seiten, bis sie sich in R, S schneiden; so ist es leicht, die Congruenz der Dreiecke BRC, FSG und ARD, ESH zu beweisen, woraus sogleich die Congruenz der Vierecke

folgt. Sind aber die Seiten AB, CD und EF, GH parallel; so kann man offenbar den Seiten BC, FG unendlich viele Lagen geben, so daß sie sich immer gleich bleiben, und die Vierecke doch nicht congruent sind.

f) Wenn drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel gegenseitig gleich sind, und wenn zugleich die Diagonale durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Wird sehr leicht durch die Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die den gegebenen eingeschlossenen Winkeln gegenüberstehenden Diagonalen zieht.

g) Wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberstehende eingeschlossene Winkel gleich sind, und zugleich die Diagonale durch die beiden unbestimmten Winkel größer ist, als die gegebene Seite an dem anliegenden Winkel. Wird eben so leicht aus der Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die genannte Diagonale zieht.

Durch jede der in diesen Sätzen angegebenen fünf Stücke wird also ein Viereck bestimmt. Sonst giebt es immer zwei Vierecke, wovon man sich in jedem Falle leicht überzeugen wird.

2. Die meisten merkwürdigen Eigenschaften haben die centrischen Vierecke. Für alle Vierecke gilt der von Euler gefundene interessante Satz, daß die Summe der Quadrate der vier Seiten immer der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Linie gleich ist. Ist nämlich im Dreieck ABC (Fig. 135.) $AD = DC$, und BD gezogen; so fälle das Perpendikel BE auf AC. Dann ist (Dreieck. 19. 20.) $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD.DE$, $BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD.DE$, woraus, wegen $AD = CD$, wenn man addirt, sich leicht ergiebt: $AB^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. Sey nun im Viereck ABCD (Fig. 136.) $DE = BE$, $AF = CF$; so ziehe man AE, CE. Dann ist $AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$, $BC^2 + CD^2 =$

$2CE^2 + 2DE^2$, $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 2(AE^2 + CE^2) + 4DE^2 = 4AF^2 + 4FE^2 + 4DE^2 = (2AF)^2 + (2DE)^2 + 4FE^2 = AC^2 + DB^2 + 4FE^2$. Im Parallelogramm ist $FE = o$. Also $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. M. s. über diesen Satz auch eine Abhandlung von G. W. Krafft in den Nov. Comm. Petrop. I.

3. Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks ABCD (Fig. 137.) durch gerade Linien; so ist leicht zu zeigen, daß die entstehende Figur EFGH ein seinem Flächeninhalte nach halb so großes Parallelogramm als das gegebene Viereck ist.

4. Die Summe der Quadrate der Diagonalen eines jeden Vierecks ist der doppelten Summe der Quadrate der, die Mittelpunkte der Gegenseiten verbindenden, geraden Linien EF, GH gleich. Da EFGH ein Parallelogramm ist (3.); so ist $EF^2 + GH^2 = EG^2 + GF^2 + FH^2 + EH^2$ (2.) $= 2EG^2 + 2GF^2$. Aber offenbar $EG = \frac{1}{2}BD$, $GF = \frac{1}{2}AC$, $2EG^2 = \frac{1}{2}BD^2$, $2GF^2 = \frac{1}{2}AC^2$. Also $EF^2 + GH^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2$, $AC^2 + BD^2 = 2\{EF^2 + GH^2\}$.

5. Ist m die Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet; so ist $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4m^2$ (2.) $= 2EF^2 + 2GH^2 + 4m^2$ (4.). Addirt man auf beiden Seiten $AC^2 + BD^2 = 2EF^2 + 2GH^2$ (4.); so erhält man $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4\{EF^2 + GH^2 + m^2\}$.

6. Sind K, L die Mittelpunkte der Diagonalen; so erhellet sehr leicht, daß EK, LF beide mit AB, EL und KF beide mit CD parallel sind, und folglich EKFL ein Parallelogramm ist. Also ist $EF^2 + KL^2 = EK^2 + FK^2 + LF^2 + EL^2$ (2.) $= 2KF^2 + 2EK^2 = \frac{1}{2}CD^2 + \frac{1}{2}AB^2$. Also $AB^2 + CD^2 = 2EF^2 + 2KL^2 = 2\{EF^2 + m^2\}$, so daß also in jedem Viereck die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten der doppelten Summe der Quadrate der die Mittelpunkte der beiden Diagonalen

und der beiden andern Gegenseiten verbindenden geraden Linien gleich ist.

7. Setzt man $BD = d$, $AC = d'$ (Fig. 138.) und fällt die Perpendikel AE, CF; so ist $AE = AG.\sin\alpha$, $CF = CG.\sin\alpha$, $\Delta ABD = \frac{1}{2}AG.d\sin\alpha$, $\Delta BCD = \frac{1}{2}CG.d'\sin\alpha$, woraus durch Addition $ABCD = \frac{1}{2}dd'\sin\alpha$. Folglich verhalten sich Vierecke, deren Diagonalen gegen einander gleich geneigt sind, wie die Producte ihrer Diagonalen, oder, wenn sie in Kreise beschrieben sind, wie die Summen der Producte ihrer Gegenseiten (Kreis. 44.).

Da $\sin\alpha$ für $\alpha = 90^0$ ein Maximum wird; so ist unter allen Vierecken mit gleichen Diagonalen das am größten, in welchem die Diagonalen einen rechten Winkel einschließen. Sonst sind alle Vierecke mit gleichen und gleich geneigten Diagonalen einander gleich.

Will man ein Parallelogramm verzeichnen, das einem Vierecke gleich ist, und gleiche Diagonalen mit demselben hat; so lasse man sich die beiden Diagonalen unter demselben Winkel wie im Viereck so schneiden, daß sie sich gegenseitig halbiren.

Dieser Satz scheint von Robervall herzurühren.

8. Ist der Winkel A (Fig. 139.) ein rechter; so erhellet leicht, daß für $DB = \sqrt{a^2 + d^2} = n$, der Inhalt des Vierecks =

$$\tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+n)(c+n-b)(b+n-c)(b+c-n)}$$

ist (Dreieck. 34.). Ist A kein rechter Winkel; so muß man in dieser Formel $\frac{1}{2}ad\sin A$ statt $\frac{1}{2}ad$, und

$$n = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos A},$$

wobei also noch A gegeben seyn muß, setzen.

9. Die Summe der Gegenwinkel jedes eingeschriebenen ebenen Vierecks beträgt zwei Rechte, und um ein ebenes Viereck, in welchem die Summen der Gegenwinkel zwei Rechte betragen, läßt sich immer ein Kreis beschreiben (Kreis. 22. 23.). Zum Beweise eines analogen sehr merkwürdigen Satzes über das sphärische einge-

schriebene Viereck sind folgende vorläufige Betrachtungen nöthig.

10. Im eingeschriebenen ebenen Viereck ABCD (Fig. 140.) ist $A + C = 180^0$, $\sin A = \sin C$, $\cos A = -\cos C$, $\Delta = \frac{1}{2} ad \sin A$, $\Delta' = \frac{1}{2} bc \sin A$. Also, wenn wir den Inhalt des Vierecks durch V bezeichnen, $V = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A$. Aber (Trigonometrie. 7.)

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - \delta^2}{2ad} = -\cos C = -\frac{b^2 + c^2 - \delta^2}{2bc},$$

woraus nach einigen leichten Reductionen:

$$\delta^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}$$

$$= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc};$$

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)};$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)},$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A^2 = 1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + c + d - b)(a + b + d - c)}{2(ad + bc)};$$

$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A =$$

$$= \frac{\sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d)}}{2(ad + bc)}.$$

Setzt man nun $a + b + c + d = 2s$; so erhält man mittelst des Obigen leicht

$$V = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)},$$

woraus sich sogleich die Formel für den Inhalt des Dreiecks aus seinen drei Seiten (Trigonometrie. 19.) ergiebt, wenn man $d = o$ setzt.

Der Radius r das um das Viereck beschriebenen Kreises ist zugleich der Radius des um das Dreieck ABD beschriebenen Kreises. Also $r = \frac{\delta}{2 \sin A}$ (Trigonometrie. 21.). Folglich $r = \frac{\delta(ad + bc)}{4V}$

$$= \frac{1}{4V} \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$V = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\,.$$

Entwickelt man das Product

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\,,$$

und setzt

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = \Sigma a^2\,,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} = \Sigma\frac{1}{a^2}\,;$$

so erhält man leicht:

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{abcd\,\Sigma a^2 + (abcd)^2 . \Sigma\frac{1}{a^2}}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\,.$$

Ist das Viereck zugleich centrisch nach den Seiten, so daß sich nämlich auch ein Kreis in dasselbe beschreiben läßt; so wird leicht erhellen, daß die Summen der Gegenseiten gleich sind, d. h. $a + c = b + d$ ist. Dies giebt

$$V = \sqrt{abcd}\,,$$

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\Sigma a^2 + abcd\,\Sigma\tfrac{1}{a^2}}\,.$$

11. Sey nun ABCD (Fig. 140.) ein sphärisches, in einen kleinern Kreis beschriebenes, Viereck; so sind, den Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt, die Seiten und eine Diagonale des entsprechenden Sehnenvierecks $= 2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}d$, $2\sin\frac{1}{2}\delta$. Also für

$$\sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c\,\sin\tfrac{1}{2}d = P\,,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}d = Q\,,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c = R\,,$$

nach (9.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{PQ}{R}\,.$$

Aber (Trigonometrie. 58.)

$$\cos A = \frac{\cos\delta - \cos a\,\cos d}{\sin a\,\sin d}\,.$$

Folglich nach einigen leichten Reductionen, da $2\sin\frac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A$, $2\cos\frac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A$ ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}(a-d)^2}{\sin a\,\sin d}\,.$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+d)^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin a\,\sin d}\,.$$

Nach dem Vorigen wird der Zähler von $\sin\frac{1}{2}A^2$ also

$$= \frac{PQ}{R} - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}d\,.X + \sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\,.Y}{R}$$

für

$$X = \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\,,$$
$$Y = \sin\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}d^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2\,.$$

Entwickelt man nun $\sin\frac{1}{2}(a-d)^2$; so erhält man leicht

$$\begin{aligned} Y &= \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2\ \sin\tfrac{1}{2}d^2 \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)\,. \end{aligned}$$

Setzt man aber $\sin a\ \sin d$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a\ \sin\tfrac{1}{2}d\ \cos\tfrac{1}{2}a\ \cos\tfrac{1}{2}d\ ;$$

so erhält man $\sin\frac{1}{2}A^2$

$$= \frac{X + 2\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c\ \cos\frac{1}{2}(a-d)}{4R\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}d}\,.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist =

$$\begin{aligned} &\sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2 \\ &+ 2\sin\tfrac{1}{2}b\ \sin\tfrac{1}{2}c\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d) \\ &= \cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}b\ \sin\tfrac{1}{2}c\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d) \\ &\quad - (1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2)\,. \end{aligned}$$

Aber $1 - \sin\frac{1}{2}b^2 - \sin\frac{1}{2}c^2$

$$\begin{aligned} &= 1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2 \\ &\quad + \sin\tfrac{1}{2}b^2\ \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2\ \sin\tfrac{1}{2}c^2 \\ &= (1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2)(1 - \sin\tfrac{1}{2}c^2) \\ &\quad - \sin\tfrac{1}{2}b^2\ \sin\tfrac{1}{2}c^2 \\ &= \cos\tfrac{1}{2}b^2\ \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2\ \sin\tfrac{1}{2}c^2\,. \end{aligned}$$

Folglich obiger Zähler

$$\begin{aligned} &= \{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \sin\tfrac{1}{2}b\ \sin\tfrac{1}{2}c^2\}^2 \\ &\quad - \cos\tfrac{1}{2}b^2\ \cos\tfrac{1}{2}c^2 \\ &= \{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\} \\ &\quad .\{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\} \\ &= 4\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\ \cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d) \\ &\quad .\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\ \sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\,. \end{aligned}$$

Folglich, wenn man dieses Product durch 4S bezeichnet:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{S}{R\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}d}\,.$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung erhält man, wenn man das Product

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d)$$
$$\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)$$

$=$ T setzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{T}{R\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}d}.$$

Setzt man nun respective c, d, a, b für a, b, c, d, und bezeichnet die Producte

$$\cos\tfrac{1}{4}(-a-b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)$$
$$\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)$$

und

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)$$
$$\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)$$

durch S′, T′; so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{S'}{R\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},\quad \cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{T'}{R\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Bezeichnet man nun ferner die Producte

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)$$
$$\cdot\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d)$$

und

$$\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)$$
$$\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)$$

durch Σ, Σ'; die Summe

$$\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)$$
$$+\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)$$

durch Δ, so wie die Differenz

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d)$$
$$-\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)$$

durch Δ', und das Product

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d$$

durch L; so erhält man nach sehr bekannten goniometrischen Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta'}{R}\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}}.$$

Es ist aber (Goniometrie. 27.):

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\}$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R,$$

$$\begin{aligned}\Delta' = & \tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\} \\ & - \tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\} \\ = & - \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c = - R .\end{aligned}$$

Folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}} .$$

Σ, Σ', L sind aber offenbar symmetrische Functionen von a, b, c, d, wobei zu bemerken, daß der Cosinus sich nicht ändert, wenn man den Winkel negativ nimmt. Daher ist auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+D) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(B+D) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}} .$$

Also hat man

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(A+C) &= \sin\tfrac{1}{2}(B+D) , \\ \cos\tfrac{1}{2}(A+C) &= \cos\tfrac{1}{2}(B+D) .\end{aligned}$$

Demnach auch

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+C) = \tang\tfrac{1}{2}(B+D) ,$$

woraus, da offenbar kein Winkel des Vierecks $> 180^0$, also weder $A + C$, noch $B + D > 360^0$, oder weder $\frac{1}{2}(A + C)$, noch $\frac{1}{2}(B + D) > 180^0$ ist, sogleich folgt, daß $A + C = B + D$. Also sind in jedem sphärischen, in einen kleinern Kugelkreis beschriebenen, Vierecke die Summen der Gegenwinkel einander gleich. M. s. eine Abhandlung von Lexell, welchem der Satz anzugehören scheint, in den Act. Petrop. 1782., und von Guénau d'Aumont in den Annales de Math. T. XII. 1822. über diesen Gegenstand. Letzterer erwähnt Lexells mit keinem Worte.

12. Setzt man $a + b + c + d = 2s$ und $s - d = s'$; so erhält man nach dem Vorhergehenden für $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\tang\frac{1}{2}A$ leicht folgende Ausdrücke:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}},$$

mittelst welcher sich also jeder Winkel des eingeschriebenen sphärischen Vierecks durch die vier Seiten finden läßt.

13. Nimmt man den sphärischen Octanten als Flächen-, den rechten Winkel als Winkel-Einheit; so folgt, wenn man die Fläche des Vierecks durch F bezeichnet, aus Trigonometrie (91.) leicht, daß

$$F = A + B + C + D - 4,$$

wobei man sich nur das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt denken muß. Da aber (11.) $A + C = B + D$ ist; so ist $A + B + C + D = 2(A + C)$, also

$$F = 2(A + C) - 4, \quad \tfrac{1}{4}F = \tfrac{1}{2}(A + C) - 1.$$

Folglich $\sin\frac{1}{4}F = -\cos\frac{1}{2}(A + C)$, $\cos\frac{1}{4}F = \sin\frac{1}{2}(A + C)$, woraus

$$\sin\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma'}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}}$$

$$\cos\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}d}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma'}{\Sigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(s-a)\,\sin\frac{1}{2}(s-b)\,\sin\frac{1}{2}(s-c)\,\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}s\,\cos\frac{1}{2}(s'-a)\,\cos\frac{1}{2}(s'-b)\,\cos\frac{1}{2}(s'-c)}}.$$

Für $d = o$ wird $s' = s$, und die Formel geht offenbar in die Trigonometrie (99.) gefundene Formel für den Inhalt des sphärischen Dreiecks über, so daß also diese, von L. Huilier gefundene, Formel sich auch schon aus der Abhandlung Lexells (11.) ergiebt, und also eigentlich Letzterem angehört. M. vergl. auch Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie. Th. VI. 1818. S. 327.

14. Das eingeschriebene ebene Viereck hat außer der Gleichheit der Summen der Gegenwinkel noch mehrere andere merkwürdige Eigenschaften, worüber wir noch Einiges mittheilen.

Wenn man die äußern oder innern Winkel irgend eines Vierecks halbirt; so schließen die halbirenden Linien ein Viereck ein, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Da die Summe der äußern Winkel 4R beträgt (Vieleck.

4.); so ist (Fig. 141.) $x + y + x' + y' = 2R$. Aber $x + y + x' + y' + B' + D' = 4R$. Also $B' + D' = 2R$, und folglich auch $A' + C' = 2R$. Die Summe der innern Winkel eines Vierecks beträgt ebenfalls 4R. Also ist (Fig. 142.) $x'' + y'' + x''' + y''' = 2R$. Aber $x'' + y'' + x''' + y''' + A'' + C'' = 4R$. Also $A'' + C'' = 2R = B'' + D''$. Die Seiten der Vierecke $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$ (Fig. 142.) stehen auf einander senkrecht. Denn es ist offenbar $x' + y''$ (Fig. 142.) $= \frac{1}{2} . 2R = R$. Auch ist augenblicklich klar, daß jede Spitze der Vierecke $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ von je drei Seiten des Vierecks ABCD gleich weit entfernt ist.

15. Daß in einem nach den Seiten centrischen Vierecke die Summen der Gegenseiten gleich sind, fällt sogleich in die Augen. Umgekehrt kann man aber auch behaupten, daß sich in jedes Viereck ABCD (Fig. 143.), in welchem die Summen der Gegenseiten gleich sind, ein Kreis beschreiben läßt. Halbirt man die Winkel bei C, D; so ist klar, daß die von dem Durchschnittspunkte H der halbirenden Linien auf die Seiten gefällten Perpendikel HE, HF, HG einander gleich sind, und daß $CE = CF$, $GD = FD$, $CE + GD = CD$. Also nach der Voraussetzung auch $BC + AD - CE - GD = BE + AG = AB + CD - CD = AB$. Sey nun HK senkrecht auf AB, und $HK \gtrless HE$, $HK \gtrless HG$, wobei zu bemerken, daß $HE = HG$. Also auch $HK^2 \gtrless HE^2$, $BH^2 - HK^2 \lesseqgtr BH^2 - HE^2$, $BK^2 \lesseqgtr BE^2$, $BK \lesseqgtr BE$, und eben so $AK \lesseqgtr AG$. Also $BK + AK \lesseqgtr BE + AG$, $AB \lesseqgtr BE + AG$, da doch $AB = BE + AG$. Also muß $HK = HE = HG = HF$ seyn.

16. Noch einen der merkwürdigsten Sätze vom Viereck wollen wir nach einer Methode beweisen, welche Poncelet mit ausgezeichnetem Erfolg in seinem trefflichen Werke: Traité des propriétés projectives des figures. Paris. 1822. auf viele geometrische Untersuchungen angewandt hat, um zugleich bei dieser Gelegenheit von dieser Methode einen Begriff zu geben.

17. Für eine gewisse Ebene als Projectionsebene und einen Punkt als Centrum der Projection versteht man unter der Projection einer Figur die von den Durchschnittspunkten der von dem Centrum der Projection nach allen Punkten in dem Umfange der gegebenen Figur gezogenen geraden Linien mit der Projectionsebene auf derselben gebildete Figur.

18. Wenn zwei oder mehrere gerade Linien AB, A′B′, u. s. f. sich in einem Punkte P schneiden; so läßt sich immer eine Ebene und ein Centrum der Projection finden, für welche die Projectionen aller gegebenen Linien einander parallel sind. Nimmt man nämlich irgend einen Punkt P, welcher in keiner der Ebenen liegt, in welchen je zwei der gegebenen Linien liegen, zieht PP, und nimmt die Projectionsebene mit dieser Linie parallel; so sind die Durchschnitte der Ebenen PABP, PA′B′P, u. s. f. mit der Projectionsebene, d. i. die Projectionen der gegebenen Linien, offenbar alle mit PP, folglich unter einander parallel.

19. Sind umgekehrt in irgend einem Falle die Projectionen einiger geraden Linien unter einander parallel; so müssen diese geraden Linien sich in einem Punkte schneiden, oder einander parallel seyn, d. i. in unendlicher Entfernung zusammenlaufen. Die gegebenen Linien seyen AB, A′B′, A″B″, A‴B‴, u. s. f., und ab, a′b′, a″b″, a‴b‴, u. s. f. ihre Projectionen. Das Centrum der Projection sey P. Irgend zwei der gegebenen Linien, z. B. AB und A′B′, mögen sich in K schneiden; so liegen ab, a′b′ in den Ebenen PABK, PA′B′K, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt PK ist, und ab, a′b′ liegen selbst in einer Ebene, der Projectionsebene. Schnitte nun diese Ebene die PK in einem gewissen Punkte; so müßten offenbar auch ab, a′b′ in diesem Punkte zusammenlaufen, da sie doch parallel seyn sollen. Also muß die Ebene der Linien ab, a′b′, und folglich diese Linien selbst, mit PK parallel seyn. K kann hierbei auch unendlich weit entfernt gedacht werden. Wäre nun K′ der Durchschnitt von A′B′, A″B″; so sind wie vorher a′b′, a″b″ der Linie

PK′ parallel. Aber a′b′ kann nur den beiden Linien PK, PK′ parallel seyn, wenn entweder K und K′ zusammenfallen, oder beide unendlich weit entfernt sind, d. i. wenn AB, A′B′, A″B″ sich in einem Punkte schneiden, oder unter einander parallel sind. Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht.

20. Sind die Projectionen der Linien AB, A′B′ und CD, C′D′ (Fig. 144.) einander parallel; so zeigt der vorhergehende Beweis, daß die Projectionsebene den Linien PK und PL, also der Ebene PKL parallel ist. Nimmt man nun in KL noch irgend einen Punkt M; so ist die Projectionsebene also auch der Linie PM parallel, und folglich sind auch die Projectionen jeder zwei in M, d. i. in irgend einem Punkte von KL, sich schneidenden geraden Linien einander parallel (18.).

21. Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Projectionen der Linien AB, A′B′; CD, C′D′; EF, E′F′ einander parallel sind, die Punkte K, L, M in einer geraden Linie liegen. Schneide nämlich KL die Ebene FEP in irgend einem Punkte M′. In dieser Ebene ziehe man MM′E″, und willkührlich im Raume die Linie M′E‴; so sind die Projectionen f″e″, f‴e‴ einander parallel (20.). Die Projectionen von FE und F″E″ fallen aber offenbar zusammen. Also sind auch fe, f‴e‴ einander parallel, so wie nach der Voraussetzung auch fe, f′e′. Folglich sind fe, f′e′, f‴e‴ einander parallel, und FE, F′E′, F‴E‴ schneiden sich demnach in einem Punkte (19.), d. i. M und M′ müssen zusammenfallen.

22. Sind demnach die Projectionen der Linien AB, 𝔄𝔅; A′B′, 𝔄′𝔅′; A″B″, 𝔄″𝔅″; u. s. f. einander parallel; so müssen je drei ihrer Durchschnittspunkte, also alle Durchschnittspunkte, in einer geraden Linie liegen.

23. Hat man nun irgend ein Viereck ABCD (Fig. 145.), dessen Seiten sich in E, F schneiden; so kann leicht ein Centrum und eine Ebene gefunden werden, auf welcher die Projection des Vierecks ein Parallelogramm ist. Den Mittelpunkt der Projection P nehme man willkührlich, und die Projectionsebene parallel mit PEF; so

sind die Projectionen ab, cd und ac, bd, wenn wir die Projectionen immer durch die entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen, einander parallel (18.), also abcd ein Parallelogramm.

24. Wenn die in B willkührlich getheilte Linie AC (Fig. 146.) gegeben ist; so läßt sich immer ein Punkt P finden, für welchen die Winkel PAC, BPC einander gleich sind. Man errichte (Fig. 147.) auf AC durch A das Perpendikel AD, halbire BC in E, errichte durch E auf AC ein Perpendikel, und schneide dasselbe aus B mit dem Radius AE in F, welches offenbar immer möglich ist. Beschreibt man nun aus F mit AE als Radius einen Kreis; so wird dieser AD in G berühren, und durch B, C gehen; auch wird der über BC liegende Abschnitt immer der größere, und folglich der in ihm enthaltene Winkel x ein spitzer seyn. Trägt man diesen Winkel an AC an; so muß AP den Kreis immer in P schneiden, da $x < 90^o$ ist, und es ist $x = PAC = BPC$.

25. Sey nun ein in einen Kreis beschriebenes Viereck gegeben; so läßt sich immer eine Ebene finden, auf welcher die Projection der Figur ein Kreis und ein eingeschriebenes Rechteck ist. Von O (Fig. 148.) fälle man auf FE das Perpendikel M'MN, und bestimme P so, daß $PM'N = NPM$ ist (24.). Denkt man sich nun die Ebene des Dreiecks PM'M auf der Ebene des gegebenen Kreises über MM' senkrecht, nimmt P als Mittelpunkt der Projection an, beschreibt mit P als Spitze und dem gegebenen Kreise als Grundfläche einen Kegel, und schneidet denselben durch eine mit PFE parallele Ebene; so ist das Verlangte geschehen. Da nämlich, wenn mm' der Durchschnitt der Projectionsebene mit der Ebene des Dreiecks PM'M ist, $x = y = z$ ist; so ist der Kegelschnitt ein Wechselschnitt. Also ein Kreis (Kegel. 8.). Die Projection des Vierecks ist ein in diesen Kreis beschriebenes Parallelogramm (23.). Folglich ein Rechteck.

26. Sehr leicht erhellet nun, daß, wenn abcd (Fig. 149.) ein Rechteck ist, das umschriebene Viereck a'b'c'd' ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen beider Pa-

rallelogramme sich im Mittelpunkte des Kreises durchschneiden. Denn es ist $x = x'$, $y = y'$, $p = p'$, $q = q'$ (Kreis. 30.). Aber, wie leicht aus der Congruenz der Dreiecke und der Natur des Rechtecks folgt, $x' = y' = p' = q'$. Also $x = y = p = q$. Folglich sind $b'cd$, $d'ab$ zwei congruente und gleichschenklige Dreiecke. Also $ad' = bd' = cb' = db'$, so wie auf ähnliche Art $aa' = bc' = cc' = da'$. Folglich $a'b' = c'd'$, $b'c' = a'd'$, und demnach $a'b'c'd'$ ein Parallelogramm. Ist o der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Rechtecks abcd; so erhellet leicht, daß $oa = ob = oc = od$, also o der Mittelpunkt des Kreises ist. Zieht man $b'o$, $d'o$; so sind, wegen $b'd = b'c$, $od = oc$ und $ad' = bd'$, $oa = ob$, die Linien $b'o$, $d'o$ auf cd, ab senkrecht, also beide mit bc parallel, und fallen folglich in eine gerade Linie zusammen. Eben so $a'o$ und $c'o$.

27. Sey nun ABCD (Fig. 150.) ein eingeschriebenes, und $A'B'C'D'$ das entsprechende umgeschriebene Viereck. Man denke sich einen Kegel, dessen Spitze P ist, und eine Projectionsebene von der Beschaffenheit, daß die Projection des gegebenen Kreises ein Kreis, die Projection von ABCD ein Rechteck abcd (Fig. 149.) (25.), also die Projection von $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm $a'b'c'd'$ ist. Da ac, bd, $a'c'$, $b'd$ sich in einem Punkte schneiden (26.); so schneiden sich die Ebenen PAC, PBD, $PA'C'$, $PB'D'$, welche alle die Punkte o, P mit einander gemein haben, in einer geraden Linie Po, folglich die Diagonalen AC, BD, $A'C'$, $B'D'$ offenbar in einem Punkte O. Die vier Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks, und eines um den Kreis beschriebenen, dessen Berührungspunkte die Spitzen jenes sind, schneiden sich also immer in einem Punkte. Da die Projectionen ad, bc, $b'd'$; ab, cd, $a'c'$ parallel sind; so schneiden sich AD, BC, $B'D'$; AB, CD, $A'C'$ in einem Punkte (19.). Da ferner ab, cd; bc, ad; $a'b'$, $c'd'$; $b'c'$, $a'd'$ einander parallel sind; so müssen die vier Durchschnittspunkte der Gegenseiten der beiden Vierecke in einer geraden Linie liegen (22.) (Transversale. 34.). Zöge man durch

β, δ; α, γ Berührende; so würden diese auch den Linien ab, cd, a'c'; ad, bc, b'd' parallel seyn. Folglich laufen die durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen des umgeschriebenen Vierecks (Fig. 150.) mit dem Kreise gezogenen Berührenden mit der andern Diagonale des umgeschriebenen Vierecks und den gleichliegenden Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks in einem Punkte zusammen (19.).

Da man, wie aus der Entstehung der Kegelschnitte sogleich folgt, jeden Kegelschnitt als Projection eines Kreises betrachten kann; so gilt alles Vorhergehende auch für jeden Kegelschnitt, in und um welchen auf die obige Art Vierecke beschrieben sind.

28. Poncelet hat diese Methode zu großer Allgemeinheit erhoben. Wie fruchtbar sie ist, mögen noch folgende Sätze zeigen. Man habe z. B. das eingeschriebene Sechseck ABCDEF (Fig. 39.), dessen Gegenseiten sich in c, a, b schneiden. Man nehme P so an, daß, wenn man die Projectionsebene mit Pca parallel legt, die Projection des gegebenen Kreises ein Kreis, und in der Projection a'b'c'd'e'f' (Fig. 151.) des Sechsecks die Seiten f'e', b'c' und e'd', a'b' einander parallel werden (18. 25.). Daher ist $x = y$, Bog. b'c' + Bog. c'd' = Bog. e'f' + Bog. a'f'. Aber auch $v = w$, Bog. a'f' + Bog. a'b' = Bog. e'd' + Bog. c'd'. Addirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so wird Bog. b'c' + Bog. a'b' = Bog. e'f' + Bog. e'd', $p = q$, c'd' parallel a'f'. Folglich sind auch die Projectionen von CD, AF (Fig. 39.) einander parallel. Also liegen c, a, b (Fig. 39.) in einer geraden Linie (22.). Ein anderer einfacher Beweis des merkwürdigen Hexagrammum mysticum (Transversale. 35.).

29. Sind (Fig. 152.) von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C sechs Berührende an einen Kreis gezogen; so schneiden sich m'm'', n'n'', p'p'' in einem Punkte. Man denke sich, welches nach dem Obigen immer zulässig ist, einen Kegel mit der Spitze P und eine der PABC parallele Ebene, so daß die Projection unserer

Figur ein Kreis wird; so sind die Projectionen der Linien Am′, Am″; Bn′, Bn″; Cp′, Cp″ einander parallel (18.), und berühren die Projection des gegebenen Kreises. Also gehen die Projectionen der Linien m′m″, n′n″, p′p″ alle durch den Mittelpunkt der Projection des gegebenen Kreises, und schneiden sich folglich, so wie demnach auch die Linien m′m″, n′n″, p′p″ selbst in einem Punkte. Uebrigens erhellet, daß dieser Satz für jede Anzahl in gerader Linie liegender Punkte A, B, C, u. s. f. gilt. Der Beweis bleibt immer derselbe.

30. Beschreibt man nun durch die Spitzen eines eingeschriebenen Sechsecks ABCDEF (Fig. 153.) ein Sechseck abcdef um den Kreis; so läßt sich leicht zeigen, daß die Diagonalen des letztern sich immer in einem Punkte schneiden. Betrachtet man nämlich die Vierecke BCEF, begh; so folgt aus (27.) unmittelbar umgekehrt, daß nn′, nn″ Berührende sind. Eben so sind mm′, mm″, pp′, pp″ Berührende, wo m′, m″, p′, p″ ähnlich liegende Punkte wie n′, n″, in der Figur aber nicht verzeichnet sind. Da nun m, n, p in einer geraden Linie liegen (28.); so schneiden n′n″, m′m″, p′p″, d. i. be, ad, cf, die drei Diagonalen des umschriebenen Sechsecks, sich in einem Punkte. Der Erfinder dieses Satzes ist Brianchon (Journal de l'école polytech. T. VI. Cahier 13. Corresp. sur l'école pol. T. II. p. 387., wo auch noch manche Folgerungen vorkommen.)

31. Wenn AC, A′C′; BC, B′C′ (Fig. 154.) parallel sind, und eine solche Lage haben, daß AA′, BB′, CC′ in einem Punkte S zusammenlaufen; so sind auch AB, A′B′ parallel. Denn SA : SA′ = SC : SC′, SB : SB′ = SC : SC′. Also SA : SA′ = SB : SB′, und folglich AB, A′B′ parallel. Sind nun überhaupt zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ (Fig. 155.) so gelegt, daß die durch ihre gleichnamigen Spitzen gezogenen Linien in einem Punkte zusammenlaufen; so liegen die drei Durchschnittspunkte m, n, p von je zwei gleichnamigen Winkeln gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie. Man nehme irgend einen Mittelpunkt P der Projection an, ziehe Pm, Pn,

nehme die Projectionsebene mit Pmn parallel an; so sind die Projectionen ac, a'c'; bc, b'c' der entsprechenden Linien einander parallel (18.). Folglich nach dem Vorhergehenden auch ab, a'b'. Demnach liegen m, n, p in einer geraden Linie (22.). M. s. Desargues Traité de perspective. Paris. 1648. Servois Solutions peu connues de différens problèmes de Géom. Metz. 1804. Andere vielfache Anwendungen der Theorie der Projectionen s. m. bei Poncelet a. a. O.

Mehrere Eigenschaften des Vierecks s. m. noch in dem Art. Transversale.

Vieltheilige Größe, s. Polynomium.

Virginum regula, s. Regel. Thl. IV. S. 264.

Vierung wird bei ältern deutschen Schriftstellern zuweilen statt des jetzt gewöhnlichen Ausdrucks Quadratur gebraucht. Die Ueberschrift von Archimedes Schrift über die Quadratur der Parabel übersetzt z. B. J. C. Sturm in seiner deutschen Uebersetzung der Werke des griechischen Geometers (Archimedis Kunstbücher. Nürnberg. 1670.): „Von der Parabelvierung." Zuweilen bedeutet dieses Kunstwort aber auch überhaupt ein Viereck, wie z. B. ungleiche oder ungeschickte Vierung statt Trapezium. S. Trapezium.

Vivianische Aufgabe, s. Florentinische Aufgabe.

Vollkommene oder vollständige Zahl (n. perfectus) ist eine Zahl, welche der Summe ihrer aliquoten Theile gleich ist, wie z. B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Jenachdem eine Zahl größer oderkleiner ist, als die Summe ihrer aliquoten Theile, heißt sie eine mangelhafte (n. deficiens) oder überschießende Zahl (n. abundans); erstere auch eine unvollkommene.

Vollständige Zahlen zu finden, lehrt schon Euclides

(IX. 36.). „Nimmt man so viele von der Einheit an „stetig verdoppelte Zahlen, bis deren Summe eine Prim„zahl ist; so ist das Product aus dieser Summe in die „letzte jener Zahlen eine vollkommene Zahl," oder in unserer arithmetischen Sprache: Ist die Summe der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, ... 2^n, welche $= 2^{n+1} - 1$, eine Primzahl; so ist $(2^{n+1} - 1).2^n$ eine vollkommene Zahl. Da nämlich nach der Annahme $2^{n+1} - 1$ und auch 2 eine Primzahl ist; so ist (Theile einer Zahl. 15.) die Summe der Theiler des Products $(2^{n+1} - 1).2^n$, die Einheit und diese Zahl selbst mit eingeschlossen,

$$= \frac{(2^{n+1}-1)^2 - 1}{2^{n+1}-1-1} \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$= \frac{(2^{n+1}-1-1)(2^{n+1}-1+1)}{2^{n+1}-1-1} \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

$$= 2^{n+1}.(2^{n+1}-1).$$

Folglich die Summe der aliquoten Theile, wobei die Zahl selbst ausgeschlossen werden muß,

$$= 2^{n+1}.(2^{n+1}-1) - 2^n.(2^{n+1}-1) = 2^n.(2^{n+1}-1),$$

der Zahl selbst gleich, wie es seyn muß. Vielleicht giebt es noch andere Formen vollkommener Zahlen. Aus der Euclidischen Form ergeben sich folgende:

$(2^2 - 1).2 = 6$
$(2^3 - 1).2^2 = 28$
$(2^5 - 1).2^4 = 496$
$(2^7 - 1).2^6 = 8128$
$(2^{13} - 1).2^{12} = 33550336$
$(2^{17} - 1).2^{16} = 8589869056$
$(2^{19} - 1).2^{18} = 137438691328$
$(2^{31} - 1).2^{30} = 2305843008139952128$.

Der Pater Mersenne, welcher zur Entdeckung der Eigenschaften der Zahlen vielen Scharfsinn besaß, giebt (Cogitata phys. mathem. Praef. §. XIX.) noch $(2^{67} - 1).2^{66}$, $(2^{127} - 1).2^{126}$, $(2^{257} - 1).2^{256}$ als vollkommene Zahlen an. Ist $2^{41} - 1$ eine Primzahl, wie sie es nach Eulers und W. Krafts Rechnungen seyn soll; so ist auch $(2^{41} - 1).2^{40}$ eine vollkommene Zahl. Oft sind von Schriftstellern Zahlen für vollkom-

mene gehalten worden, die es nicht sind. Heilbronner (Hist. Mathes. p. 755.) giebt 130816 und 2096128 als vollkommene Zahlen an. Die erste ist $= (2^9 - 1) . 2^8 = 256 . 511$, die andere $= (2^{11} - 1) . 2^{10} = 1024 . 2047$. Aber weder $511 = 7 . 73$, noch $2047 = 23 . 89$ ist eine Primzahl. Auch schon W. Kraft (Comm. Petrop. T. VII. p. 7.) hat diese, und mehrere andere, Zahlen als falsch bezeichnet. M. s. auch Grüsons enthüllte Zaubereien und Geheimnisse der Arithm. Berlin. 1796. Thl. I. S. 86. M. G. Hansch (Theoria Arithmetices novis a se inventis aucta. Vindob. 1739.) macht den Fehlschluß, daß alle Zahlen von der Form $2^{n+1} - 1$ Primzahlen seyen, wenn nur $n + 1$ eine Primzahl ist, welches schon für $n = 10$ nicht mehr eintrifft, da $2^{11} - 1 = 2047 = 23 . 89$ ist, ein Irrthum, den schon Winsheim (De num. perf. Nov. Comm. Petrop. T. II. p. 68.) widerlegt hat. Auch der Herausgeber der zweiten Ausgabe von Wolfs mathem. Lexicon und Petrus Bunge (Numerorum mysteria. Lut. Paris. 1618.) haben falsche vollkommene Zahlen. Noch gehören hierher: Joan. Boroscii Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios de numeris perfectis. Dantisci. 1652. 4., wovon eine andere Ausgabe unter etwas anderm Titel (Arnst. 1699.) Kästner in den geom. Samml. II. S. 416. anführt. Auch in Lucas de Burgo Sancti Sepulchri summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita finden sich gleich zu Anfange Vorschriften, die vollkommenen Zahlen zu finden.

Volumen ist das Maaß des Raumes, welchen ein Körper einnimmt.

Voluta delumbata heißt zuweilen die Quadratrix. S. u. A. Heilbronner Historia Mathes. p. 154.

Voraussetzung oder Hypothesis, s. Thesis.